11 Considerazioni sulla stabilità di un sistema

▶ La stabilità di un sistema lineare tempo invariante a costanti concentrate dipende dalla posizione dei poli della f.d.t. nel piano complesso.

Per la coincidenza della f.d.t. con l'uscita del sistema, è evidente come dalla risposta all'impulso si possano ottenere informazioni sulla stabilità del sistema stesso.

Si consideri in proposito la FIGURA **13** nella quale vengono rappresentate le principali tipologie di risposta di un sistema al segnale impulsivo.

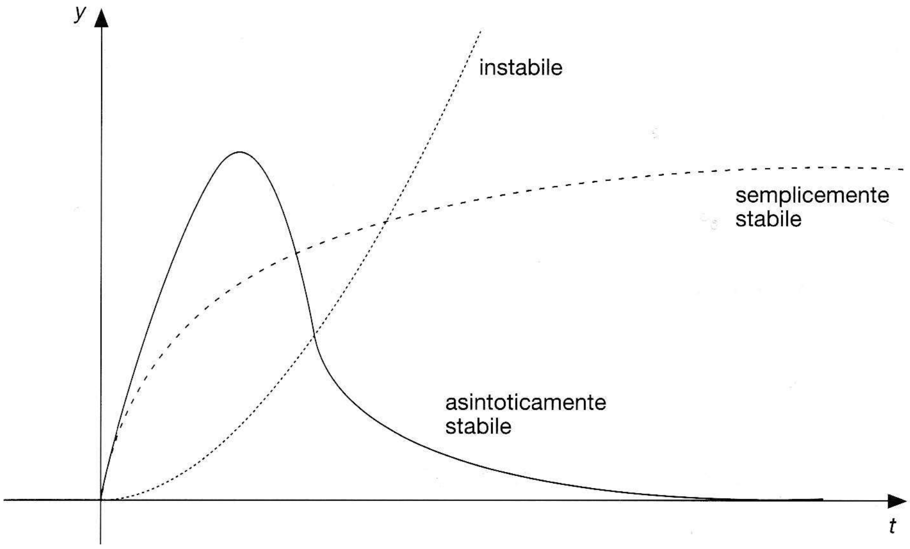

FIGURA **13**
Tipologie di risposta all'impulso.

Si possono verificare i seguenti casi:

- il sistema è **asintoticamente stabile** se l'uscita converge al valore iniziale supposto nullo;
- il sistema è **semplicemente stabile** se l'uscita non converge al valore iniziale ma nemmeno diverge (tende a infinito);
- il sistema è **instabile** se l'uscita diverge.

È evidente che:

- la condizione *asintoticamente stabile* è più restrittiva della condizione *semplicemente stabile*;
- un sistema asintoticamente stabile è anche semplicemente stabile.

Tra posizione dei poli del sistema sul piano complesso e stabilità sussistono le seguenti importanti relazioni:

- affinché un sistema risulti **semplicemente stabile** è necessario e sufficiente che la f.d.t. non presenti alcun polo a parte reale positiva e che gli eventuali poli a parte reale nulla siano semplici;
- affinché un sistema risulti **asintoticamente stabile** è necessario e sufficiente che tutti i poli abbiano parte reale negativa.

11.1 Applicazioni

In FIGURA **14** vengono riportati alcuni esempi significativi di disposizione di poli sul piano complesso.

