

5. I METODI DI COMPENSAZIONE DEI SISTEMI A TEMPO CONTINUO

5.1 - Introduzione.

Un sistema di controllo ad anello chiuso deve soddisfare le specifiche assegnate nel dominio della frequenza e quelle assegnate nel dominio del tempo. Queste ultime si suddividono in specifiche del comportamento a regime (errore a regime, sensibilità ai disturbi additivi e parametrici) e in specifiche del comportamento in regime transitorio (tempo di salita, sovraelongazione, tempo di assestamento, velocità della risposta). Le specifiche definite nel dominio della frequenza sono la banda passante, la stabilità, il margine di fase e il margine di guadagno. In particolare se il sistema non è stabile, o se il suo margine di fase e il suo margine di guadagno non corrispondono a quelli richiesti, è necessario intervenire sul sistema, modificarlo in modo che risponda ai requisiti richiesti senza alterare, nei limiti del possibile, le altre caratteristiche quali la velocità della risposta e la precisione. La stabilizzazione, ad esempio, di un sistema instabile mediante la riduzione del guadagno di anello è consigliabile solo in casi particolarmente semplici perché tale tecnica provoca, come si è visto, l'aumento dell'errore a regime. Nei casi più complessi, quando cioè il progettista deve soddisfare le specifiche assegnate, è necessario modificare la configurazione del sistema introducendo, in punti opportuni della catena, reti elettriche di tipo passivo o di tipo attivo al fine di migliorare le prestazioni statiche e dinamiche del sistema. In questo capitolo sono esaminati le tecniche di stabilizzazione e di progettazione mediante:

- reti ritardatrici;
- reti anticipatrici;
- reti a sella;
- regolatori industriali.

5.2 - La rete ritardatrice (Phase Lag).

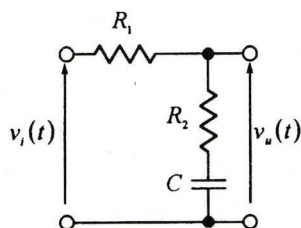


Fig. 5.1

La rete ritardatrice è costituita essenzialmente da un filtro ritardatore limitato (fig. 5.1) che ha la funzione di trasferimento uguale a:

$$V_u(s) = \frac{V_i(s)}{R_1 + R_2 + \frac{1}{s \cdot C}} \cdot \left(R_2 + \frac{1}{s \cdot C} \right)$$

$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1 + s \cdot R_2 \cdot C}{1 + s \cdot (R_1 + R_2) \cdot C} \quad [5.1]$$

Posto

$$\tau_1 = R_2 \cdot C$$

e

$$\tau_2 = (R_1 + R_2) \cdot C$$

la [5.1] si scrive come:

$$G(s) = \frac{1 + s \cdot \tau_1}{1 + s \cdot \tau_2} \quad [5.1.a]$$

La funzione di trasferimento di una rete ritardatrice è caratterizzata da uno zero, $z_1 = -\frac{1}{\tau_1}$, e da un polo, $p_1 = -\frac{1}{\tau_2}$, ai quali corrispondono le seguenti pulsazioni d'angolo:

$$\omega_z = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{R_2 \cdot C}$$

$$\omega_p = \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{(R_1 + R_2) \cdot C}$$

Poiché è $\tau_2 > \tau_1$, deve risultare $\omega_p < \omega_z$. Il diagramma polare della rete ritardatrice si ottiene facilmente, posto $s = j \cdot \omega$ nella [5.1.a], calcolando il modulo e la fase della funzione di trasferimento per ω variabile da 0 a $+\infty$. Si ha:

$$\text{per } \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |G(j \cdot \omega)| = 1 \\ \Phi = 0^\circ \end{cases}$$

$$\text{per } \omega \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |G(j \cdot \omega)| \rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} \\ \Phi \rightarrow 0^\circ \end{cases}$$

Il diagramma polare ha origine nel punto $(1, 0^\circ)$ quando è $\omega = 0$ e termina nel punto $\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}, 0^\circ\right)$ quando $\omega \rightarrow \infty$. Il diagramma si rappresenta nel quarto quadrante ed il vettore \vec{OP}_i ruota in verso orario (fig. 5.2).

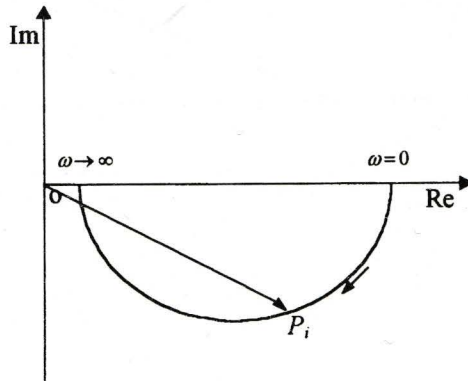


Fig. 5.2 - Diagramma polare della rete ritardatrice.

Il modulo in dB e la fase della funzione di trasferimento sono rispettivamente

$$|G(j \cdot \omega)|_{dB} = 20 \cdot \log \sqrt{1 + (\omega \cdot \tau_1)^2} - 20 \cdot \log \sqrt{1 + (\omega \cdot \tau_2)^2}$$

$$\Phi = \arctg(\omega \cdot \tau_1) - \arctg(\omega \cdot \tau_2)$$

Della figura 5.3 si rileva che la rete ritardatrice non introduce attenuazioni quando è $\omega < \omega_p$, mentre introduce un'attenuazione di 20 dB per decade quando è $\omega_p < \omega \leq \omega_z$. Alle alte frequenze, ossia per $\omega > \omega_z$, l'attenuazione è costante perché la reattanza del condensatore è trascurabile e la funzione di trasferimento della rete ritardatrice si può scrivere come

$$G(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

L'azione della rete genera *uno sfasamento sempre in ritardo* e comunque mai superiore a 180° (fig. 5.4).

Fig. 5.3 - Diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento della rete ritardatrice.

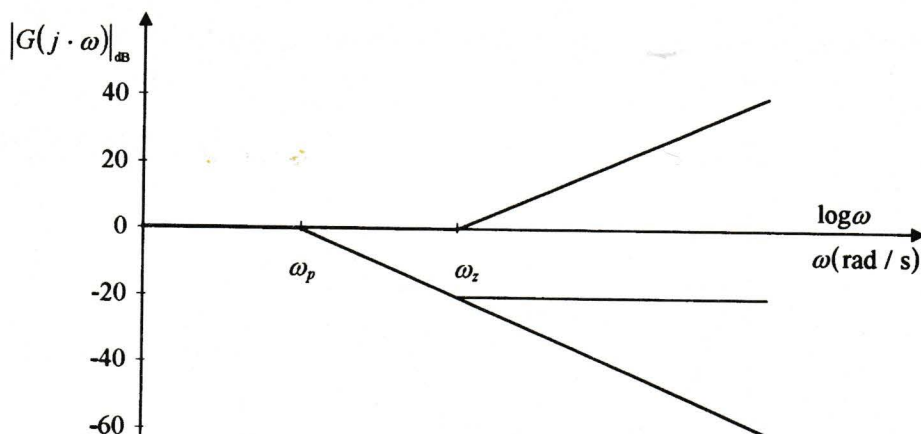
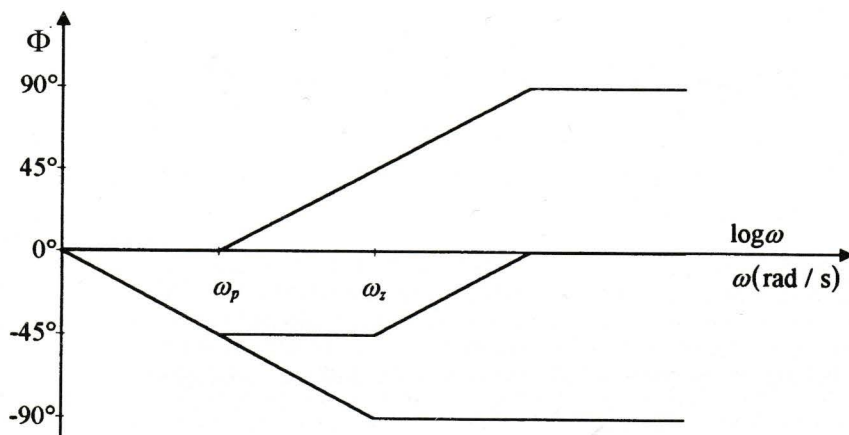


Fig. 5.4 - Diagramma di Bode della fase della funzione di trasferimento della rete ritardatrice.



