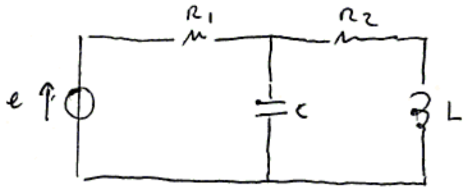
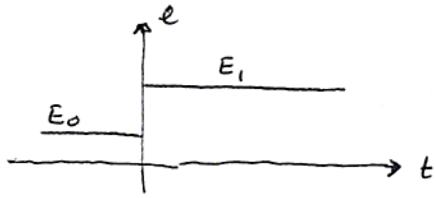
CALCOLARE LA RISPOSTA DEL SISTEMA IN FIGURA, SOLLECITATO DA UN GRADINO DI TENSIONE (DA E_0 AD E_1) APPLICATO ALL'ISTANTE $t=0$

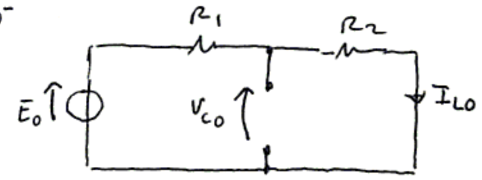




- CONDIZIONI INIZIALI $t=0^-$

C = CTO APERTO

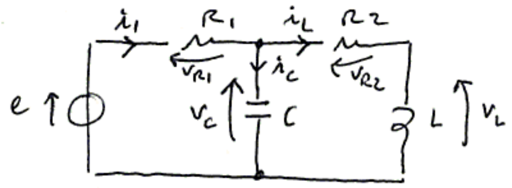
L = CTO CTO



$$I_{L0} = \frac{E_0}{R_1+R_2}$$

$$V_{C0} = E_0 \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

- DALL'ISTANTE $t=0^+$



EQ. RISOLUTIVE

$$\left.\begin{aligned} v_{R1}+v_C&=e\\ v_C&=v_{R2}+v_L\\ i_1&=i_L+i_C\end{aligned}\right\} \text{RELAZ. DI KIRCHH.}$$

$$\left.\begin{aligned} v_{R1}&=R_1 i_1\\ v_{R2}&=R_2 i_L\\ i_C&=C\frac{dv_C}{dt}\\ v_L&=L\frac{di_L}{dt}\end{aligned}\right\} \text{RELAZ. COSTITUTIVE}$$

7 eq. 7 inc. / 3 correnti e 4 tensioni

COMBINANDO

$$R_1 i_1 + v_C = e$$

$$R_1(i_L+i_C)+v_C=e$$

$$R_1\left(i_L+C\frac{dv_C}{dt}\right)+v_C=e$$

$$R_1\left[i_L+C\frac{d}{dt}(v_{R2}+v_L)\right]+v_{R2}+v_L=e$$

$$R_1\left[i_L+C\frac{d}{dt}\left(R_2 i_L+L\frac{di_L}{dt}\right)\right]+R_2 i_L+L\frac{di_L}{dt}=e$$

$$R_1 i_L+R_1 C R_2\frac{di_L}{dt}+R_1 C L\frac{d^2 i_L}{dt^2}+R_2 i_L+L\frac{di_L}{dt}=e$$

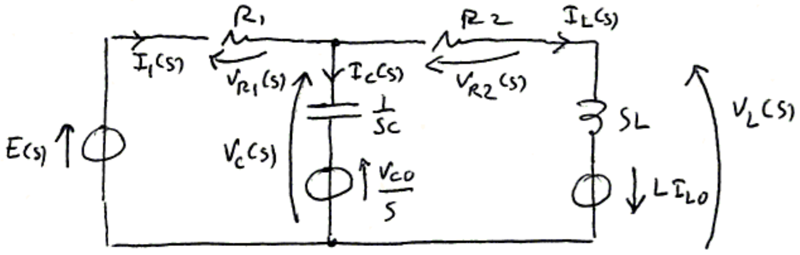
$$R_1 C L\frac{d^2 i_L}{dt^2}+(R_1R_2C+L)\frac{di_L}{dt}+(R_1+R_2)i_L=e$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 i_L}{dt^2}+\dfrac{R_1R_2C+L}{R_1CL}\dfrac{di_L}{dt}+\dfrac{R_1+R_2}{R_1LC}i_L=\dfrac{e}{R_1LC}\\ i_{L0}=I_{L0}\\ v_{C0}=V_{C0} \rightarrow v_C=v_{R2}+v_L \Rightarrow R_2 i_L+L\dfrac{di_L}{dt} \rightarrow \left.\dfrac{di_L}{dt}\right|_0=\left.\dfrac{v_C}{L}\right|_0-\left.\dfrac{R_2}{L}i_L\right|_0 \end{cases}$$