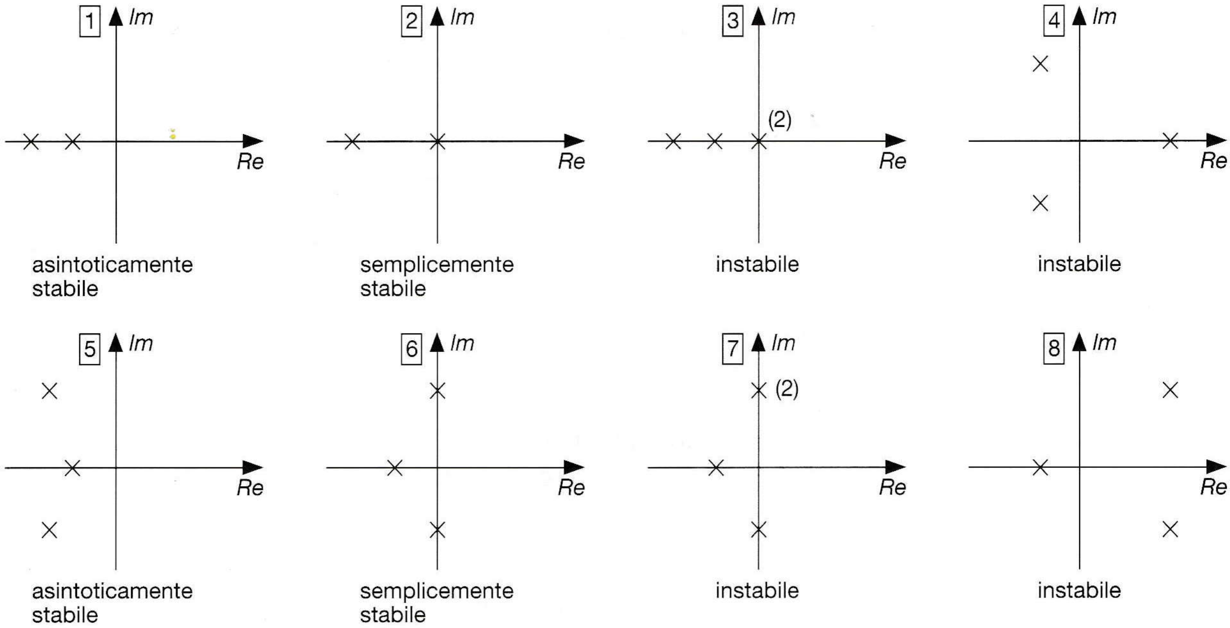

FIGURA **14**
Stabilità di un sistema in relazione alla posizione dei poli sul piano complesso.

Analizzando la figura si traggono le seguenti conclusioni:

- il sistema 1 è asintoticamente stabile perché tutti i suoi poli hanno parte reale negativa;
- il sistema 2 è semplicemente stabile perché, oltre al polo con parte reale negativa, è presente un polo nell'origine;
- il sistema 3 è instabile per la presenza di due poli nulli coincidenti;
- il sistema 4 è instabile per la presenza di un polo con parte reale positiva;
- il sistema 5 è asintoticamente stabile perché tutti i poli hanno parte reale negativa;
- il sistema 6 è semplicemente stabile perché, oltre al polo con parte reale negativa, è presente una coppia di poli complessi coniugati a parte reale nulla;
- il sistema 7 è instabile per la presenza di una coppia di poli complessi coniugati a parte reale nulla con molteplicità due;
- il sistema 8 è instabile per la presenza di una coppia di poli complessi coniugati con parte reale positiva.

11.2 Modi di risposta

Strettamente correlate alle considerazioni relative alla posizione dei poli sul piano complesso sono le diverse tipologie di risposta che derivano dall'applicazione di un segnale impulsivo ovvero i *modi di risposta*.

Si distinguono i seguenti casi:

- *poli semplici di molteplicità uno*;
- *poli semplici di molteplicità due*;
- *poli complessi coniugati di molteplicità uno*;
- *poli complessi coniugati di molteplicità due*.

Poli semplici di molteplicità uno

Come evidenziato in FIGURA **15**, si verifica che la risposta:

- tende a zero se il polo è reale negativo;
- rimane limitata se il polo è nell'origine;
- diverge se il polo è reale positivo.

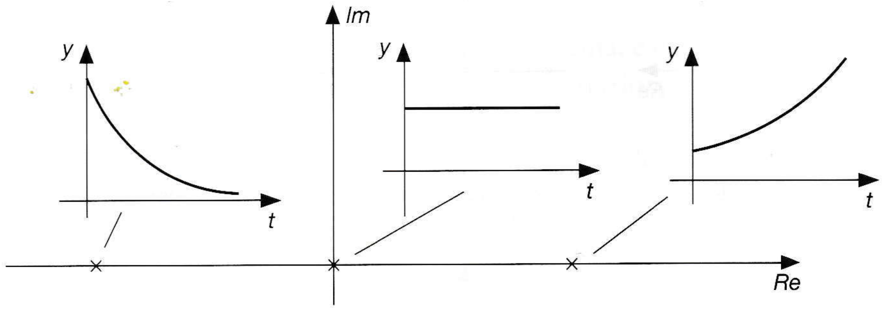

FIGURA **15**
Modi di risposta in caso di poli semplici di molteplicità uno.