Riassumendo si può affermare che una rete ritardatrice:

- migliora le caratteristiche del sistema in bassa frequenza;
- migliora il grado di stabilità;
- riduce la banda passante e quindi aumenta il tempo di risposta del sistema compensato perché provoca la diminuzione della pulsazione di taglio.

Studiare ed eventualmente migliorare la stabilità del sistema di figura 5.5 anche con l'impiego di una rete ritardatrice senza modificare il guadagno statico.

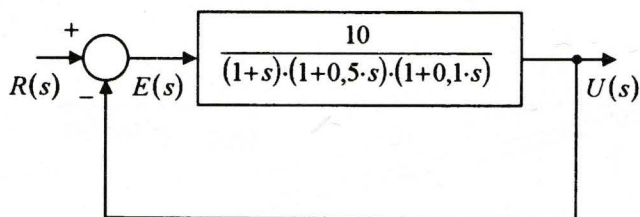
Esempio 1

Fig. 5.5

Il sistema è stabile ad anello aperto perché la funzione di trasferimento $G(s) \cdot H(s)$ ha tre poli reali e negativi $p_1 = -1$, $p_2 = -2$, $p_3 = -10$. Per valutare la sua stabilità anche ad anello chiuso (ed in caso affermativo anche il grado) si usa il criterio di Bode. Posto $s = j \cdot \omega$ si ha:

$$G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega) = \frac{10}{(1 + j \cdot \omega) \cdot \left(1 + \frac{j \cdot \omega}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{j \cdot \omega}{10}\right)} \quad [5.2]$$

Le pulsazioni d'angolo della [5.2] sono:

$$\omega_{c1} = 1 \text{ rad / s}$$

$$\omega_{c2} = 2 \text{ rad / s}$$

$$\omega_{c3} = 10 \text{ rad / s}$$

Il modulo in dB e la fase della funzione di trasferimento ad anello aperto sono rispettivamente:

$$|G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega)|_{\text{dB}} = 20 \log 10 - 20 \log \sqrt{1 + (\omega)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2}$$

$$\Phi = -\arctg \omega - \arctg \frac{\omega}{2} - \arctg \frac{\omega}{10}$$

Il diagramma asintotico del modulo in dB interseca l'asse delle ascisse con una pendenza di -40 dB per decade (fig. 5.6). Per $\omega_T \cong 5 \text{ rad / s}$ sul diagramma della fase si legge $\Phi_{\omega_T} \cong -175^\circ$ (fig. 5.7). Pertanto il margine di fase m_ϕ e il margine di guadagno, quest'ultimo calcolato quando la fase è -180° , sono rispettivamente:

$$m_\phi = 180^\circ - |\Phi_{\omega_T}|$$

$$m_\phi \cong 180^\circ - |175^\circ| = 5^\circ$$

$$m_g \cong 5 \text{ dB}$$

Il sistema è praticamente al limite della stabilità perché il margine di fase e il margine di guadagno sono ben al di sotto dei valori consigliati.

Fig. 5.6

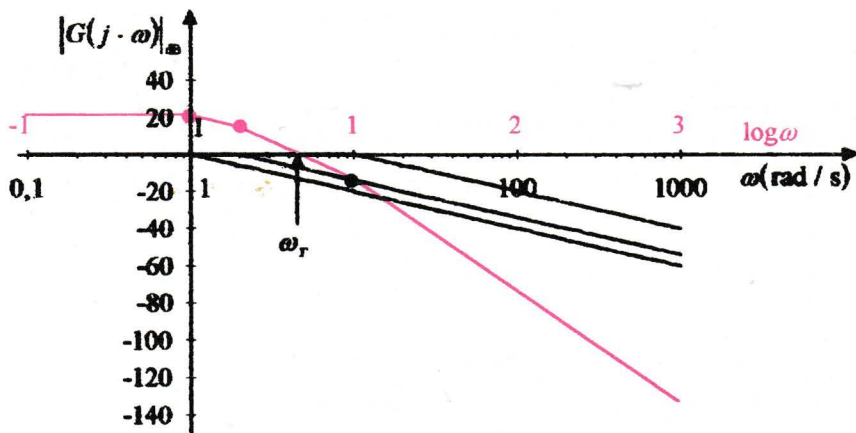
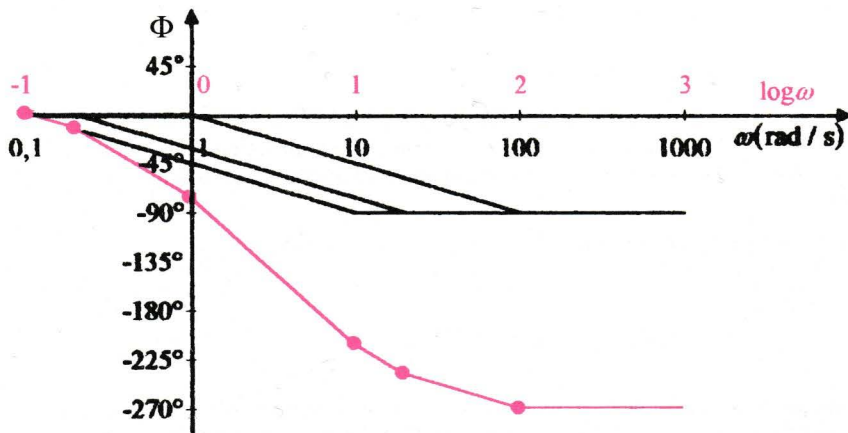


Fig. 5.7



MATLAB

```
% Cap5 Esempio1
n1=[10];d1=[1 1];d2=[0.5 1];d3=[0.1 1]
[d4]=conv(d1,conv(d2,d3))
%Margine di fase e margine di guadagno.
[mag,phase,w]=bode(n1,d4)
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w)
%Rappresentazione grafica.
margin(mag,phase,w)
```

Si tenga presente che i risultati di MATLAB discostano da quelli ricavati con il metodo approssimato.

Per stabilizzare il sistema senza modificare il suo guadagno statico si inserisce una rete ritardatrice dopo il nodo sommatore (figura 5.8).

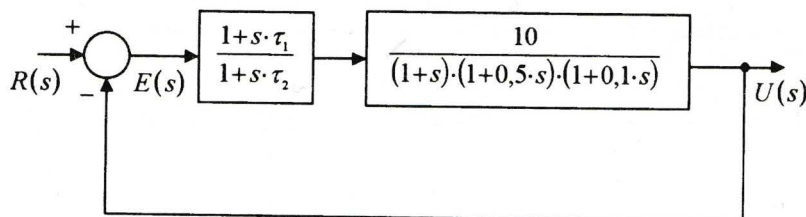


Fig. 5.8

La funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema comprensivo della rete correttiva è uguale a:

$$G_c(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = \frac{1+s \cdot \tau_1}{1+s \cdot \tau_2} \cdot \frac{10}{(1+s) \cdot (1+0,5 \cdot s) \cdot (1+0,1 \cdot s)}$$

dove:

- $G_c(s) = \frac{1+s \cdot \tau_1}{1+s \cdot \tau_2}$ è la funzione di trasferimento della rete ritardatrice;
- $\tau_2 > \tau_1$.

