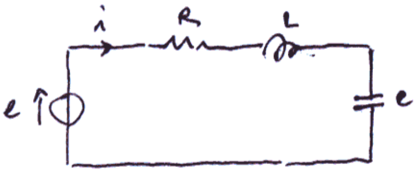
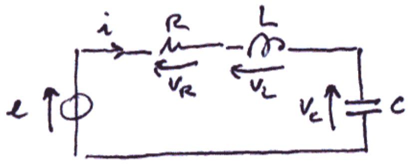
DETERMINARE LA CORRENTE NEL CIRCUITO ASSEGNATO, IN RISPOSTA AD UN GRADINO DI TENSIONE



$R = 8\,\Omega$
$L = 1\,H$
$C = \frac{1}{25}\,F$
$e(t) = 2\,u(t)$

EQ. RISOLUTIVE NEL DOMINIO DEL TEMPO



LKT $\quad v_R + v_L + v_C = e$

R.C. $\quad v_R = R i$

$v_L = L \frac{di}{dt}$

$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \rightarrow v_C = v_{C0} + \frac{1}{C}\int i\,dt$

COMBINANDO LE EQ. SCRITTE:

$$R i + L\frac{di}{dt} + v_{C0} + \frac{1}{C}\int i\,dt = e$$ EQ. INTEGRO-DIFFERENZIALE

DERIVANDO OGNI TERMINE RISPETTO AL TEMPO:

$$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = \frac{de}{dt}$$

ORDINANDO I TERMINI

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L}\frac{de}{dt}$$

EQ. DIFFERENZIALE DEL 2° ORDINE NELL'INCOGNITA $i(t)$

SCRIVENDO IN ALTRO MODO LE EQ. RISOLUTIVE

$$R i + L\frac{di}{dt} + v_C = e$$

SOSTITUENDO $i = C\frac{dv_C}{dt}$:

$$RC\frac{dv_C}{dt} + LC\frac{d^2 v_C}{dt^2} + v_C = e$$

ORDINANDO I TERMINI:

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} v_C = \frac{e}{LC}$$

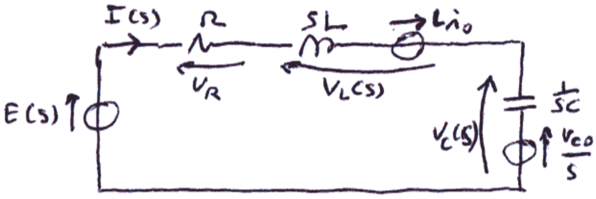
EQ. DIFFERENZIALE DEL 2° ORDINE NELL'INCOGNITA $v_C(t)$

RISOLVENDO L'EQ. DIFFERENZIALE SI RICAVA $v_C(t)$.

SUCCESSIVAMENTE, DALLA RELAZIONE $i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$, SI RICAVA $i(t)$.

IL PROBLEMA ASSEGNATO PUÒ ESSERE RISOLTO IN MODO ALTERNATIVO MEDIANTE L'UTILIZZO DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE.

NEL DOMINIO DI LAPLACE, IL CIRCUITO ASSEGNATO DIVENTA



- LA FORZANTE $e(t)$ È SOSTITUITA DALLA SUA TRASFORMATA DI LAPLACE $E(s) = \frac{2}{s}$
- IL RESISTORE RIMANE INVARIATO
- L'INDUTTORE E IL CONDENSATORE SONO SOSTITUITI DALLE IMPEDENZE (FUNZIONI DI s, VARIABILE COMPLESSA DI LAPLACE)

- I GENERATORI Li_0 e $\frac{V_{C0}}{s}$, IN SERIE ALLE IMPEDENZE, TENGONO CONTO DEI VALORI INIZIALI DELLA CORRENTE NELL'INDUTTORE E DELLA TENSIONE AI CAPI DEL CONDENSATORE
(I GENERATORI SONO ASSENTI SE LE CONDIZIONI INIZIALI SONO NULLE: $i_0 = 0$ e $V_{C0} = 0$)

CONSIDERANDO NULLE LE CONDIZIONI INIZIALI:

$$I(s) = \frac{E(s)}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

SOSTITUENDO I VALORI ASSEGNATI:

$$I(s) = \frac{\frac{2}{s}}{8 + s + \frac{25}{s}} = \frac{2}{s^2 + 8s + 25}$$

L'ANDAMENTO TEMPORALE DELLA CORRENTE RICHIEDE IL CALCOLO DELL'ANTITRASFORMATA.

