Trasformate di Laplace e risoluzione di sistemi lineari di Equazioni Differenziali Ordinarie

Flaviano Battelli*

1 Trasformate di Laplace di funzioni a valori in $\mathbb{R}$.

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice un *originale* o anche $\mathcal{L}$-*trasformabile*, se valgono le seguenti proprietà:

i) $f(t) = 0$ per ogni $t < 0$,

ii) comunque si scelgano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esistono gli integrali (eventualmente impropri) $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$

iii) esistono $\bar{t} \geq 0$, $c > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ (non necessariamente > 0) tali che, per ogni $t \geq \bar{t}$ si ha

$$|f(t)| \leq ce^{\gamma t}.$$

La condizione ii) si enuncia anche dicendo che $f(t)$ è *localmente assolutamente integrabile*. Si osservi che, se $f(t)$ è integrabile alla Riemann in $[a, b]$ allora anche $|f(t)|$ lo è (integrabilità del valore assoluto), ma se gli integrali sono impropri allora il risultato è falso. D'altronde la funzione (di Dirichlet)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in \mathbb{Q} \text{ e } 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & \text{se } t \notin \mathbb{Q} 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{se } t > 1 \text{ oppure } t < 0 \end{cases}$$

non è integrabile in $[0, 1]$ ma $|f(t)|$ lo è. È per questo che si richiede l'integrabilità in $[a, b]$ sia di $f(t)$ che di $|f(t)|$.

*Dipartimento di Scienze Matematiche, Università di Ancona, Via Brecce Bianche 1, 60131 Ancona - Italy.

Talvolta accade che $f(x)$ non sia definita in qualche punto x_0. In questo caso possiamo porre, in tali punti, $f(x_0) = 0$ e verificare che le condizioni i)–iii) siano soddisfatte dalla funzione così estesa. È anche chiaro che la verifica delle i)–iii) non dipende da come si estende f nei punti in cui non è definita.

La condizione iii) implica che per ogni numero reale $s > \gamma$, la funzione $|f(t)|e^{-st}$ è integrabile in senso improprio in $\mathbb{R}$. Infatti, presi $a < 0 < \bar{t} < b$ si ha, grazie all'ipotesi i):

$$\int_a^b |f(t)|e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{\bar{t}} |f(t)|e^{-st}\mathrm{d}t + \int_{\bar{t}}^b |f(t)|e^{-st}\mathrm{d}t.$$

Il primo integrale a destra esiste finito grazie al punto ii) e al fatto che e^{-st} è limitata e integrabile su $[a, b]$ qualunque sia $s \in \mathbb{R}$ (si roicordi che il prodotto di una funzioni integrabile in senso improprio con una limitata e integrabile è integrabile in senso improprio in $[a, b]$. Per quanto riguarda il secondo integrale si ha, grazie a iii)

$$\int_{\bar{t}}^b |f(t)|e^{-st}\mathrm{d}t \le c\int_{\bar{t}}^b e^{-(s-\gamma)t}\mathrm{d}t = \frac{c}{s-\gamma}[e^{-(s-\gamma)\bar{t}} - e^{-(s-\gamma)b}] \to \frac{ce^{-(s-\gamma)\bar{t}}}{s-\gamma}$$

quando $b \to +\infty$.

Osserviamo anche che, se $\gamma \in \mathbb{R}$ soddisfa la condizione iii) per qualche $c > 0$ e $\bar{t} > 0$, e $\gamma' > \gamma$ allora anche γ' soddisfa la stessa condizione. Ciò segue da $e^{\gamma t} \le e^{\gamma' t}$ per ogni $t \ge \bar{t} \ge 0$. Perciò l'insieme

$$I_f := \{\gamma \in \mathbb{R} \mid \gamma \text{ soddisfa la condizione iii) per qualche } c > 0 \text{ e } \bar{t} > 0\}$$

è una semiretta. Se $f : \mathbb{R} \setminus S \to \mathbb{R}$ è un originale si definisce ascissa di convergenza di f il numero reale

$$\sigma_f := \inf\{\gamma \in \mathbb{R} \mid \gamma \text{ soddisfa la condizione iii) per qualche } c > 0 \text{ e } \bar{t} > 0\}.$$

Quindi se $s > \sigma_f$ esiste $\gamma \in I_f$ tale che $\sigma_f < \gamma < s$. Pertanto, per quanto visto in precedenza, la funzione $f(t)e^{-st}$ è (assolutamente) integrabile in $[0, \infty)$. Per questo motivo σ_f si dice ascissa di convergenza di f.