Le procedure per la progettazione di una rete ritardatrice sono molteplici, ma in questo esempio è esaminata quella che è chiamata *cancellazione polo-zero*. Per migliorare la stabilità del sistema è necessario spostare una costante di tempo in modo che il diagramma del modulo intersechi l'asse delle ascisse con una pendenza di -20 dB per decade. A tal fine si sceglie la costante di tempo τ_1 della rete ritardatrice uguale alla costante di tempo maggiore della funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema e $\tau_2 > 10 \cdot \tau_1$.

Con tali ipotesi di lavoro e con riferimento alla funzione di trasferimento ad anello aperto si ha:

$$\tau_1 = 1 \text{ s}$$

$$\tau_2 = 10 \text{ s}$$

La funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema compensato è:

$$G_c(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = \frac{1+s \cdot 1}{1+s \cdot 10} \cdot \frac{10}{(1+s) \cdot (1+0,5 \cdot s) \cdot (1+0,1 \cdot s)} \quad [5.3]$$

Posto $s = j \cdot \omega$, la [5.3] si scrive nella forma:

$$G_c(j \cdot \omega) \cdot G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega) = \frac{10}{(1+j \cdot 10 \cdot \omega) \cdot (1+j \cdot 0,5 \cdot \omega) \cdot (1+j \cdot 0,1 \cdot \omega)} \quad [5.3.a]$$

Le pulsazioni d'angolo della [5.3.a] sono uguali a:

$$\omega_{c1} = 0,1 \text{ rad / s}$$

$$\omega_{c2} = 2 \text{ rad / s}$$

$$\omega_{c3} = 10 \text{ rad / s}$$

Il modulo in dB e la fase della funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema compensato sono rispettivamente:

$$|G_c(j \cdot \omega) \cdot G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega)|_{dB} = 20 \log 10 - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{0,1}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2}$$

$$\Phi = -\arctg \frac{\omega}{0,1} - \arctg \frac{\omega}{2} - \arctg \frac{\omega}{10}$$

Il diagramma in dB del modulo della funzione di trasferimento del sistema compensato interseca l'asse delle ascisse con una pendenza di -20 dB (fig. 5.9) in corrispondenza della pulsazione di taglio $\omega_T \approx 1 \text{ rad / s}$ che è minore della pulsazione di taglio del sistema non compensato (fig. 5.10).

Pertanto il margine di fase m_ϕ e il margine di guadagno del sistema compensato sono:

$$m_\phi = 180^\circ - |\Phi_{\omega_T}|$$

$$m_\phi \approx 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$$

$$m_g \approx 40 \text{ dB}$$

In pratica lo zero della rete correttiva ha annullato l'effetto del polo dominante ($p_1 = -1$) della funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema. La rete correttiva ha migliorato il margine di fase senza variare il guadagno statico, ma ha peggiorato la rapidità della risposta perché il tempo impiegato dal sistema compensato per portarsi a regime è determinato dalla costante di tempo $\tau_2 = 10 \text{ s}$.

Fig. 5.9 - Diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento del sistema compensato.

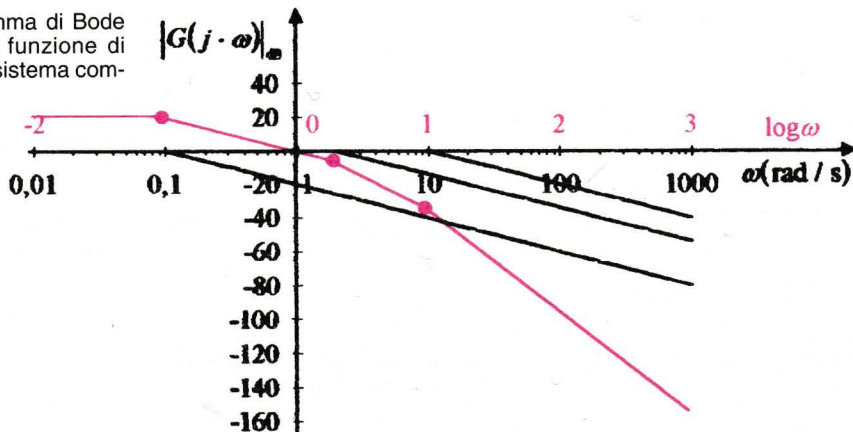
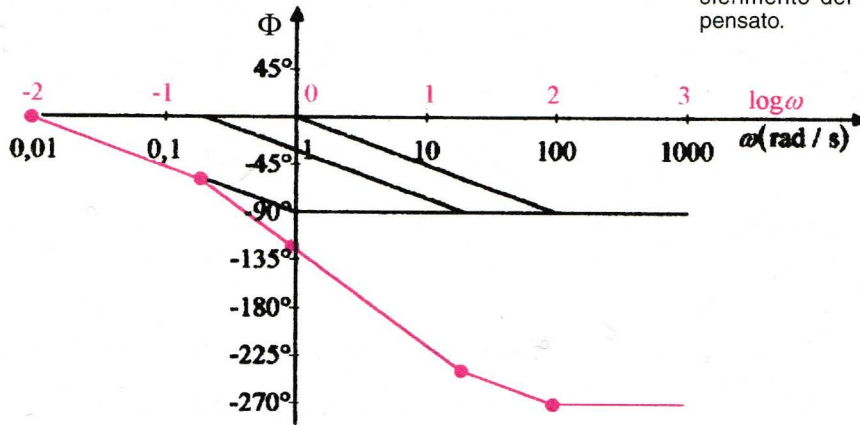


Fig. 5.10 - Diagramma di Bode della fase della funzione di trasferimento del sistema compensato.



5.3 - La rete anticipatrice (Phase Lead).

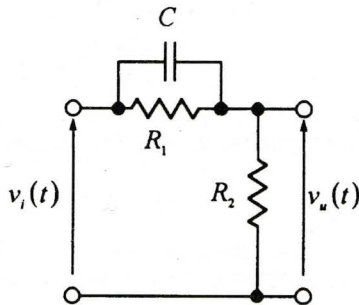


Fig. 5.11 - Rete anticipatrice.

La rete anticipatrice è costituita da un filtro anticipatore limitato (fig. 5.11) e la sua funzione di trasferimento è uguale a:

$$V_u(s) = \frac{V_i(s)}{R_2 + \frac{R_1}{1 + s \cdot R_1 \cdot C}} \cdot R_2 \quad [5.4]$$

$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + s \cdot R_1 \cdot C}{1 + s \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot C} \quad [5.5]$$

Posto

$$T_1 = R_1 \cdot C$$

$$T_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot C$$

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

la [5.5] si scrive come

$$G(s) = k \cdot \frac{1 + s \cdot T_1}{1 + s \cdot T_2}$$

La funzione di trasferimento di una rete anticipatrice presenta un zero,

$$z_1 = -\frac{1}{R_1 \cdot C}, \text{ e un polo reale negativo, } p_1 = -\frac{1}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot C}. \text{ Si ha } k < 1 \text{ e}$$

$$T_1 > T_2.$$

Le pulsazioni d'angolo sono:

$$\omega_z = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{R_1 \cdot C_1} \quad [5.6]$$

$$\omega_p = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot C} \quad [5.7]$$

Poiché è $T_1 > T_2$, dalla [5.6] e dalla [5.7] si ricava:

$$\omega_z < \omega_p$$

Il diagramma polare della rete anticipatrice si ottiene facilmente, posto $s = j \cdot \omega$, calcolando il modulo e la fase della funzione di trasferimento per $\omega \geq 0$. Si ha:

$$\text{per } \omega = 0 \Rightarrow \begin{cases} |G(j \cdot \omega)| = k \\ \Phi = 0^\circ \end{cases}$$

$$\text{per } \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} |G(j \cdot \omega)| \rightarrow k \cdot \frac{T_1}{T_2} \\ \Phi \rightarrow 0^\circ \end{cases}$$

Il diagramma polare ha origine nel punto $(k, 0^\circ)$ quando è $\omega = 0$ e termina nel punto $\left(k \cdot \frac{T_1}{T_2}, 0^\circ\right)$ quando $\omega \rightarrow \infty$. Il diagramma si rappre-

senta nel primo quadrante ed il vettore \vec{OP}_i ruota in verso orario (fig. 5.12).