SI RISOLVE L'EQ. DIFFERENZIALE DEL 2° ORDINE (CON LE CONDIZ. INIZIALI ASSEGNATE) RICAVANDO i_L, QUINDI SI RICAVA v_L (DERIVANDO i_L: $v_L=L\frac{di_L}{dt}$), POI SI RICAVA v_C ($v_C=v_{R2}+v_L=v_L+R_2 i_L$), POI SI RICAVA i_C (DERIVANDO v_C: $i_C=C\frac{dv_C}{dt}$). INFINE SI PUÒ RICAVARE i_1 DALLA SOMMA DI i_C E i_L ($i_1=i_C+i_L$) -

SOLUZIONE CON LAPLACE

CIRCUITO NEL DOMINIO DI LAPLACE



- IL GENERATORE È SOSTITUITO DALLA SUA TRASFORMATA $E(s) = \frac{E_1}{s}$
- CONDENSATORE E INDUTTORE SONO SOSTITUITI DALLE RISPETTIVE IMPEDENZE ($\frac{1}{sC}$ E sL) CON GENERATORI SERIE CHE TENGONO CONTO DELLE CONDIZIONI INIZIALI.

LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI (NEL DOMINIO DEL TEMPO) DIVENTANO RELAZIONI ALGEBRICHE (NEL DOMINIO DI LAPLACE)

IL CIRCUITO SI RISOLVE COME FOSSE IN CONTINUA, RICAVANDO LA TRASFORMATA DELLA GRANDEZZA DI INTERESSE –

L'ESPRESSIONE TEMPORALE SI OTTIENE ANTITRASFORMANDO

EQUAZIONI RISOLUTIVE NEL DOMINIO DI LAPLACE

$$\left.\begin{aligned} V_{R1} + V_C &= E \\ V_C &= V_{R2} + V_L \\ I_1 &= I_C + I_L \end{aligned}\right\} \text{RELAZ. DI KIRCHHOFF}$$

$$\left.\begin{aligned} V_{R_1} &= R_1 I_1 \\ V_{R2} &= R_2 I_2 \\ V_C &= \frac{1}{sC} I_C + \frac{V_{C0}}{s} \Rightarrow I_C = sCV_C - CV_{C0} \\ V_L &= sLI_L - LI_{L0} \end{aligned}\right\} \text{RELAZIONI COSTITUTIVE}$$

COMBINANDO

$$R_1 I_1 + V_C = E$$
$$R_1 (I_C + I_L) + V_C = E$$
$$R_1 \left[sCV_C - CV_{C0} + I_L\right] + V_C = E$$
$$sR_1CV_C - R_1CV_{C0} + R_1I_L + V_C = E$$
$$sR_1C\left[V_{R2} + V_L\right] - R_1CV_{C0} + R_1I_L + \left[V_{R2} + V_L\right] = E$$
$$sR_1C\left[R_2I_L + V_L\right] - R_1CV_{C0} + R_1I_L + R_2I_L + V_L = E$$
$$sR_1R_2CI_L + sR_1C\left[sLI_L - LI_{L0}\right] - R_1CV_{C0} + (R_1+R_2)I_L + sLI_L - LI_{L0} = E$$
$$sR_1R_2CI_L + s^2R_1LCI_L - sR_1CLI_{L0} - R_1CV_{C0} + (R_1+R_2)I_L + sLI_L - LI_{L0} = E$$
$$s^2R_1LCI_L + s(R_1R_2C + L)I_L + (R_1+R_2)I_L = E + sR_1CLI_{L0} + R_1CV_{C0} + LI_{L0}$$
$$s^2I_L + s\frac{R_1R_2C+L}{R_1LC}I_L + \frac{R_1+R_2}{R_1LC}I_L = \frac{E}{R_1LC} + \frac{sR_1LCI_{L0} + R_1CV_{C0} + LI_{L0}}{R_1LC}$$

(I COEFFICIENTI DELL'EQ. ALGEBRICA NEL DOMINIO DI LAPLACE SONO GLI STESSI DELL'EQ. DIFFERENZIALE NEL DOMINIO DEL TEMPO – L'ULTIMO TERMINE TIENE CONTO DELLE CONDIZIONI INIZIALI