Proviamo alcune proprietà dell'ascissa di convergenza.

Se $f(t)$ e $g(t)$ sono due originali, allora $f(t)+g(t)$ è un originale, inoltre se $f(t)g(t)$ è localmente assolutamente integrabile anche $f(t)g(t)$ è un originale e si ha

a) $\sigma_{f+g} \le \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$;

b) $\sigma_{fg} \le \sigma_f + \sigma_g$;

c) se esiste $k > 0$ tale che $|f(t)| \leq |g(t)|$ per ogni $t \geq k$, allora $\sigma_f \leq \sigma_g$.

d) $\sigma_{tf(t)} = \sigma_f$

Infatti, se $\gamma > \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$, esistono $\bar{t}_f > 0$, $\bar{t}_g > 0$, $c_f > 0$, $c_g > 0$ tali che $|f(t)|e^{-\gamma t} \leq c_f$ per ogni $t \geq \bar{t}_f$ e $|g(t)|e^{-\gamma t} \leq c_g$ per ogni $t \geq \bar{t}_g$. Allora per ogni $t \geq \max\{\bar{t}_f, \bar{t}_g\}$ si ha

$$|f(t) + g(t)|e^{-\gamma t} \leq |f(t)|e^{-\gamma t} + |g(t)|e^{-\gamma t} \leq c_f + c_g$$

da cui $|f(t) + g(t)| \leq (c_f + c_g)e^{\gamma t}$. Di conseguenza $\gamma \geq \sigma_{f+g}$. Ossia: se $\gamma > \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$ allora $\gamma \geq \sigma_{f+g}$. Quindi non può aversi $\sigma_{f+g} > \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$ da cui segue a). La dimostrazione di b) è simile. Con le notazioni precedenti sia $\gamma > \sigma_f + \sigma_g$ e scegliamo $\gamma_f > \sigma_f$, $\gamma_g > \sigma_g$ in modo tale che $\gamma_f + \gamma_g < \gamma$. Allora, se $t \geq \max\{\bar{t}_f, \bar{t}_g\}$ si ha

$$|f(t)g(t)|e^{-\gamma t} \leq |f(t)|e^{-\gamma_f t}\,|g(t)|e^{-\gamma_g t} \leq c_f c_g$$

da cui segue $\gamma \geq \sigma_{fg}$ e quindi b) si ottiene facilmente. La proprietà c) è ovvia (lasciamo la facile dimostrazione al lettore). Infine proviamo d). Dato che per $t \geq 1$ si ha $|f(t)| \leq |tf(t)|$ dal punto c) si ricava subito $\sigma_{f(t)} \leq \sigma_{tf(t)}$. D'altronde, dal punto b) si ha $\sigma_{tf(t)} \leq \sigma_t + \sigma_f$. Ma per ogni $\alpha > 0$ e $t \geq 0$ si ha $|t| \leq \frac{e^{\alpha t}}{e\alpha}$ e quindi $\alpha \in I_t$ per ogni $\alpha > 0$. D'altronde $0 \notin I_t$ e quindi $\sigma_t = 0$. Pertanto si ha anche $\sigma_{tf(t)} \leq \sigma_{f(t)}$, da cui d) segue subito.

Si definisce *Trasformata di Laplace* (in breve TdL) di f la funzione, definita per $s > \sigma_f$,

$$\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

La TdL è ben definita perché l'integrabilità di $|f(t)|e^{-st}$ in $[0, \infty)$ implica quella di $f(t)e^{-st}$ nella stessa semiretta ed ha le seguenti importanti proprietà:

1) La TdL è lineare ossia se $f(t)$ e $g(t)$ sono due originali e α, β sono due numeri reali si ha

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha\mathcal{L}[f](s) + \beta\mathcal{L}[g](s).$$

2) $\mathcal{L}[f](s)$ è derivabile e si ha $\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s)$.

3) Posto $f_+(t-\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \alpha \\ f(t-\alpha) & \text{se } t \geq \alpha \end{cases}$ allora $\mathcal{L}[f_+(t-\alpha)](s) = e^{-s\alpha}\mathcal{L}[f](s)$.