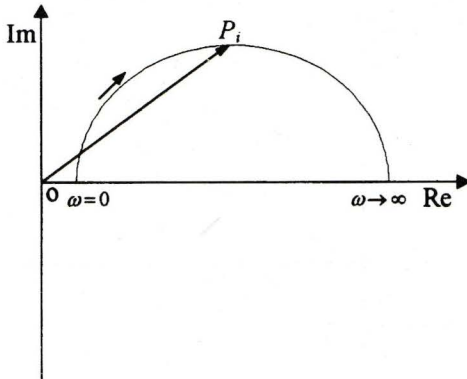


Fig. 5.12 - Diagramma polare della rete anticipatrice.

Il modulo in dB e la fase della funzione di trasferimento sono rispettivamente:

$$|G(j \cdot \omega)|_{dB} = 20 \cdot \log k + 20 \cdot \log \sqrt{1 + (\omega \cdot T_1)^2} - 20 \cdot \log \sqrt{1 + (\omega \cdot T_2)^2}$$

$$\Phi = \arctg(\omega \cdot T_1) - \arctg(\omega \cdot T_2)$$

L'attenuazione della rete anticipatrice rimane costante in bassa frequenza quando è $\omega \leq \omega_z$ (fig. 5.13), mentre diminuisce quando è $\omega_z < \omega \leq \omega_p$. A frequenze elevate, quando è $\omega > \omega_p$, la reattanza del condensatore è trascurabile e quindi dalla [5.4] si ricava:

$$|G(j \cdot \omega)| = 1$$

L'azione della rete genera uno sfasamento sempre in anticipo e comunque mai superiore a 90° (fig. 5.14). Si dimostra che lo sfasamento massimo Φ_M si ha quando:

$$\omega_M = \sqrt{\omega_z \cdot \omega_p}$$

In definitiva una rete anticipatrice di tipo passivo:

- migliora le caratteristiche del sistema in alta frequenza;
- aumenta la rapidità della risposta perché provoca l'aumento della pulsazione di taglio del sistema compensato;
- migliora il margine di stabilità;
- introduce un'attenuazione;
- riduce il guadagno statico.

Fig. 5.13 - Diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento della rete anticipatrice.

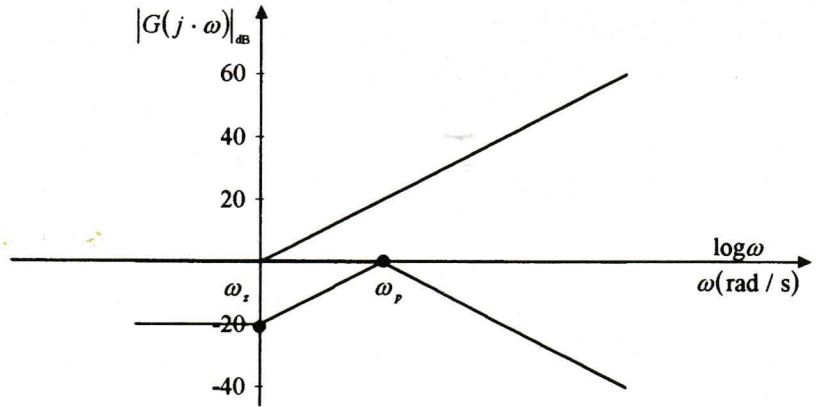
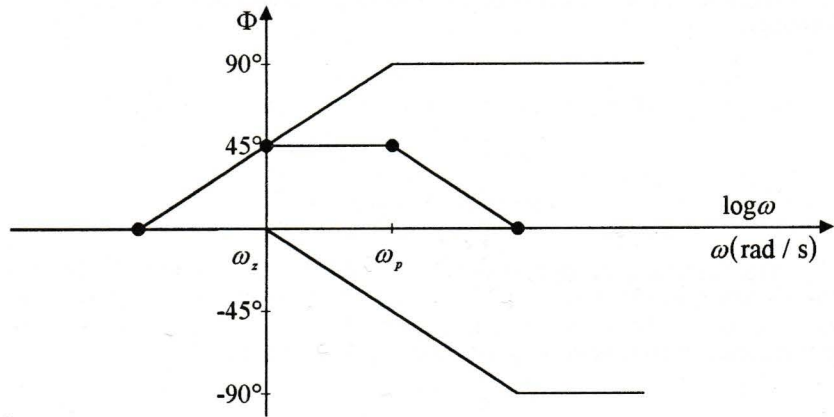


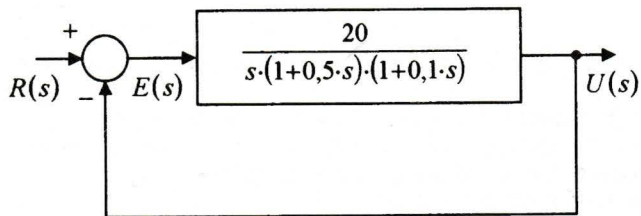
Fig. 5.14 - Diagramma di Bode della fase della funzione di trasferimento della rete anticipatrice.



Esempio 2

Studiare ed eventualmente migliorare la stabilità del sistema di figura 5.15 anche con l'impiego di una rete anticipatrice senza modificare il guadagno statico.

Fig. 5.15



Il sistema è stabile ad anello aperto perché la funzione di trasferimento $G(s) \cdot H(s)$ ha un polo nullo $p_1 = 0$, e due poli reali e negativi $p_2 = -2$, $p_3 = -10$. Per

valutare la stabilità del sistema ad anello chiuso si ricorre al criterio di Bode. Pertanto, posto $s = j \cdot \omega$, si ha:

$$G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega) = \frac{20}{j \cdot \omega \cdot \left(1 + \frac{j \cdot \omega}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{j \cdot \omega}{10}\right)} \quad [5.8]$$

Il modulo in dB e la fase della funzione di trasferimento ad anello sono rispettivamente:

$$|G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega)|_{\text{dB}} = 20 \log 20 - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2}$$

$$\Phi = -90^\circ - \arctg \frac{\omega}{2} - \arctg \frac{\omega}{10}$$

Il diagramma del modulo interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza della pulsazione di taglio $\omega_T \cong 6 \text{ rad/s}$ con una pendenza di $-40 \text{ dB per decade}$ (fig. 5.16). Per $\omega_T \cong 6 \text{ rad/s}$ sul diagramma della fase si legge $\Phi_{\omega_T} \cong -190^\circ$ (fig. 5.17). Pertanto il margine di fase m_ϕ e il margine di guadagno sono uguali rispettivamente a:

$$\begin{aligned} m_\phi &= 180^\circ - |\Phi_{\omega_T}| \\ m_\phi &\cong 180^\circ - |190^\circ| = -9^\circ \\ m_g &\cong -8 \text{ dB} \end{aligned}$$

Il sistema è praticamente instabile ad anello chiuso perché il margine di fase e il margine di guadagno sono negativi.

