Regime dinamico nel dominio del tempo

Appunti a cura dell'Ingg. ***Basocccu Gian Piero*** *e* ***Marras Luca***
Tutors del corso di ELETTROTECNICA per meccanici e chimici
A. A 2003/04 e 2004/05
Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Cagliari

Ultimo aggiornamento 1/02/2010

Premessa

Abbiamo studiato:

- **il regime stazionario** nel quale le grandezze del sistema non variano nel tempo

- **il regime sinusoidale permanente** nel quale le grandezze in esame variano nel tempo mantenendo costante le ampiezze e le frequenze.

In generale quando un sistema passa da un regime stazionario ad un altro o da un regime permanente sinusoidale ad un altro, questo passaggio non avviene istantaneamente, ma in un tempo finito durante il quale le grandezze del circuito possono variare nel tempo in ampiezza, frequenza e fase.

Questo funzionamento che si verifica per un tempo transitorio caratterizza il regime dinamico.

Lo studio dei transitori in ingegneria elettrica corrisponde allo studio del comportamento dinamico delle strutture in altri rami dell'ingegneria.
Non è sufficiente stabilire il comportamento statico delle strutture e degli impianti, come

- la struttura di un ponte,
- di un grattacielo,
- di un albero di una macchina,
- di una diga,
- di un'ala di un aereo
- delle pale di un impianto eolico etc…

ma è necessario conoscere anche il loro comportamento dinamico per poterli dimensionare correttamente .
I metodi matematici con i quali si svolge l'analisi dei sistemi elettrici in regime transitorio sono quelli trattati in altri testi specifici ed utilizzabili in tutti i campi dell'ingegneria, quando si debbano risolvere problemi di risposta dinamica.
I metodi sperimentali presuppongono la realizzazione di ***modelli*** ***(modellazione)****.*

Problemi dinamici relativi a sistemi non elettrici possono essere risolti con modelli analoghi a quelli elettrici essendo retti da equazioni differenziali di uguale struttura.

La modellazione e risoluzione dei sistemi elettrici in regime dinamico rappresentano delle metodologie spendibili per studio dei regimi dinamici di problemi dinamici di natura diversa.

Esistono delle perfette analogie nella modellazione tra

- sistemi elettrici
- sistemi meccanici
- sistemi idraulici
- sistemi termici
- chimici
- etc…

ESEMPI

Analogia termica

L'analogia può essere così espressa:

Sistema elettrico

In un corpo materiale l'intensità di corrente ***I*** *fluisce dal punto a potenziale più alto al punto a potenziale più basso, è proporzionale alla differenza di potenziale* ΔV *e dipende dalla natura del corpo materiale. La costante di proporzionalità corrispondente al rapporto tra la differenza di potenziale e l'intensità di corrente è chiamata resistenza elettrica* ***R*** *.*

$$I = \Delta V / R$$

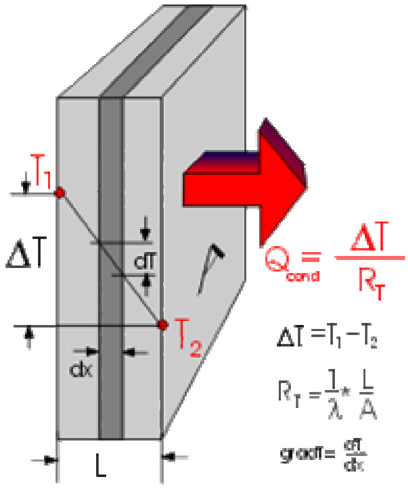
sostituendo le parole intensità di corrente con potenza termica e potenziale con temperatura, elettrico con termico si ha:

Sistema termico

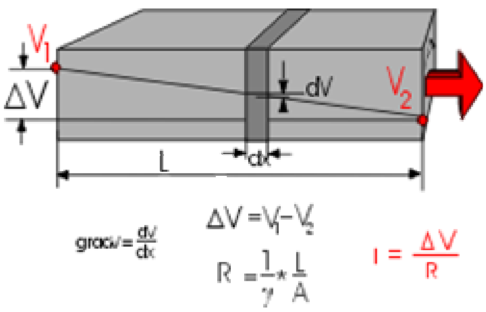
In un corpo materiale la potenza termica Q_{cond} *fluisce dal punto a temperatura più alta al punto a temperatura più bassa, è proporzionale alla differenza di temperatura* ΔT *e dipende dalla natura fisica del corpo. La costante di proporzionalità corrispondente al rapporto tra la differenza di temperatura e la potenza termica è chiamata resistenza termica* R_T*.*