È, TUTTAVIA, POSSIBILE DETERMINARE IL VALORE INIZIALE E FINALE, CIOÈ A REGIME, DELLA CORRENTE, PRESCINDENDO DAL CALCOLO DELL'ANTITRASFORMATA.

TEOREMA DEL VALORE INIZIALE

$$\lim_{t \to 0} i(t) = \lim_{s \to \infty} s\, I(s)$$

SOSTITUENDO

$$\lim_{t \to 0} i(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot \frac{2}{s^2 + 8s + 25} = 0$$

IL VALORE INIZIALE NULLO È UN VALORE ATTESO:
LA CORRENTE IN UN INDUTTORE È UNA VARIABILE DI STATO E, PERTANTO, POICHÉ LA RETE NON È DEGENERE, NON PUÒ SUBIRE BRUSCHE VARIAZIONI.
LA VARIAZIONE CON CONTINUITÀ IMPONE $i(0^+) = i(0^-)$

TEOREMA DEL VALORE FINALE

$$\lim_{t \to \infty} i(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot I(s)$$

SOSTITUENDO

$$\lim_{t \to \infty} i(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{2}{s^2 + 8s + 25} = 0$$

L'ANDAMENTO COMPLETO DELLA CORRENTE, NELLA FASE TRANSITORIA, SI RICAVA DAL CALCOLO DELL'ANTITRASFORMATA DI $I(s)$

$$I(s) = \frac{2}{s^2+8s+25}$$

DETERMINO I POLI DELLA FUNZIONE

$$s_{1\,2} = -4 \pm \sqrt{16-25} = -4 \pm j3 \quad \begin{cases} s_1 = -4+j3 \\ s_2 = -4-j3 \end{cases}$$

$$I(s) = \frac{2}{s^2+8s+25} = \frac{\bar{A}}{s-(-4+j3)} + \frac{\bar{B}}{s-(-4-j3)}$$

$$\bar{A} = \left.\frac{2}{s-(-4-j3)}\right|_{s=-4+j3} = \frac{2}{-4+j3+4+j3} = \frac{2}{j6} = -j\frac{1}{3}$$

$$\bar{B} = \underline{A} = +j\frac{1}{3}$$

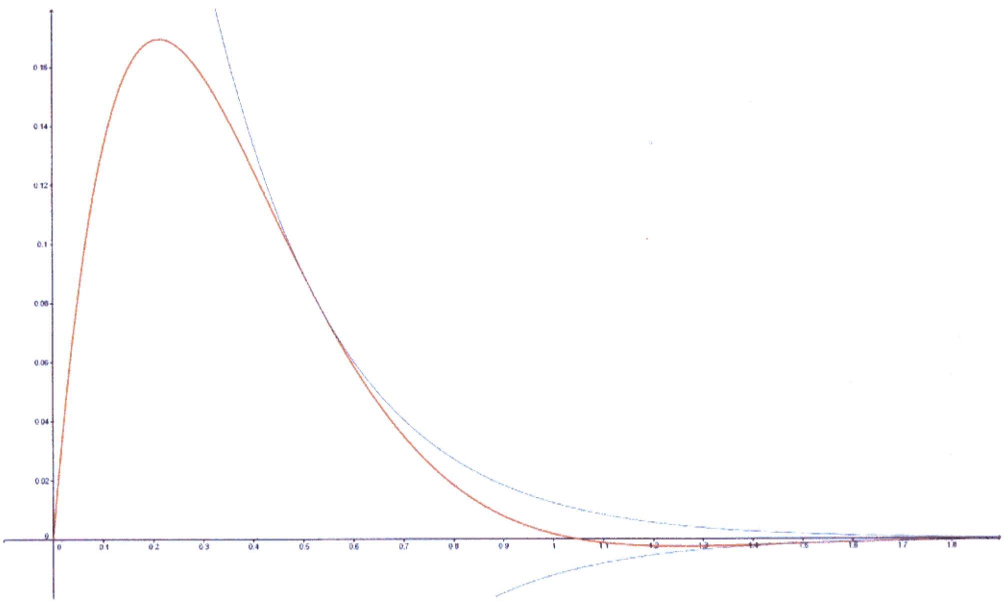
$$I(s) = -j\frac{1}{3}\,\frac{1}{s+4-j3} + j\frac{1}{3}\,\frac{1}{s+4+j3}$$