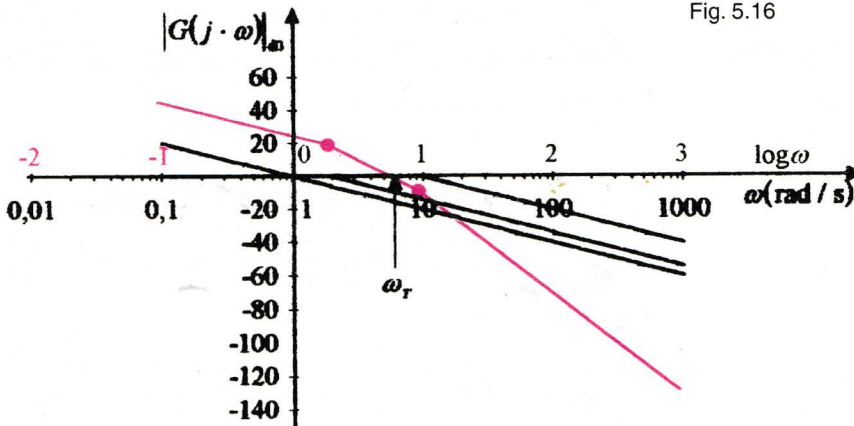
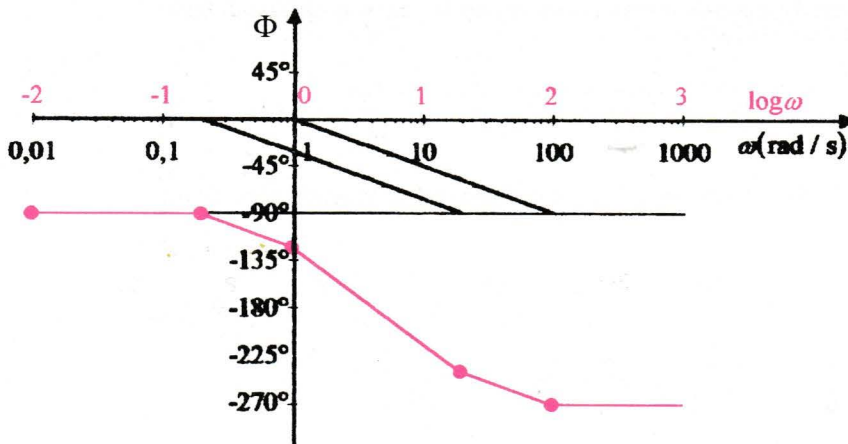


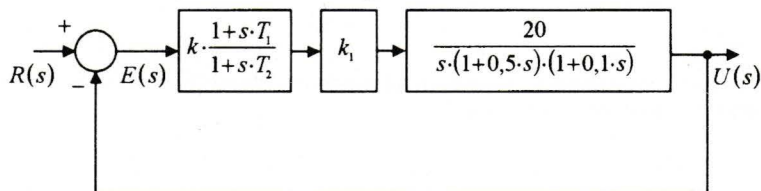
Fig. 5.16

Fig. 5.17



Per stabilizzare il sistema si inserisce una rete anticipatrice subito dopo il nodo sommatore (fig. 5.18).

Fig. 5.18



Per lasciare inalterato il guadagno statico è necessario che la rete compensatrice sia preceduta o seguita da un stadio amplificatore avente guadagno $k_1 > 1$, in modo che il prodotto $k \cdot k_1$, dove $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ è l'attenuazione della rete anticipatrice, lasci inalterato il guadagno statico del sistema:

$$k \cdot k_1 = 1$$

La funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema compensato è uguale a:

$$G_c(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = \frac{1+s \cdot T_1}{1+s \cdot T_2} \cdot \frac{20}{s \cdot (1+0,5 \cdot s) \cdot (1+0,1 \cdot s)} \quad [5.9]$$

dove

- $G_c(s) = \frac{1+s \cdot T_1}{1+s \cdot T_2}$ è la funzione di trasferimento del blocco costituito dalla rete anticipatrice e dallo stadio amplificatore;
- $T_2 < T_1$.

Per stabilizzare il sistema si usa ancora la tecnica di *cancellazione polo-zero*. In questo caso si annulla l'effetto della costante di tempo intermedia in modo che il diagramma del modulo intersechi l'asse delle ascisse con una pendenza di -20 dB per decade o in modo che il diagramma assuma la pendenza di -40 dB in prossimità della sua intersezione con l'asse delle ascisse. Si pone $T_1 = 0,5$ s uguale alla costante di tempo intermedia della funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema e $T_2 < 0,1 \cdot T_1$.

Con tali ipotesi di lavoro e con riferimento alla funzione di trasferimento ad anello aperto si ha:

$$T_1 = 0,5 \text{ s}$$

$$T_2 = 0,05 \text{ s}$$

Pertanto la funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema compensato diviene:

$$G_c(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = \frac{1 + s \cdot 0,5}{1 + s \cdot 0,05} \cdot \frac{20}{s \cdot (1 + 0,5 \cdot s) \cdot (1 + 0,1 \cdot s)} \quad [5.10]$$

Posto $s = j \cdot \omega$, la [5.10] si scrive nella forma:

$$G_c(j \cdot \omega) \cdot G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega) = \frac{20}{j \cdot \omega \cdot (1 + j \cdot 0,05 \cdot \omega) \cdot (1 + j \cdot 0,1 \cdot \omega)} \quad [5.11]$$

Il modulo in dB e la fase della [5.11] sono rispettivamente:

$$|G_c(j \cdot \omega) \cdot G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega)|_{\text{dB}} = 20 \log 20 - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{20}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2}$$

$$\Phi = -90^\circ - \arctg \frac{\omega}{20} - \arctg \frac{\omega}{10}$$

Il diagramma del modulo in dB interseca l'asse delle ascisse con una pendenza ancora di -40 dB per decade, ma tale pendenza è assunta in prossimità del punto d'intersezione con l'asse delle ascisse (fig. 5.19). Per $\omega_T \cong 13 \text{ rad/s}$, maggiore della pulsazione di taglio del sistema non compensato, sul diagramma della fase si legge $\Phi_{\omega T} \cong -175^\circ$ (fig. 5.20). Pertanto il margine di fase m_ϕ è uguale a:

$$m_\phi = 180^\circ - |\Phi_{\omega T}|$$

$$m_\phi \cong 180^\circ - |175^\circ| = 5^\circ$$

In pratica lo zero della rete correttiva ha eliminato l'effetto del polo intermedio ($p_2 = -2$) della funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema. La rete correttiva ha migliorato il margine di fase, anche se esso è inferiore a quello consigliato, senza variare il guadagno statico ed ha migliorato la rapidità della risposta perché il tempo impiegato dal sistema per portarsi a regime è determinato dalla costante di tempo uguale a $0,1$ s. Negli esercizi verranno esaminati i criteri che si devono applicare nella progettazione per ottenere un margine di fase prestabilito.

MATLAB.

```
% Cap5 Esempio2
n1=[20]; d1=[0.05 1 0]; d2=[0.1 1]
[d3]=conv(d1,d2,)
%Margine di fase e margine di guadagno.
[mag,phase,w]=bode(n1,d3)
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w)
%Rappresentazione grafica.
margin(mag,phase,w)
```

Fig. 5.19 - Diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento del sistema compensato.

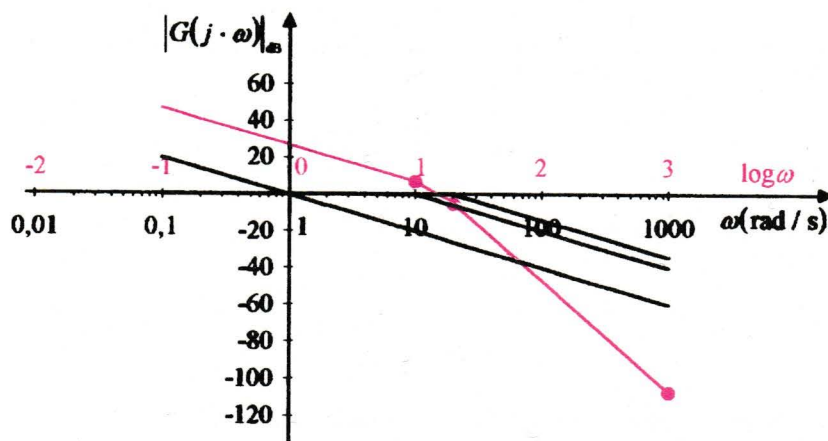
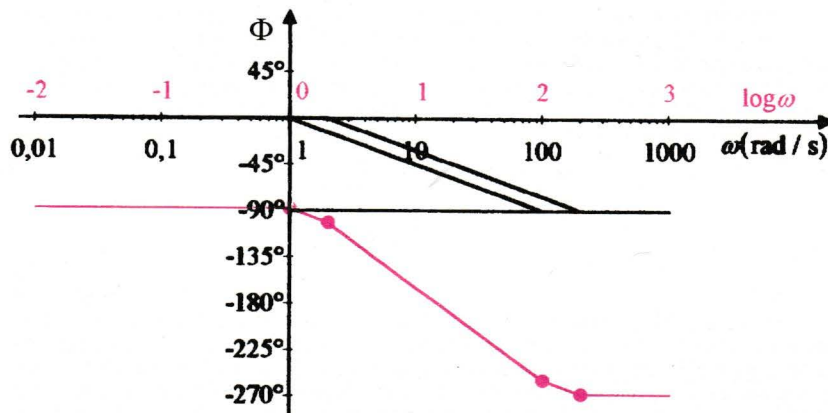


Fig. 5.20 - Diagramma di Bode della fase della funzione di trasferimento del sistema compensato.