$$Q_{cond} = \Delta T / R_T.$$

Conduzione termica attraverso una parete piana

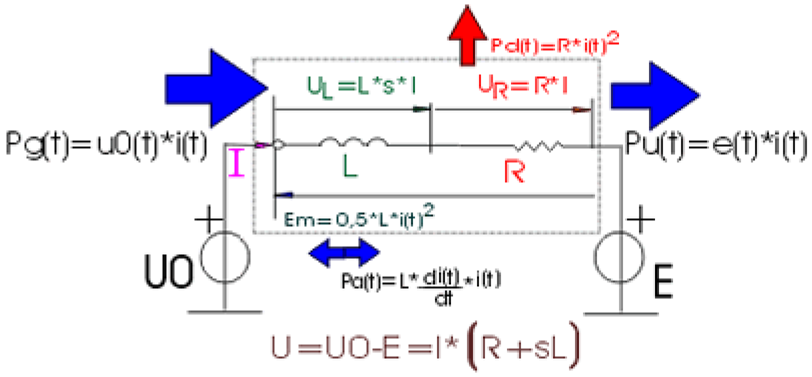


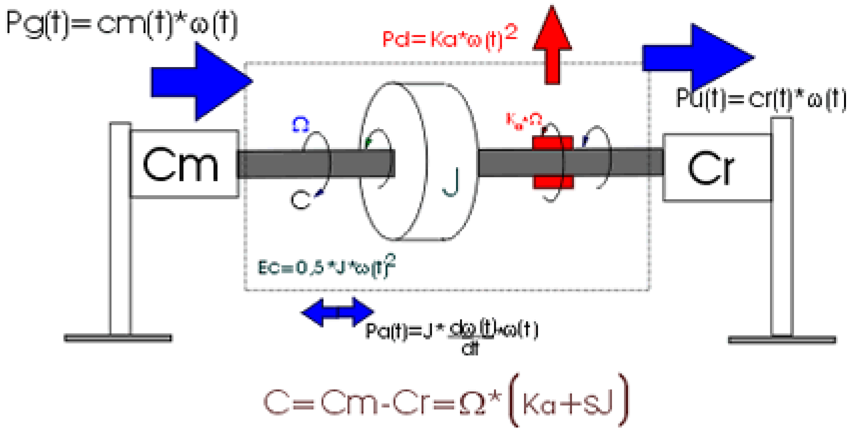
Conduzione Elettrica in un conduttore prismatico



Analogia meccanica

La figura e la tabella illustrano l'analogia meccanica tra grandezze elettriche e grandezze meccaniche per la rotazione

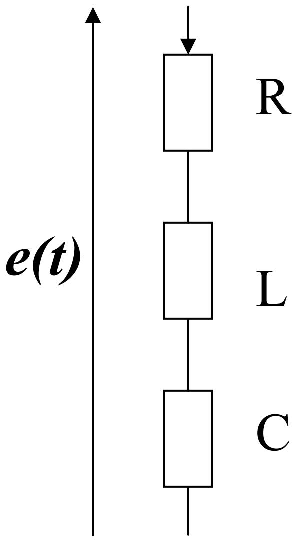




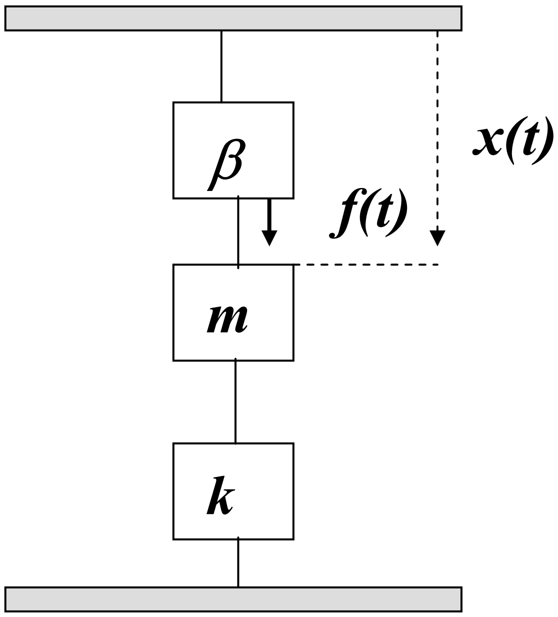
Grandezze elettriche			Grandezze meccaniche		
Nome	***Simbolo***	***U.mis***	***Nome***	***Simbolo***	***U.mis***
Tensione	U	V	Coppia	C	J
corrente	I	A	Velocità angolare	W	rad/s
Resistenza	R	Ω	Coefficiente d'attrito	K_a	J*s
Induttanza	L	H	Momento di inerzia	J	$Kg*m^2$
Costante di tempo	t	s	Costante di tempo	t	s
Corrente di cortocircuito	Icc	A	Velocità a vuoto	ω_0	rad/s

