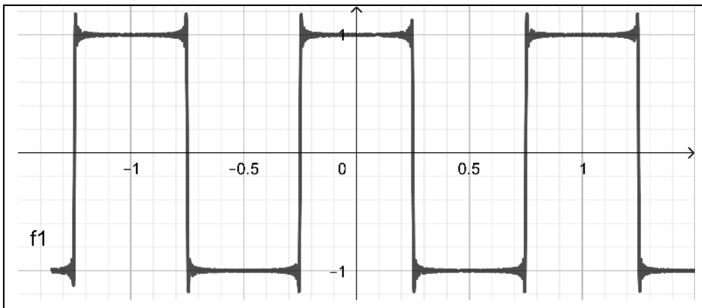
Esercitazione/ripasso sulle serie di Fourier

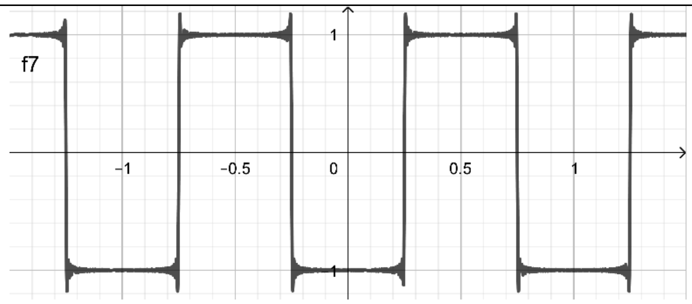
Nel presente file sono rappresentati gli sviluppi in serie di alcune funzioni tipo.

Le prime due funzioni di pag 5 erano presenti nella verifica di recupero, nella quale era richiesta la soluzione manuale, previa scomposizione delle funzioni assegnate in funzioni pari e dispari.
Qui sono rappresentate tramite sviluppo in serie di Fourier con Geogebra insieme alle funzioni f(-t) e -f(-t) necessarie a ricavare le funzioni pari e dispari.
La terza è risolta passo-passo nelle pagine seguenti (esempio e), insieme ad altre funzioni di esempio.

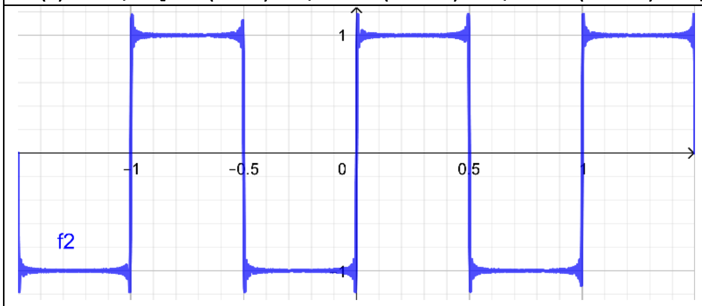
Al termine del file è specificata l'esercitazione da svolgere.
In pratica, si tratta di replicare con Geogebra lo sviluppo in serie di Fourier della funzione f(t) assegnata considerando tutte le sue armoniche fino all'ordine 100.



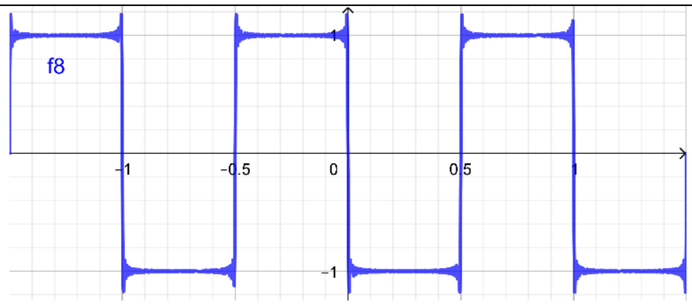
$f_1(t)=4A_1/\pi\ [\cos(\omega_1 t) - 1/3\cos(3\omega_1 t) + 1/5\cos(5\omega_1 t) - \ldots]$



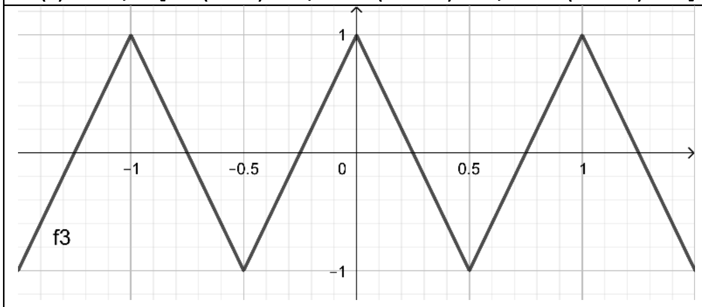
$f_7(t)= - 4A_7/\pi\ [\cos(\omega_7 t) - 1/3\cos(3\omega_7 t) + 1/5\cos(5\omega_7 t) - \ldots]$



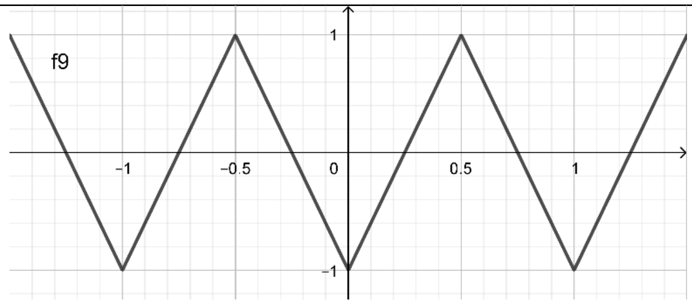
$f_2(t)=4A_2/\pi\ [\sin(\omega_2 t) + 1/3\sin(3\omega_2 t) + 1/5\sin(5\omega_2 t) - \ldots]$



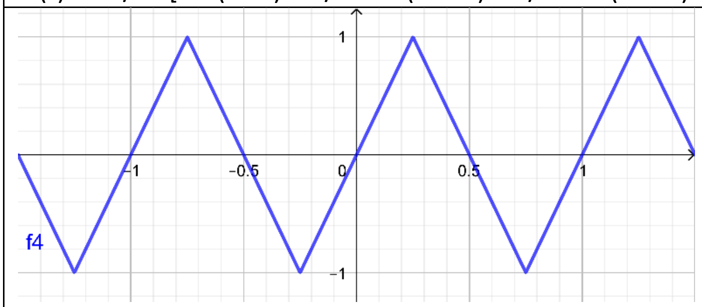
$f_8(t)= - 4A_8/\pi\ [\sin(\omega_8 t) + 1/3\sin(3\omega_8 t) + 1/5\sin(5\omega_8 t) - \ldots]$



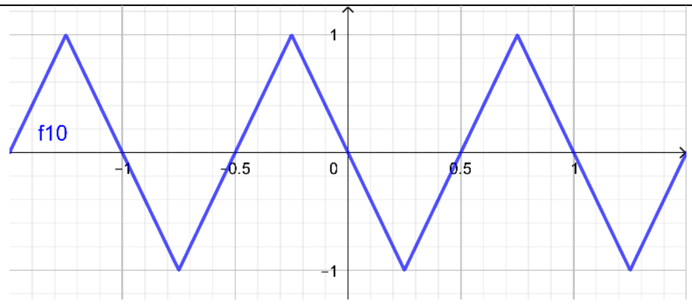
$f_3(t)=8A_3/\pi^2\ [\cos(\omega_3 t) + 1/3^2\cos(3\omega_3 t) + 1/5^2\cos(5\omega_3 t) + \ldots]$



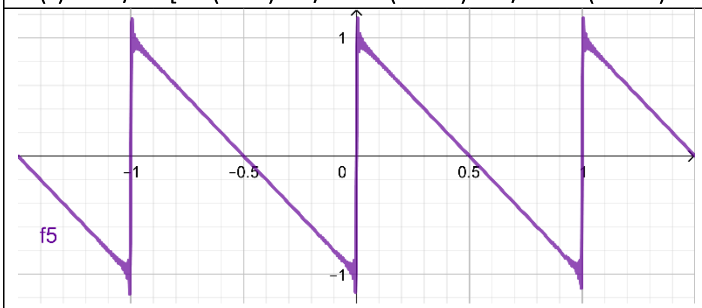
$f_9(t)= - 8A_9/\pi^2\ [\cos(\omega_9 t) + 1/3^2\cos(3\omega_9 t) + 1/5^2\cos(5\omega_9 t) + \ldots]$



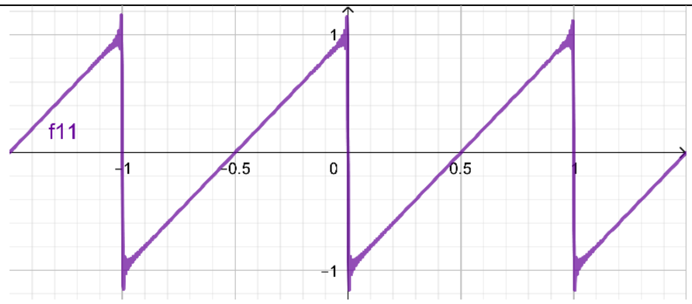
$f_4(t)=8A_4/\pi^2\ [\sin(\omega_4 t) - 1/3^2\sin(3\omega_4 t) + 1/5^2\sin(5\omega_4 t) - \ldots]$



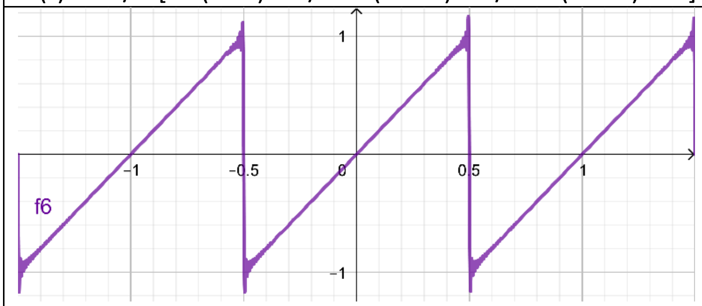
$f_{10}(t)= - 8A_{10}/\pi^2\ [\sin(\omega_{10} t) - 1/3^2\sin(3\omega_{10} t) + 1/5^2\sin(5\omega_{10} t) - \ldots]$



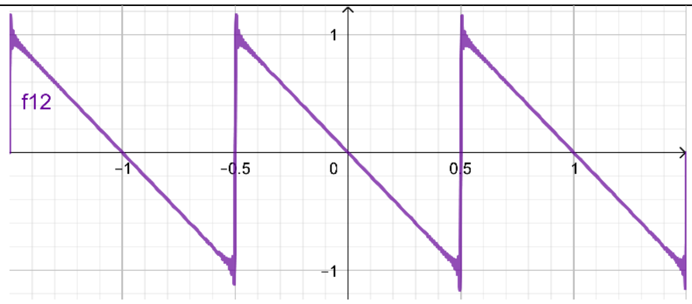
$f_5(t)=2A_5/\pi\ [\sin(\omega_5 t) + 1/2\sin(2\omega_5 t) + 1/3\sin(3\omega_5 t) + \ldots]$



$f_{11}(t)= - 2A_{11}/\pi\ [\sin(\omega_{11} t) + 1/2\sin(2\omega_{11} t) + 1/3\sin(3\omega_{11} t) + \ldots]$



$f_6(t)=2A_6/\pi\ [\sin(\omega_6 t) - 1/2\sin(2\omega_6 t) + 1/3\sin(3\omega_6 t) - \ldots]$



$f_{12}(t)= - 2A_{12}/\pi\ [\sin(\omega_{12} t) - 1/2\sin(2\omega_{12} t) + 1/3\sin(3\omega_{12} t) - \ldots]$

Tutte le funzioni di questo file sono tracciate con Geogebra come somma di sinusoidi fino a frequenza 100 volte quella fondamentale (prima armonica).

Funzioni utilizzate in Geogebra per tracciare le forme d'onda in figura

Ampiezza e periodo di tutte le funzioni sono normalizzati a 1 ($A1= A2=...=1$, $T1=T2=...=1$, $\omega1=2\pi/ T1....$)

$A=1$, $T=1$, $A1=A... A12=A$, $T1=T... T12=T$, $\omega1=2\pi/ T1... \omega12=2\pi/ T12$

f1(t)=4A1 / π Somma(Successione(1 / k cos(k ω1 t) - 1 / (k + 2) cos((k + 2) ω1 t), k, 1, 100, 4))

f2(t)=4A2 / π Somma(Successione(1 / k sin(k ω2 t), k, 1, 100, 2))

f3(t)=8A3 / π^2 Somma(Successione(1 / k^2 cos(k ω3 t), k, 1, 100, 2))

f4(t)=8A4 / π^2 Somma(Successione(1 / k^2 sin(k ω4 t) - 1 / (k+2)^2 sin((k+2) ω4 t), k, 1, 100, 4))

f5(t)=2A5 / π Somma(Successione(1 / k sin(k ω5 t), k, 1, 100))

f6(t)=2A6 / π Somma(Successione(1 / k sin(k ω6 t) - 1 / (k+1) sin((k+1) ω6 t), k, 1, 100,2))

f7(t)=-4A7 / π Somma(Successione(1 / k cos(k ω7 t) - 1 / (k + 2) cos((k + 2) ω7 t), k, 1, 100, 4))

f8(t)=-4A8 / π Somma(Successione(1 / k sin(k ω8 t), k, 1, 100, 2))

f9(t)=-8A9 / π^2 Somma(Successione(1 / k^2 cos(k ω9 t), k, 1, 100, 2))

f10(t)=-8A10 / π^2 Somma(Successione(1 / k^2 sin(k ω10 t) - 1 / (k+2)^2 sin((k+2) ω10 t), k, 1, 100, 4))

f11(t)=-2A11 / π Somma(Successione(1 / k sin(k ω11 t), k, 1, 100))

f12(t)=-2A12 / π Somma(Successione(1 / k sin(k ω12 t) - 1 / (k+1) sin((k+1) ω12 t), k, 1, 100,2))

$f7(t)=- f1(t)$

$f8(t)=- f2(t)$

$f9(t)=- f3(t)$

$f10(t)=- f4(t)$

$f11(t)=- f5(t)$

$f12(t)=- f6(t)$

In nero sono rappresentate funzioni pari, in blu funzioni dispari. Queste funzioni sono anche emisimmetriche.

In viola sono rappresentate funzioni dispari NON emisimmetriche.

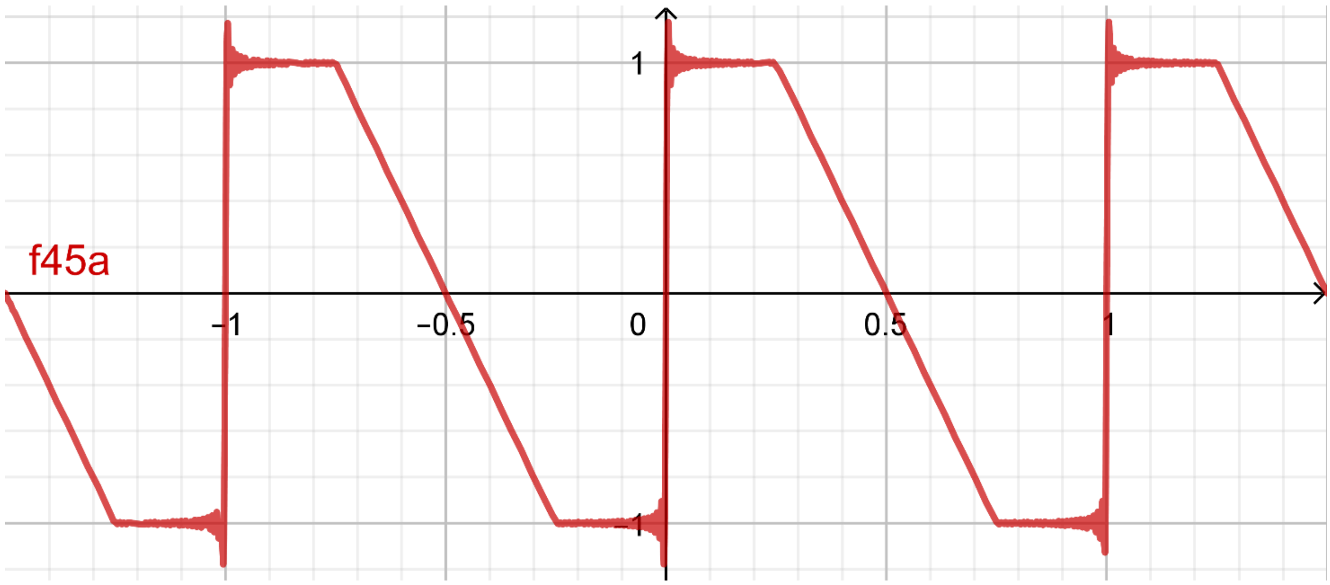
Le funzioni pari sono la somma di funzioni coseno (funzioni pari), le funzioni dispari sono la somma di funzioni seno (funzioni dispari). Le funzioni emisimmetriche sono costituite da sole armoniche dispari. Le funzioni NON emisimmetriche sono costituite anche da armoniche pari.

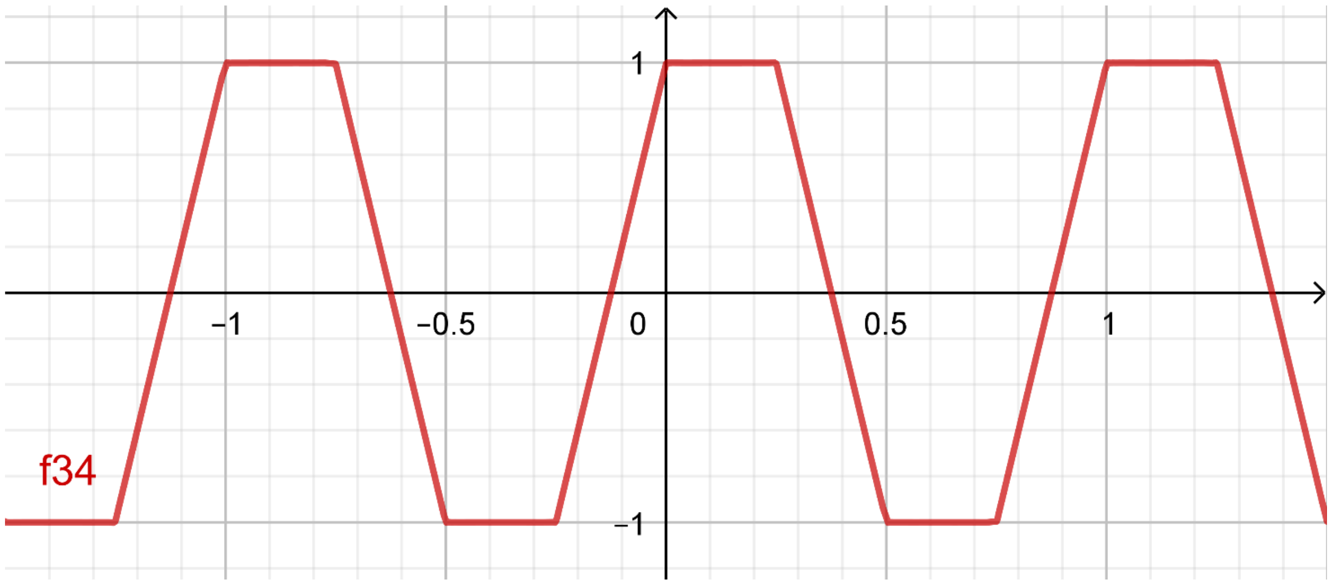
Funzione pari: $f(t) = f(-t)$

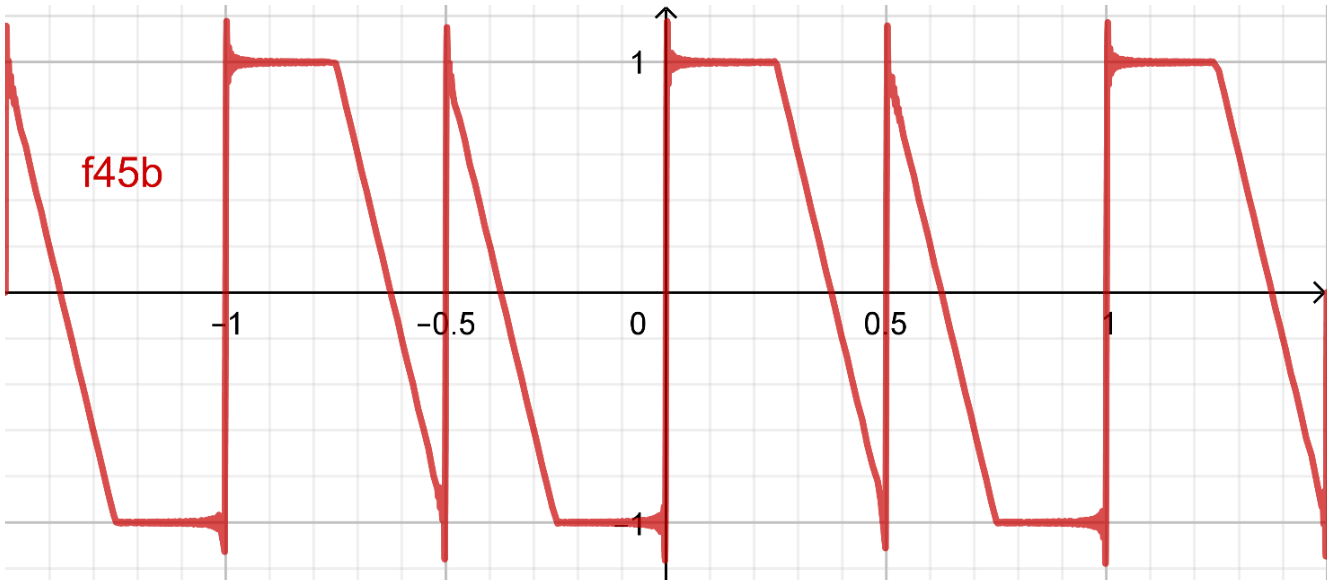
Funzione dispari: $f(t) = - f(-t)$

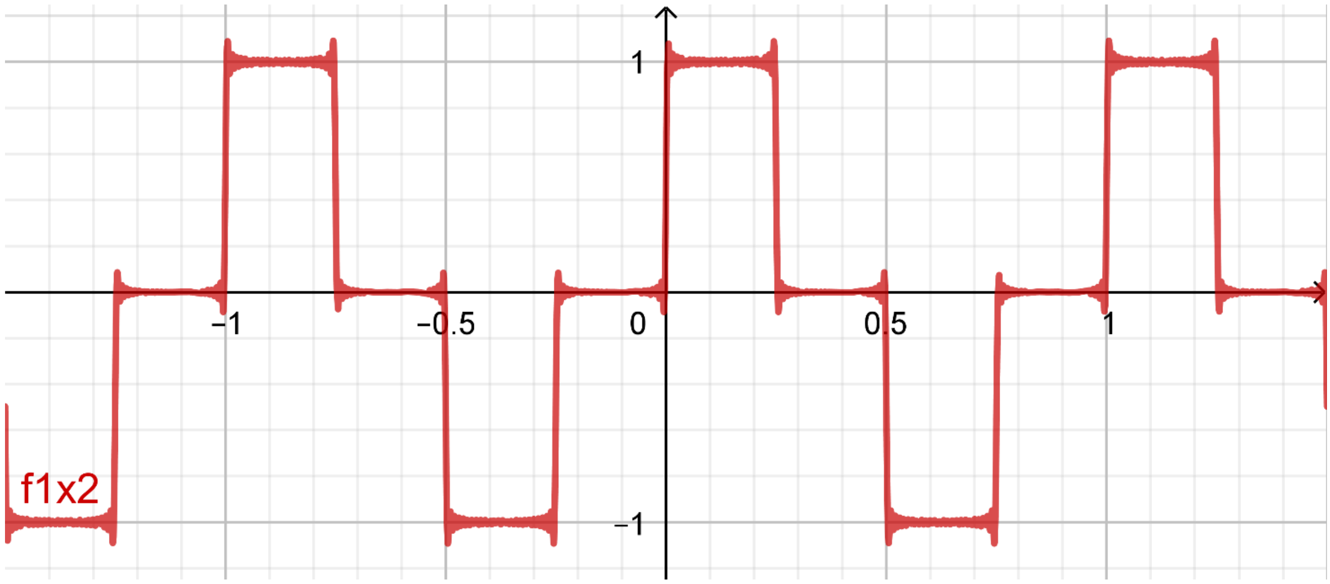
Funzioni emisimmetriche: $f(t) = - f(t+T/2)$