5.4 - La rete a sella.

La rete a sella somma gli effetti della rete anticipatrice e di quella ritardatrice, e fornisce un effetto stabilizzante superiore a quello delle singole reti stabilizzatrici che sono state esaminate.

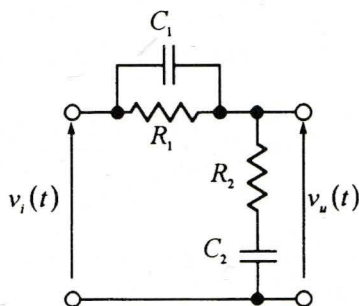


Fig. 5.21 - Rete a sella.

Lo schema elettrico di una rete a sella di tipo passivo è riportato nella figura 5.21 e la sua funzione di trasferimento è

$$V_u(s) = \frac{V_i(s)}{\frac{R_1}{1 + s \cdot R_1 \cdot C_1} + R_2 + \frac{1}{s \cdot C_2}} \cdot \left(R_2 + \frac{1}{s \cdot C_2} \right) \quad [5.12]$$

$$G(s) = \frac{(1 + s \cdot R_1 \cdot C_1) \cdot (1 + s \cdot R_2 \cdot C_1)}{s^2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 \cdot C_2 + s \cdot (R_1 \cdot C_1 + R_2 \cdot C_2 + R_1 \cdot C_2) + 1} \quad [5.13]$$

Posto

- $\tau_1 = R_1 \cdot C_1$
- $\tau_2 = R_2 \cdot C_2$
- $\tau_{12} = R_1 \cdot C_2$

la [5.13] si scrive come:

$$G(s) = \frac{(1 + s \cdot \tau_1) \cdot (1 + s \cdot \tau_2)}{(1 + s \cdot \tau_1) \cdot (1 + s \cdot \tau_2) + s \cdot \tau_{12}} \quad [5.14]$$

Posto $\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12} = a \cdot \tau_1 + \frac{\tau_2}{a}$, la [5.14] si scrive nella seguente

forma:

$$G(s) = \frac{(1 + s \cdot \tau_1) \cdot (1 + s \cdot \tau_2)}{(1 + s \cdot a \cdot \tau_1) \cdot \left(1 + s \cdot \frac{\tau_2}{a} \right)} \quad [5.15]$$

dove a è una costante reale, maggiore di 1, uguale a:

$$a = \frac{(\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}) + \sqrt{(\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12})^2 - 4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2}}{2 \cdot \tau_1} > 1$$

Posto $a \cdot \tau_1 = T_1$ e $\frac{\tau_2}{a} = T_2$ la [5.15] diventa:

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

$$G(s) = \frac{(1 + s \cdot \tau_1) \cdot (1 + s \cdot \tau_2)}{(1 + s \cdot T_1) \cdot (1 + s \cdot T_2)} \quad [5.16]$$

dove:

– $G_1(s) = \frac{1 + s \cdot \tau_1}{1 + s \cdot a \cdot \tau_1} = \frac{1 + s \cdot \tau_1}{1 + s \cdot T_1}$ è la funzione di trasferimento relativa alla rete ritardatrice;

– $G_2(s) = \frac{1 + s \cdot \tau_2}{1 + s \cdot \frac{\tau_2}{a}} = \frac{1 + s \cdot \tau_2}{1 + s \cdot T_2}$ è la funzione di trasferimento relativa alla rete anticipatrice;

– $T_1 > \tau_1 > \tau_2 > T_2$ sono le costanti di tempo della rete a sella.

La funzione di trasferimento della rete a sella presenta due zeri e due poli:

$$z_1 = -\frac{1}{\tau_1}; \quad p_1 = -\frac{1}{T_1}; \quad z_2 = -\frac{1}{\tau_2}; \quad p_2 = -\frac{1}{T_2}$$

a cui corrispondono le seguenti pulsazioni d'angolo:

$$\omega_{z1} = \frac{1}{\tau_1}; \quad \omega_{p1} = \frac{1}{T_1}; \quad \omega_{z2} = \frac{1}{\tau_2}; \quad \omega_{p2} = \frac{1}{T_2}$$

Tenendo presente che è $T_1 > \tau_1 > \tau_2 > T_2$, conseguentemente si ha:

$$\omega_{p1} < \omega_{z1} < \omega_{z2} < \omega_{p2}$$

Posto $s = j \cdot \omega$, il modulo e la fase della funzione di trasferimento della rete a sella, per $\omega \geq 0$, sono:

$$\text{per } \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |G(j \cdot \omega)| = 1 \\ \Phi = 0^\circ \end{cases}$$

$$\text{per } \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} |G(j \cdot \omega)| \rightarrow 1 \\ \Phi \rightarrow 0^\circ \end{cases}$$

Il diagramma polare ha origine nel punto $(1, 0^\circ)$ quando è $\omega = 0$ e termina nello stesso punto quando $\omega \rightarrow \infty$. La curva giace nel primo e nel quarto quadrante ed il vettore \vec{OP}_i ruota in verso orario (fig. 5.22).

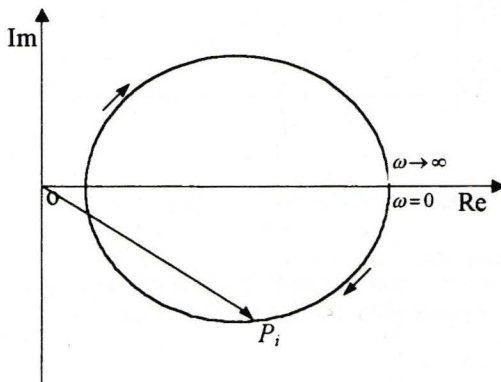


Fig. 5.22 - Diagramma polare della rete a sella.

Il modulo in dB e la fase della funzione di trasferimento sono uguali rispettivamente a:

$$|G(j \cdot \omega)|_{dB} = +20 \cdot \log \sqrt{1 + (\omega \cdot \tau_1)^2} + 20 \cdot \log \sqrt{1 + (\omega \cdot \tau_2)^2} - 20 \cdot \log \sqrt{1 + (\omega \cdot T_1)^2} - 20 \cdot \log \sqrt{1 + (\omega \cdot T_2)^2}$$

$$\Phi = \arctg(\omega \cdot \tau_1) + \arctg(\omega \cdot \tau_2) - \arctg(\omega \cdot T_1) - \arctg(\omega \cdot T_2)$$