4) se $f(t)$ è un originale con ascissa di convergenza σ_f e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $f(t)e^{\alpha t}$ ha ascissa di convergenza uguale a $\sigma_f + \alpha$ e vale l'uguaglianza:

$$\mathcal{L}[f(t)e^{-\alpha t}](s) = \mathcal{L}[f](s + \alpha).$$

5) Se $f(t)$ e $g(t)$ sono due originali, si definisce *convoluzione* di f e g la funzione che vale 0 se $t \leq 0$ mentre per $t > 0$ vale

$$f * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Allora $f * g$ è un originale, $\sigma_{f*g} \leq \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$ e si ha:

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s).$$

6) se $f'(t)$ è un originale allora

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0^+).$$

dove $f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t)$.

2 Elementi di Algebra lineare e TdL di funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$.

Se $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots m}} \in \mathcal{M}^{n\times m}$ è una matrice a coefficienti reali e $x \in \mathbb{R}^m$ è il vettore

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

si definisce Ax il vettore di $\mathbb{R}^n$ (attenzione alle dimensioni!) dato da

$$Ax = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}x_j \end{pmatrix}$$

ossia la i-esima componente di Ax, $(Ax)_i$ è

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j.$$

Questo tipo di prodotto tra una matrice e un vettore si chiama *righe per colonne* perchè si ottiene *moltiplicando scalarmente* la i-esima riga della matrice A per la (unica) colonna x. Più in generale se $A \in \mathcal{M}^{n\times m}$ è una matrice $n \times m$ e $B \in \mathcal{M}^{m\times q}$ è una matrice $m \times q$ si definisce prodotto di A per B la matrice $n \times q$ definita da

$$AB = [Ab_1 \quad Ab_2 \quad \dots \quad Ab_q]$$

dove $b_1, \dots, b_q$ sono le q colonne di B e $Ab_j \in \mathbb{R}^n$ indica il prodotto della matrice $n \times m$ per il vettore $b_j \in \mathbb{R}^m$. Il prodotto fra matrici, quando è definito, è associativo (ossia $(AB)C = A(BC)$, occhio alle dimensioni!), ma non è commutativo. Per esempio se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che $AB \in \mathcal{M}^{2\times 2}$ e $BA \in \mathcal{M}^{3\times 3}$. Comunque può risultare $AB \neq BA$ anche fra matrici quadrate dello stesso ordine come si vede dal seguente esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se A è una matrice quadrata $(n \times n)$ si dice che A è invertibile se esiste una matrice $B \in \mathcal{M}^{n\times n}$ tale che $AB = BA = \mathbb{I}$ dove $\mathbb{I}$ è la *matrice identità* definita da $\mathbb{I} = [c_{ij}]$ con

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

(Nota: è facile verificare, tramite la definizione di prodotto righe per colonne, che per ogni matrice quadrata si ha $A\mathbb{I} = \mathbb{I}A = A$.) È facile verificare che data una matrice quadrata (cioè $n \times n$) esiste al più una matrice B che realizza le identità $AB = BA = \mathbb{I}$. Infatti, se B_1 e B_2 fossero due tali matrici si avrebbe:

$$B_1 = B_1\mathbb{I} = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = \mathbb{I}B_2 = B_2.$$

Se A è una matrice invertibile l'unica matrice che realizza $AB = BA = \mathbb{I}$ si dice *matrice inversa* e si indica con A^{-1}. Si noti che $A^{-1} \in \mathcal{M}^{n\times n}$ e che $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}$. Si ha il seguente risultato:

Condizione necessaria e sufficiente affinché $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$ sia invertibile è che $\det A \neq 0$.