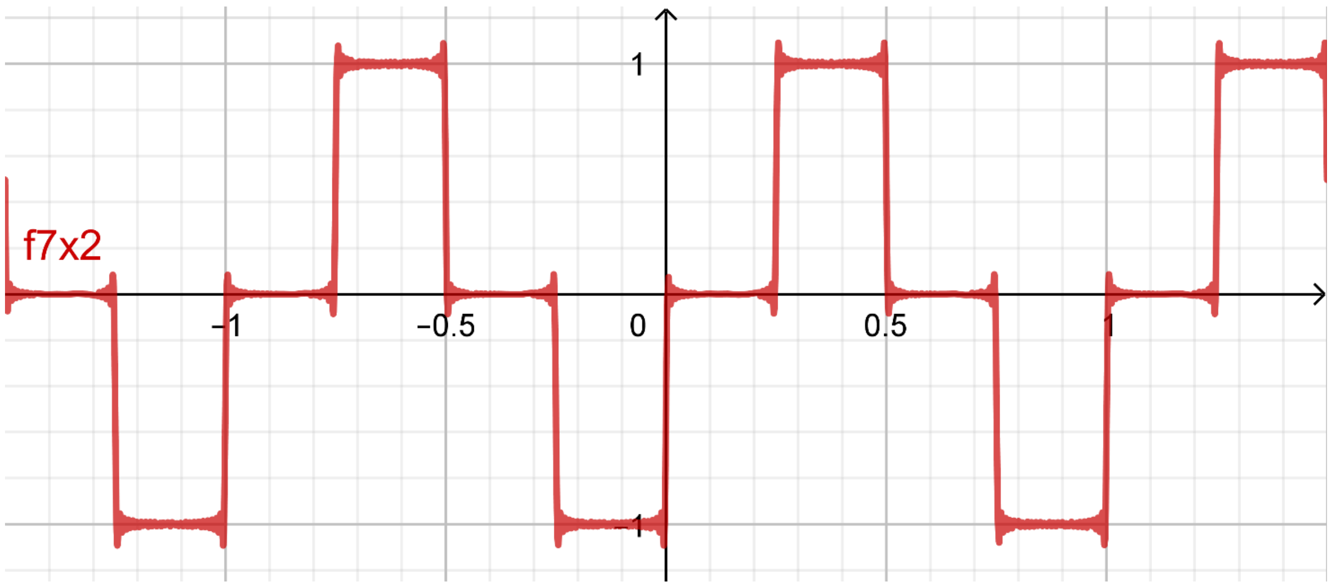
Riprodurre (con Geogebra) le seguenti forme d'onda utilizzando gli sviluppi in serie di Fourier (utilizzare la funzione somma di successioni e considerare tutte le armoniche fino all'ordine 100)

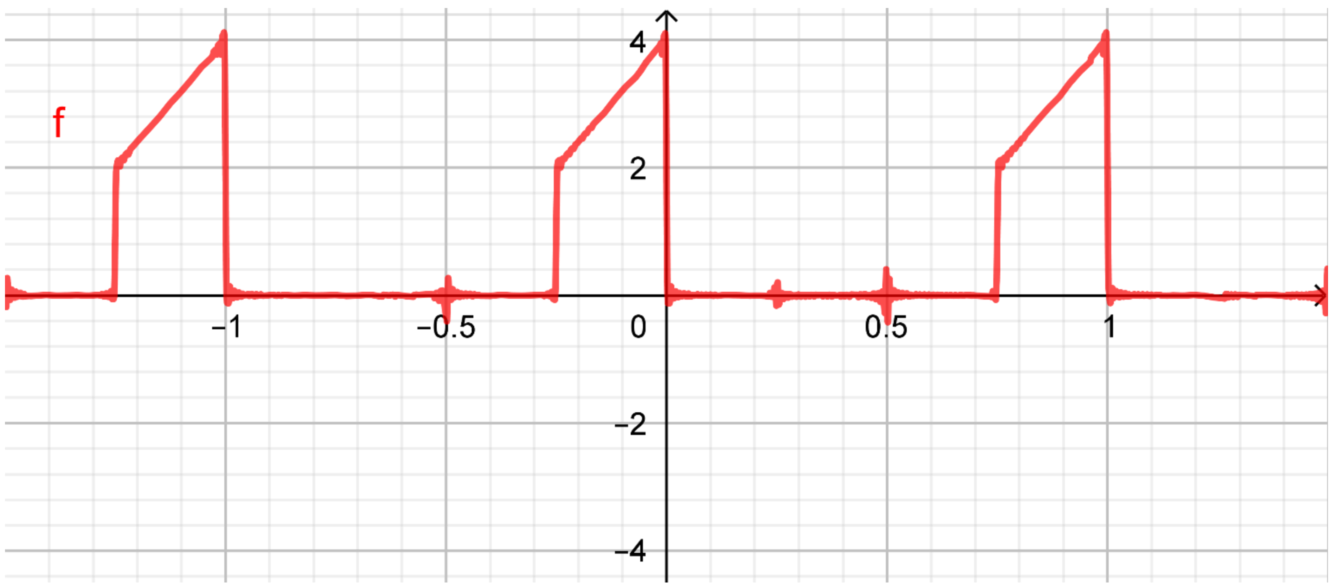


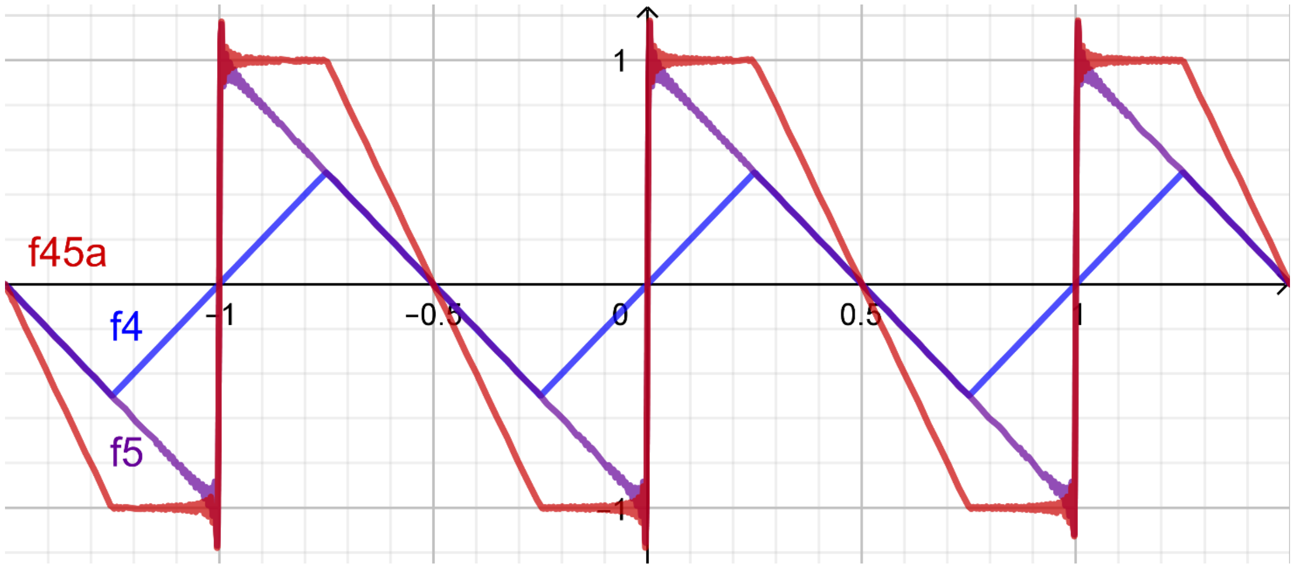




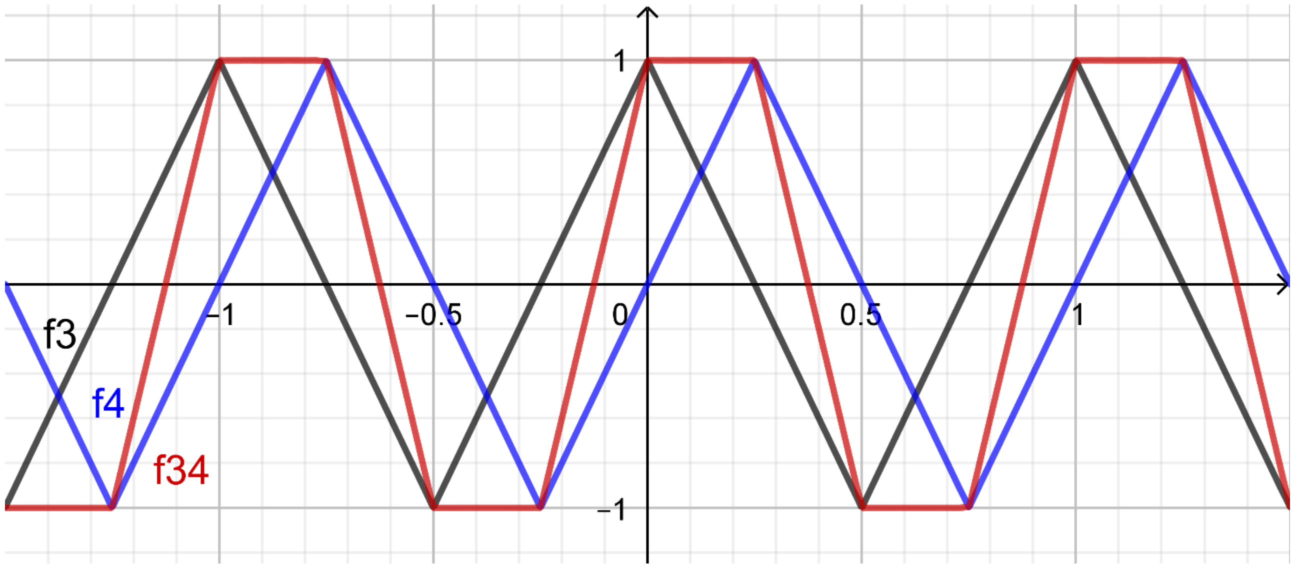

f1x2
1
−1
−1
−0.5
0
0.5
1


f7x2
1
−1
−1
−0.5
0
0.5
1

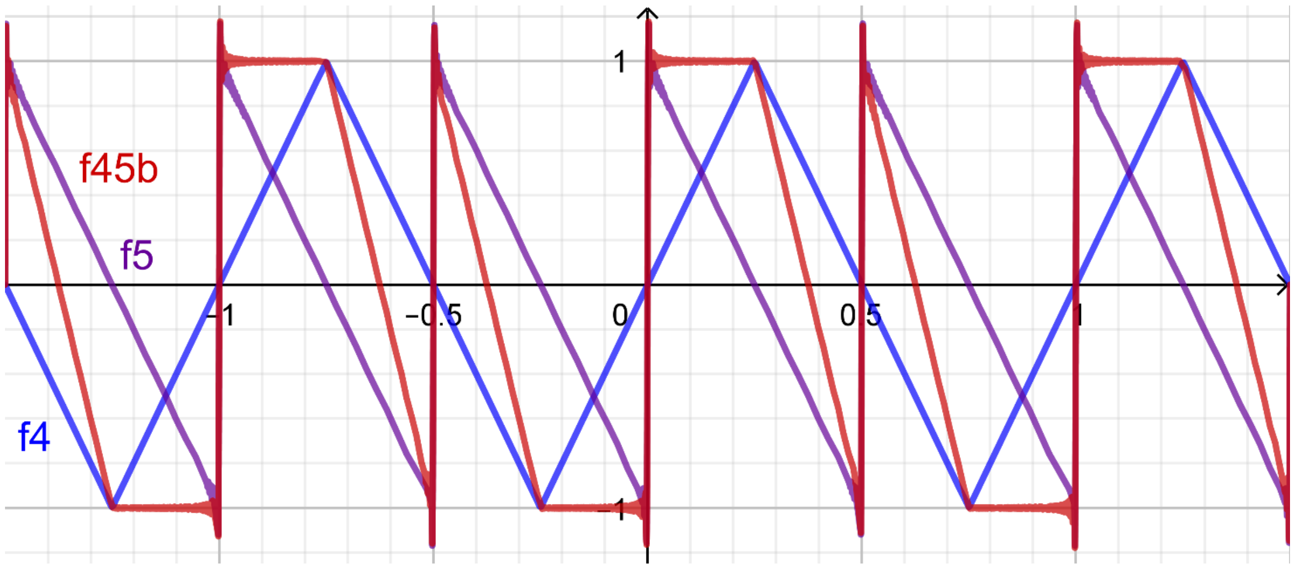

f
4
2
−2
−4
−1
−0.5
0
0.5
1



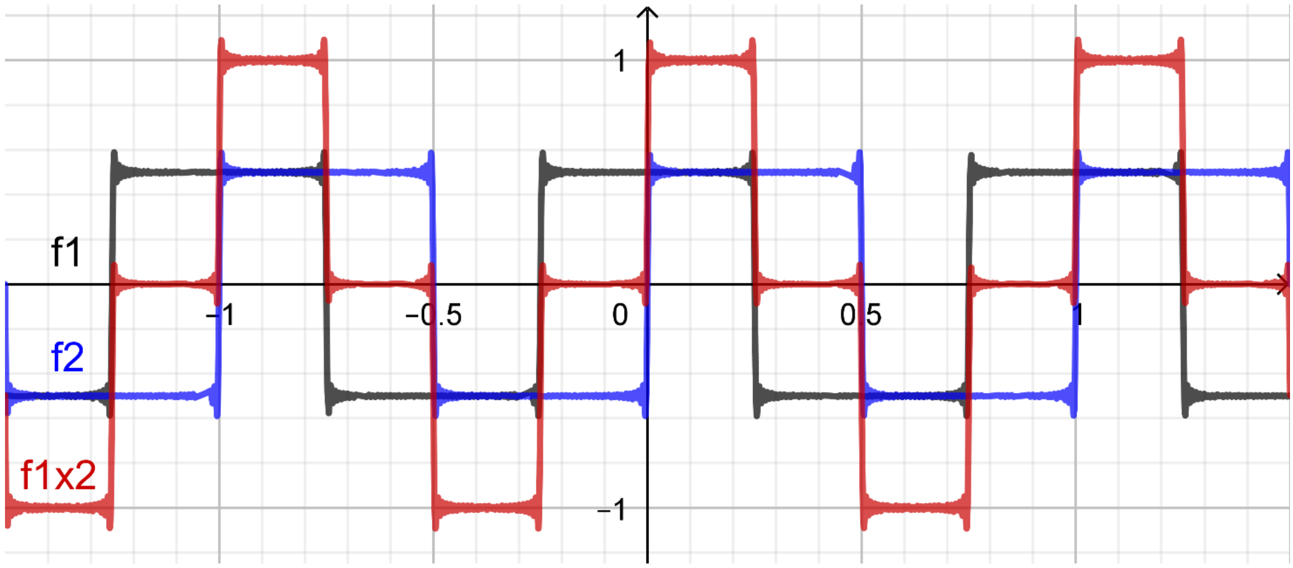
f45a(t) = f4(t) + f5(t) (A4=A/2, T4=T ; A5= A, T5=T)



f34(t) = f3(t) + f4(t) (A3=A, T3=T ; A4= A, T4=T)



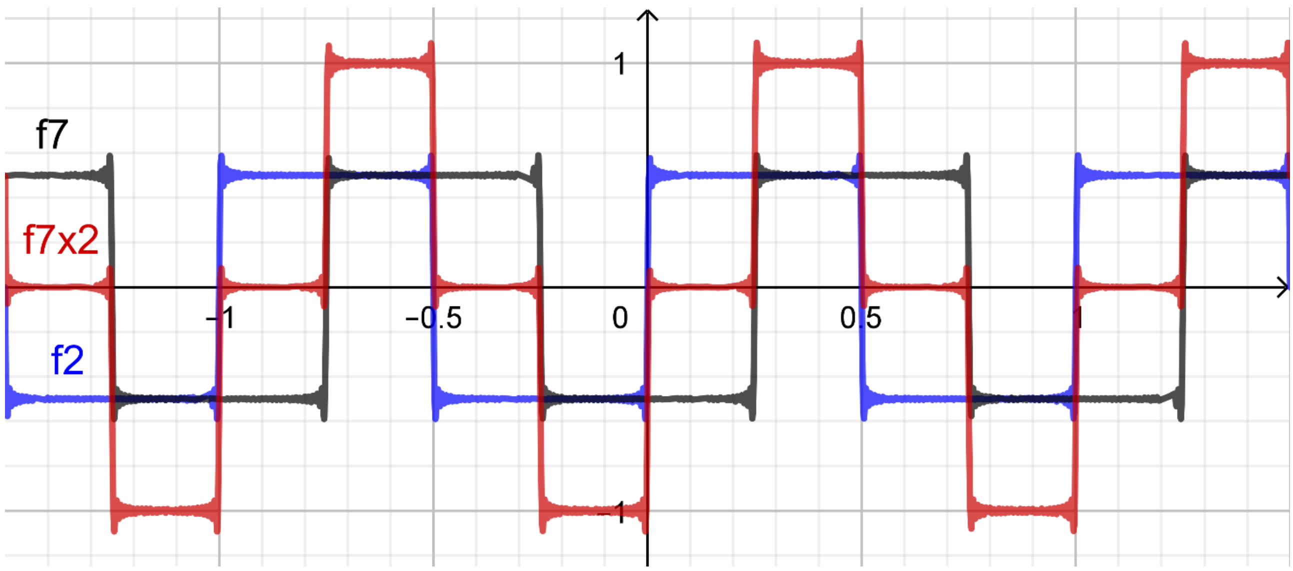
f45b(t) = f4(t) + f5(t) (A4=A, T4=T ; A5= A, T5=T/2)



$f1x2(t) = f1(t) + f2(t)$ $(A1=A/2, T1=T\ ;\ A2= A/2, T2=T)$

$f_1(t)=4A_1/\pi\ [\cos(\omega_1 t) - 1/3 \cos(3\omega_1 t) + 1/5 \cos(5\omega_1 t) - \ldots]$ $\omega_1 = 2\pi/T_1$

$f_2(t)=4A_2/\pi\ [\sin(\omega_2 t) + 1/3 \sin(3\omega_2 t) + 1/5 \sin(5\omega_2 t) - \ldots]$ $\omega_2 = 2\pi/T_2$



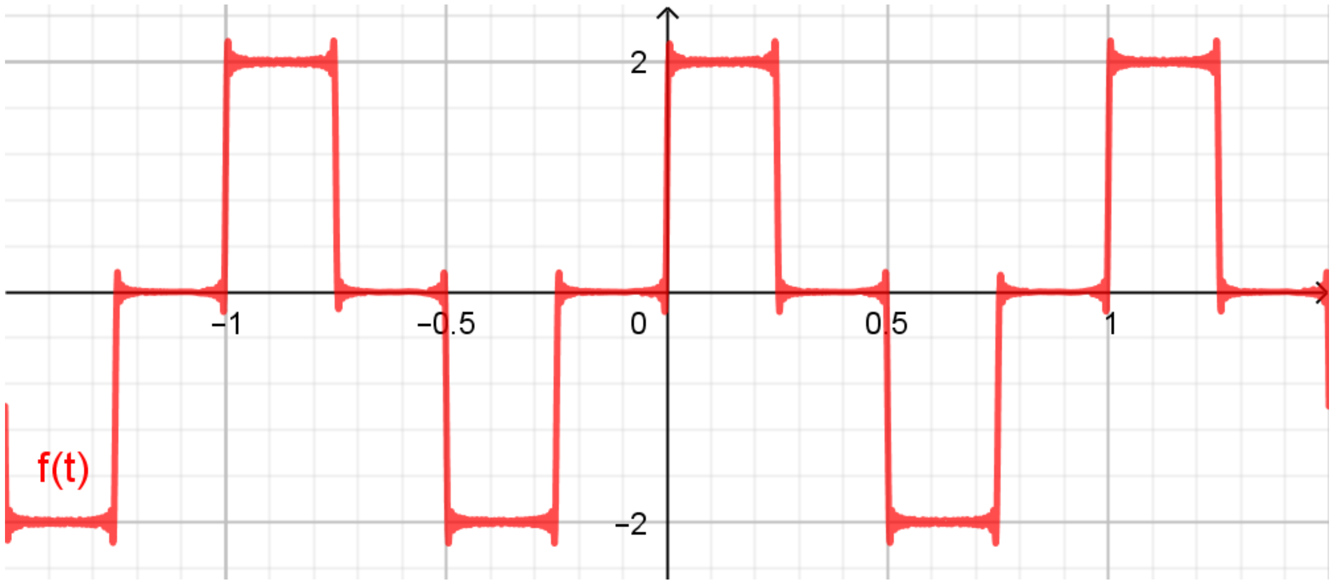
$f7x2(t) = f7(t) + f2(t)$ $(A7=A/2, T7=T\ ;\ A2= A/2, T2=T)$

$f_7(t)= - 4A_7/\pi\ [\cos(\omega_7 t) - 1/3 \cos(3\omega_7 t) + 1/5 \cos(5\omega_7 t) - \ldots]$ $\omega_7 = 2\pi/T_7$

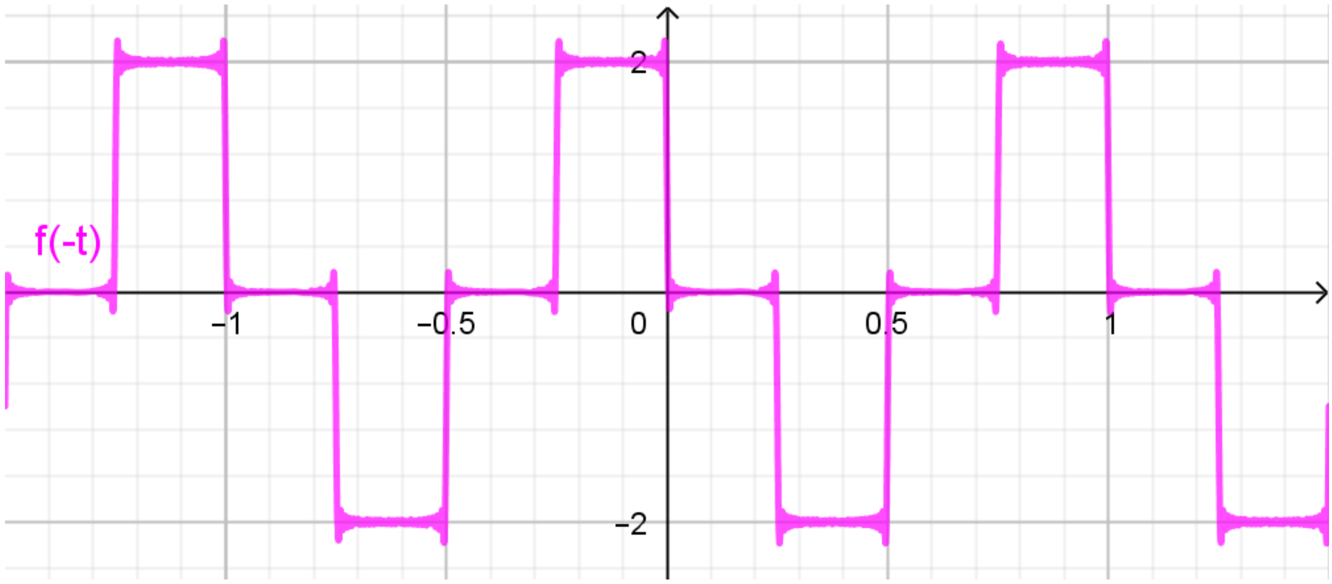
$f_2(t)=4A_2/\pi\ [\sin(\omega_2 t) + 1/3 \sin(3\omega_2 t) + 1/5 \sin(5\omega_2 t) - \ldots]$ $\omega_2 = 2\pi/T_2$