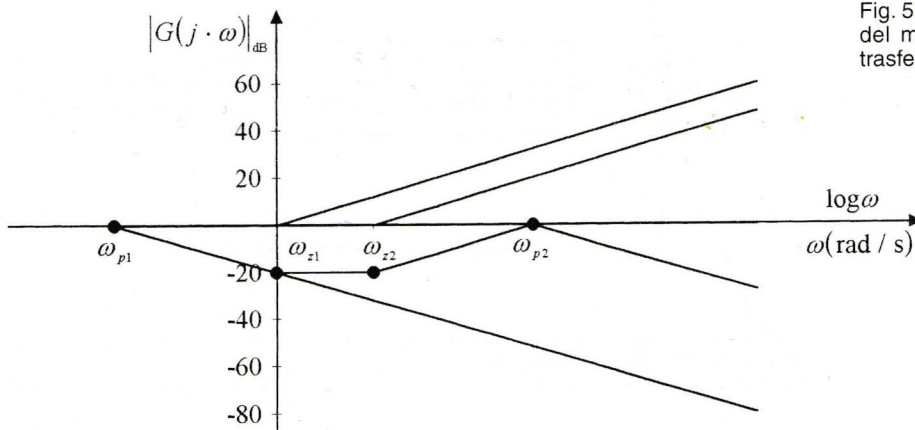
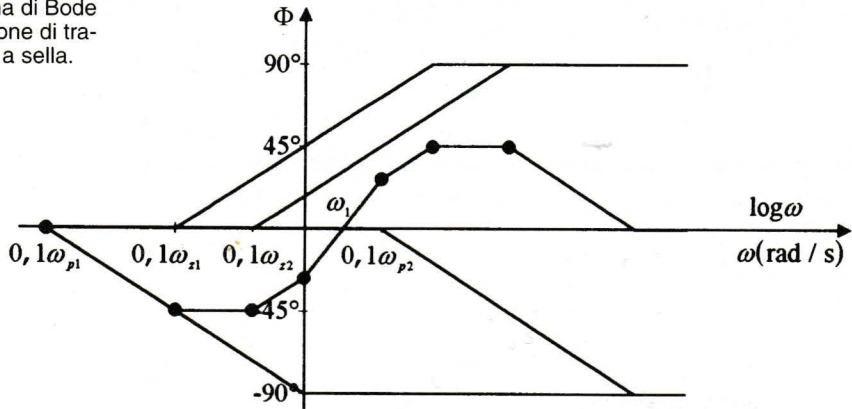


Fig. 5.23 - Diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento della rete a sella.

Fig. 5.24 - Diagramma di Bode della fase della funzione di trasferimento della rete a sella.



Si conclude che la rete a sella considerata:

- attenua quando è $\omega_{p1} < \omega < \omega_{p2}$ (fig. 5.23);
- esplica l'azione ritardatrice quando è $0,1 \cdot \omega_{p1} < \omega < \omega_1$;
- esplica l'azione anticipatrice quando è $\omega_1 < \omega < 10 \cdot \omega_{p2}$ (fig. 5.24).

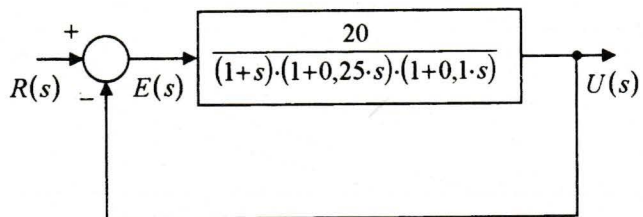
In corrispondenza della pulsazione $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot C_2 \cdot C_1}}$ la rete a

sella non genera sfasamento. In bassa frequenza la rete a sella può essere assimilata a una rete ritardatrice perché la reattanza del condensatore C_1 è elevata, mentre in alta frequenza è assimilabile a una rete anticipatrice perché è trascurabile la reattanza del condensatore C_2 .

Esempio 3

Studiare ed eventualmente migliorare la stabilità del sistema di figura 5.25 anche con l'impiego di una rete a sella senza modificare il guadagno statico.

Fig. 5.25



Il sistema è stabile ad anello aperto perché la funzione di trasferimento ad anello aperto ha tre poli reali e negativi $p_1 = -1$, $p_2 = -4$, $p_3 = -10$. Per valutare il grado di stabilità ad anello chiuso è opportuno utilizzare il criterio di Bode. Pertanto, posto $s = j \cdot \omega$, si ha:

$$G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega) = \frac{20}{(1 + j \cdot \omega) \cdot \left(1 + \frac{j \cdot \omega}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{j \cdot \omega}{10}\right)} \quad [5.17]$$

Il modulo in dB e la fase della funzione di trasferimento ad anello aperto sono:

$$|G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega)|_{\text{dB}} = 20 \log 20 - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{4}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2}$$

$$\Phi = -\arctg \omega - \arctg \frac{\omega}{4} - \arctg \frac{\omega}{10}$$

Il diagramma del modulo interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza della pulsazione di taglio $\omega_T \cong 7,5 \text{ rad / s}$ con una pendenza $-40 \text{ dB per decade}$ (fig. 5.26). Sul diagramma della fase, per $\omega_T \cong 7,5 \text{ rad / s}$, si legge $\Phi_{\omega_T} \cong -181^\circ$ (fig. 5.27). Pertanto il margine di fase Φ_m e il margine di guadagno sono rispettivamente uguali a:

$$m_\phi = 180^\circ - |\Phi_{\omega_T}|$$

$$m_\phi \cong 180^\circ - 181^\circ = -1^\circ$$

$$m_g \cong -0,3 \text{ dB}$$

Il sistema è instabile ad anello chiuso perché il margine di fase e il margine di guadagno sono negativi.

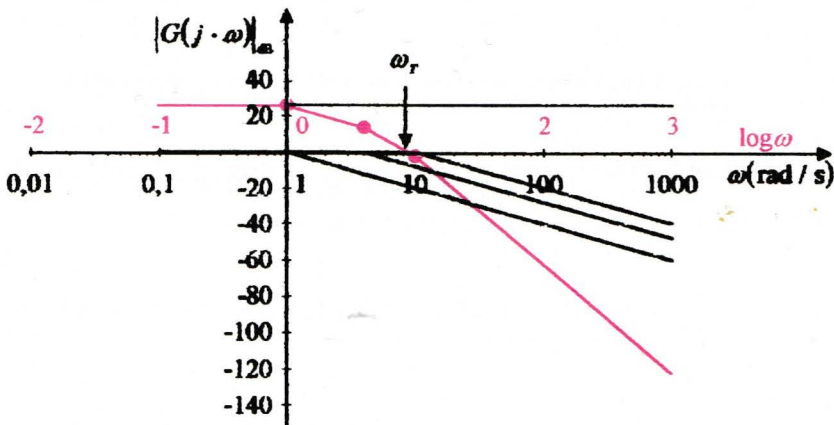
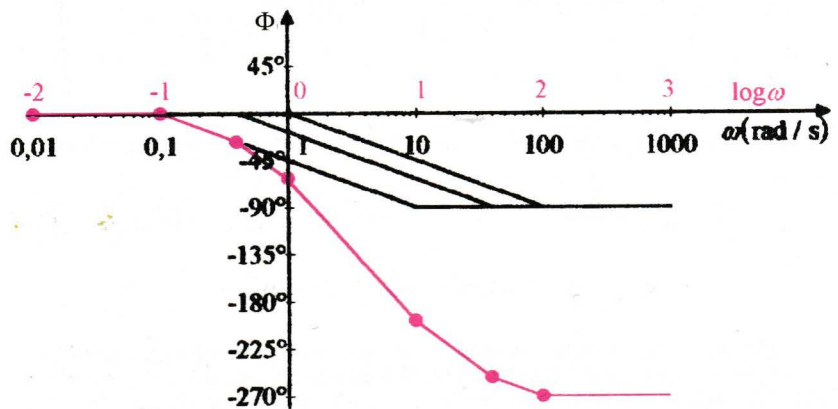


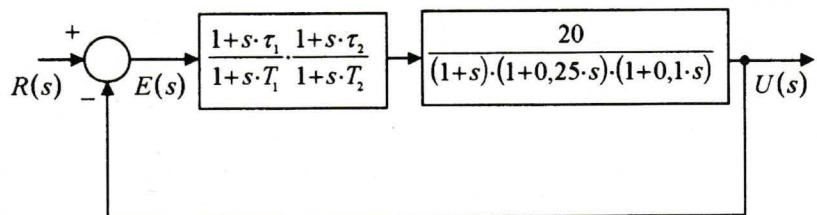
Fig. 5.26

Fig. 5.27



Per stabilizzare il sistema si inserisce una rete a sella subito dopo il nodo sommatore (fig. 5.28).