ANTITRASFORMANDO

$$i(t) = -j\frac{1}{3}\left[e^{(-4+j3)t} - e^{(-4-j3)t}\right] = -j\frac{1}{3}e^{-4t}\left[\frac{e^{+j3t}-e^{-j3t}}{2j}\right]\cdot 2j$$

$$= \frac{2}{3}e^{-4t}\sin 3t \cdot u(t)$$

L'ANDAMENTO DELLA CORRENTE È OSCILLATORIO SMORZATO IN VIRTÙ DEI POLI COMPLESSI CONIUGATI DELLA FUNZIONE TRASFORMATA.



VALUTO L'ANDAMENTO DELLA TENSIONE AI CAPI DEL CONDENSATORE RIPRENDENDO L'ESPRESSIONE DELLA TRASFORMATA DELLA CORRENTE E RICORRENDO ALLA RELAZIONE COSTITUTIVA DEL CONDENSATORE NEL DOMINIO DI LAPLACE (A CONDIZIONI INIZIALI NULLE)

$$V_c(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

SOSTITUENDO

$$V_c(s) = \frac{1}{sC} \cdot \frac{E(s)}{R+sL+\frac{1}{sC}} = \frac{25}{s} \cdot \frac{2}{s^2+8s+25} = \frac{50}{s(s^2+8s+25)}$$

DETERMINO I VALORI INIZIALE E FINALE

T.V.I. $\lim_{t\to 0} v_c(t) = \lim_{s\to\infty} s V_c(s) = \lim_{s\to\infty} s \cdot \frac{50}{s(s^2+8s+25)} = 0\,V$

T.V.F. $\lim_{t\to\infty} v_c(t) = \lim_{s\to 0} s V_c(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{50}{s(s^2+8s+25)} = 2V$

IL VALORE RICAVATO CONFERMA LE ATTESE: TERMINATA LA FASE TRANSITORIA, NEL CIRCUITO NON SCORRE CORRENTE, E IL CONDENSATORE RISULTA CARICATO AL VALORE COSTANTE DELLA FORZANTE (2V).

L'ANDAMENTO COMPLETO DELLA TENSIONE AL CONDENSATORE SI DETERMINA CALCOLANDO L'ANTITRASFORMATA DELLA $V_c(s)$.

$$V_c(s) = \frac{50}{s(s^2+8s+25)} = \frac{A}{s} + \frac{\bar{B}}{s-s_1} + \frac{\bar{C}}{s-s_2} \quad \text{con} \begin{cases} s_1 = -4+j3 \\ s_2 = -4-j3 \end{cases}$$

$$A = sV_c(s)\Big|_{s=0} = 2$$

$$\bar{B} = (s-s_1)V_c(s)\Big|_{s=s_1} = \frac{50}{s(s-s_2)}\Big|_{s=s_1} = \frac{50}{s_1(s_1-s_2)} = \frac{50}{(-4+j3)(j6)} = \frac{25}{-9-j12} = -\frac{25}{3}\cdot\frac{1}{3+j4}\cdot\frac{3-j4}{3-j4} = -\frac{1}{3}(3-j4)$$

$$\bar{C} = (s-s_2)V_c(s)\Big|_{s=s_2} = \frac{50}{s(s-s_1)}\Big|_{s=s_2} = \frac{50}{s_2(s_2-s_1)} = \frac{50}{(-4-j3)(-j6)} = \frac{25}{-9+j12} = -\frac{25}{3}\frac{1}{3-j4}\cdot\frac{3+j4}{3+j4} = -\frac{1}{3}(3+j4) = \underline{B}$$

$$V_0(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{3}(3-j4)\cdot\frac{1}{s-(-4+j3)} - \frac{1}{3}(3+j4)\frac{1}{s-(-4-j3)}$$