Qui, con $\det A$ si indica il *determinante* della matrice A. Questo si calcola nel modo seguente. Se $A = [a] \in \mathcal{M}^{1\times 1}$ si pone $\det A = \det[a] = a$. Se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^{2\times 2}$$

si pone $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Per induzione, se $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$ si pone

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

dove A_{ij} è la matrice che si ottiene da A *cancellandone* tutti gli elementi che appartengono alla i-esima riga o alla j-esima colonna. Lo sviluppo sopra indicato del determinante si dice sviluppato secondo la $j-$*esima colonna* in quanto nella somma si considerano solo i termini a_{ij} che appartengono alla colonna $j-$esima. Si può dimostrare che il risultato non dipende dalla colonna considerata per lo sviluppo e che vale anche

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

(sviluppo rispetto alla $i-$esima riga) e che il risultato non dipende dalla riga scelta. Per esempio se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^{3\times 3}$$

si ha, *sviluppando* rispetto alla prima colonna:

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{1+1}a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} + (-1)^{2+1}a_{21}\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \\ &+ (-1)^{3+1}a_{31}\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23}\end{pmatrix} = a_{11}[a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}] \\ &- a_{21}[a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}] + a_{31}[a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}] \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- [a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}].\end{aligned}$$

Il lettore è invitato a verificare che allo stesso risultato si perviene *sviluppando* rispetto ad un'altra colonna o anche ad una riga qualsiasi. La formula precedente è nota come regola di Sarrus e si enuncia nel modo seguente. Si ripetono le prime due colonne a destra della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{matrix},$$

si sommano i prodotti delle *diagonali discendenti* ($a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$ e $a_{13}a_{21}a_{32}$) e si sottraggono quelli delle *diagonali ascendenti* ($a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$). Il determinante di una matrice quadrata soddisfa la seguente importante proprietà (formula di Binet): se $A, B \in \mathcal{M}^{n\times n}$ si ha

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Di conseguenza si ottiene $\det(AB) = \det(BA)$, anche se, in generale, $AB \neq BA$.

Si può dimostrare che la matrice inversa di una matrice invertibile A può calcolarsi come segue. Poniamo $\tilde{A} = [\alpha_{ij}]$ dove

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ji}.$$

(si noti l'inversione degli indici). Allora

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}.$$

La matrice trasposta (ossia quella che si ottiene scambiando le righe con le colonne) di $\tilde{A} = [\alpha_{ij}]$ si dice matrice *aggiunta* di A.

Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una funzione a valori vettoriali. Si dice che x è $\mathcal{L}$-trasformabile se ogni componente di x, come funzione a valori in $\mathbb{R}$, è $\mathcal{L}$-trasformabile e si pone:

$$\mathcal{L}[x](s) = \mathcal{L}\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\right](s) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}[x_1](s) \\ \vdots \\ \mathcal{L}[x_n](s)\end{pmatrix}.$$

Se $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^m$ è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile a valori in $\mathbb{R}^m$ e $A \in \mathcal{M}^{n\times m}$ è una matrice a coefficienti reali si ha, grazie alla linearità della trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}[Ax(t)](s) = \mathcal{L}\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}x_j(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}x_j(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}\mathcal{L}[x_j](s) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}\mathcal{L}[x_j](s) \end{pmatrix} = A\mathcal{L}[x](s) \tag{1}$$

ossia le matrici a coefficienti costanti *si portano fuori* dalla TdL. Se, invece, $A = A(t) \in \mathcal{M}^{n\times m}$ è una matrice a coefficienti variabili, si definisce prodotto di convoluzione di $A(t)$ per $x(t)$ la funzione a valori in $\mathbb{R}^n$ che vale 0 per $t \leq 0$, mentre per $t > 0$ è data da:

$$[A * x](t) := \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^m \int_0^t a_{1j}(t-\tau)x_j(\tau)\mathrm{d}\tau \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^m \int_0^t a_{nj}(t-\tau)x_j(\tau)\mathrm{d}\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^m [a_{1j} * x_j](t) \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^m [a_{nj} * x_j](t) \end{pmatrix}.$$

Dato che l'integrale è lineare possiamo anche scrivere

$$[A * x](t) = \int_0^t A(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t A(u)x(t-u)\mathrm{d}u$$

dove si intende che l'integrale di una funzione a valori vettoriali si calcola componente per componente e la seconda uguaglianza si ottiene dalla sostituzione $t - \tau = u$. Consideriamo allora $\mathcal{L}[A * x](s)$, dove $A \in \mathcal{M}^{n\times m}$ è una matrice di funzioni ($A = [a_{ij}(t)]$) $\mathcal{L}$-trasformabili e $x = x(t)$ è una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile a valori in $\mathbb{R}^m$. Dalla definizione di $[A*x](t)$ segue che $[A * x](t)$ è $\mathcal{L}$-trasformabile e si ha:

$$\mathcal{L}[A * x](s) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \mathcal{L}[a_{1j} * x_j](s) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \mathcal{L}[a_{nj} * x_j](s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \mathcal{L}[a_{1j}](s)\mathcal{L}[x_j](s) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \mathcal{L}[a_{nj}]\mathcal{L}[x_j](s) \end{pmatrix}$$

e quindi possiamo scrivere

$$\mathcal{L}[A * x](s) = \mathcal{L}[A](s)\mathcal{L}[x](s) \tag{2}$$

dove si è scritto $\mathcal{L}[A](s)$ per la matrice $\mathcal{M}^{n\times m}$ definita da:

$$\mathcal{L}[A](s) = [\mathcal{L}[a_{ij}](s)]_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots m}}$$

e il prodotto a destra si esegue righe per colonne. In altre parole, se conveniamo che anche per le matrici (oltreché per i vettori) la TdL si esegue *elemento per elemento*, allora vale la (2).

3 Trasformate di Laplace e sistemi di Equazioni Differenziali Ordinarie.

Un sistema di equazioni differenziali ordinarie lineare a coefficienti costanti è un'espressione del tipo

$$\dot{x} = Ax + f(t) \tag{3}$$

dove $x, \dot{x} \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathcal{M}^{n \times n}$, e $f(t)$ è una funzione continua a valori in $\mathbb{R}^n$. Una funzione $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$ è una soluzione di (3) se le componenti sono di classe C^1 in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e per ogni $t \in I$ vale l'uguaglianza

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t). \tag{4}$$

(Ovviamente si può dare una definizione ben più generale di equazione differenziale ordinaria, ma qui ci occupiamo solo di equazioni differenziali ordinarie del tipo descritto sopra). Il problema che ci proponiamo di risolvere è quello di trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (3). Supponiamo che $f(t)$ sia definita in $[0, \infty)$ e che sia $\mathcal{L}$-trasformabile. Allora si può dimostrare che ogni soluzione di (3) è definita in $[0, \infty)$ ed è $\mathcal{L}$-trasformabile. Supponiamo allora che $x(t)$ sia una soluzione di (3) e applichiamo la trasformazione di Laplace ad entrambi i membri dell'uguaglianza. Posto $x_0 = x(0)$ (il valore della soluzione in $t = 0$) si ha

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + F(s)$$

dove $X(s) = \mathcal{L}[x](s)$ e $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$. Quindi:

$$(s\mathbb{I} - A)X(s) = [x_0 + F(s)].$$

(si ricordi che $\mathbb{I}$ è la *matrice identità*). Allora

$$X(s) = (s\mathbb{I} - A)^{-1}x_0 + (s\mathbb{I} - A)^{-1}F(s) \tag{5}$$

Indicando con $\mathcal{L}^{-1}$ l'antitrasformata di Laplace (ossia $\mathcal{L}^{-1}[X](t) = x(t)$ se e solo se $\mathcal{L}[x](s) = X(s)$) si ha:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbb{I} - A)^{-1}x_0](t) + \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbb{I} - A)^{-1}F(s)](t).$$

Scrivendo $X(s)$ in luogo di $\mathcal{L}[x](s)$ nelle (1) e (2) ed applicando la trasformazione inversa alla (1) si ottiene

$$\begin{aligned} x(t) &= \{\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbb{I} - A)^{-1}](t)\}\, x_0 + \{\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbb{I} - A)^{-1}] * \mathcal{L}^{-1}[F]\}(t) \\ &= W(t)x_0 + [W * f](t) \end{aligned}$$

dove

$$W(t) := \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbb{I} - A)^{-1}](t)$$

si dice *matrice fondamentale* del sistema lineare e

$$[W * f](t) = \int_0^t W(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Si noti che $W(t)x_0$ è la soluzione di (3) con $f(t) = 0$ ossia è la soluzione del sistema *omogeneo* tale che $x(0) = x_0$. Ciò significa che, *per ogni* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$W(0)x_0 = x_0$$

e questo può aversi se e solo se $W(0) = \mathbb{I}$. Inoltre, se $x_0 = e_j$ (il vettore di $\mathbb{R}^n$ che ha tutte le componenti $= 0$ tranne la j-esima che è $= 1$), il prodotto $W(t)e_j$ è la j-esima *colonna* di $W(t)$. In altre parole:

La j-esima colonna $w_j(t)$ di $W(t)$ è la soluzione del sistema lineare omogeneo $\dot{x} = Ax$ con la condizione iniziale $x_0 = e_j$

Scriviamo

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

e $W(t) = (w_1(t) \quad w_2(t) \quad \dots \quad w_n(t))$. Allora

$$W(t)x_0 = \sum_{j=1}^{n} x_j^0 w_j(t). \tag{6}$$

Abbiamo così ottenuto il seguente principio di sovrapposizione:

Il problema $\dot{x} = Ax$ con condizione iniziale $x(0) = x_0$ (problema di Cauchy) ha un'unica soluzione che si ottiene sovrapponendo (ossia combinando linearmente) le soluzioni di $\dot{x} = Ax$ con condizione iniziale $x(0) = e_j$ così come indicato dalla (6).

La funzione

$$x_p(t) := \int_0^t W(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{7}$$

invece, soddisfa l'equazione differenziale non omogenea $\dot{x} = Ax + f(t)$ con condizione iniziale omogenea $x_p(0) = 0$. Essa si ottiene *convolvendo* la matrice fondamentale $W(t)$ con il termine non omogeneo $f(t)$. Si noti che non è necessario calcolare la trasformata di Laplace di $f(t)$. La formula (7) si chiama *formula di variazione delle costanti arbitrarie.*

4 Esempio

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 10\cos t \\ \dot{y} = 4x + y \end{cases}$$

Troviamo la soluzione fondamentale. Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$s\mathbb{I} - A = \begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ -4 & s-1 \end{pmatrix}$$

e

$$[s\mathbb{I} - A]^{-1} = \frac{1}{(s-1)^2+4} \begin{pmatrix} s-1 & -1 \\ 4 & s-1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare $\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbb{I} - A)^{-1}](t)$ si debbono calcolare

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right](t), \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+4}\right](t).$$

Ricordiamo che

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$
$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Dalle formule di traslazione si ottiene quindi:

$$\mathcal{L}[e^t \sin(2t)] = \mathcal{L}[\sin 2t](s-1) = \frac{2}{(s-1)^2+4}$$

e

$$\mathcal{L}[e^t \cos(2t)] = \mathcal{L}[\cos 2t](s-1) = \frac{s-1}{(s-1)^2+4}$$

quindi:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right](t) = e^t \cos(2t)$$

e

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+4}\right](t) = \frac{1}{2} e^t \sin(2t)$$

Di conseguenza:

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos 2t & -\frac{1}{2} e^t \sin 2t \\ 2e^t \sin 2t & e^t \cos 2t \end{pmatrix}$$

Si osservi che $W(0)=\mathbb{I}$. Calcoliamo ora l'integrale particolare $x_p(t)$. Si ha

$$x_p(t)=\int_0^t W(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau = 10\int_0^t \begin{pmatrix} e^\tau \cos 2\tau \cos(t-\tau) \\ 2e^\tau \sin 2\tau \cos(t-\tau) \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau$$

Integrando si ottiene (i calcoli sono lasciati al lettore):

$$x_p(t)=\begin{pmatrix} -3\cos t - \sin t + 3e^t \cos 2t + 4e^t \sin 2t \\ 8\cos t - 4\sin t - 8e^t \cos 2t + 6e^t \sin 2t \end{pmatrix}$$

Da cui si ottiene l'integrale generale

$$\begin{pmatrix} e^t \cos 2t & -\frac{1}{2}e^t \sin(2t) \\ 2e^t \sin(2t) & e^t \cos 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3\cos t - \sin t + 3e^t \cos 2t + 4e^t \sin 2t \\ 8\cos t - 4\sin t - 8e^t \cos 2t + 6e^t \sin 2t \end{pmatrix}$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t[k_1 \cos 2t + k_2 \sin 2t] - 3\cos t - \sin t \\ 2e^t[k_1 \sin 2t - k_2 \sin 2t] + 8\cos t - 4\sin t \end{pmatrix}$$

dove $k_1 = c_1 + 3$, $k_2 = 4 - \frac{c_2}{2}$.