Esempio di
analogia tra modelli di sistemi di natura fisica diversi

Il modello del <u>sistema elettrico</u> relativo a un bipolo elettrico lineare **R L C** serie, alimentato da un generatore di tensione **e(t)**:



$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$



presenta delle analogie con il <u>sistema meccanico</u> lineare comprendente la sorgente con forza f(t) e i tre elementi meccanici:

- <u>lo smorzatore</u> a resistenza viscosa che oppone una forza che dipendente dalla velocità attraverso il <u>coefficiente di smorzamento β,</u>
- la <u>massa</u> **m** per la quale è richiesta una forza proporzionale alla accelerazione;
- la <u>molla</u> con la costante elastica **k** per la quale è richiesta una forza proporzionale allo spostamento.

Al circuito elettrico è associabile il modello analitico dell'equazione differenziale, ottenuta applicando il secondo principio di Kirchhoff alla maglia costituita dal bipolo **R L C** alimentato dal generatore **e(t)**:

$$e(t) = L\frac{di}{dt} + u_c + Ri(t) \qquad i(t) = \frac{dq}{dt}$$

$$\boxed{e(t) = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q}$$

Al sistema meccanico corrisponde il modello analitico dell'equazione differenziale ottenuta applicando la seconda legge di Newton:

$$\boxed{f(t) = m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx}$$

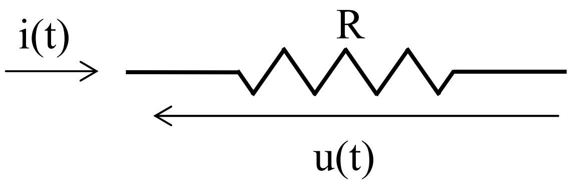
dove *x* è lo spostamento, che deve essere inteso misurato rispetto ad un punto fisso (riferimento inerziale)

RETI IN REGIME DINAMICO

Componenti con memoria e componenti senza memoria

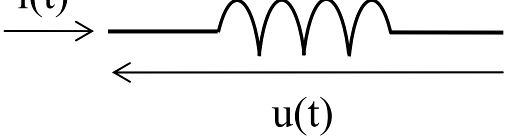
I circuiti elettrici sono costituiti da:

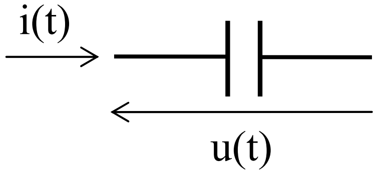
<u>COMPONENTI SENZA MEMORIA:</u> come le resistenze nelle cui relazioni costitutive non intervengono legami integro differenziali. Per loro il valore assunto da ciascuna grandezza elettrica (tensione o corrente), non dipende dai valori assunti in istanti precedenti dalla stessa, o da altre grandezze elettriche del circuito



$$u(t) = R \cdot i(t)$$

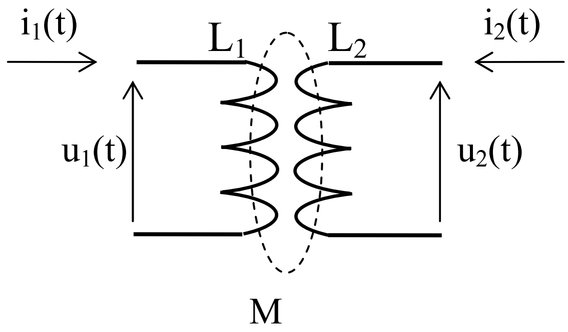
<u>COMPONENTI CON MEMORIA:</u> come le induttanze e le capacità nelle cui relazioni costitutive intervengono legami integro differenziali.