ANTITRASFORMANDO

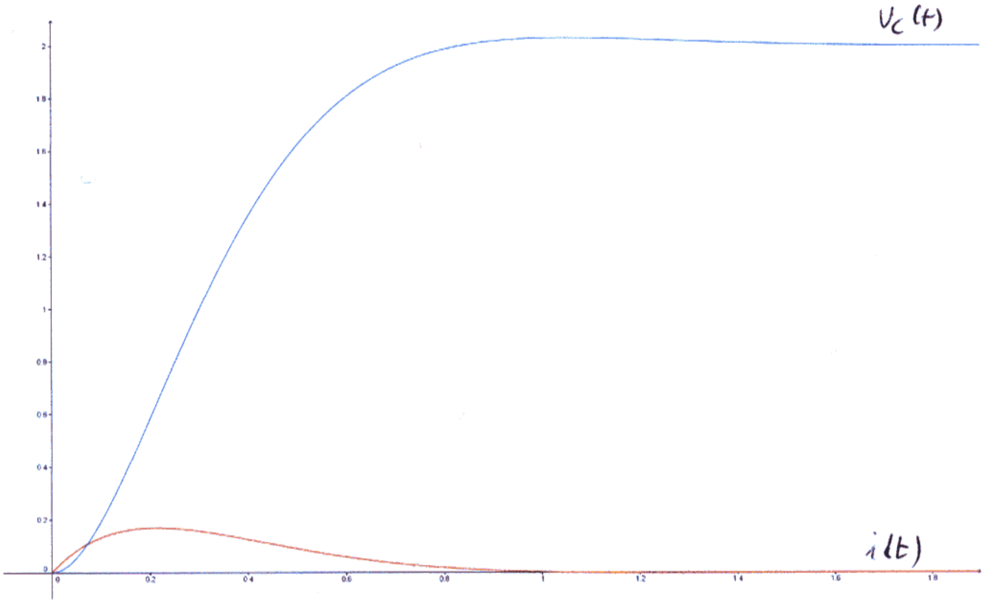
$$v_c(t) = 2 - \frac{1}{3}(3-j4)e^{(-4+j3)t} - \frac{1}{3}(3+j4)e^{(-4-j3)t} =$$

$$= 2 - \left(1-j\frac{4}{3}\right)e^{-4t}\cdot e^{j3t} - \left(1+j\frac{4}{3}\right)e^{-4t}\cdot e^{-j3t} =$$

$$= 2 - e^{-4t}\left[\left(e^{j3t}+e^{-j3t}\right) - j\frac{4}{3}\left(e^{j3t}-e^{-j3t}\right)\right] =$$

$$= 2 - e^{-4t}\left[2\left(\frac{e^{j3t}+e^{-j3t}}{2}\right) - j\frac{4}{3}(2j)\left(\frac{e^{j3t}-e^{-j3t}}{2j}\right)\right] =$$

$$= \left\{2 - e^{-4t}\left[2\cos 3t + \frac{8}{3}\sin 3t\right]\right\}u(t)$$



NOTA L'ESPRESSIONE DELLA TENSIONE AL CONDENSATORE,

DALLA RELAZIONE COSTITUTIVA RELATIVA AL CONDENSATORE, SI RICAVA LA CORRENTE $i(t)$

$$i = C\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{25}\frac{d}{dt}\left[2 - e^{-4t}\left(2\cos 3t + \frac{8}{3}\sin 3t\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{25}\left[4e^{-4t}\left(2\cos 3t + \frac{8}{3}\sin 3t\right) - e^{-4t}\left(-6\sin 3t + 8\cos 3t\right)\right] =$$

$$= e^{-4t}\left[\cancel{\frac{8}{25}\cos 3t} + \frac{32}{75}\sin 3t + \frac{6}{25}\sin 3t - \cancel{\frac{8}{25}\cos 3t}\right] =$$

$$= e^{-4t}\cdot\frac{50}{75}\sin 3t = \frac{2}{3}e^{-4t}\sin 3t \quad \text{valido per } t \geq 0$$

ESPRESSIONE GIÀ RICAVATA ANTITRASFORMANDO $I(s)$ -

IN MODO ALTERNATIVO, NOTA L'ESPRESSIONE DELLA CORRENTE SI PUÒ CALCOLARE QUELLA DELLA TENSIONE APPLICANDO LA RELAZIONE COSTITUTIVA DEL CONDENSATORE IN FORMA INTEGRALE

$$V_C(t) = v_{C0} + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = 25\int_0^t e^{-4t}\cdot\frac{2}{3}\sin 3t\,dt$$