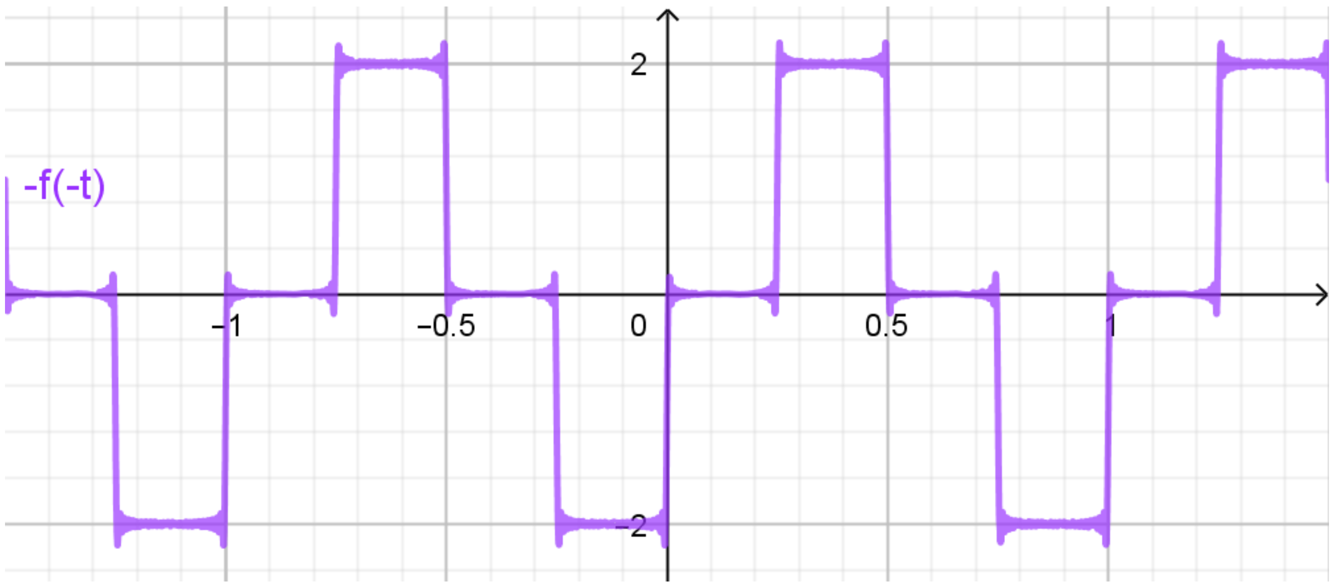
Esempio a

Determinare lo sviluppo in serie della seguente funzione f(t)



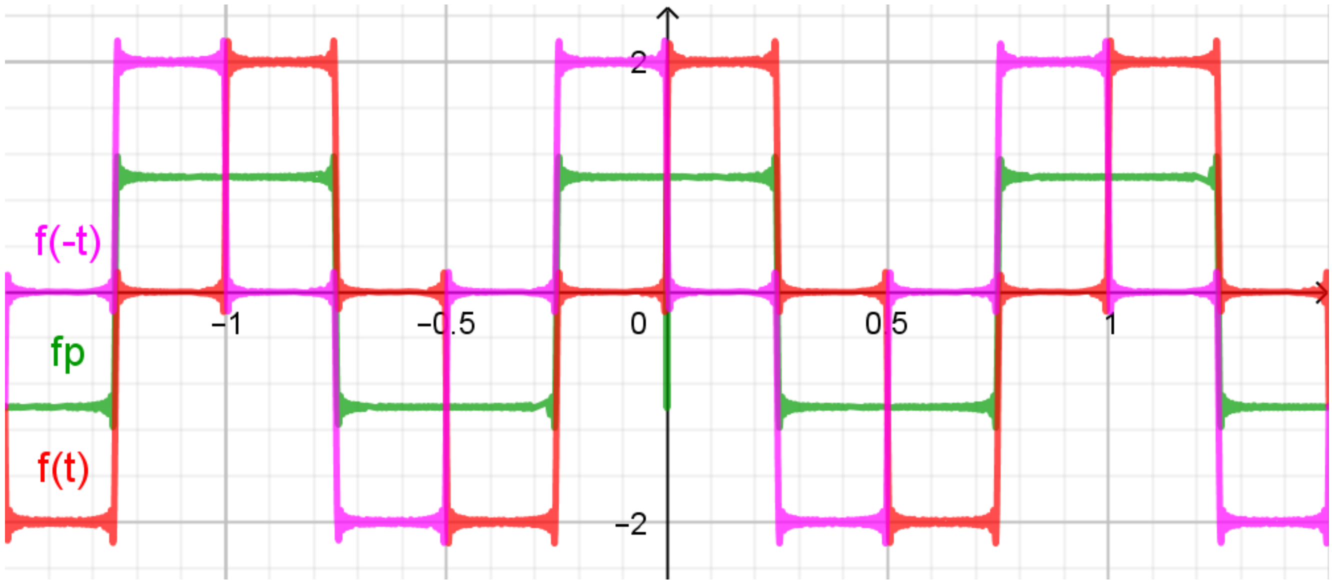
Data la funzione f(t) si determinano le funzioni f(-t) e -f(-t)



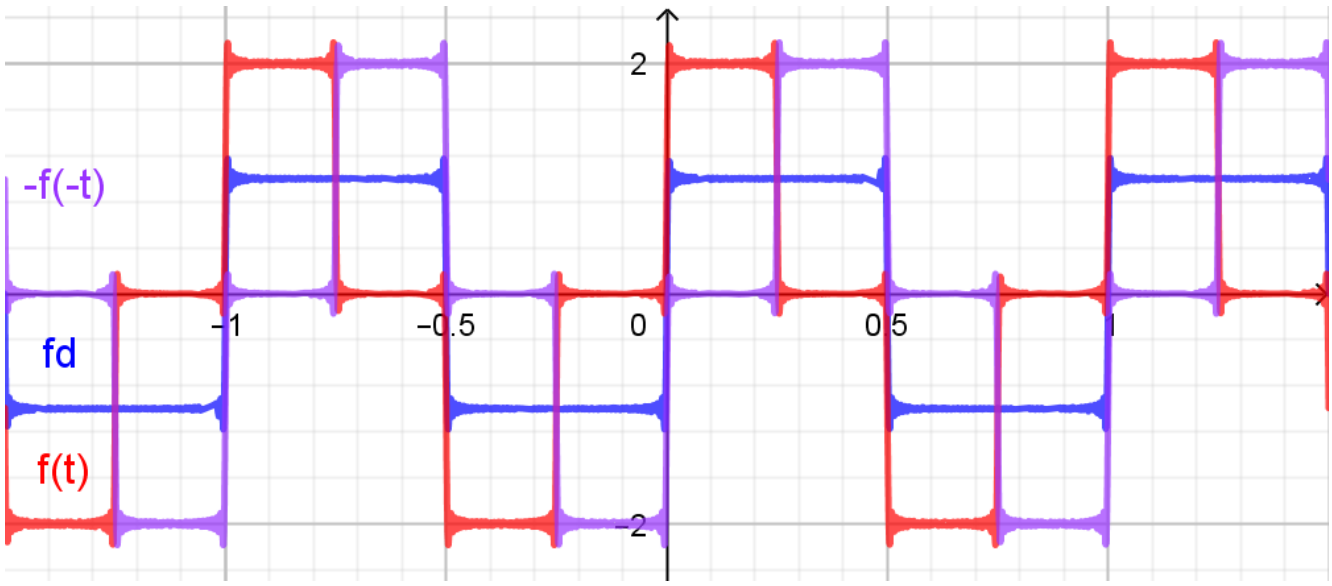


Quindi, si scompone la funzione f(t) nella somma di una funzione pari fp e una funzione dispari fd

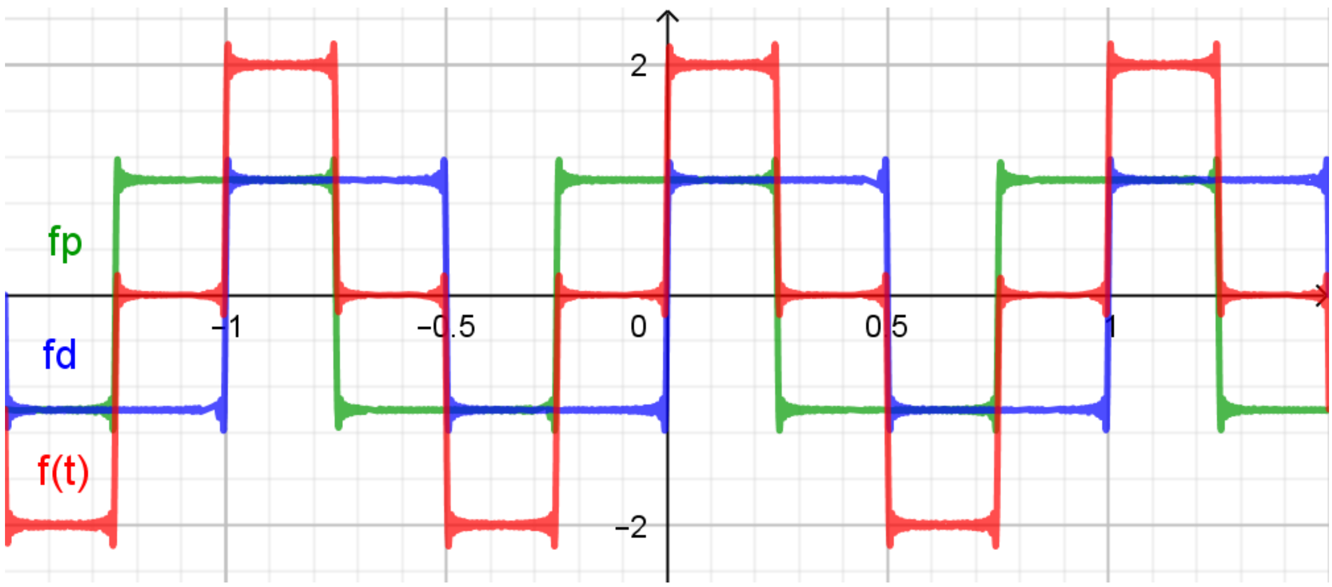
La funzione pari è fp = [f(t) + f(-t)] / 2



La funzione dispari è fd = [f(t) + (-f(-t))] / 2

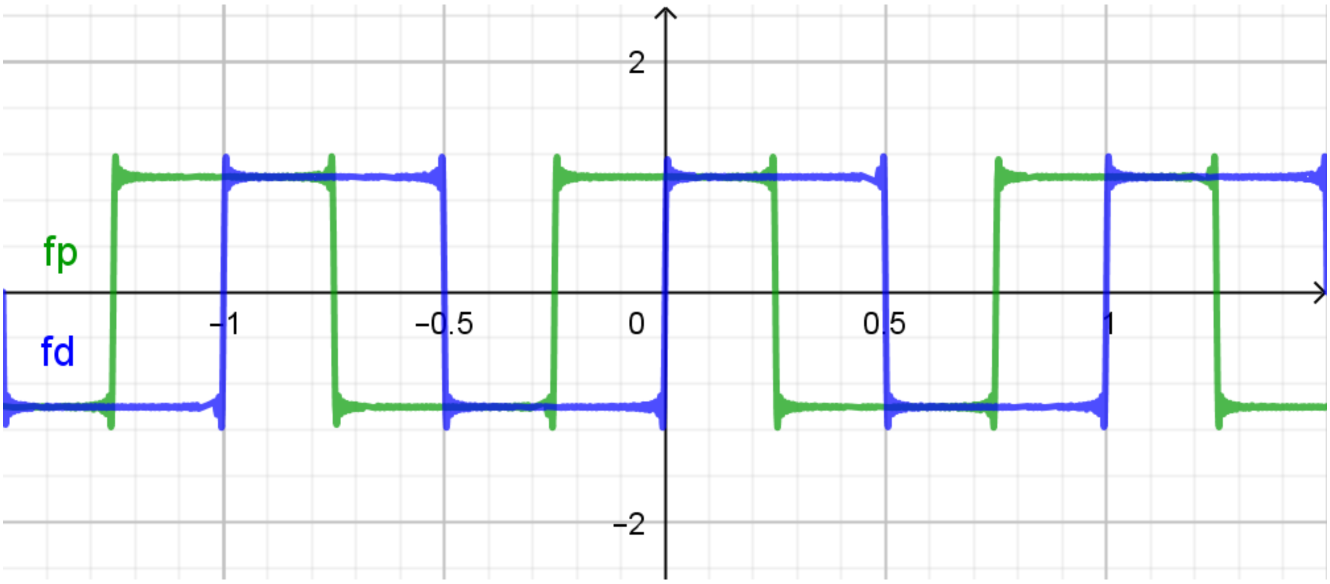


la funzione f(t) è la somma della funzione pari e della funzione dispari f(t) = fp + fd



Con Geogebra

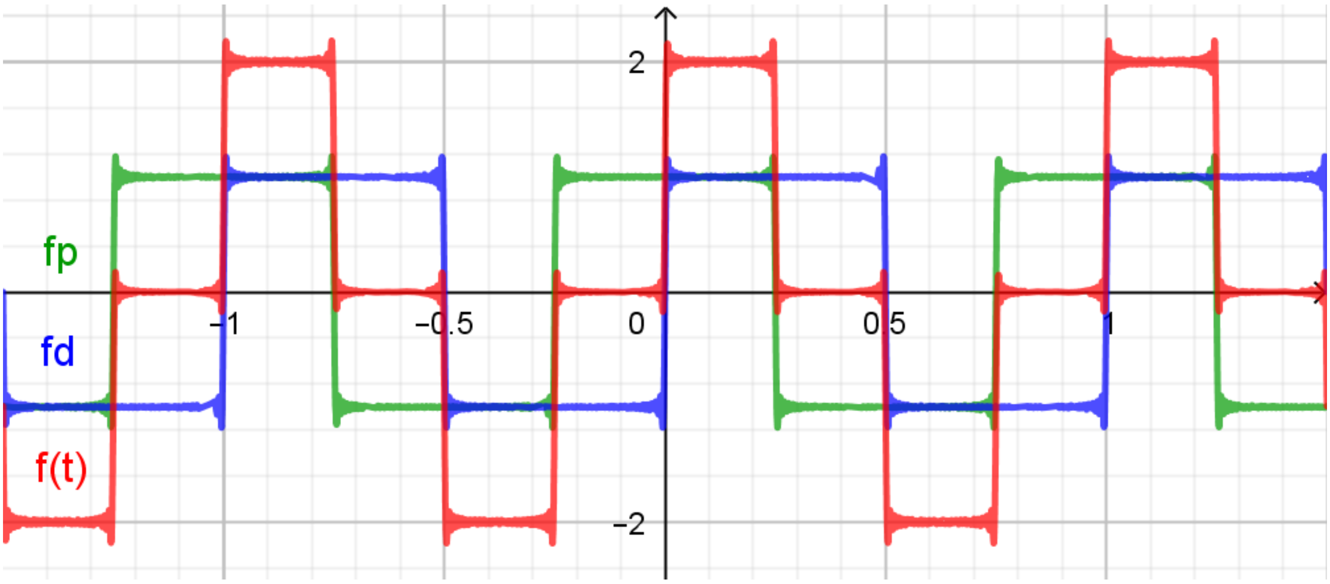
Funzione pari e dispari



Ap=1
Tp=1
ωp=2 π/ Tp
fp(t)=4 Ap / π Somma(Successione(1 / k cos(k ωp t) - 1 / (k + 2) cos((k + 2) ωp t), k, 1, 100, 4))

Ad=1
Td=1
ωd=2 π/ Td
fd(t)=4 Ad / π Somma(Successione(1 / k sin(k ωd t), k, 1, 100, 2))

La funzione f(t) somma della funzione pari fp e della funzione dispari fd

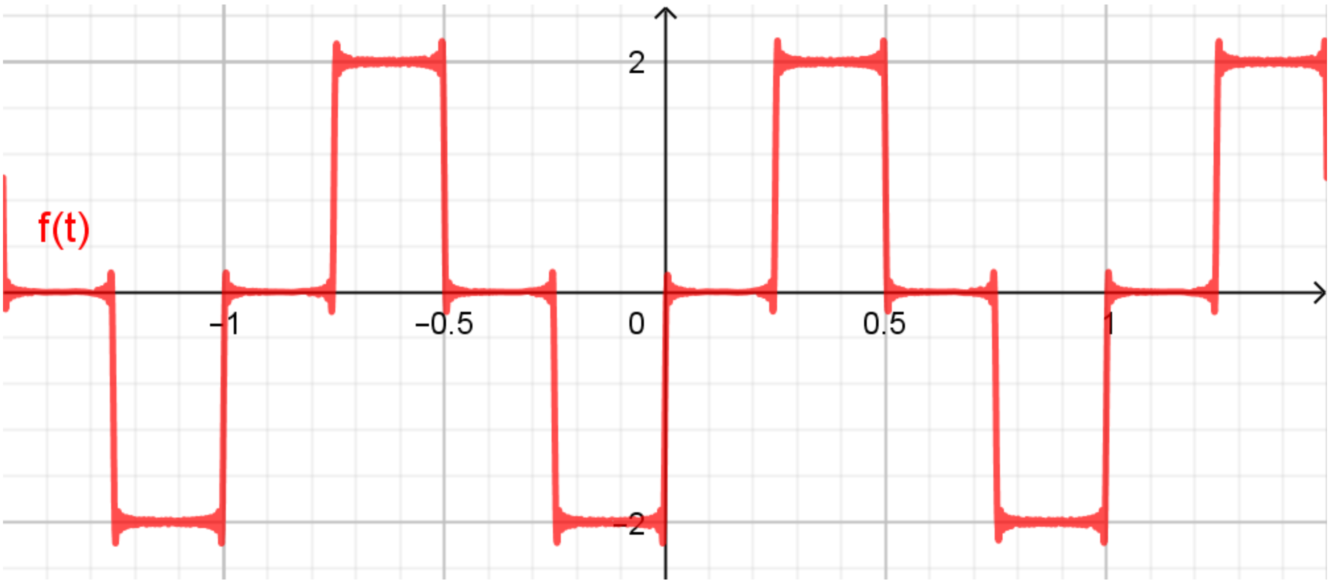


f(t) = fp(t) + fd(t)

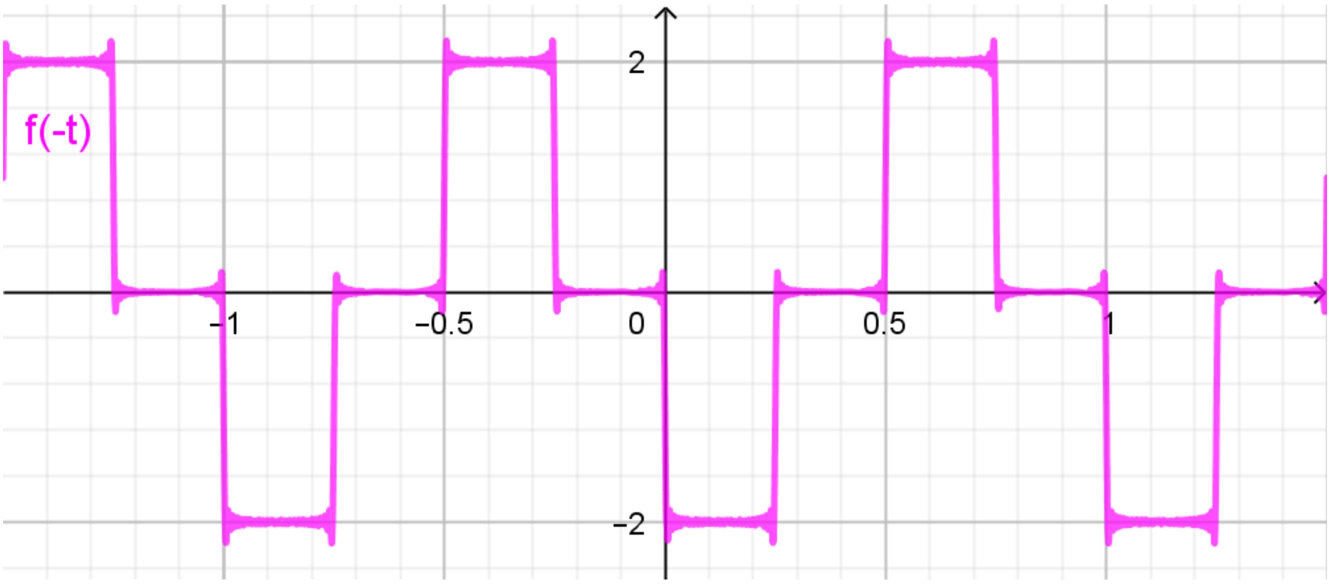
Si noti che la funzione f(t) è emisimmetrica e quindi nello sviluppo in serie non sono presenti armoniche pari

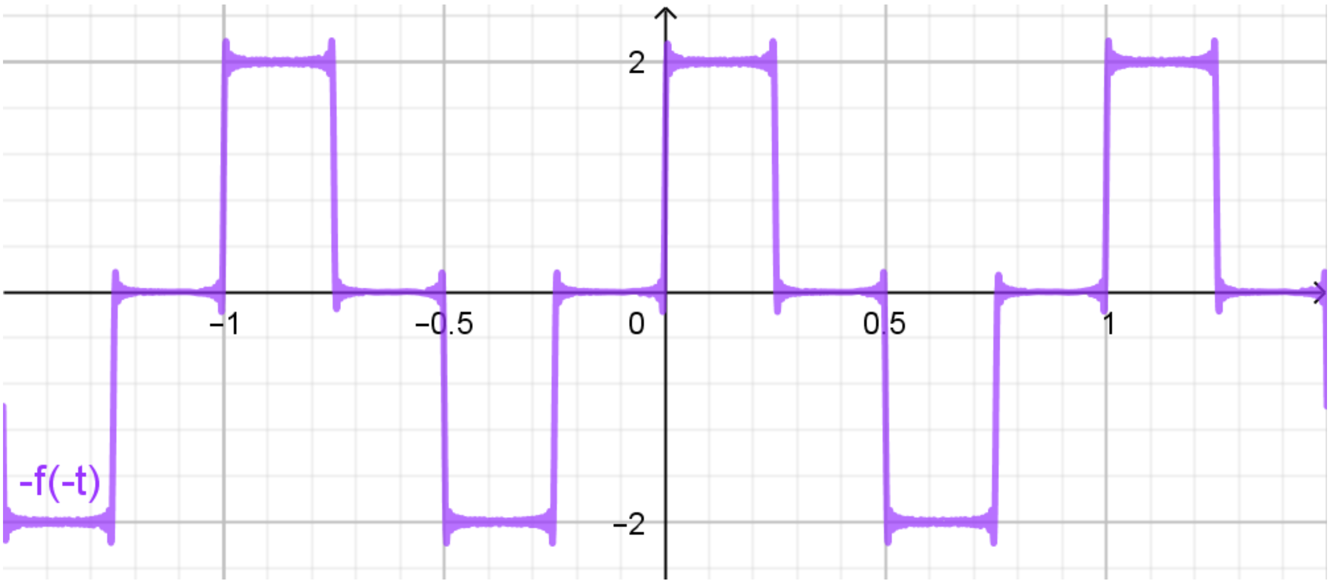
Esempio b

Determinare lo sviluppo in serie della seguente funzione f(t)