Poli semplici di molteplicità due

Come evidenziato in FIGURA **16**, si verifica che la risposta:

- tende a zero se i poli sono reali negativi;
- diverge se i poli sono nell'origine;
- diverge se i poli sono reali positivi.

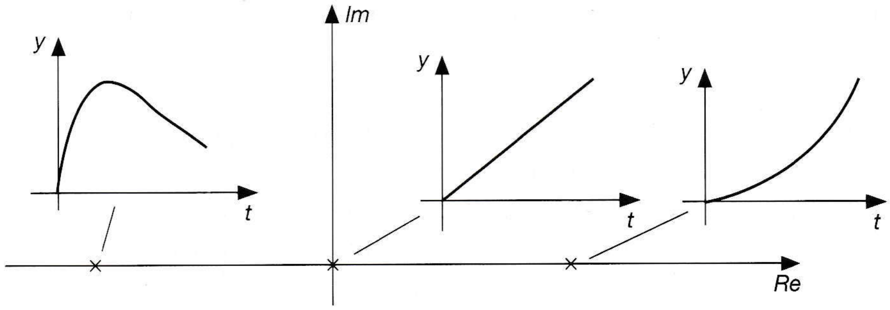

FIGURA **16**
Modi di risposta in caso di poli semplici di molteplicità due.

Poli complessi coniugati di molteplicità uno

Come evidenziato in FIGURA **17**, si verifica che la risposta:

- tende a zero se i poli sono a parte reale negativa;
- rimane limitata se i poli sono a parte reale nulla;
- diverge se i poli sono a parte reale positiva.

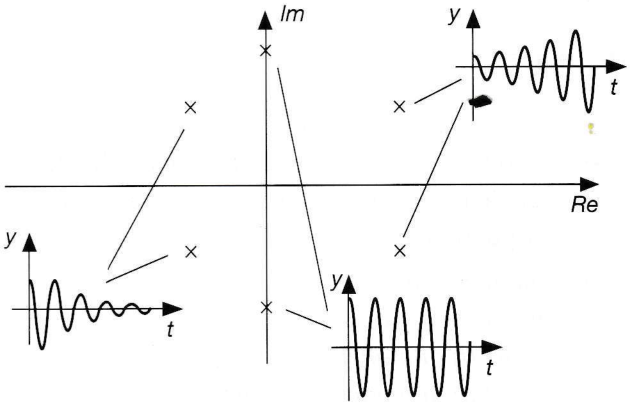

FIGURA **17**
Modi di risposta in caso di poli complessi coniugati di molteplicità uno.

Poli complessi coniugati di molteplicità due

Come evidenziato in FIGURA **18**, si verifica che la risposta:

- tende a zero se i poli sono a parte reale negativa;
- diverge se i poli sono a parte reale nulla;
- diverge se i poli sono a parte reale positiva.

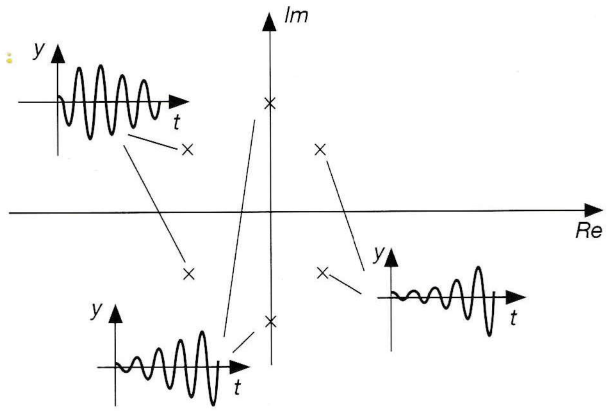

FIGURA **18**
Modi di risposta in caso di poli complessi coniugati di molteplicità due.

11.3 Poli complessi coniugati

Le funzioni che hanno poli complessi coniugati hanno un andamento di tipo oscillatorio caratterizzato da due parametri fondamentali che sono la pulsazione naturale e il coefficiente di smorzamento.

