TRA NOTE MUSICALI E NUMERI

Facendo oscillare una corda tesa di lunghezza **λ,** , fissata alle due estremità (pizzicandola nel punto medio), si genera una oscillazione di frequenza **ν** (= lettera dell'alfabeto greco, si legge "**ni**")[1]. Tale frequenza è detta fondamentale o I° armonico. Ammettiamo che tale frequenza corrisponda alla nota DO. Se la lunghezza diventa la metà la frequenza raddoppia (quindi si tratta grandezze inversamente proporzionali tra loro). Si ottiene il seguente schema:

λ → ν→ DO 1 nota fondamentale o I° armonico

$\frac{\lambda}{2}$ **→2ν → DO 2** II° armonico (un'ottava sopra)

$\frac{\lambda}{3}$ **→ 3ν → SOL 2** III° armonico

$\frac{\lambda}{4}$ **→ 4ν → DO 3** IV° armonico (due ottave sopra la fondamentale)

$\frac{\lambda}{5}$ **→ 5ν → MI 3** V° armonico

$\frac{\lambda}{6}$ **→ 6ν → SOL 3** VI° armonico, e così via.

In questo modo, data una nota fondamentale, si trovano gli armonici. I diversi strumenti suonano gli armonici con diversa intensità, da cui si riconosce il timbro di uno strumento.

Per trovare le note mancanti (intermedie) si può procedere così: dimezzando una frequenza si ottiene la stessa nota un'ottava più bassa. Quindi, ad esempio:

SOL 1 → $\frac{3}{2}\nu$

MI 2 → $\frac{5}{2}\nu$

MI1→ $\frac{5}{4}\nu$, etc.

Nasce così la cosiddetta scala naturale[2]. Ponendo la frequenza del DO fondamentale pari a 1 si ottiene:

DO → 1 RE → 9/8 (1,125) MI → 5/4 (1,25) FA → 4/3 (1,33..)

SOL → 3/2 (1,5) LA → 5/3 (1,66..) SI → 15/8 (1,875) DO → 2.

---

[1] E' il fenomeno delle onde stazionarie. La frequenza rappresenta il numero di oscillazioni in un secondo e si esprime in Hz (hertz)

[2] Un' altra scala (detta pitagorica) si ottiene partendo da DO e salendo per intervalli di 5ª, moltiplicando ogni volta la frequenza per 3/2. Alcune note di questa scala differiscono lievemente dalla scala naturale.

I rapporti tra le frequenza delle note successive non sono quindi costanti. Infatti, ad esempio:

$RE/_{DO} = \frac{9/8}{1}$ = 1,125   (un “tono”) $MI/_{RE} = \frac{5/4}{9/8} = \frac{10}{9}$ = 1,111..   (un tono)

$FA/_{MI} = \frac{4/3}{5/4} = \frac{16}{15}$ = 1,066.. (questo intervallo viene detto “semitono”).

Per semplificare l’accordatura di alcuni strumenti (il pianoforte in particolare) si è deciso di passare ad una nuova scala, la <u>scala temperata</u>, dividendo l’ottava in dodici parti uguali (12 semitoni).

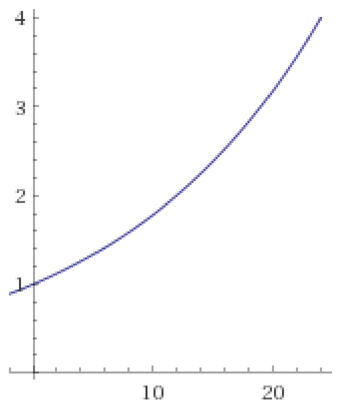
Se x è un semitono (rapporto tra le frequenze di due note successive), bisogna risolvere l’equazione:

$x^{12} = 2$ ovvero: $x = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}06$. Si ottiene così:

DO → 1   DO# → 1,06   RE → 1,12   RE# → 1,19   MI → 1,26   FA → 1,33   FA# → 1,42
SOL → 1,49   SOL# → 1,59   LA → 1,68   LA# → 1,79   SI → 1,88   DO→ 2.

Matematicamente si dice che le varie frequenze dei semitoni formano una <u>progressione geometrica</u>[3]. Facendo una rappresentazione cartesiana delle frequenze (in ordinata) e dei semitoni (in ascisse) si ottiene il seguente grafico:

(sull’ asse x ci sono i semitoni: x=0 è DO;   x=1 è DO#;   x=2 è RE;   x=3 è RE#;   x=4 è MI, etc.)
(x ∈ N)



Abbiamo dunque la rappresentazione cartesiana della scala temperata (avendo posto come sempre la frequenza del DO pari a 1)[4]. Si tratta di una curva esponenziale in quanto la funzione utilizzata è:

$$y = \left(\sqrt[12]{2}\right)^{x} \qquad \text{ossia:} \quad y = 2^{\frac{x}{12}}.$$

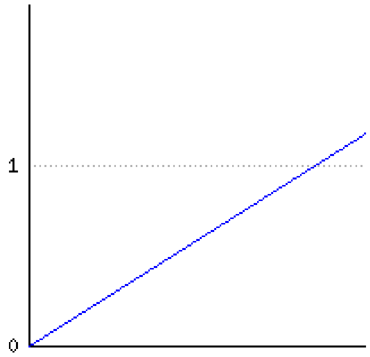
---

[3] Si chiama progressione geometrica una successione di numeri per i quali è costante il rapporto tra ogni termine ed il precedente. Tale rapporto costante si chiama ragione. Da una progressione geometrica si ottiene una funzione esponenziale $y=a^x$ dove a è la ragione.

[4] In realtà DO ha la frequenza ν = 262 Hz e LA ha la frequenza ν = 440 Hz (nota su cui si basano gli accordatori).

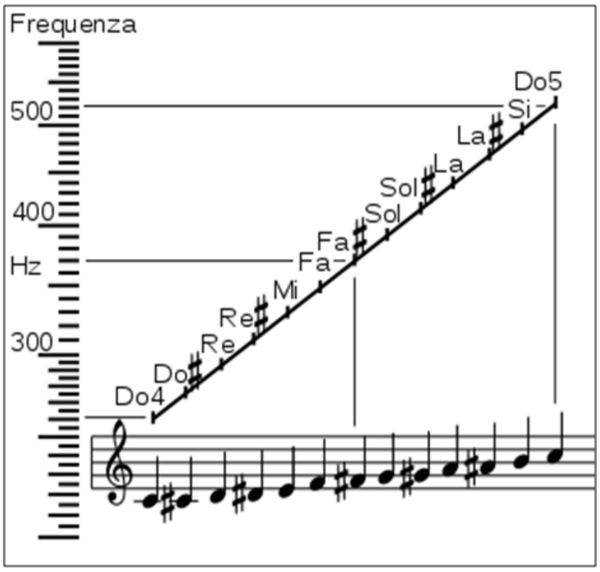
Può essere opportuno passare ad una forma logaritmica[5]:

$log_2 y \ = log_2 \ 2^{\frac{x}{12}} = \frac{x}{12}$. Si ottiene così l'equazione di una retta rappresentando in ordinata il logaritmo delle frequenze $log_2 \, y$ e in ascissa (come prima) i semitoni:



Questo grafico assomiglia molto di più alla disposizione delle note su un pentagramma! In effetti il pentagramma è una rappresentazione logaritmica delle frequenze delle note!

Infine, passando alle frequenze reali:



(si noti che la scala delle frequenze – asse y – è logaritmica!).

[5] Dalla definizione di logaritmo: il logaritmo in base 2 di un numero (argomento) è l'esponente che bisogna attribuire a 2 per ottenere l'argomento.