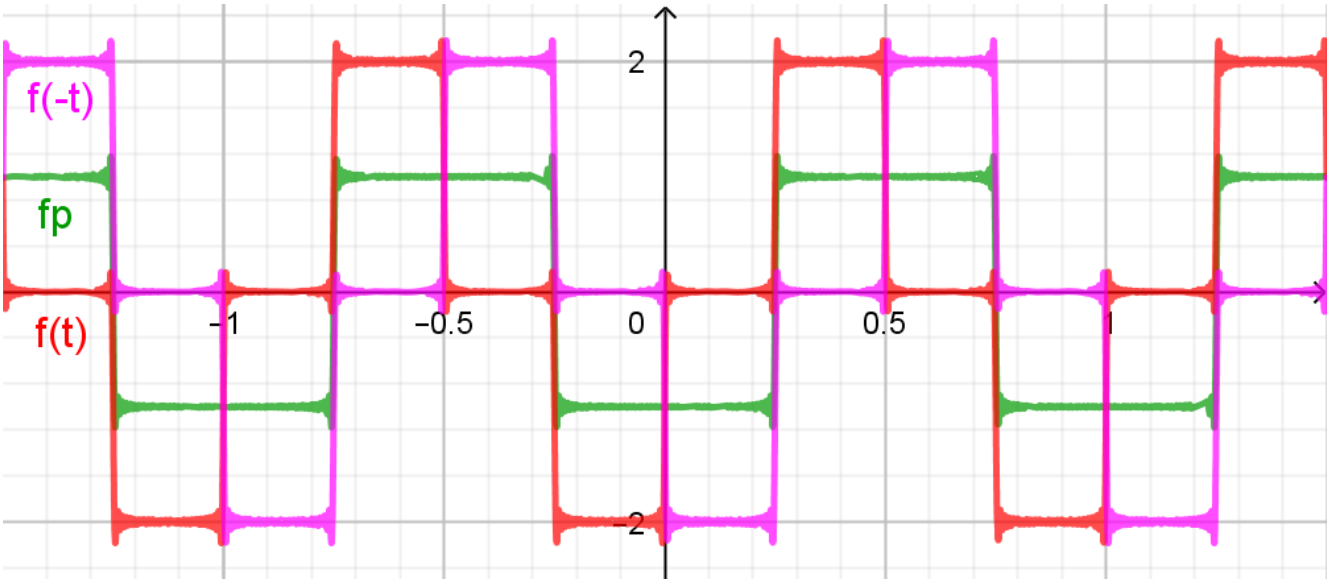
Data la funzione f(t) si determinano le funzioni f(-t) e -f(-t)



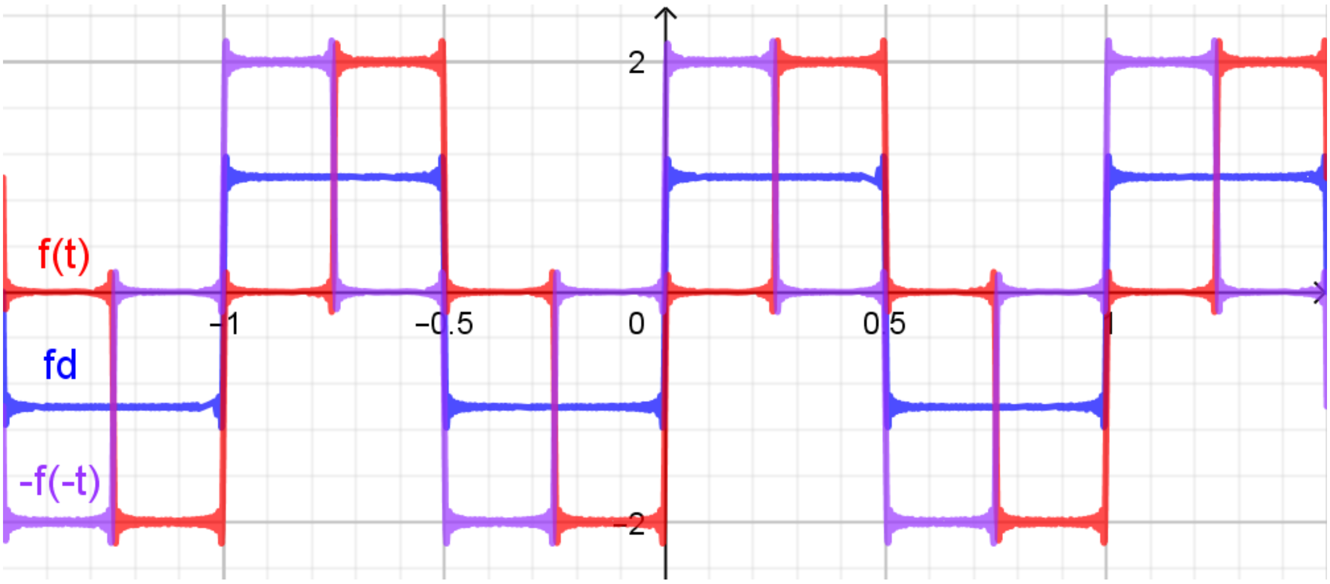


Quindi, si scompone la funzione f(t) nella somma di una funzione pari fp e una funzione dispari fd

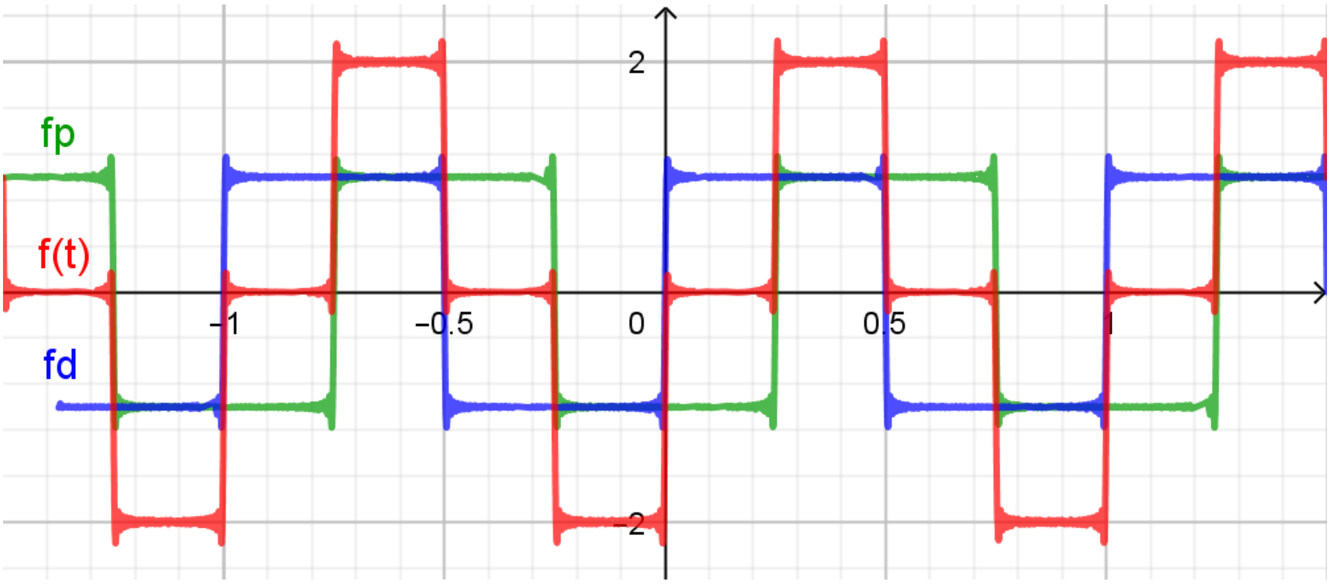
La funzione pari è fp = [f(t) + f(-t)] / 2



La funzione dispari è fd = [f(t) + (-f(-t))] / 2

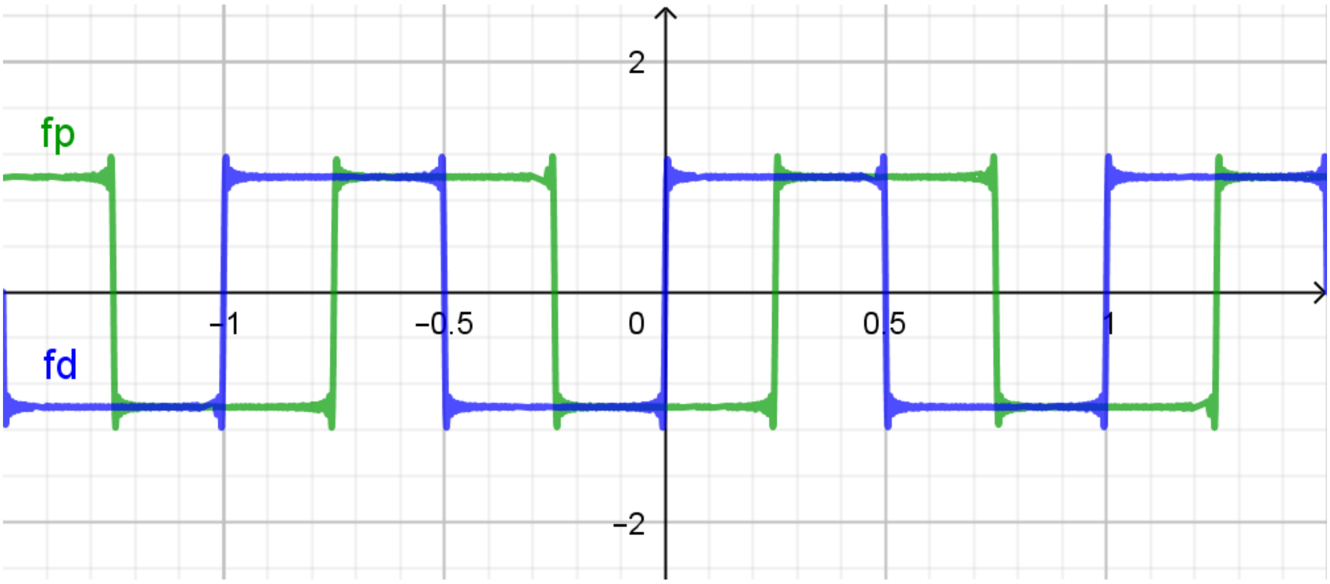


la funzione f(t) è la somma della funzione pari e della funzione dispari f(t) = fp + fd



Con Geogebra

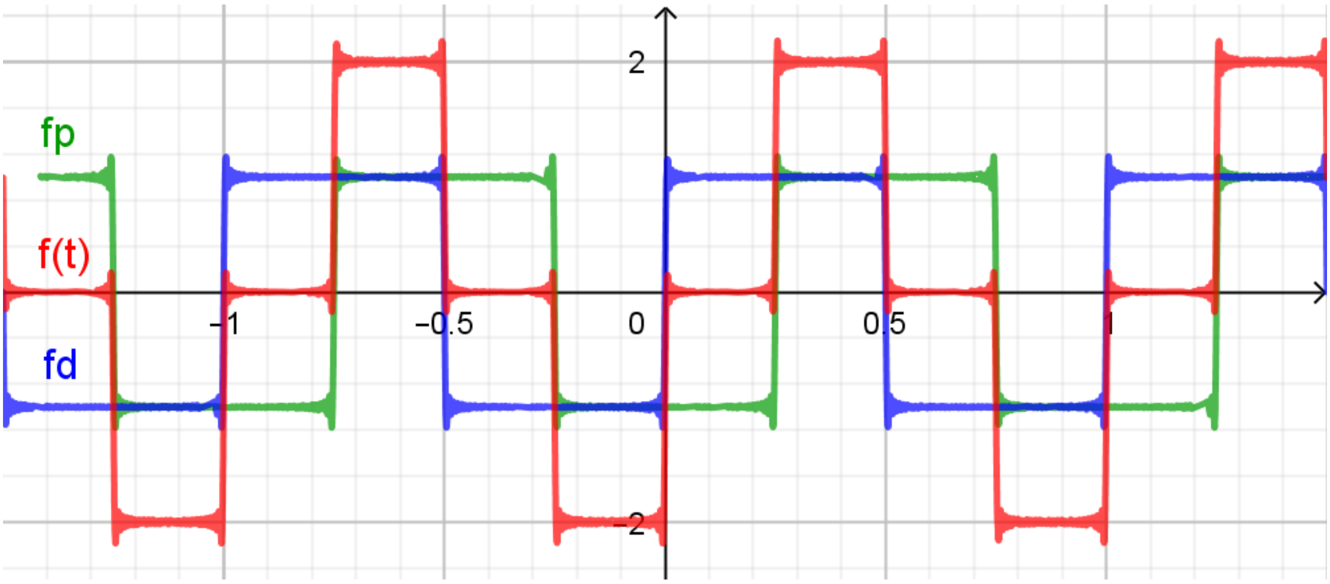
Funzione pari e dispari



Ap=1
Tp=1
ωp=2 π/ Tp
fp(t)=-4 Ap / π Somma(Successione(1 / k cos(k ωp t) - 1 / (k + 2) cos((k + 2) ωp t), k, 1, 100, 4))

Ad=1
Td=1
ωd=2 π/ Td
fd(t)=4 Ad / π Somma(Successione(1 / k sin(k ωd t), k, 1, 100, 2))

La funzione f(t) somma della funzione pari fp e della funzione dispari fd

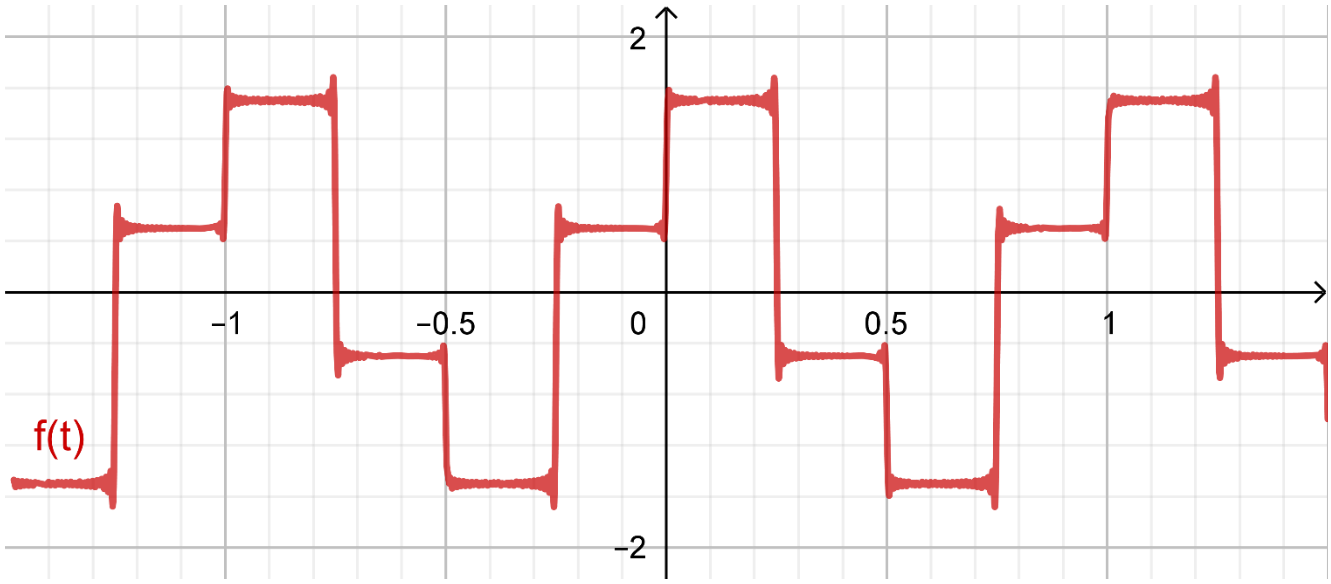


f(t) = fp(t) + fd(t)

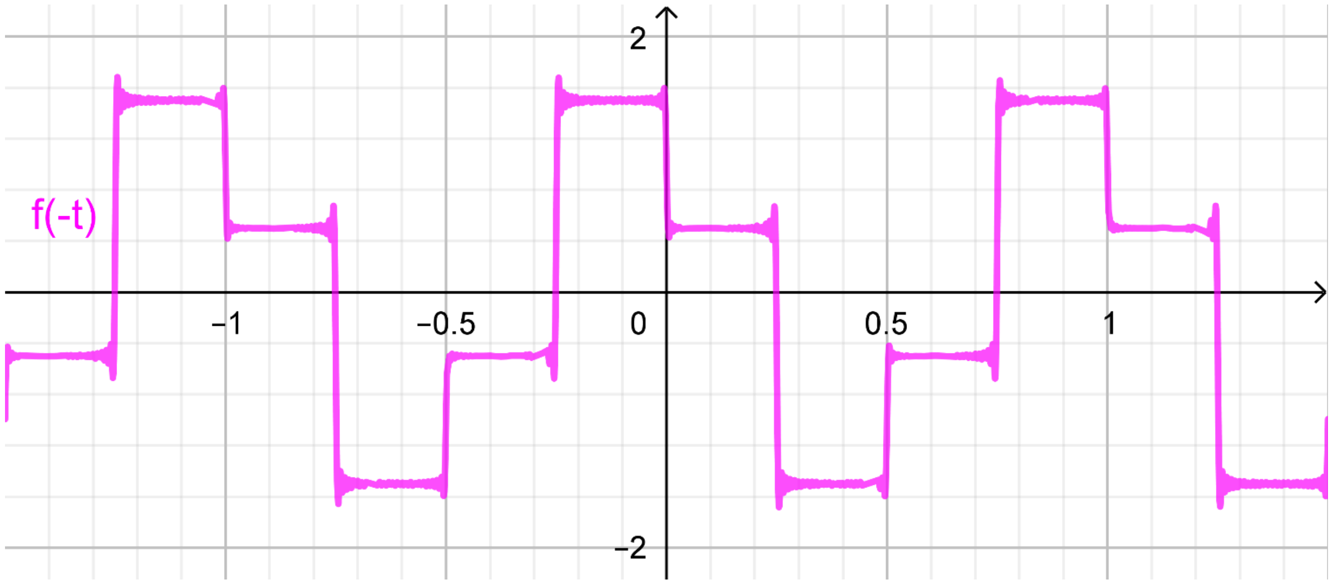
Si noti che la funzione f(t) è emisimmetrica e quindi nello sviluppo in serie non sono presenti armoniche pari

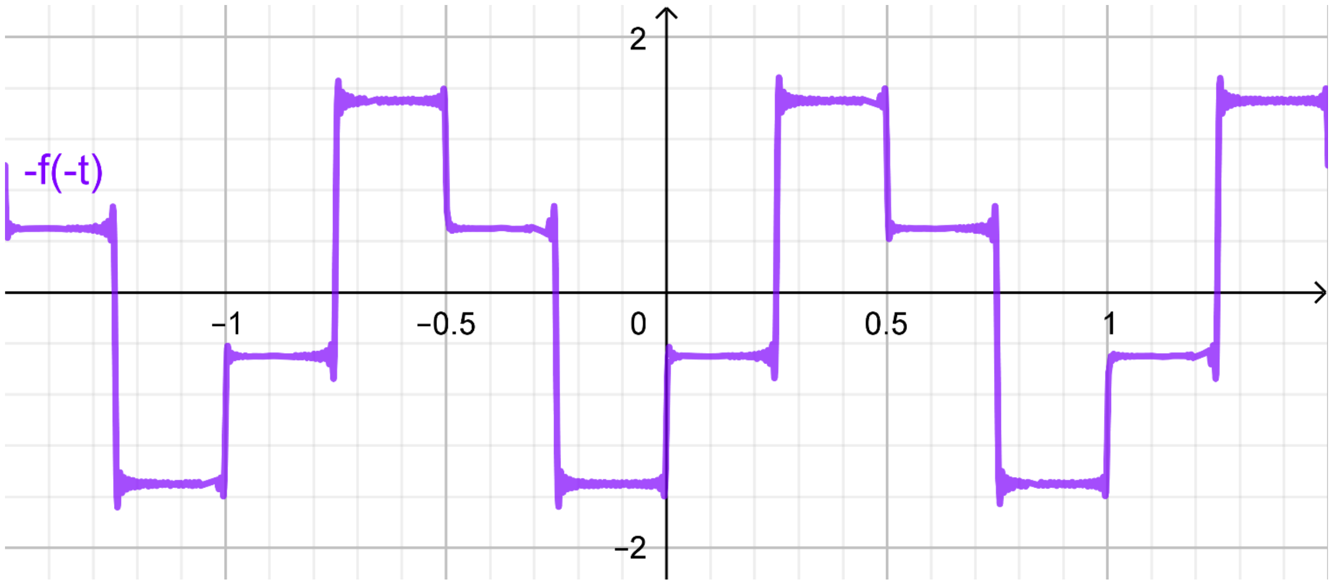
Esempio c

Determinare lo sviluppo in serie della seguente funzione f(t)



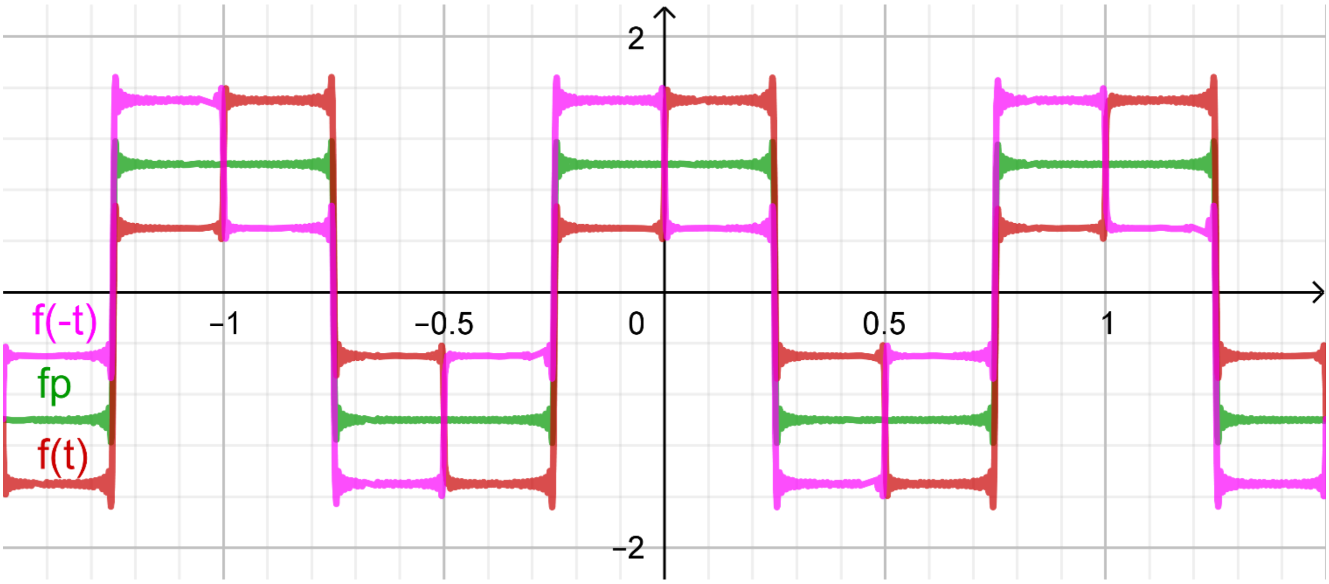
Data la funzione f(t) si determinano le funzioni f(-t) e -f(-t)