$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \qquad i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

Sono componenti con memoria anche gli induttori mutuamente accoppiati:



$$\begin{cases} u_1(t) = L_1 \dfrac{di_1(t)}{dt} + M \dfrac{di_2(t)}{dt} \\ u_1(t) = M \dfrac{di_1(t)}{dt} + L_2 \dfrac{di_2(t)}{dt} \end{cases}$$

La presenza di <u>operazioni di derivazione rispetto al tempo</u> comporta che le grandezze elettriche dipendano da:

- Valori attuali delle eccitazioni e dalla loro rapidità di variazione nel tempo

La presenza di <u>operazioni di integrazione</u> comporta che le grandezze elettriche dipendano da:

- Valori attuali delle eccitazioni e anche da tutti i valori che esse hanno assunto negli istanti precedenti a quello attuale.

In base a queste considerazioni si può affermare che:

- ✓ Per i circuiti senza memoria il sistema risolutivo è di tipo algebrico.
- ✓ Per i circuiti con memoria il sistema risolutivo è di tipo integro-differenziale.

L'analisi di un circuito con memoria richiede l'esecuzione di due fasi successive:

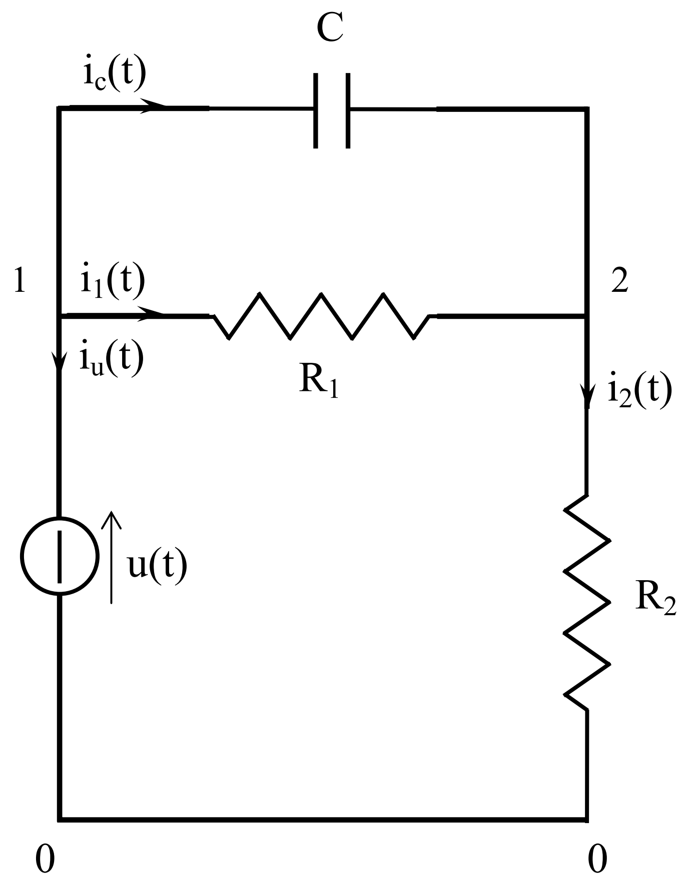
1. Definizione del sistema integro-differenziale
2. Risoluzione del sistema integro-differenziale

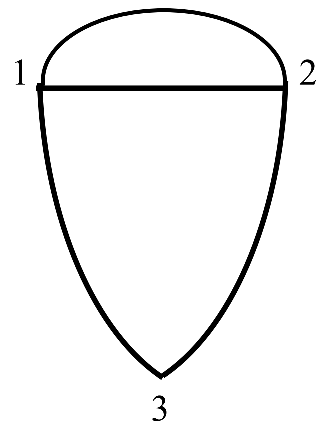
1. DEFINIZIONE DEL SISTEMA INTEGRO-DIFFERENZIALE

L'individuazione del sistema integro-differenziale richiede:

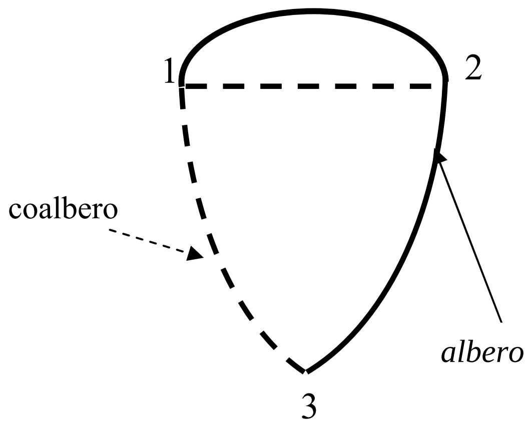
1. Scelta delle grandezze elettriche incognite e scrittura delle equazioni di equilibrio in base alla prima o alla seconda legge di Kirchhoff o altri sistemi risolutivi delle reti;
2. Espressione delle grandezze elettriche note ed incognite nelle equazioni di equilibrio precedenti, utilizzando le relazioni costitutive dei componenti.