SI RISOLVE RICAVANDO I_L [TRASFORMATA DI LAPLACE DI $i_L(t)$] –

$$I_L = \frac{E/R_1LC}{s^2 + s\frac{R_1R_2C+L}{R_1LC} + \frac{R_1+R_2}{R_1LC}} + \frac{(sR_1LCI_{L0} + R_1CV_{C0} + LI_{L0})/R_1LC}{s^2 + s\frac{R_1R_2C+L}{R_1LC} + \frac{R_1+R_2}{R_1LC}}$$

ANTITRASFORMANDO SI RICAVA $i_L(t)$ COME SOMMA DI DUE TERMINI:

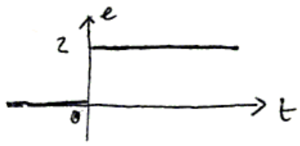
IL PRIMO (DETTO RISPOSTA FORZATA) CHE DIPENDE DALLA FORZANTE E $[E(s) = E_1/s]$

IL SECONDO (DETTO RISPOSTA LIBERA) CHE DIPENDE DALLE CONDIZIONI INIZIALI (STATO ZERO) –

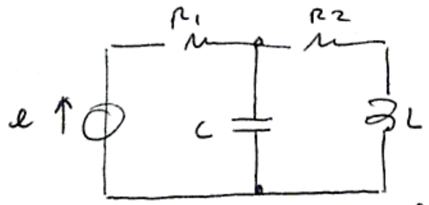
ESEMPIO NUMERICO:

DETERMINARE LA RISPOSTA $i_L(t)$ DEL SISTEMA SOLLECITATO DA UN SEGNALE A GRADINO COSÌ DEFINITO

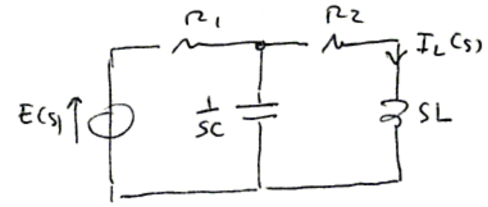
$$e(t) = \begin{cases} 0\ V & \text{per } t<0 \\ 2\ V & \text{per } t>0 \end{cases}$$



$$E(s) = \frac{2}{s}$$



$\xRightarrow{\mathcal{L}}$



C.I.

$$I_{L0} = \frac{E_0}{R_1+R_2} = 0$$

$$V_{C0} = \frac{E_0}{R_1+R_2} \cdot R_2 = 0$$

$R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $L = 1H$, $C = 0{,}25\,F$ –

$$I_L(s) = \frac{E(s)/R_1LC}{s^2 + \frac{R_1R_2C+L}{R_1LC}s + \frac{R_1+R_2}{R_1LC}} = \frac{1}{s^2+2s+5} \cdot \frac{2}{s}$$

($\frac{2}{s}$ È LA TRASFORMATA DELLA SOLLECITAZIONE APPLICATA $e(t)$)

I POLI DELLA RISPOSTA SONO

$$P_1 = -1 + j2$$
$$P_2 = -1 - j2$$
$$P_3 = 0$$

$$I_L(s) = \frac{2}{(s+1+j2)(s+1-j2)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1-j2} + \frac{C}{s+1+j2}$$

$$A = s\frac{2}{s(s^2+2s+5)}\Big|_{s=0} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$B = (s+1-j2)\frac{2}{s(s+1+j2)(s+1-j2)}\Big|_{s=-1+j2} = -0{,}2 + j0{,}1$$

$$C = (s+1+j2)\frac{2}{s(s+1+j2)(s+1-j2)}\Big|_{s=-1-j2} = -0{,}2 - j0{,}1$$

LA TRASFORMATA DELLA RISPOSTA $I_2(s)$ È

$$I_2(s) = \frac{0{,}4}{s} + \frac{-0{,}2+j0{,}1}{s+1-j2} + \frac{-0{,}2-j0{,}1}{s+1+j2}$$

L'ANTITRASFORMATA DI LAPLACE È LA RISPOSTA $i_L(t)$ DEL SISTEMA

$$i_L(t) = 0{,}4 + (-0{,}2+j0{,}1)e^{(-1+j2)t} + (-0{,}2-j0{,}1)e^{(-1-j2)t}$$

APPLICANDO LE FORMULE DI EULERO SI OTTIENE:

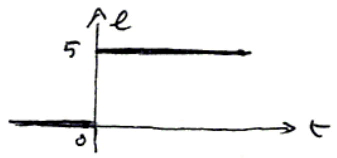
$$i_L(t) = 0{,}4 - \left[0{,}4\cos 2t + 0{,}2\sin 2t\right]e^{-t}$$