Fig. 5.28



La funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema comprensivo della rete correttiva è:

$$G_c(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = \frac{1+s \cdot \tau_1}{1+s \cdot T_1} \cdot \frac{1+s \cdot \tau_2}{1+s \cdot T_2} \cdot \frac{20}{(1+s) \cdot (1+0,25 \cdot s) \cdot (1+0,1 \cdot s)} \quad [5.18]$$

dove:

$$G_c(s) = \frac{1+s \cdot \tau_1}{1+s \cdot T_1} \cdot \frac{1+s \cdot \tau_2}{1+s \cdot T_2} \text{ è la funzione di trasferimento della rete a sella con}$$

$$T_1 > \tau_1 > \tau_2 > T_2.$$

Per migliorare la stabilità del sistema è necessario annullare l'effetto della costante di tempo maggiore e di quella intermedia della funzione di trasferimento ad anello aperto, in modo che il diagramma del modulo intersechi l'asse delle ascisse con una pendenza di -20 dB per decade o con una pendenza di -40 dB assunta in

prossimità della intersezione con l'asse delle ascisse. Per calcolare le costanti di tempo della rete a sella si proceda nel modo seguente:

- si scelga τ_1 uguale alla costante di tempo maggiore della funzione di trasferimento ad anello aperto, $\tau_1 = 1$ s;
- si ponga $T_1 = 10 \cdot \tau_1 = 10$ s;
- si scelga τ_2 uguale alla costante di tempo intermedia della funzione di trasferimento ad anello aperto, $\tau_2 = 0,25$ s;
- si ponga $T_2 = 0,1 \cdot \tau_2 = 0,025$ s.

Pertanto la funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema compensato è

$$G_c(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = \frac{1+s \cdot \tau_1}{1+s \cdot T_1} \cdot \frac{1+s \cdot \tau_2}{1+s \cdot T_2} \cdot \frac{20}{(1+s) \cdot (1+0,25 \cdot s) \cdot (1+0,1 \cdot s)}$$

$$G_c(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = \frac{1+s}{1+s \cdot 10} \cdot \frac{1+s \cdot 0,25}{1+s \cdot 0,025} \cdot \frac{20}{(1+s) \cdot (1+0,25 \cdot s) \cdot (1+0,1 \cdot s)} \quad [5.19]$$

Posto $s = j \cdot \omega$, la [5.19] si scrive nella forma:

$$G_c(j \cdot \omega) \cdot G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega) = \frac{20}{(1+j \cdot 10 \cdot \omega) \cdot (1+j \cdot 0,25 \cdot \omega) \cdot (1+j \cdot 0,1 \cdot \omega)} \quad [5.20]$$

Il modulo in dB e la fase della [5.20] sono:

$$|G_c(j \cdot \omega) \cdot G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega)|_{dB} = 20 \log 20 - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{0,1}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{40}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2}$$

$$\Phi = -\arctg \frac{\omega}{0,1} - \arctg \frac{\omega}{40} - \arctg \frac{\omega}{10}$$

Il diagramma del modulo in dB della funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema compensato interseca l'asse delle ascisse con una pendenza di -20 dB per decade in corrispondenza della pulsazione di taglio $\omega_{T1} \cong 2$ rad / s, che è minore di quella del sistema non compensato (fig. 5.29). Sul diagramma della fase, per $\omega_{T1} \cong 2$ rad / s, si legge $\Phi_{\omega_{T1}} \cong -101^\circ$ (fig. 5.30). Pertanto il margine di fase m_ϕ e il margine di guadagno, quest'ultimo calcolato in corrispondenza di $\Phi = -180^\circ$ e $\omega \cong 20$ rad / s, sono uguali rispettivamente a:

$$m_\phi = 180^\circ - |\Phi_{\omega_{T1}}|$$

$$m_\phi = 180^\circ - |101^\circ| = 79^\circ$$

$$m_g \cong 28 \text{ dB}$$

La rete correttiva ha migliorato il margine di fase ed il margine di guadagno senza variare il guadagno statico. L'ottimizzazione del sistema è stata ottenuta a spese della rapidità della risposta perché il tempo impiegato dal sistema per por-

La rete ritardatrice

Nella pratica si utilizza una rete attiva (fig. 5.7.5) avente al seguente funzione di trasferimento:

$$G_R(s) = \frac{R_6}{R_5} \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1 + \tau_1 \cdot s}{1 + \tau_2 \cdot s}$$

dove

- $R_1 \cdot C_1 = \tau_1$
- $R_2 \cdot C_2 = \tau_2$
- $\tau_2 > \tau_1$

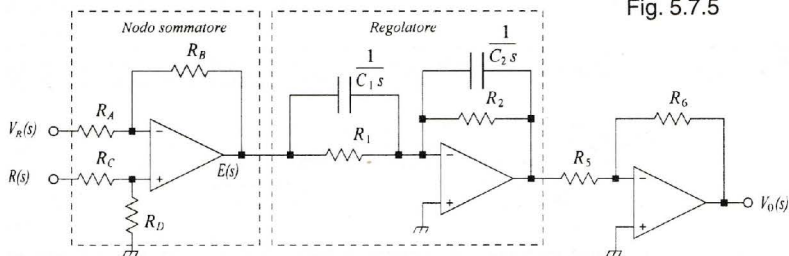


Fig. 5.7.5

La rete anticipatrice

Nella pratica si utilizza una rete attiva (fig. 5.7.13) avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G_A(s) = \frac{R_6}{R_5} \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1 + T_1 \cdot s}{1 + T_2 \cdot s}$$

dove

- $R_1 \cdot C_1 = T_1$
- $R_2 \cdot C_2 = T_2$
- $T_1 > T_2$

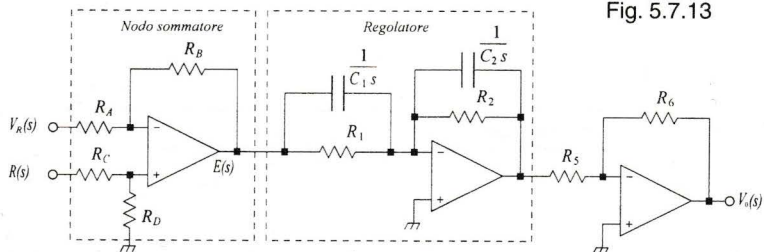


Fig. 5.7.13

La rete a sella.

Nella figura 5.7.21 è riportato lo schema di una rete a sella attiva la cui funzione di trasferimento è:

$$G_S(s) = \frac{R_6}{R_5} \cdot \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{(1 + R_1 \cdot C_1 \cdot s + R_3 \cdot C_1 \cdot s) \cdot (1 + R_2 \cdot C_2 \cdot s)}{(1 + R_1 \cdot C_1 \cdot s) \cdot (1 + R_2 \cdot C_2 \cdot s + R_4 \cdot C_2 \cdot s)}$$

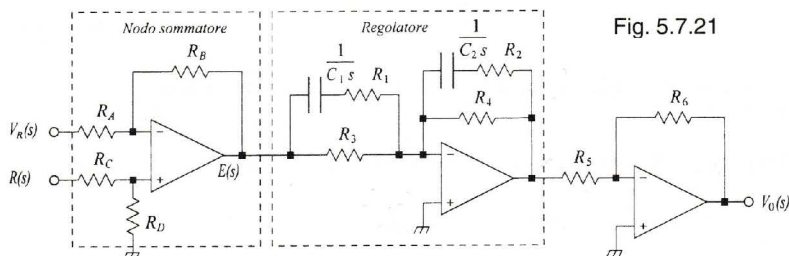


Fig. 5.7.21