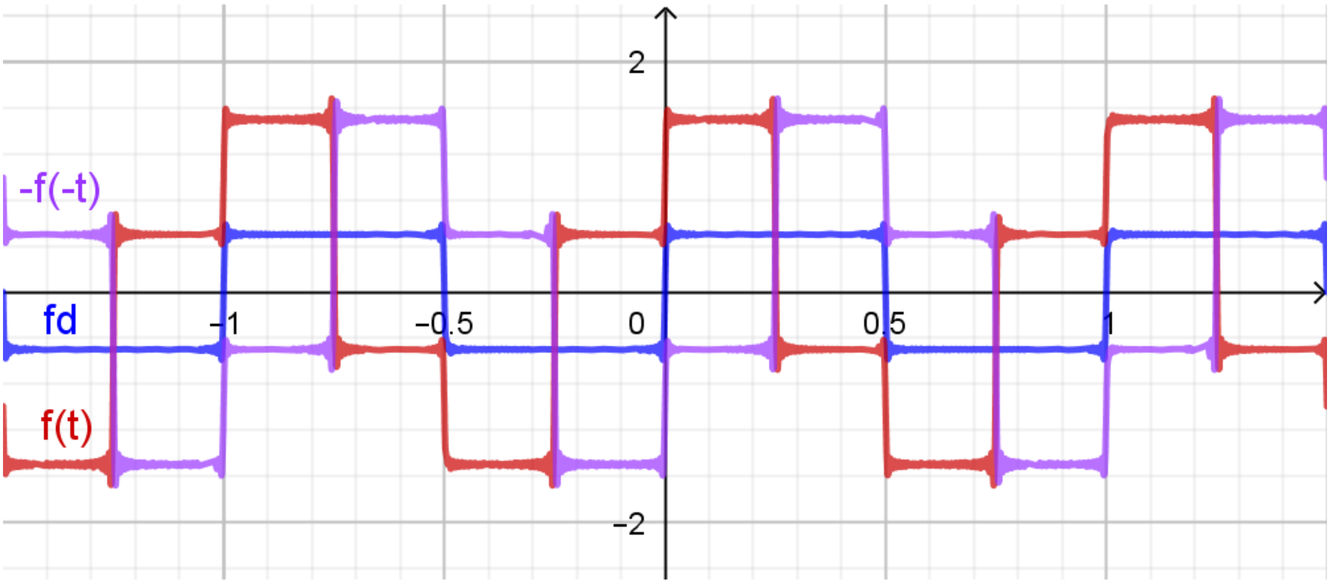


Quindi, si scompone la funzione f(t) nella somma di una funzione pari fp e una funzione dispari fd

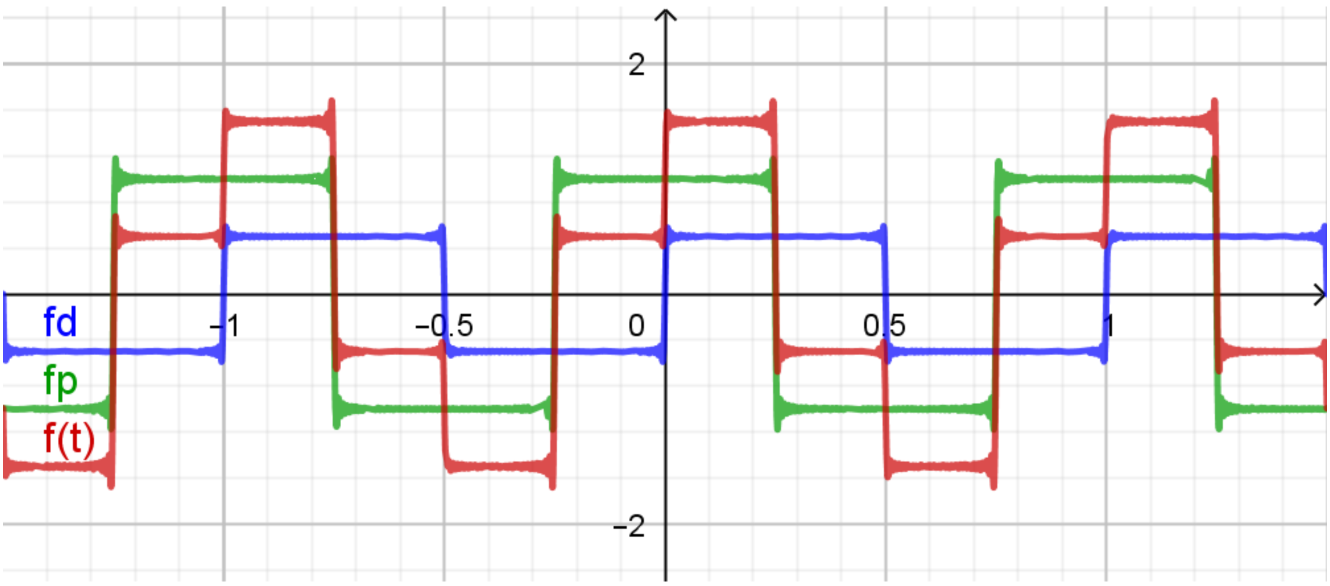
La funzione pari è fp = [f(t) + f(-t)] / 2



La funzione dispari è fd = [f(t) + (-f(-t))] / 2

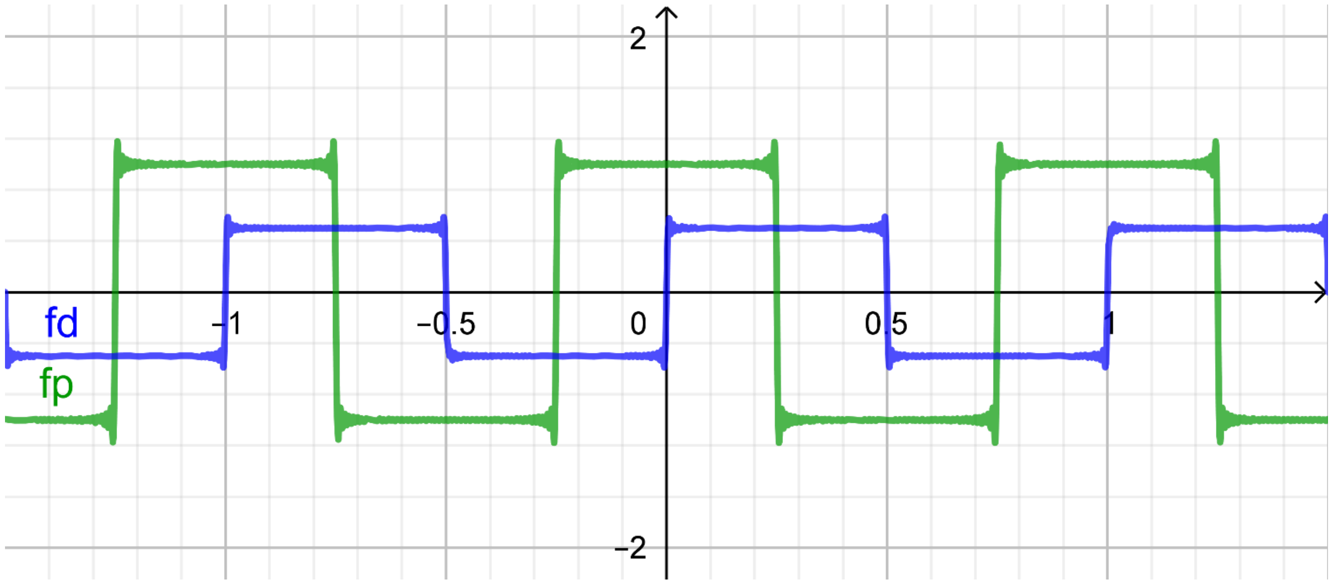


la funzione f(t) è la somma della funzione pari e della funzione dispari f(t) = fp + fd



Con Geogebra

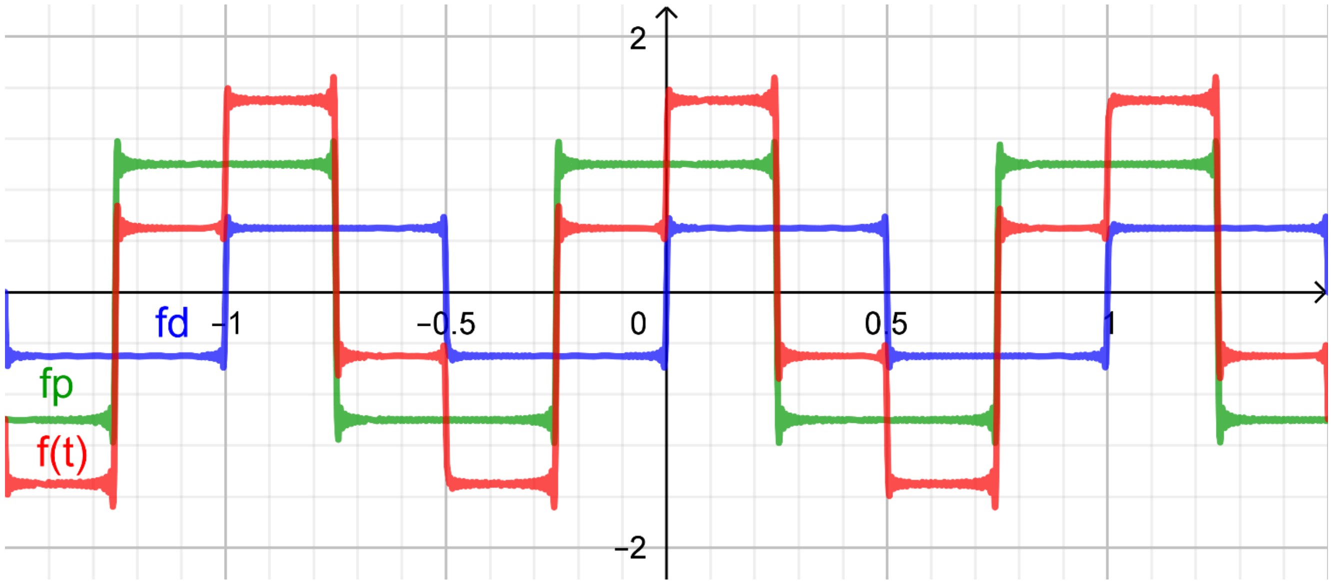
Funzione pari e dispari



Ap=1
Tp=1
ωp=2 π/ Tp
fp(t)=4 Ap / π Somma(Successione(1 / k cos(k ωp t) - 1 / (k + 2) cos((k + 2) ωp t), k, 1, 100, 4))

Ad=1/2
Td=1
ωd=2 π/ Td
fd(t)=4 Ad / π Somma(Successione(1 / k sin(k ωd t), k, 1, 100, 2))

La funzione f(t) somma della funzione pari fp e della funzione dispari fd



f(t) = fp(t) + fd(t)

Si noti che la funzione f(t) è emisimmetrica e quindi nello sviluppo in serie non sono presenti armoniche pari

Nota

Per tracciare con Geogebra $f(-t)$ e $-f(-t)$ si proceda nel seguente modo:

1 ricavare graficamente fp e fd

2 tracciare con Geogebra fp e fd

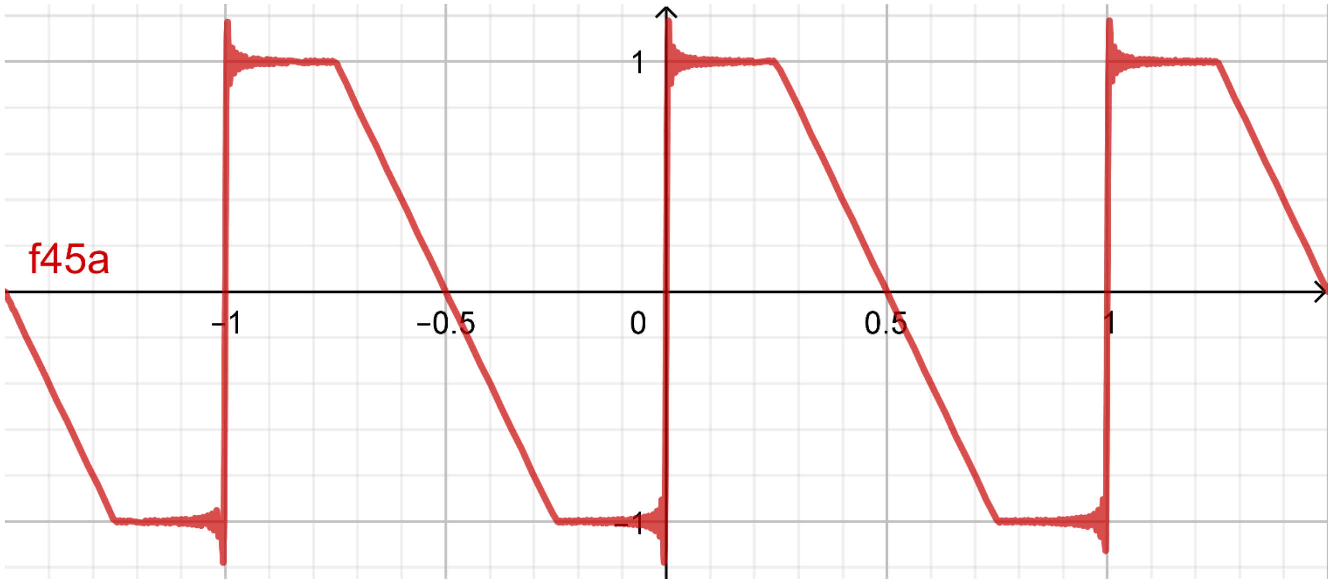
2 tracciare con Geogebra $f(t)$ = fp + fd

3 tracciare con Geogebra $f(-t)$ = 2 fp - $f(t)$!!!

4 tracciare con Geogebra $-f(-t)$ (funzione precedente cambiata di segno, oppure $-f(-t)$ = 2 fd - $f(t)$)

Esempio d

f45a funzione dispari somma di funzioni dispari

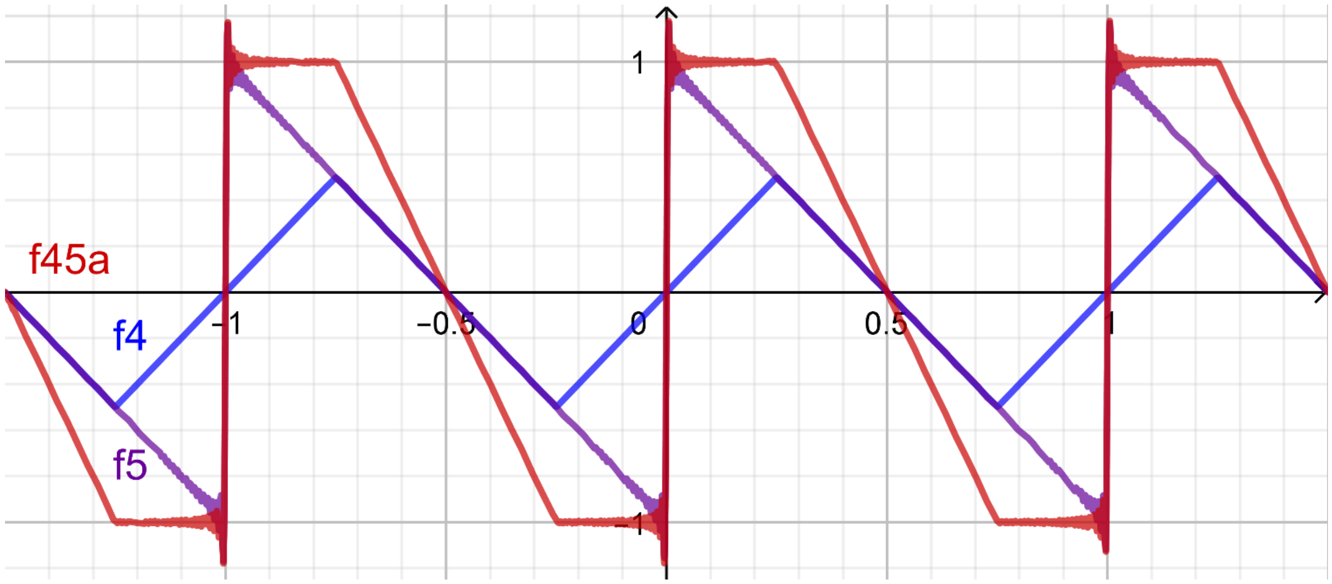


A=1
T=1

A4=A/2
T4=T
ω4=2π / T4
f4(t)=8A4 / π² Somma(Successione(1 / k² sin(k ω4 t) - 1 / (k + 2)² sin((k + 2) ω4 t), k, 1, 100, 4))

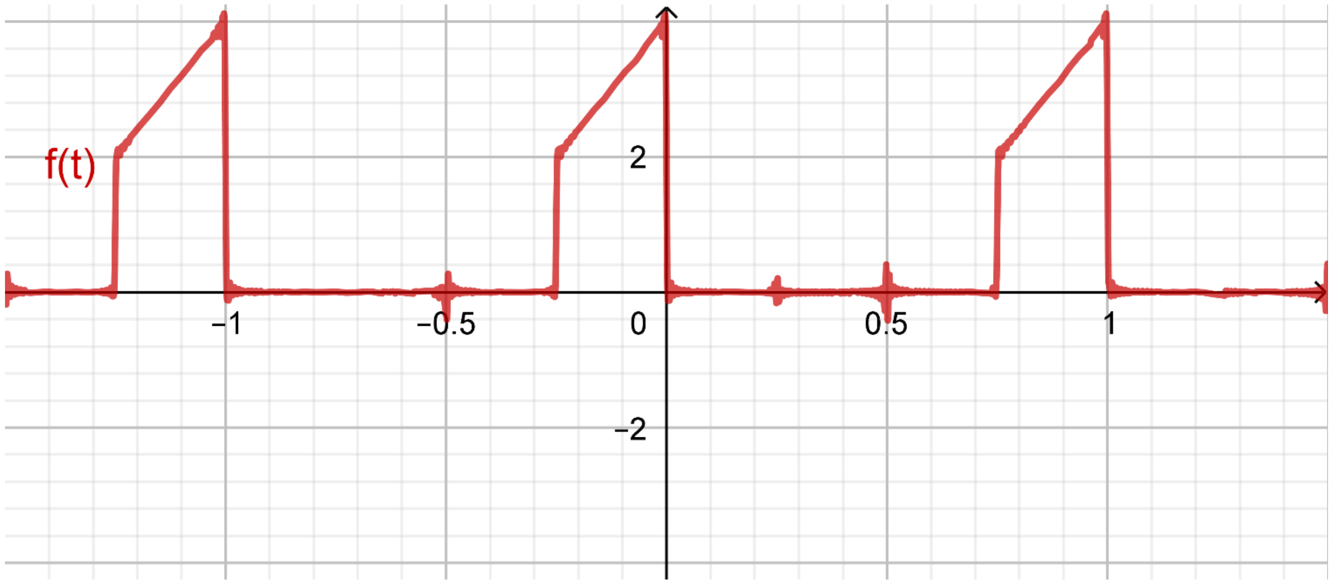
A5= A
T5=T
ω5=2π / T5
f5(t)=2A5 / π Somma(Successione(1 / k sin(k ω5 t), k, 1, 100))

f45a(t) = f4(t) + f5(t)

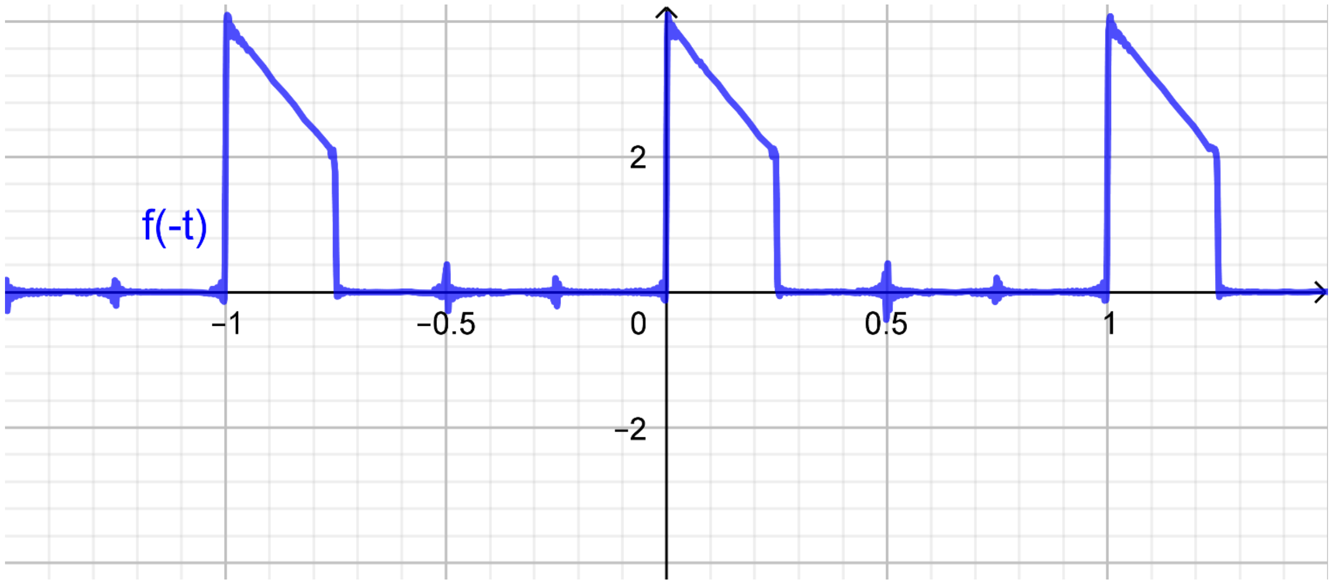


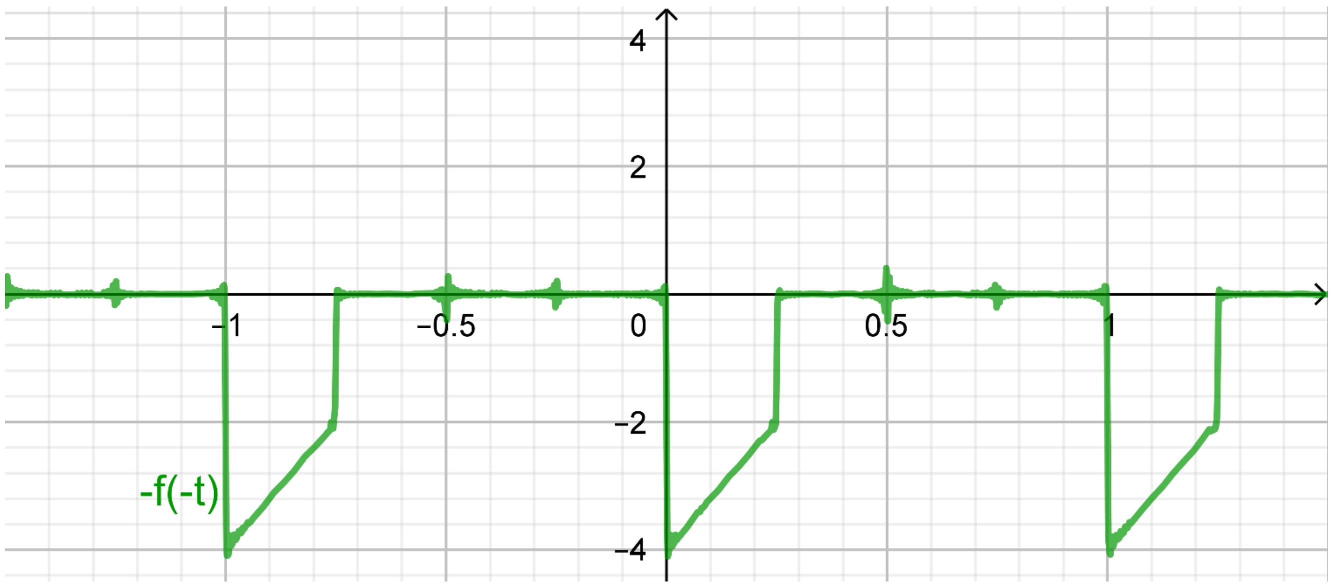
Esempio e

Determinare lo sviluppo in serie della seguente funzione f(t)