PER $t \to \infty$ IL VALORE FINALE DELLA RISPOSTA TENDE A 0,4 A.
AL TERMINE DEL TRANSITORIO L'INTENSITÀ DELLA CORRENTE È LIMITATA UNICAMENTE DALLE DUE RESISTENZE –

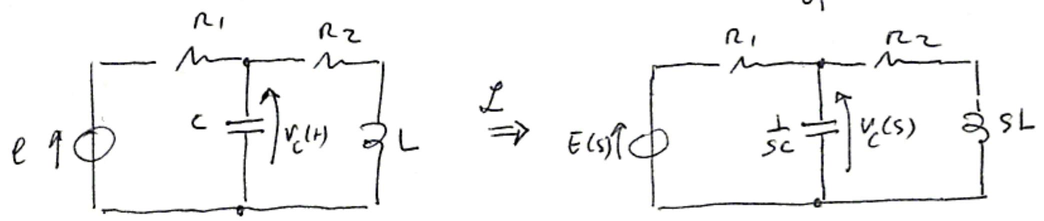
ALTRO ESEMPIO NUMERICO:

DETERMINARE LA RISPOSTA $v_C(t)$ DEL SISTEMA SOLLECITATO DA UN SEGNALE AGRADINO COSÌ DEFINITO

$$e(t) = \begin{cases} 0\ V & \text{per } t<0 \\ 5\ V & \text{per } t\geq 0 \end{cases}$$



$$E(s) = \frac{5}{s}$$



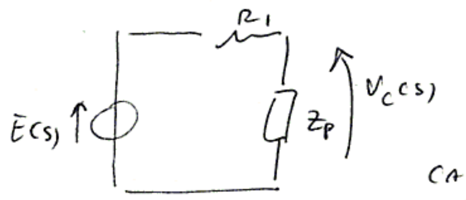
C.I.

$$I_{L0} = \frac{E_0}{R_1+R_2} = 0$$

$$V_{C0} = \frac{E_0}{R_1+R_2} \cdot R_2 = 0$$

$R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $C = 1F$, $L = 1H$

LA TENSIONE $V_C(s)$ È LA TENSIONE AI CAPI DI Z_P



$$Z_P = \frac{(R_2+sL)\cdot\frac{1}{sC}}{R_2+sL+\frac{1}{sC}} = \frac{R_2+sL}{s^2LC+sR_2C+1}$$

CALCOLO $V_C(s)$ CON IL PARTITORE DI TENSIONE

$$V_C(s) = E(s)\cdot\frac{Z_P}{R_1+Z_P} = E(s)\cdot\frac{\frac{R_2+sL}{s^2LC+sR_2C+1}}{R_1+\frac{R_2+sL}{s^2LC+sR_2C+1}} = E(s)\cdot\frac{R_2+sL}{s^2R_1LC+sR_1R_2C+R_1+R_2+sL} =$$

$$= \frac{R_2+sL}{s^2R_1LC+s(R_1R_2C+L)+R_1+R_2}\cdot E(s)$$

SOSTITUENDO I VALORI DEI PARAMETRI DEL CIRCUITO LA TRASFORMATA DI LAPLACE DELLA TENSIONE AI CAPI DEL CONDENSATORE RISULTA:

$$V_C(s) = \frac{s+4}{s^2+5s+5}\cdot\frac{5}{s}$$

($\frac{5}{s}$ È LA TRASFORMATA DELLA SOLLECITAZIONE)

SVILUPPANDO NELLA SOMMA DI FRAZIONI PARZIALI SI HA:

$$V_C(s) = \frac{4}{s} - \frac{4{,}23}{s+1{,}382} + \frac{0{,}23}{s+3{,}618}$$

L'ANTITRASFORMATA DI LAPLACE È LA RISPOSTA $V_C(t)$:

$$v_C(t) = 4 - 4{,}23\,e^{-1{,}382t} + 0{,}23\,e^{-3{,}618t}$$

IL CIRCUITO DINAMICO, TRASFORMATO NEL DOMINIO DI LAPLACE, PUO' ESSERE RISOLTO PIU'AGEVOLMENTE CON LE USUALI TECNICHE DI RISOLUZIONE CIRCUITALE (COME IN QUESTO ESEMPIO), PIUTTOSTO CHE RISOLVERE IL SISTEMA COSTITUITO DALL'INSIEME DELLE EQUAZIONI RISOLUTIVE (COME FATTO ALL'INIZIO DI QUESTO ESERCIZIO, COMBINANDO LE 7 EQUAZIONE, CON LE 7 INCOGNITE / le 3 correnti e le 4 tensioni).