Esempio di risoluzione:





IL GRAFO DEL CIRCUITO



Lati=l=4 Nodi=n=3

<u>Il nodo 0 assunto come nodo di riferimento è collegato a terra e ha potenziale V_0= 0V</u>.

Le variabili descrittive del circuito sono 2**l* (l=lati) e per risolvere il circuito occorre scrivere complessivamente 2**l*= 8 equazioni: 4 per le tensioni e 4 per le correnti.

4 EQUAZIONI TOPOLOGICHE (Principio di Kirchhoff)

n=3 e l= 4

$$\begin{cases} i_u + i_1 + i_c = 0 \\ i_u + i_2 = 0 \\ u_u - u_c - u_2 = 0 \\ u_1 - u_c = 0 \end{cases}$$

n-1 = 2 EQUAZIONI AI NODI

l-(n-1) = 2 EQUAZIONI ALLE MAGLIE

4 EQUAZIONI COSTITUTIVE

$$\begin{cases} u_u = u(t) \\ u_1 = R_1 \cdot i_1 \\ i_c = C \cdot \dfrac{du_c}{dt} \\ u_2 = R_2 \cdot i_2 \end{cases}$$

Se, come accade in molti casi si deve determinare una sola variabile, non è necessario risolvere l'intero sistema, ma basta ricavare una relazione che lega la variabile u(t) desiderata all'ingresso. .
Per esempio se la variabile che si intende determinare è $u_c(t)$:

$$\begin{cases} u(t) = u_c + R_2 \cdot i_2 \\ i_2 = -i_u = i_1 + i_c = \dfrac{u_c}{R_1} + C\dfrac{du_c}{dt} \end{cases}$$

Sostituendo l'espressione della corrente $i_2(t)$ in quella della tensione $u(t)$:

$$u(t) = u_c + R_2 \cdot \left(\frac{u_c}{R_1} + C\frac{du_c}{dt} \right)$$

e ordinando i termini della equazione differenziale così definita si ha:

$$u(t) = R_2 \cdot C \frac{du_c}{dt} + \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) \cdot u_c$$

Si è trovata una relazione tra la causa *u(t)* e l'effetto $u_c(t)$ ossia:

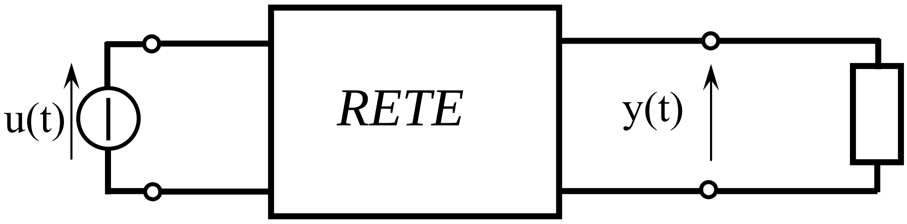
la relazione ingresso *u(t)*- uscita $u_c(t)$ o relazione (input/output) I/O

In generale si determina una relazione causa–effetto o ingresso–uscita, dove l'ingresso e l'uscita possono essere sia tensioni sia correnti secondo la natura dell'ingresso o dell'uscita.

INGRESSO u(t)		USCITA y(T)
TENSIONE	$\longrightarrow$	TENSIONE
TENSIONE	$\longrightarrow$	CORRENTE
CORRENTE	$\longrightarrow$	TENSIONE
CORRENTE	$\longrightarrow$	CORRENTE

La relazione (input/output) I/O è un'equazione differenziale ordinaria la cui soluzione può essere ricavata sommando l'integrale generale dell'omogenea associata, all'integrale particolare dell'equazione completa.