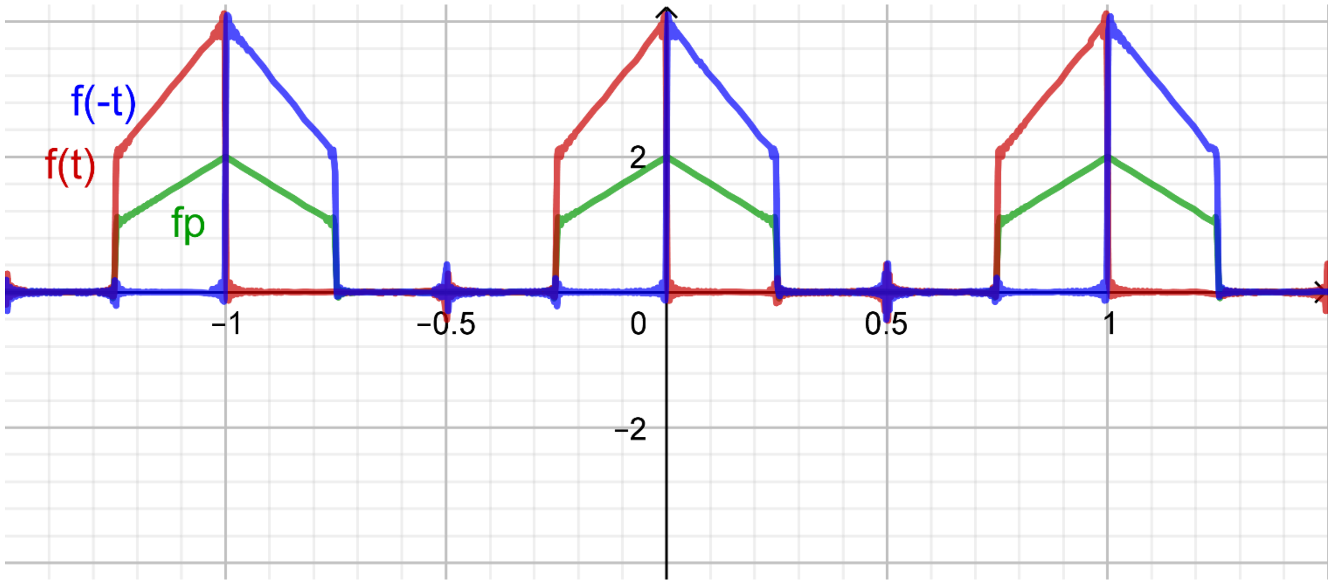
Data la funzione f(t) si determinano le funzioni f(-t) e -f(-t)



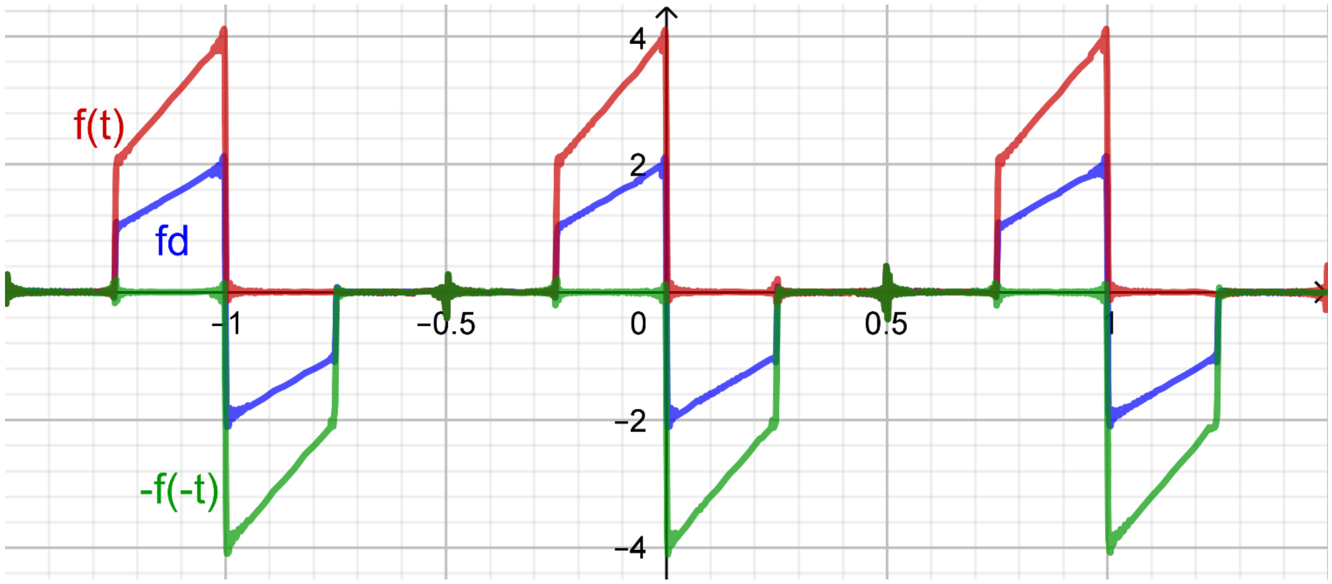


Quindi, si scompone la funzione f(t) nella somma di una funzione pari fp e una funzione dispari fd

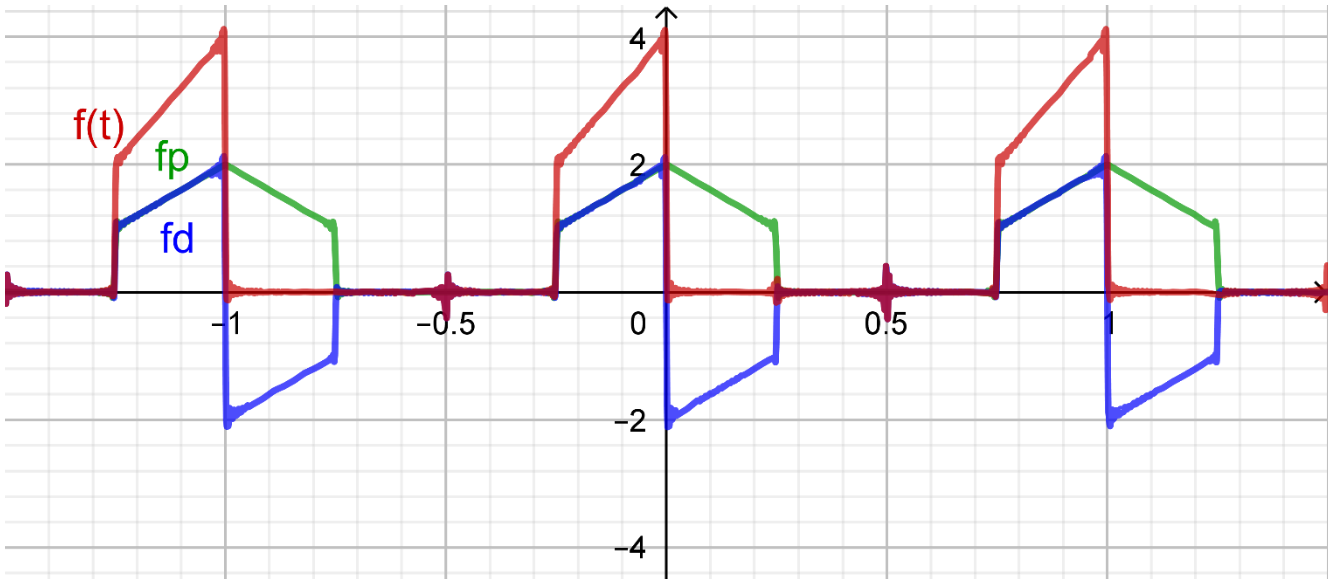
La funzione pari è fp = [f(t) + f(-t)] / 2



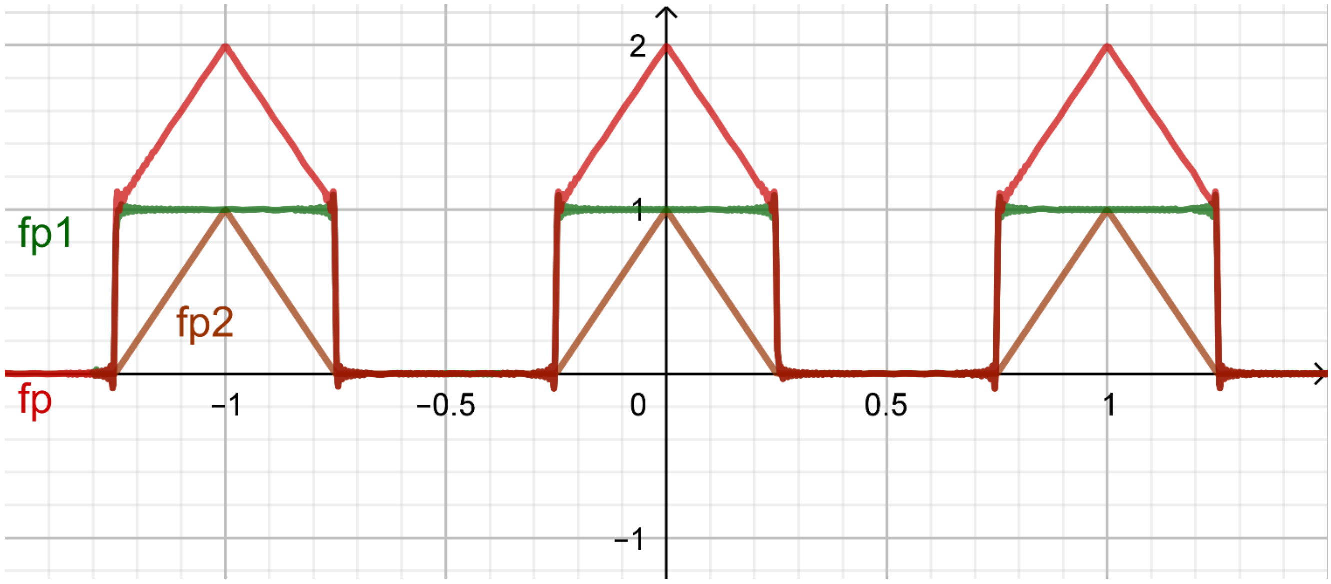
La funzione dispari è fd = [f(t) + (-f(-t))] / 2



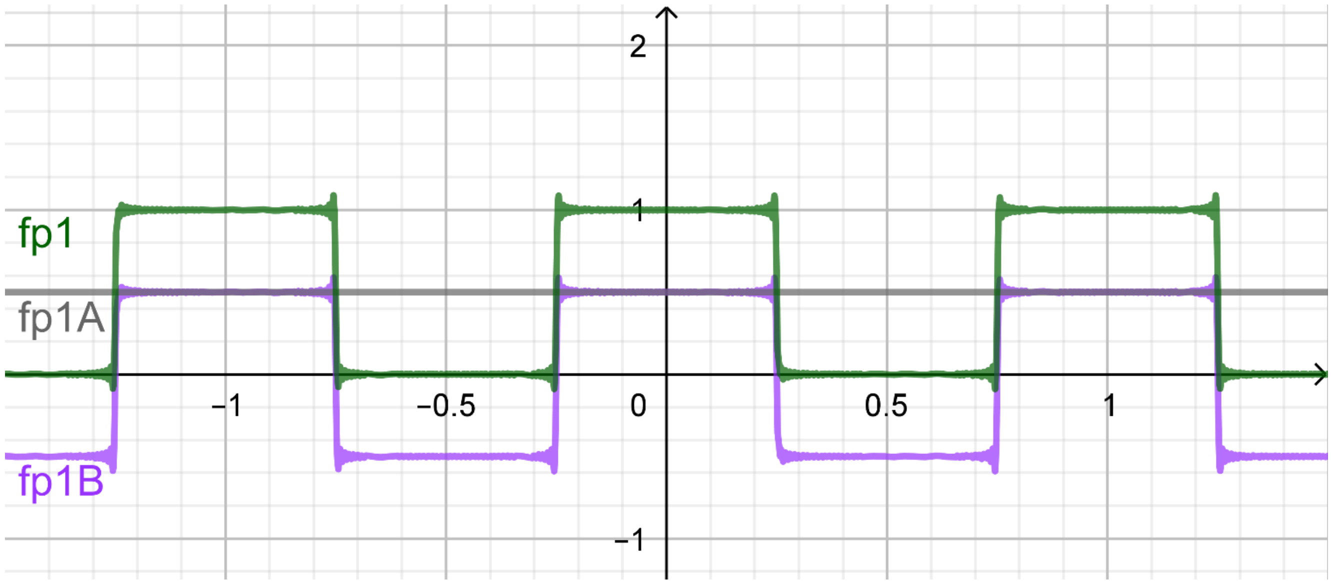
la funzione f(t) è la somma della funzione pari e della funzione dispari f(t) = fp + fd



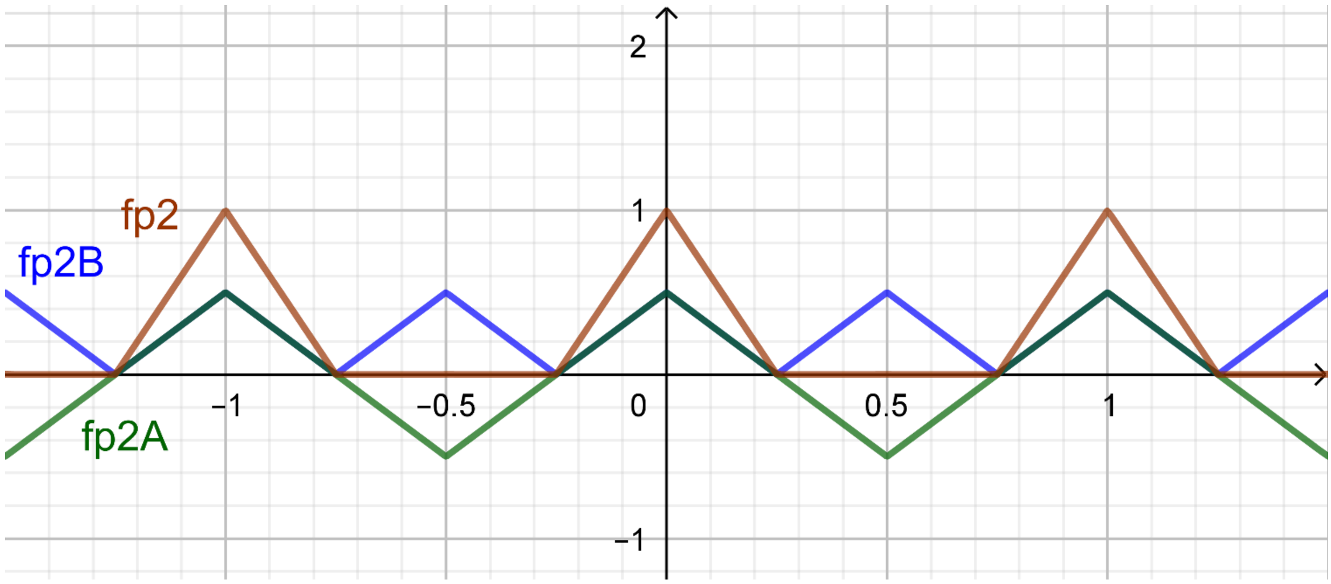
Si scompone la funzione pari nella somma di funzioni pari $fp(t) = fp1(t) + fp2(t)$



La funzione $fp1(t)$ è la somma di due funzioni pari $fp1(t) = fp1A(t) + fp1B(t)$

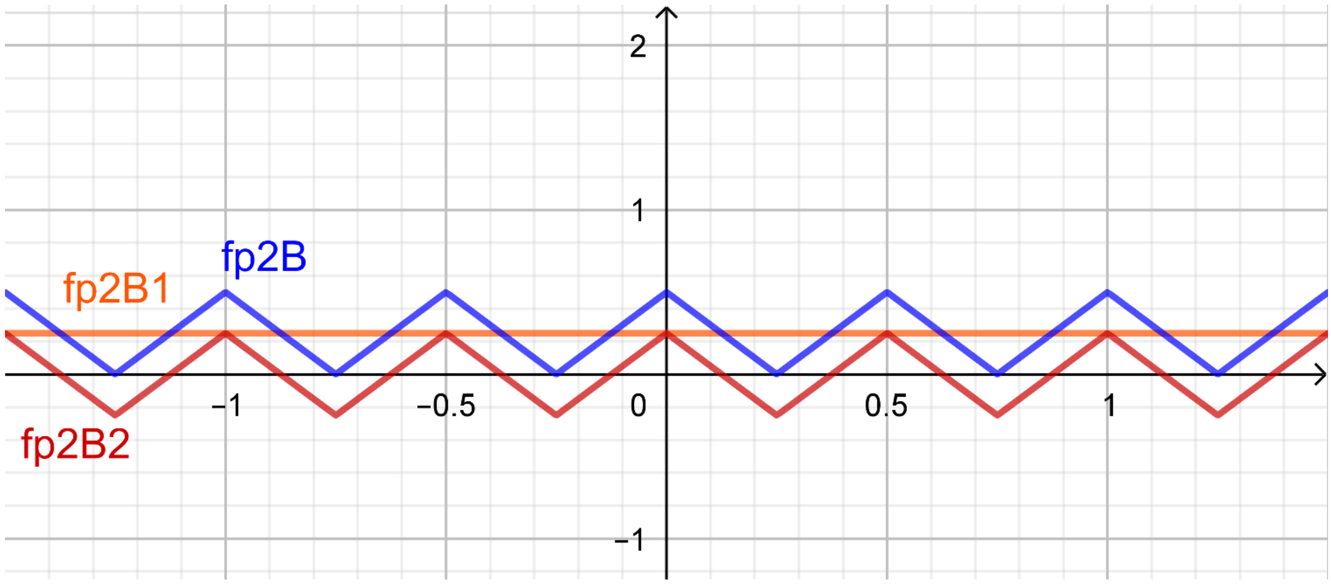


Anche la funzione $fp2(t)$ è la somma di due funzioni pari $fp2(t) = fp2A(t) + fp2B(t)$

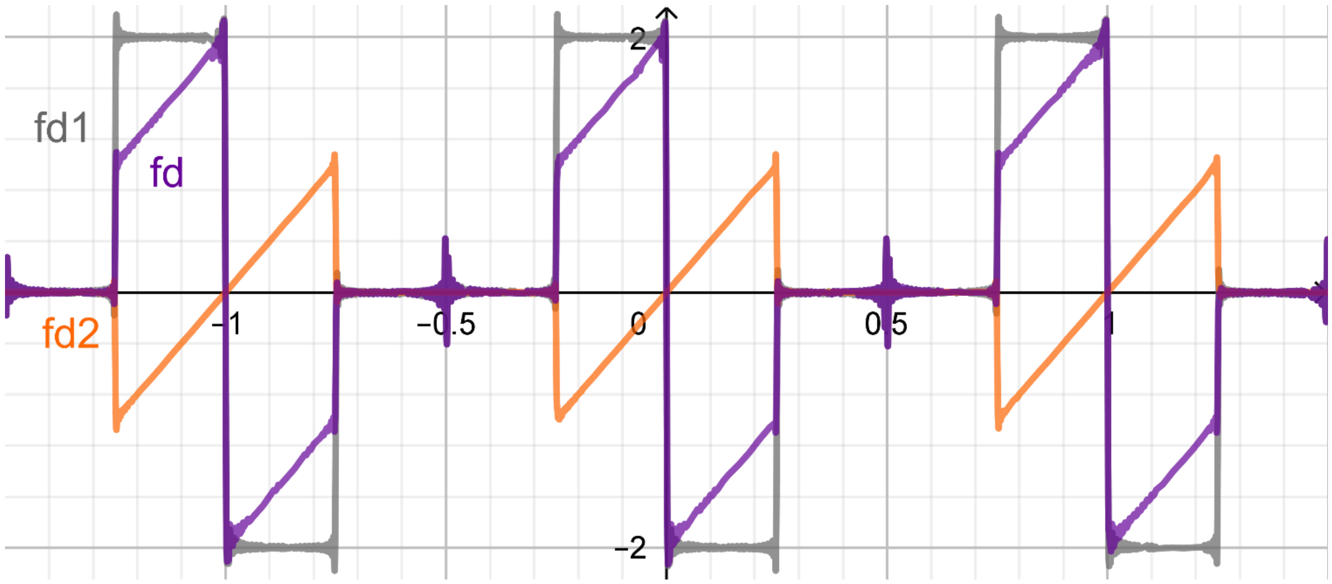


A sua volta, anche la funzione fp2B(t) può essere scomposta nella somma di due funzioni

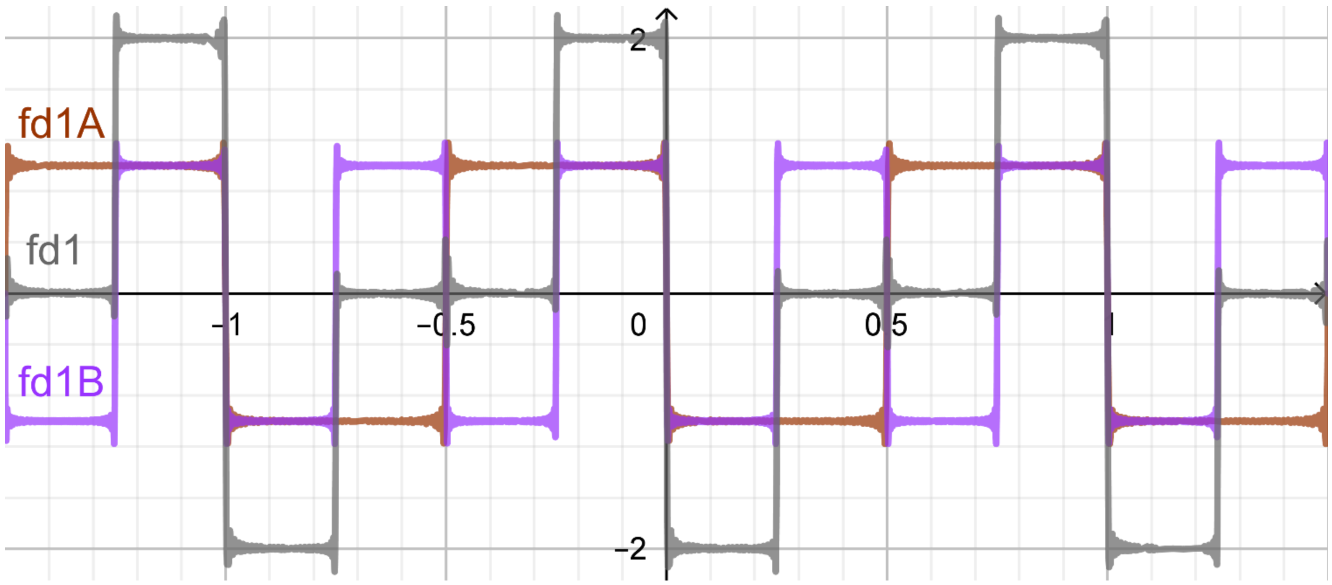
fp2B(t) = fp2B1(t) + fp2B2(t)