In FIGURA **19** vengono rappresentati sul piano complesso due poli complessi coniugati con parte reale a e parte immaginaria b.

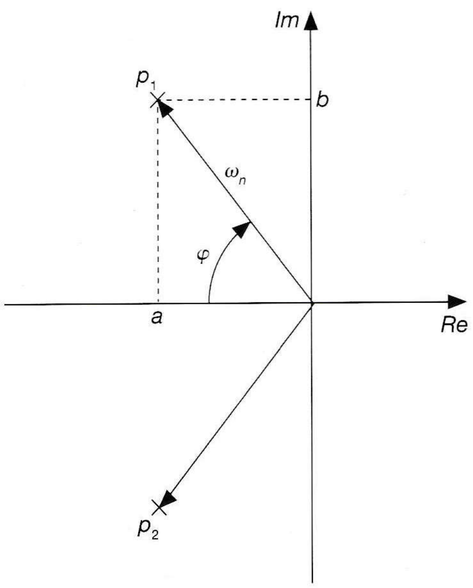

FIGURA **19**
Poli complessi coniugati sul piano immaginario.

I poli possono quindi essere rappresentati nel modo seguente:

$$p_1 = a + jb$$
$$p_2 = a - jb$$

Pulsazione naturale e coefficiente di smorzamento sono legati a parte reale e a parte immaginaria dalle seguenti relazioni:

$$\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\xi = \cos\varphi = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ESEMPIO 25

Si analizzi la stabilità del sistema la cui f.d.t. assume l'espressione seguente:

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 2}$$

Soluzione

Risolvendo il polinomio che si trova al denominatore si individuano due poli complessi coniugati; essi valgono rispettivamente:

- $p_1 = -1 + j$;
- $p_2 = -1 - j$.

Avendo i due poli parte reale negativa il sistema risulta asintoticamente stabile.

ESEMPIO 26

Si analizzi la stabilità del sistema la cui f.d.t. assume l'espressione seguente:

$$G(s) = \frac{5}{s(s^2 + 4s + 3)}$$

Soluzione

Risolvendo il polinomio che si trova al denominatore si individuano:

- due poli reali e distinti che valgono rispettivamente $p_1 = -1$ e $p_2 = -3$;
- un polo nell'origine.

Avendo i due poli parte reale negativa ed essendo semplice il polo nell'origine il sistema risulta semplicemente stabile.

ESEMPIO 27

Si analizzi la stabilità del sistema la cui f.d.t. assume l'espressione seguente:

$$G(s) = \frac{10}{s^2 - 1}$$

Soluzione

Risolvendo il polinomio che si trova al denominatore si individuano:

- un polo a parte reale negativa $p_1 = -1$;
- un polo a parte reale positiva $p_2 = +1$.

La presenza di un polo a parte reale positiva conferisce instabilità al sistema.

ESEMPIO 28

Si analizzi la stabilità del sistema retroazionato le cui caratteristiche vengono evidenziate nello schema a blocchi di FIGURA **20**.

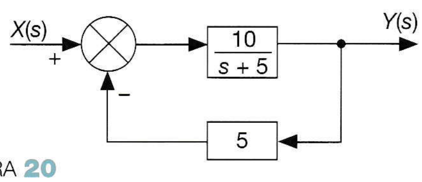

FIGURA **20**
Schema a blocchi del sistema.

Commentare i risultati che si ottengono retroazionando il sistema facendo riferimento alla costante di tempo e a quella di guadagno.

Soluzione

Dallo schema a blocchi del sistema retroazionato si deduce l'espressione della f.d.t.:

$$G(s) = \frac{A}{1 + AB} = \frac{\frac{10}{s+5}}{1 + \frac{50}{s+5}} = \frac{10}{s + 55}$$

Il sistema non retroazionato ha costante di guadagno 2 e costante di tempo data dalla relazione:

$$\tau_p = -\frac{1}{p} = \frac{1}{5} = 0{,}2s$$

Chiuso in retroazione il sistema ha costante di guadagno 0,18 e costante di tempo data dalla relazione:

$$\tau_p = -\frac{1}{p} = \frac{1}{55} = 0{,}18s$$

Si deduce che la retroazione ha portato a una diminuzione sia della costante di guadagno sia di quella di tempo.