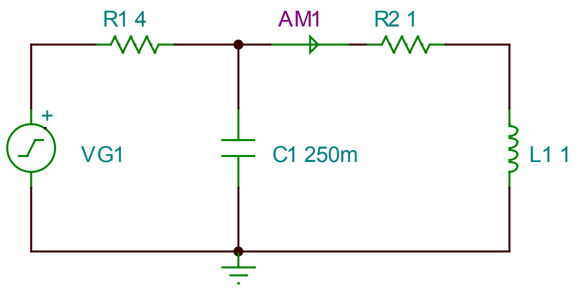
LE CONDIZIONI INIZIALI SONO CONSIDERATE MEDIANTE OPPORTUNI GENERATORI.

IL SISTEMA PUO' ESSERE RISOLTO APPLICANDO LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI PER VALUTARE SEPARATAMENTE LA RISPOSTA LIBERA E QUELLA FORZATA.

SE SERVE SI PUO' EFFTTUARE LA TRASFORMAZIONE DEI GENERATORI, DA SERIE A PARALLELO E VICEVERSA, SI POSSONO COMPORRE IMPEDENZE SERIE O PARALLELO, APPLICARE I PARTITORI DI TENSIONE E CORRENTE, I TEOREMI DI THEVENIN E NORTON , ECC.

1° esempio numerico

VG1 = 2 u(t)



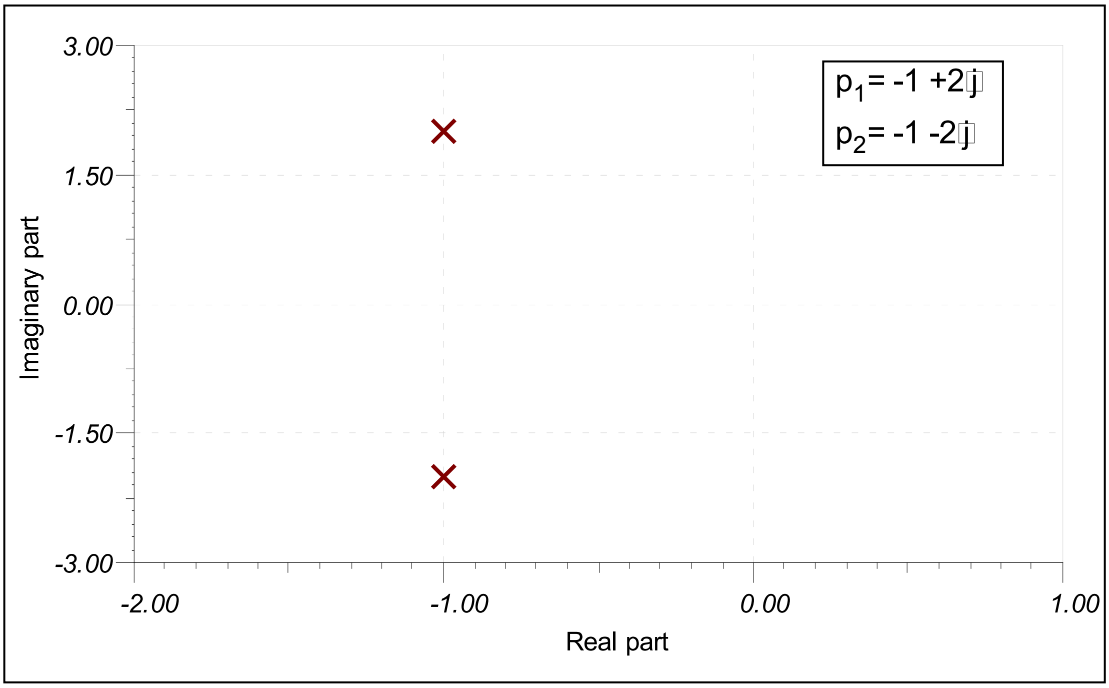
Transfer function:

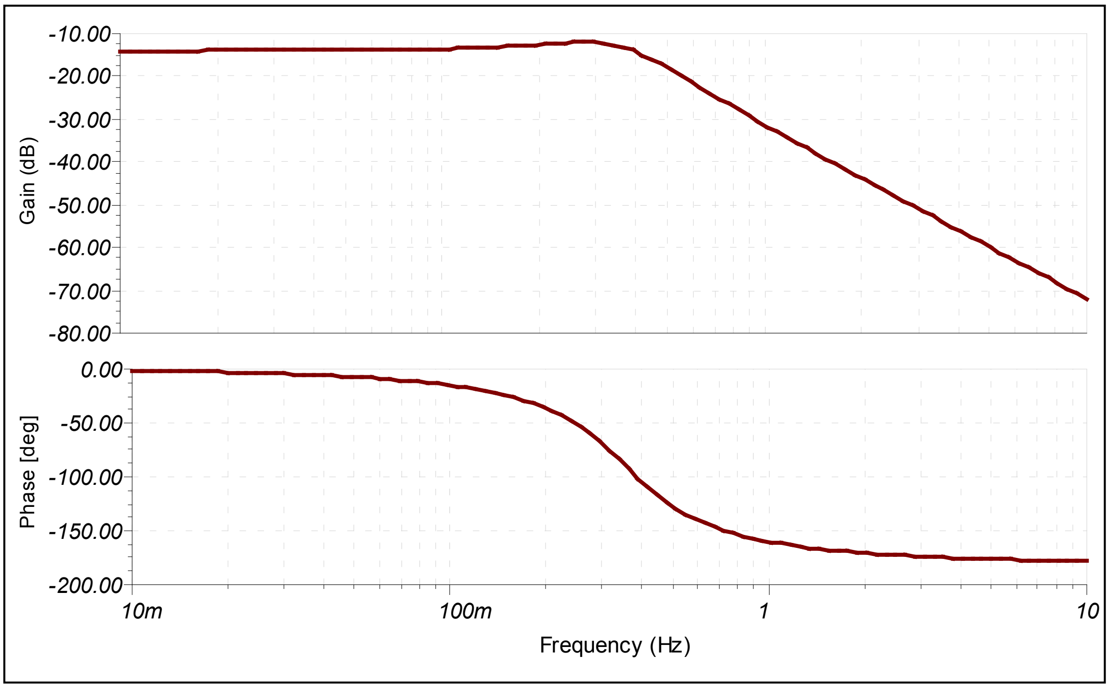
$$W(s)=\frac{1}{R_2+R_1+(R_2\cdot C_1\cdot R_1+L_1)\cdot s+L_1\cdot C_1\cdot R_1\cdot s^2}$$

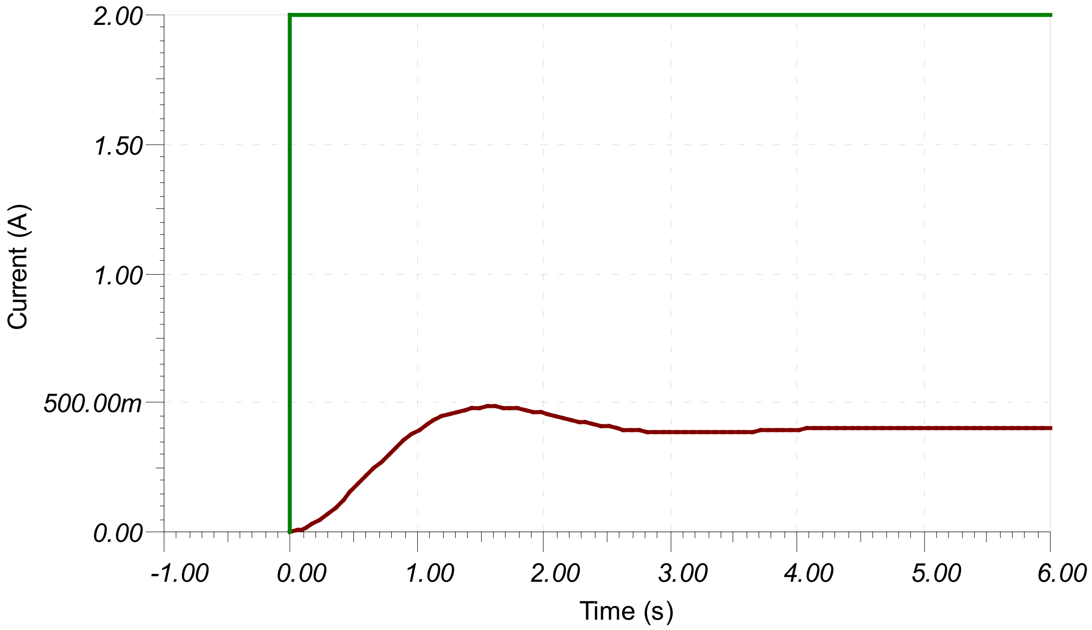
$$W(s)=2\cdot 10^{-1}\cdot\frac{1}{1+4\cdot 10^{-1}\cdot s+2\cdot 10^{-1}\cdot s^2}$$