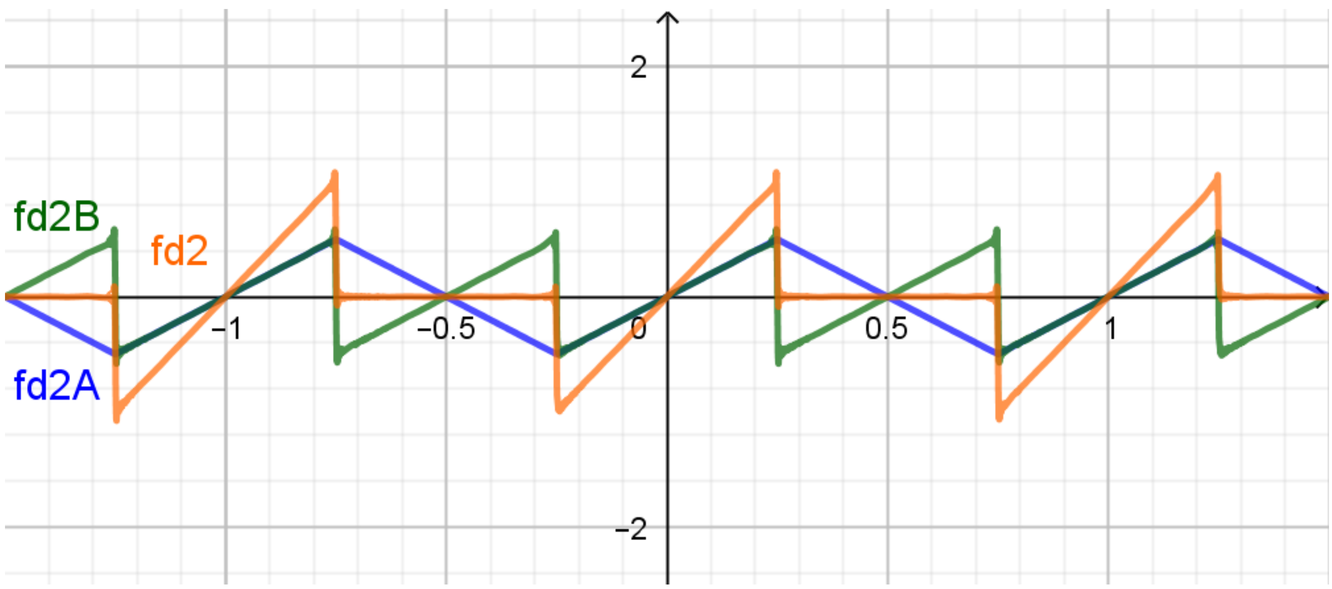
La funzione dispari fd(t) è la somma di funzioni dispari fd(t) = fd1(t) + fd2 (t)
(sono possibili altre soluzioni)



La funzione dispari fd1(t) può essere scomposta nella somma di funzioni dispari fd1(t) = fd1A(t) + fd1B(t)

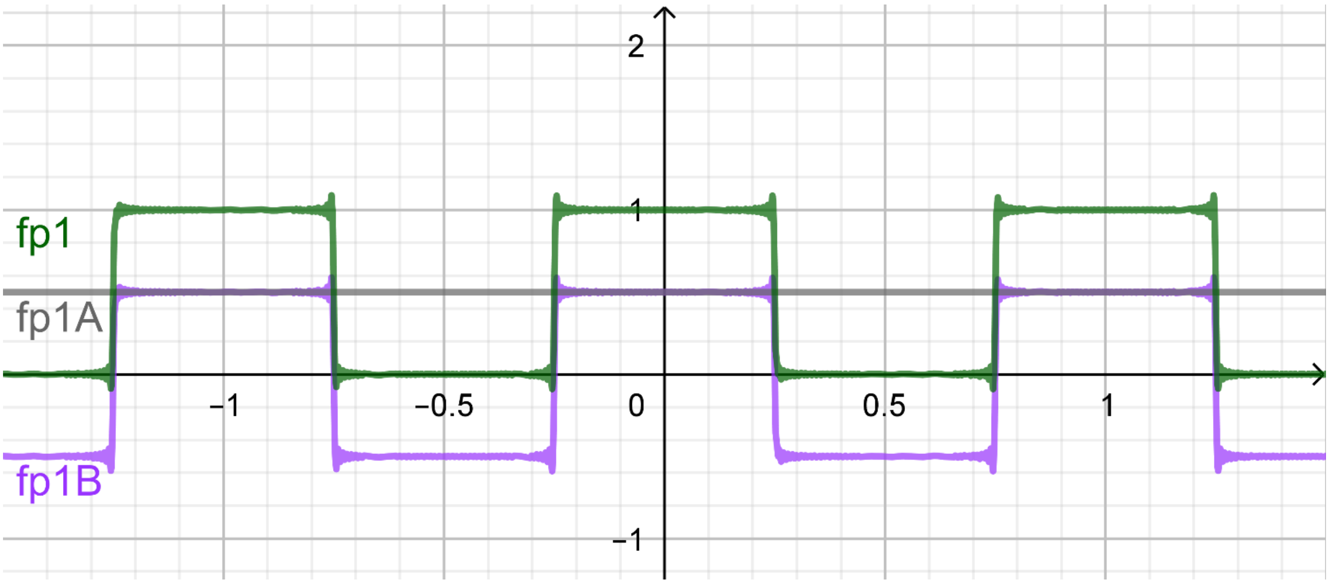


Anche la funzione dispari fd2(t) è scomponibile nella somma di funzioni dispari fd2(t) = fd2A(t) + fd2B(t)



Con Geogebra

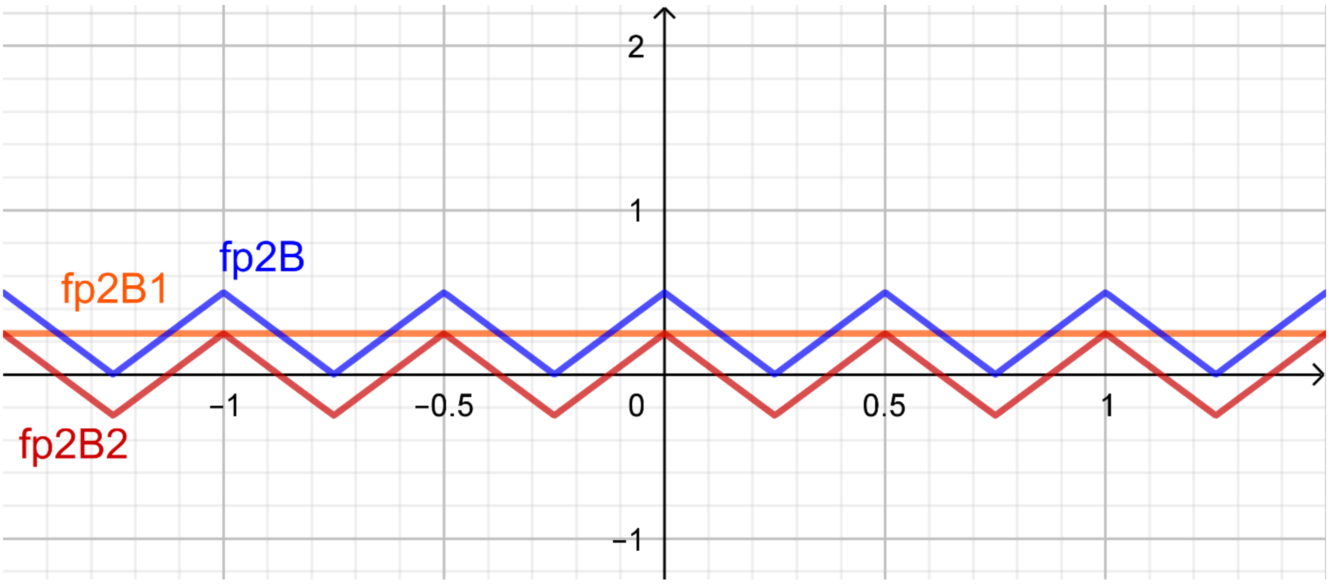
Funzione pari



fp1A(t)=0.5 A

Ap1B=0.5 A
Tp1B=T
ωp1B=2 π/ Tp1B
fp1B(t)=4 Ap1B / π Somma(Successione(1 / k cos(k ωp1B t) - 1 / (k + 2) cos((k + 2) ωp1B t), k, 1, 100, 4))

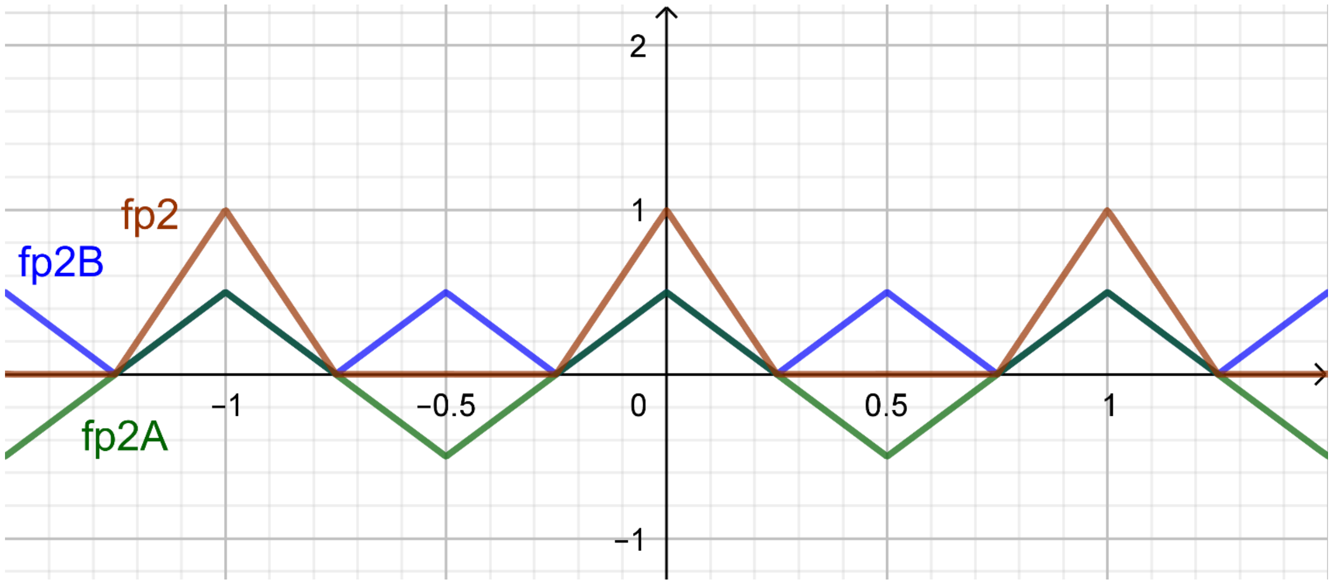
fp1(t) = fp1A(t) + fp1B(t)



fp2B1(t)=0.25 A

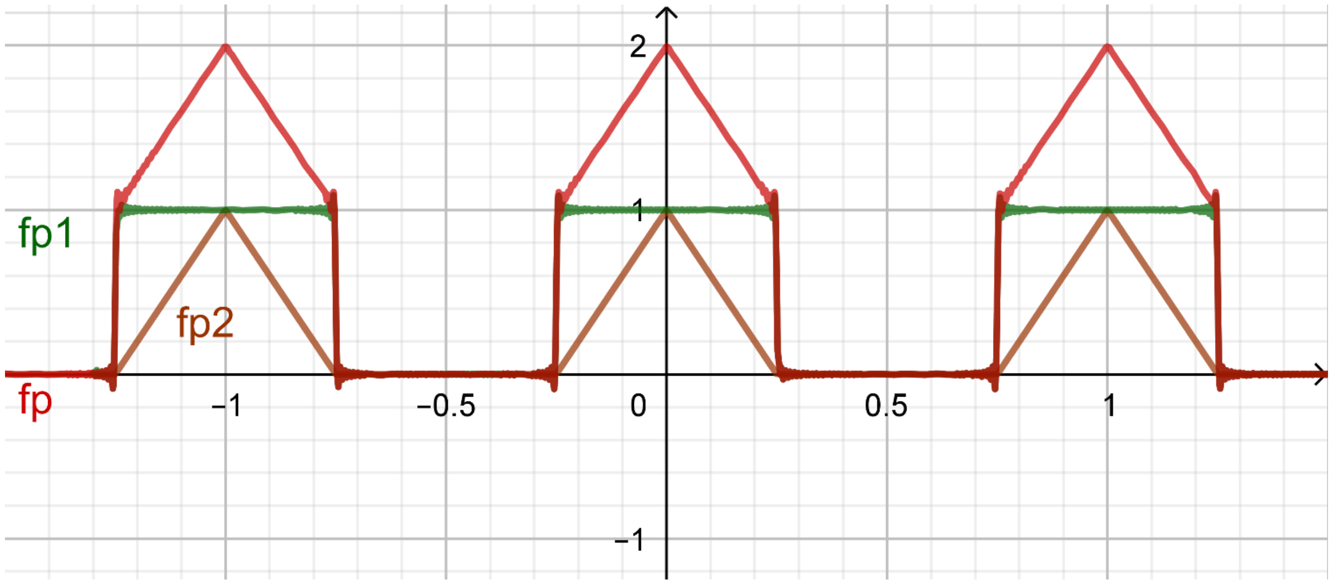
Ap2B2=0.25A
Tp2B2=T/2
ωp2B2=2 π/ Tp2B2
fp2B2(t)= 8Ap2B2 / π^2 Somma(Successione(1 / k^2 cos(k ωp2B2 t), k, 1, 100, 2))

fp2B(t) = fp2B1(t) + fp2B2(t)



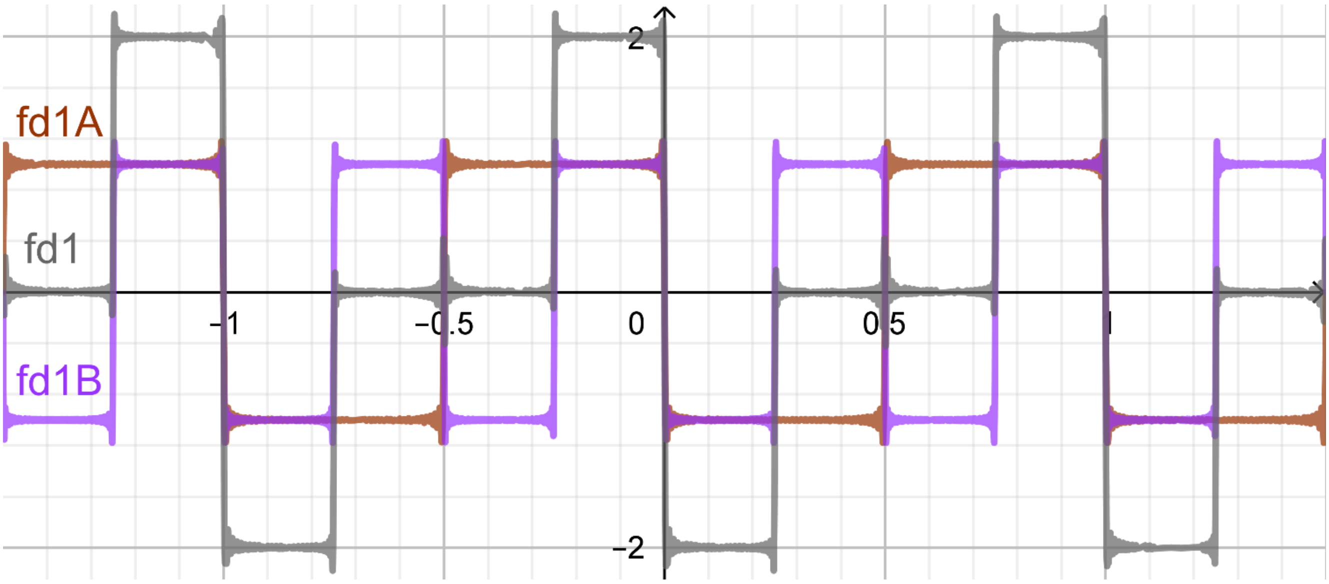
Ap2A=0.5 A
Tp2A=T
ωp2A=2 π/ Tp2A
fp2A(t)= 8Ap2A / π^2 Somma(Successione(1 / k^2 cos(k ωp2A t), k, 1, 100, 2))

fp2(t) = fp2A(t) + fp2B(t)



fp(t) = fp1(t) + fp2(t)

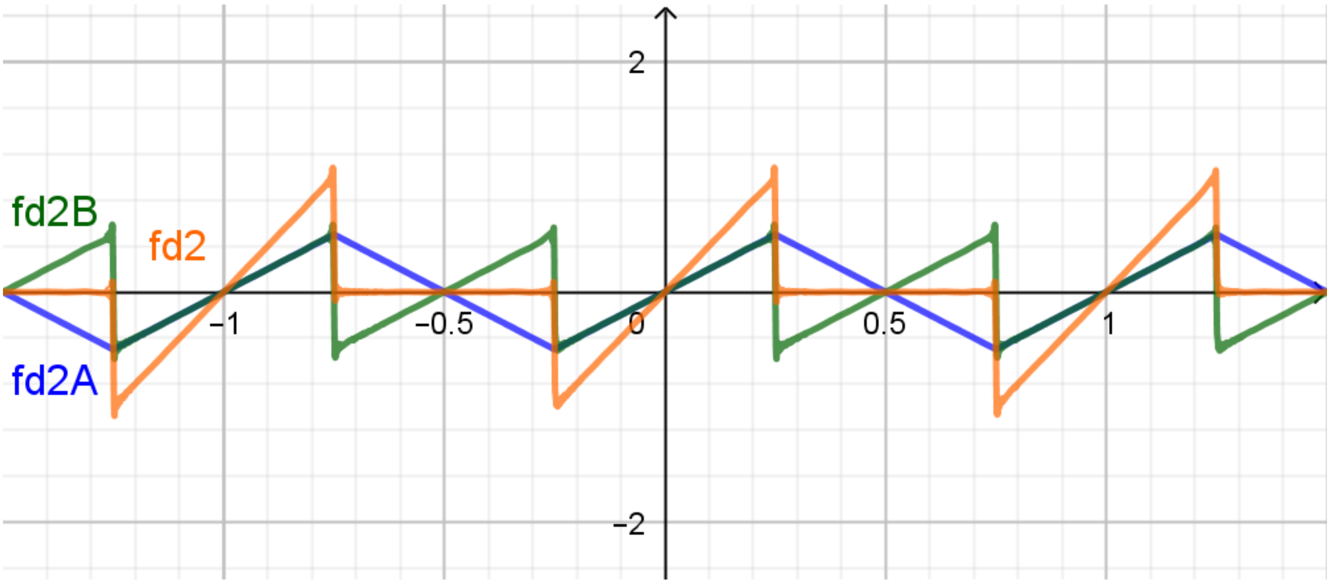
Funzione dispari



Ad1A=A
Td1A=T
ωd1A=2 π/ Td1A
fd1A(t)=- 4 Ad1A / π Somma(Successione(1 / k sin(k ωd1A t), k, 1, 100, 2))

Ad1B=A
Td1B=T/2
ωd1B=2 π/ Td1B
fd1B(t)=- 4 Ad1B / π Somma(Successione(1 / k sin(k ωd1B t), k, 1, 100, 2))

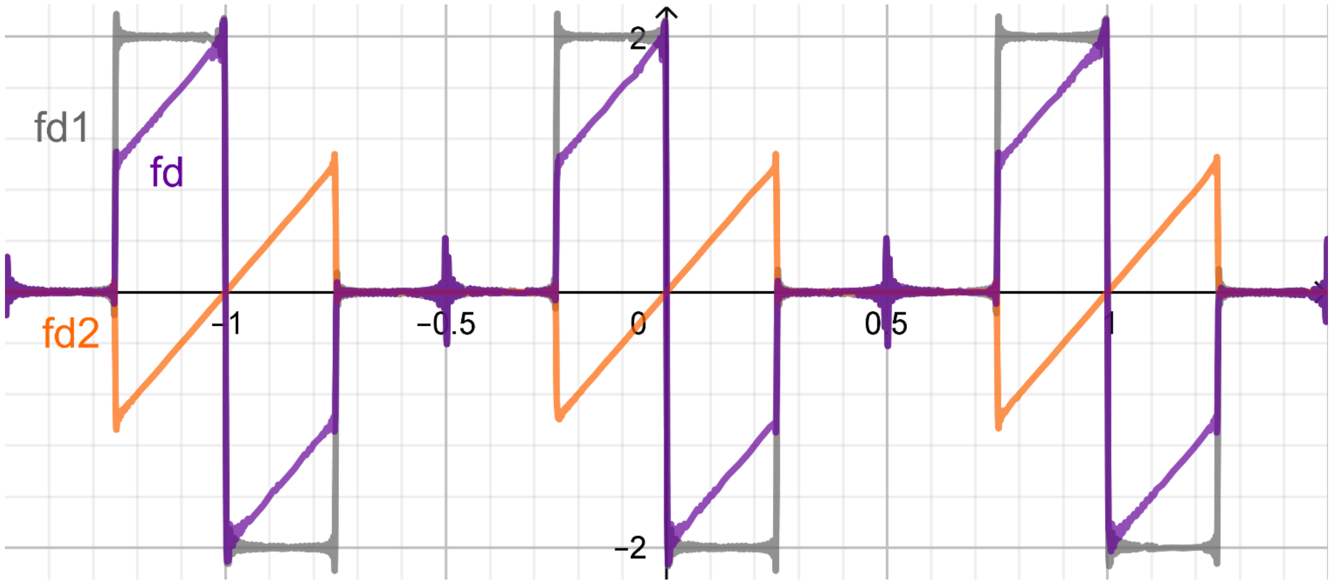
fd1(t) = fd1A(t) + fd1B(t)



Ad2A=A/2
Td2A=T
ωd2A=2 π/ Td2A
fd2A(t)=8 Ad2A / π^2 Somma(Successione(1 / k^2 sin(k ωd2A t) - 1 / (k+2)^2 sin((k+2) ωd2A t), k, 1, 100, 4))