IL CALCOLO DELL'INTEGRALE DEVE CONDURRE ALL'ESPRESSIONE DELLA TENSIONE $V_C(t)$, GIÀ RICAVATA IN ALTRO MODO -

LA TENSIONE ALL'INDUTTORE SI RICAVA DERIVANDO L'ESPRESSIONE DELLA CORRENTE

$$V_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

CONSIDERANDO LA STESSA RETE ELETTRICA, CON DIVERSO VALORE DI R,
($R = 26\,\Omega$ ANZICHÈ $R = 8\,\Omega$), SI OTTIENE

$$I(s) = \frac{2}{s^2+26s+25} = \frac{2}{(s+1)(s+25)}$$ CON POLI REALI E DISTINTI

SCOMPONENDO IN SOMMA DI FRATTI SEMPLICI

$$I(s) = \frac{2}{(s+1)(s+25)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+25}$$

SI RICAVA

$$A = (s+1)I(s)\Big|_{s=-1} = \frac{2}{s+25}\Big|_{s=-1} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

$$B = (s+25)I(s)\Big|_{s=-25} = \frac{2}{s+1}\Big|_{s=-25} = -\frac{2}{24} = -\frac{1}{12}$$

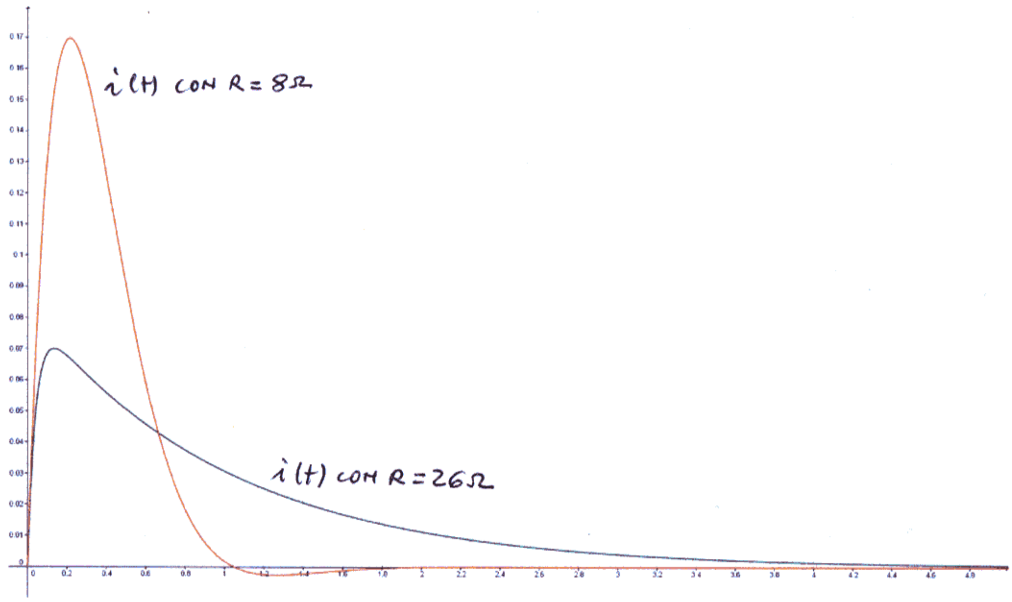
QUINDI

$$I(s) = \frac{1}{12}\,\frac{1}{s+1} - \frac{1}{12}\,\frac{1}{s+25}$$

ANTITRASFORMANDO

$$i(t) = \frac{1}{12}e^{-t} - \frac{1}{12}e^{-25t}$$

L'ANDAMENTO DELLA CORRENTE È APERIODICO, CON UN POLO DOMINANTE –



CON $R = 0\,\Omega$ I POLI RISULTANO COMPLESSI CONIUGATI CON PARTE REALE NULLA:
L'ANDAMENTO DELLA CORRENTE RISULTA OSCILLATORIO NON SMORZATO;
NON SI PUÒ APPLICARE IL TEOREMA DEL VALORE FINALE –

CON $R = 10\,\Omega$ L'ESPRESSIONE DELLA TRASFORMATA DELLA CORRENTE È

$$I(s) = \frac{2}{s^2+10s+25} = \frac{2}{(s+5)^2}$$

È IMMEDIATO IL CALCOLO DELL'ANTITRASFORMATA –