TR Result :

$$i(t)=(4\cdot 10^{-1}+4.47\cdot 10^{-1}\cdot e^{-1\cdot t}\cdot \cos(2\cdot t-206.57°))\cdot\square(t)$$



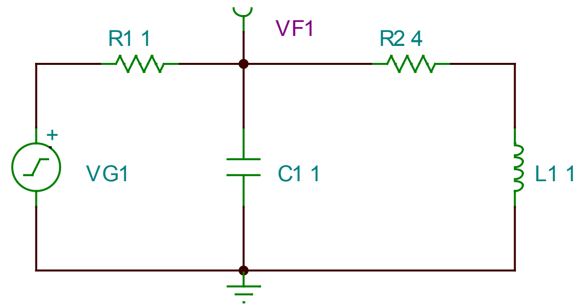




2.00
1.50
1.00
500.00m
0.00
Current (A)
-1.00
0.00
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
6.00
Time (s)

2° esempio numerico

VG1 = 5 u(t)



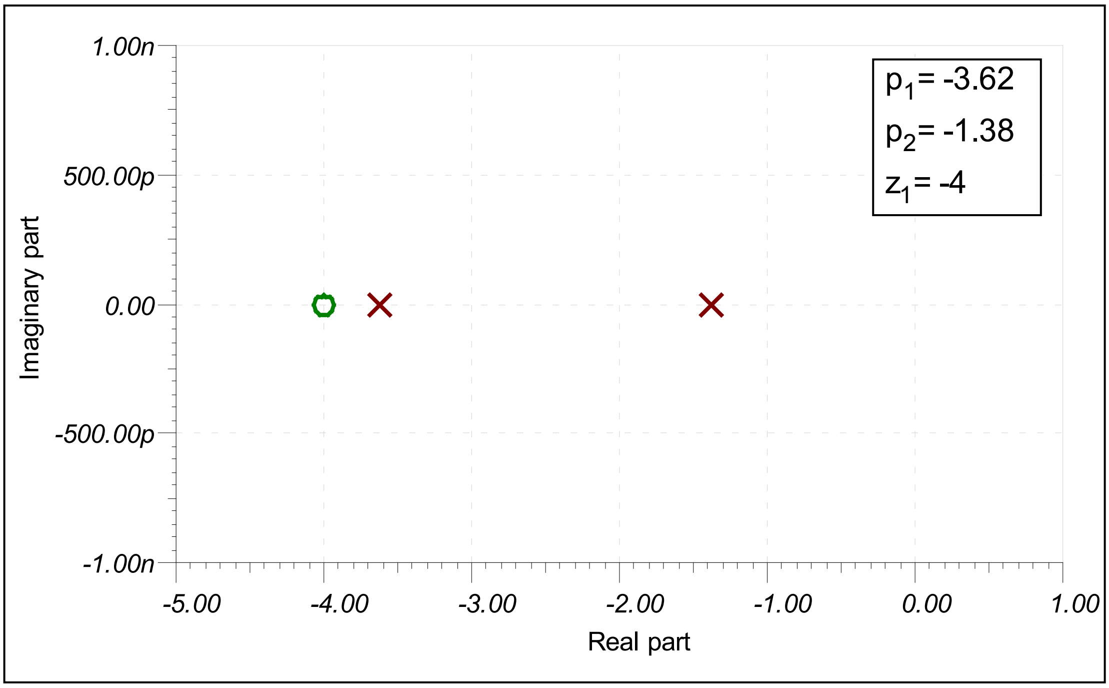
Transfer function:

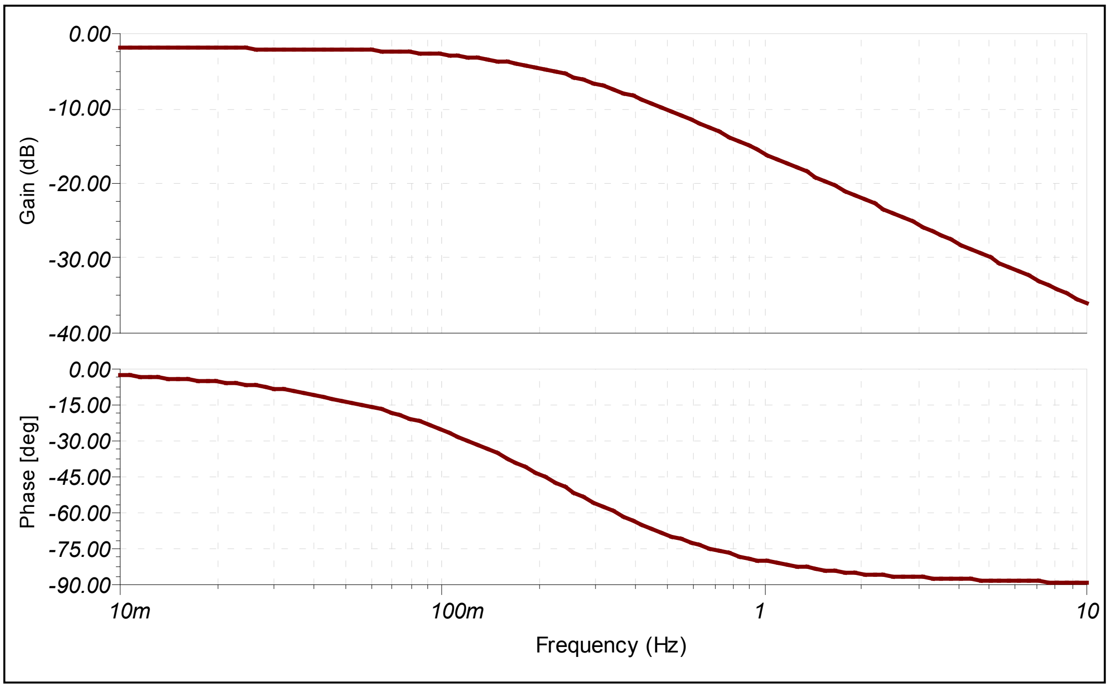
$$W(s)=\frac{R_2+L_1\cdot s}{R_1+R_2+(R_2\cdot C_1\cdot R_1+L_1)\cdot s+L_1\cdot C_1\cdot R_1\cdot s^2}$$

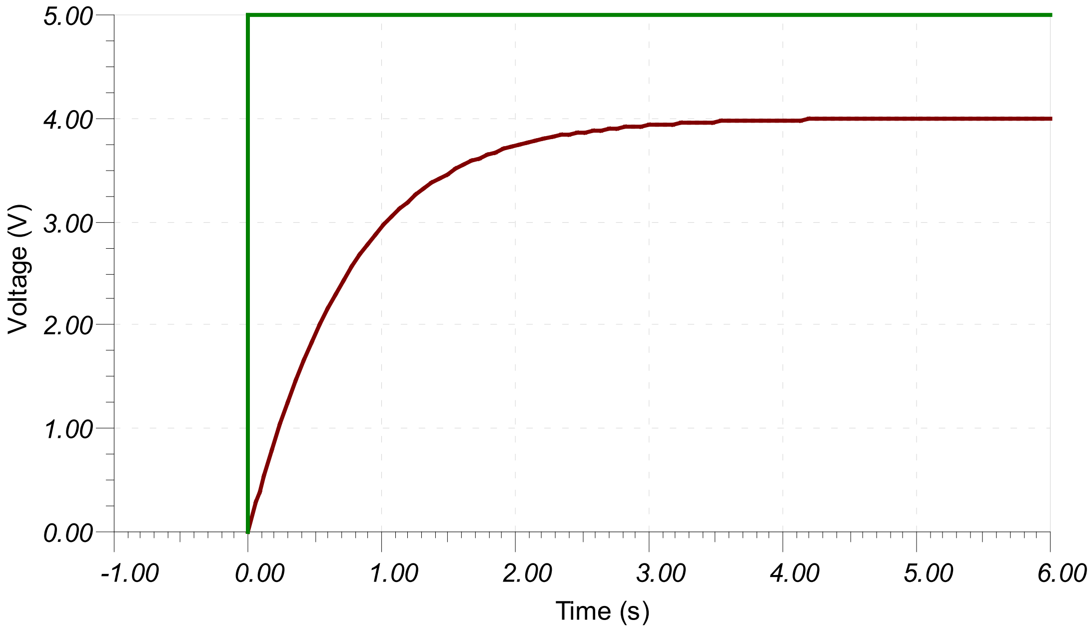
$$W(s)=8\cdot 10^{-1}\cdot\frac{1+2.5\cdot 10^{-1}\cdot s}{1+s+2\cdot 10^{-1}\cdot s^2}$$

TR Result :

$$v(t)=(4-4.24\cdot e^{-1.38\cdot t}+2.36\cdot 10^{-1}\cdot e^{-3.62\cdot t})\cdot\square(t)$$






5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0.00
Voltage (V)
-1.00
0.00
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
6.00
Time (s)