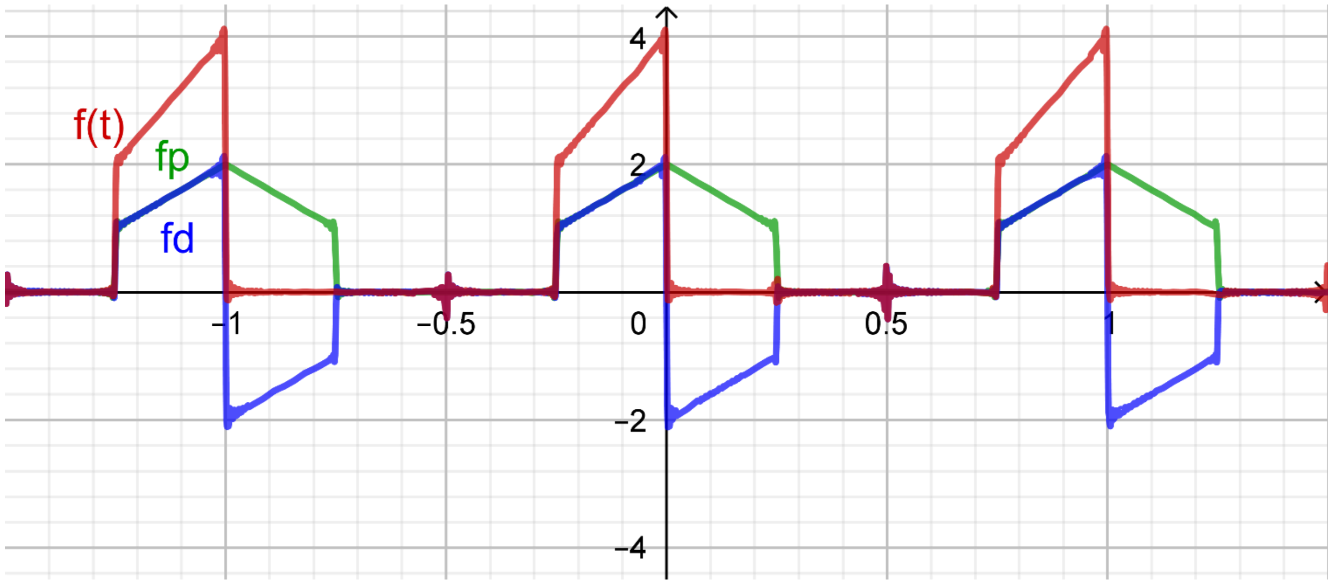
Ad2B=A/2
Td2B=T/2
ωd2B=2 π/ Td2B
fd2B(t)=2 Ad2B / π Somma(Successione(1 / k sin(k ωd2B t) - 1 / (k+1) sin((k+1) ωd2B t), k, 1, 100,2))

fd2(t) = fd2A(t) + fd2B(t)



fd(t) = fd1(t) + fd2 (t)

La funzione f(t) somma della funzione pari fp e della funzione dispari fd

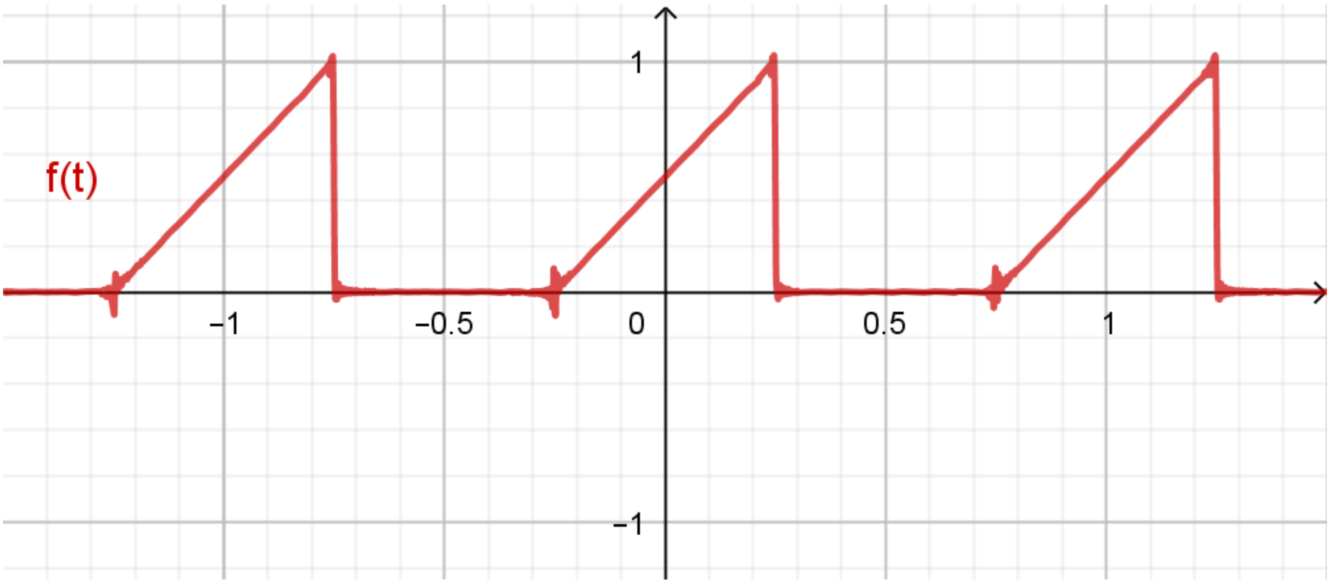


f(t) = fp(t) + fd(t)

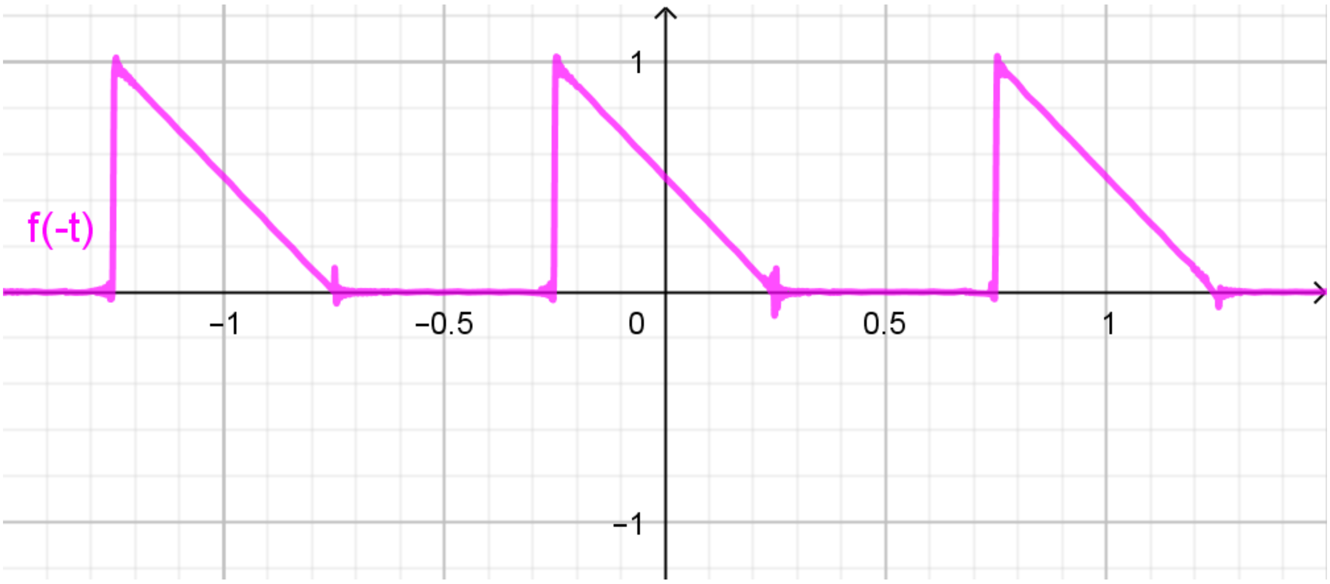
Seguendo il procedimento descritto negli esempi precedenti, si tracci lo sviluppo in serie della funzione fB al seguente collegamento

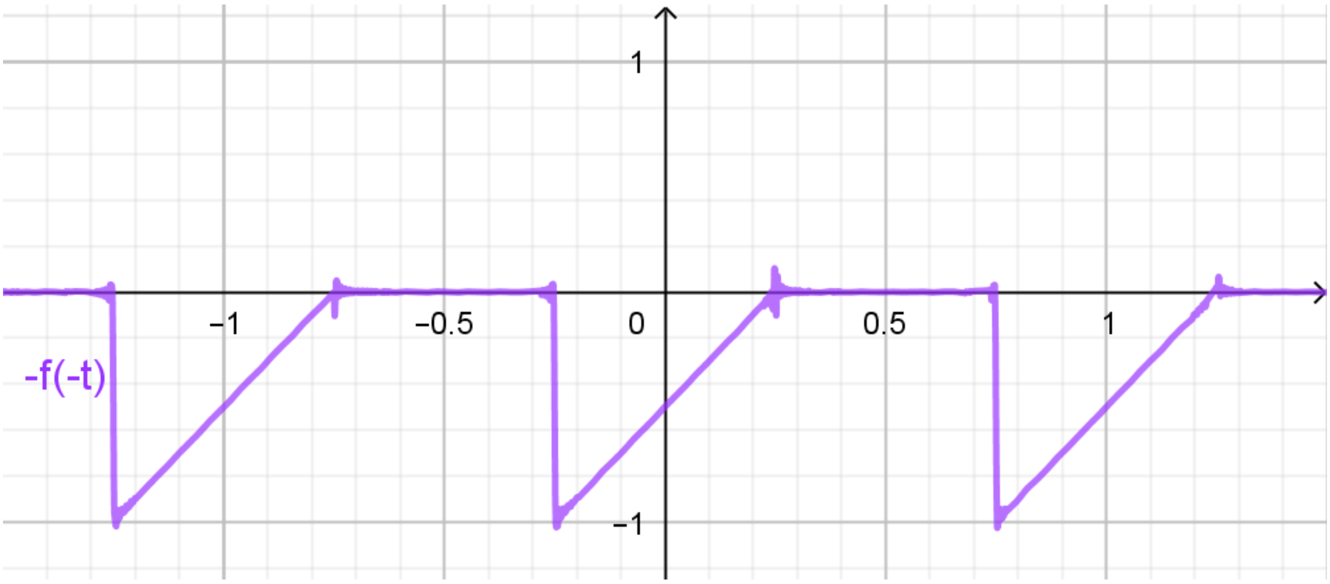
http://www.schoolofnerd.it/sites/default/files/FB.pdf

In pratica, si tratta di replicare con Geogebra lo sviluppo in serie di Fourier della seguente funzione f(t) (utilizzare la funzione somma di successioni e considerare tutte le armoniche fino all'ordine 100).



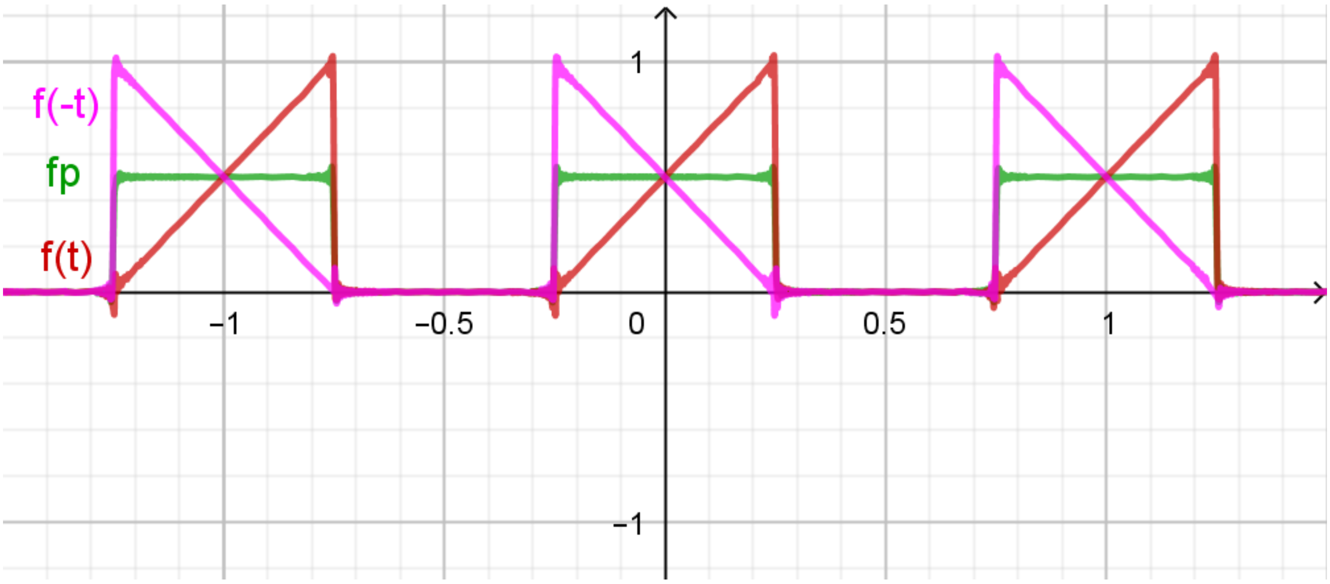
Data la funzione f(t) si determinano le funzioni f(-t) e -f(-t)



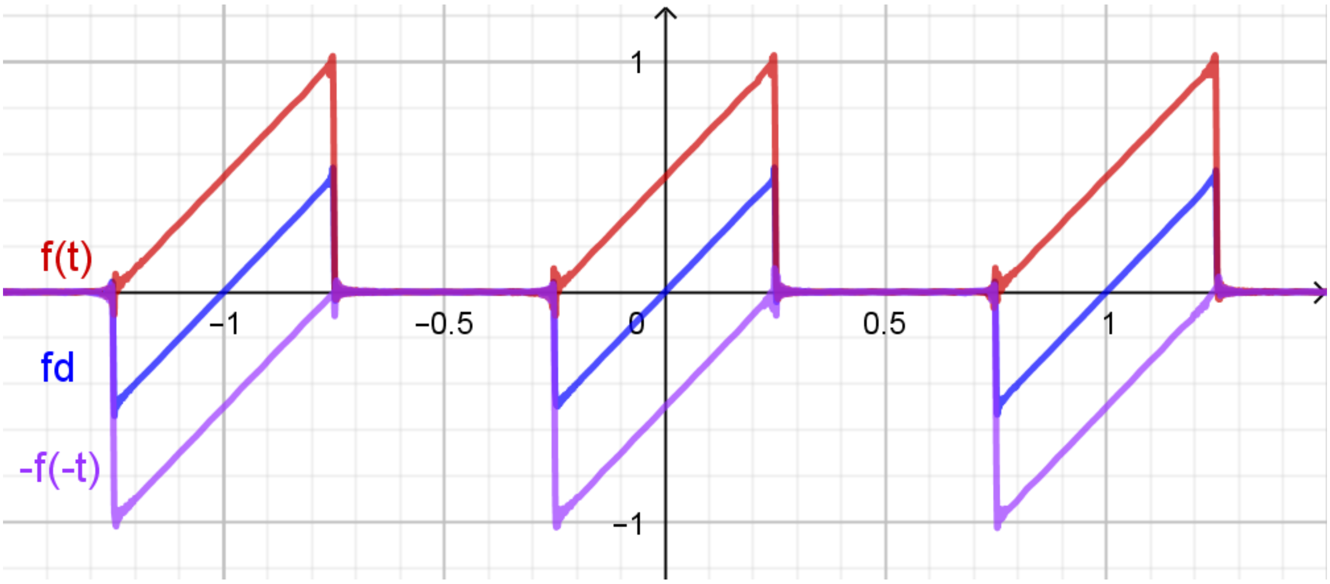


Quindi, si scompone la funzione f(t) nella somma di una funzione pari fp e una funzione dispari fd

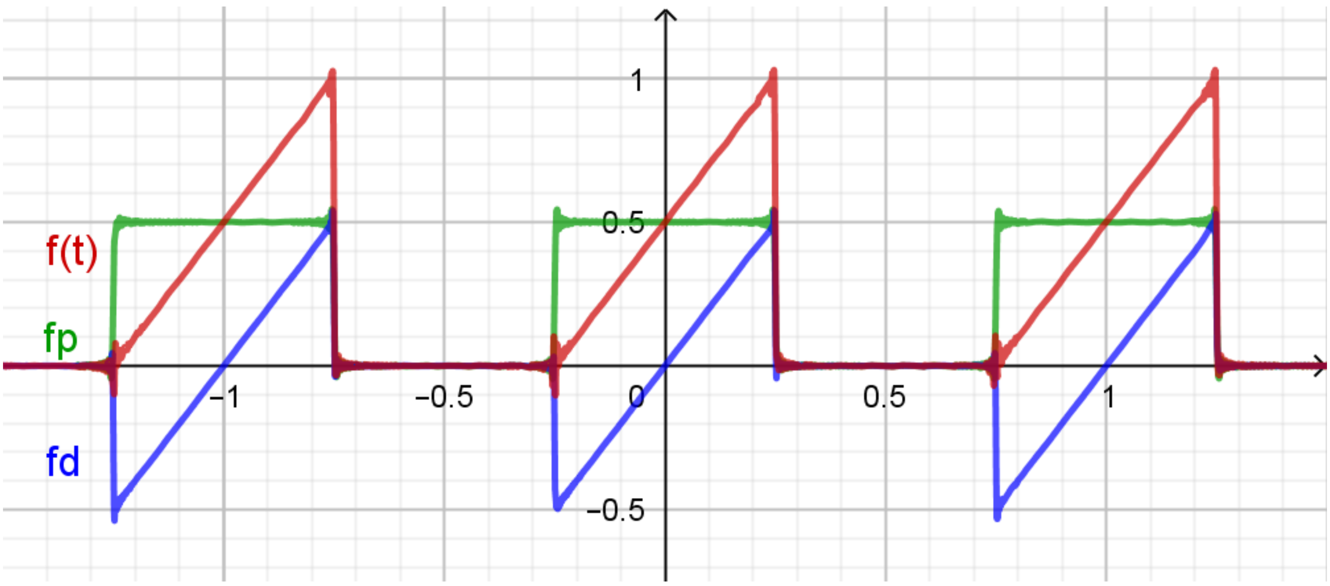
La funzione pari è fp = [f(t) + f(-t)] / 2



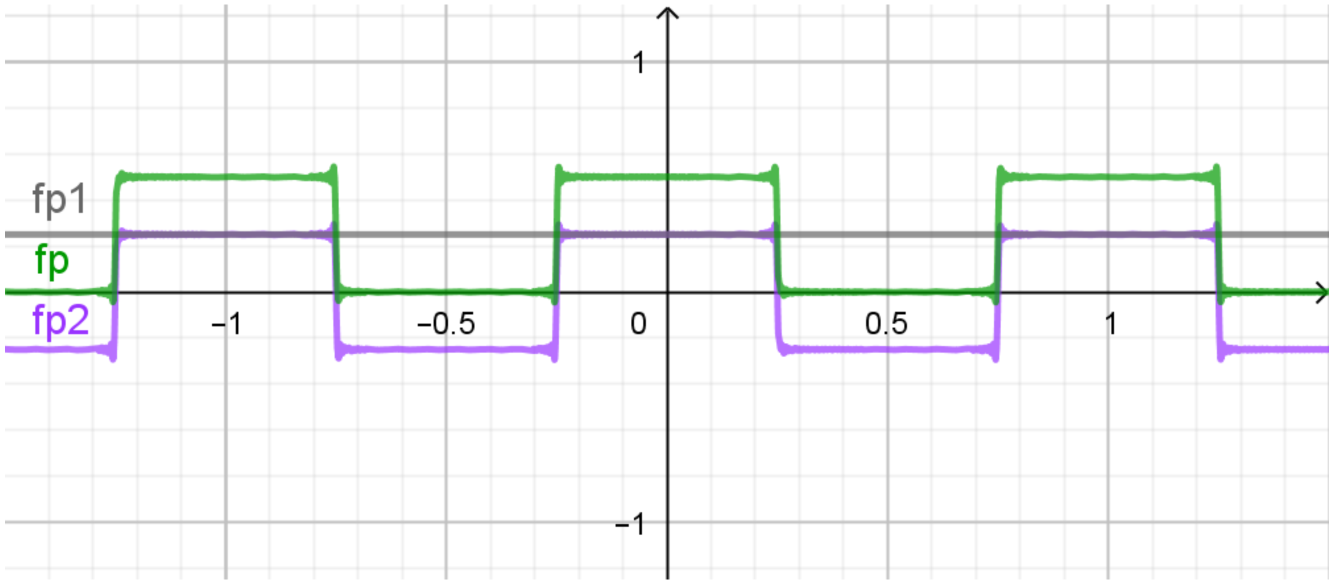
La funzione dispari è fd = [f(t) + (-f(-t))] / 2



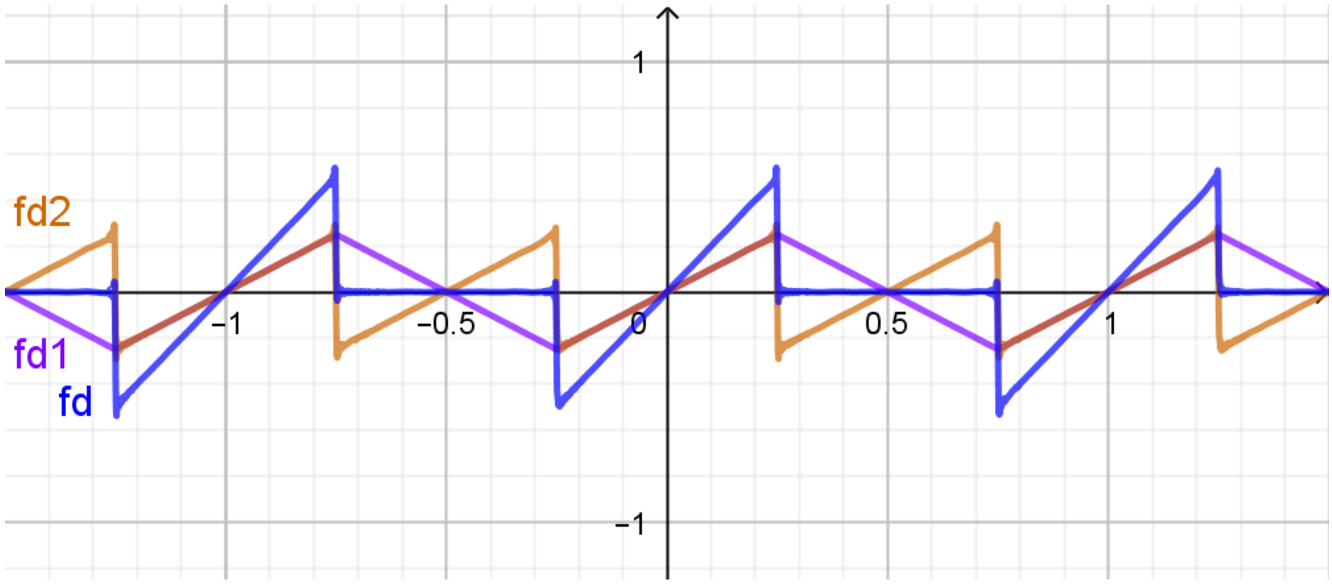
la funzione f(t) è la somma della funzione pari e della funzione dispari f(t) = fp + fd



Si scompone la funzione pari nella somma di funzioni pari fp(t) = fp1(t) + fp2(t)



Si scompone la funzione dispari nella somma di funzioni dispari fd(t) = fd1(t) + fd2(t)



la funzione f(t) è la somma della funzione pari e della funzione dispari f(t) = fp + fd