La rete è vista come un quadripolo, dove ai morsetti 11' d'ingresso si inserisce un generatore di segnale u(t), e ai morsetti di uscita 22' si inserisce il ramo relativo alla grandezza in uscita y(t):



$$\begin{cases} y(t) = u_C(t) = C \cdot \int i_C(t)dt \\ u(t) = u_u(t) \end{cases}$$

2.Risoluzione del sistema integro-differenziale

Nel caso in esame:

I/O ≡ TENSIONE /TENSIONE

<u>Le condizioni iniziali</u> ci permettono di definire i parametri incogniti:

per esempio: $\begin{cases} u_c\left(0^+\right) = 0 \\ u(t) = E \end{cases}$

$$u_c = u_{c0}(t) + u_{cp}(t)$$

Per determinare <u>la risposta libera $u_{c0}(t)$</u> si considera l'omogenea associata alla equazione differenziale:

$$u(t) = R_2 \cdot C \frac{du_c}{dt} + \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) \cdot u_c$$

omogenea associata, ponendo $\lambda = \frac{du_c}{dt}$:

$$\left\{ \mathrm{R}_2 \cdot C \cdot \lambda + \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) \cdot 1 = 0 \Rightarrow \left\{ \lambda = -\left(\frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2 \cdot C} \right) \right. \right.$$

la soluzione sarà del tipo:

$$\mathrm{u}_{\mathrm{co}} = A \cdot e^{-\lambda t}$$

Per determinare l'integrale particolare o risposta forzata $u_p(t)$ occorre tener presente che esso sarà della stessa natura del segnale impresso u(t)=E, per cui:

u_{cp}=K=cost

essendo: $$u(t) = R_2 \cdot C \frac{du_c}{dt} + (\frac{R_2}{R_1} + 1) \cdot u_c$$

$$E = R_2 \cdot C \frac{dK}{dt} + (\frac{R_2}{R_1} + 1) \cdot K$$

$$E = (\frac{R_2}{R_1} + 1) \cdot K$$

$$K = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot E$$

Da cui:

$$u_c(t) = u_{c0} + u_p = A \cdot e^{-\lambda t} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot E$$

Il valore di $u_c(t)$ è indeterminato non essendo stato definito il parametro A.

Per determinare A si devono imporre le condizioni iniziali:

per t=0 $\Rightarrow$ $u_c(0^+)=0$

$$0 = A \cdot e^{-\lambda 0} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot E$$

$$0 = A + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot E \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot E$$

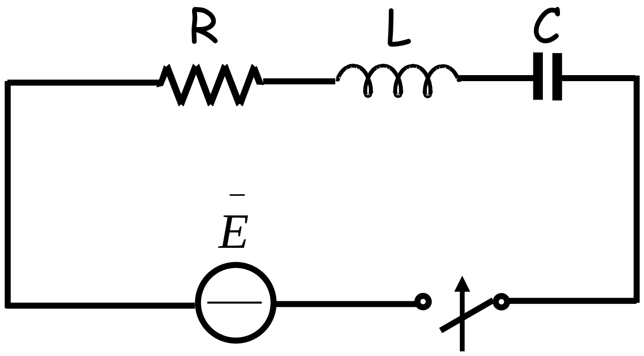
per cui la tensione $u_c(t)$ *risulta :*

$$u_c(t) = \frac{E}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}t}\right)$$

Reti in regime dinamico

In un circuito elettrico ogni volta che una grandezza elettrica cambia valore, o si modifica in qualche modo la configurazione della rete, si passa da un regime permanente relativo alla condizione di funzionamento iniziale, ad un altro regime permanente attraverso una fase dinamica transitoria.

Per esempio nel caso semplice di <u>un circuito a maglia unica</u>, si voglia studiare come si stabilizza la corrente alla chiusura dell'interruttore:



Occorre scrivere l'equazione risolutiva del circuito e definire le condizioni di funzionamento iniziali, assumendo per t=0 l'istante di chiusura.

L'equazione risolutiva è facilmente deducibile applicando il secondo principio di Kirchhoff all'unica maglia del circuito:

$$e(t) = R \cdot i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t) \cdot dt + u_c(0)$$

Essa é una equazione integro-differenziale nella grandezza incognita i(t).

Per risolvere una rete comunque complessa si possono scrivere un certo numero di equazioni integro-differenziali applicando i teoremi risolutivi delle reti.

Quando, come accade in molti casi, si vuole determinare come varia nel transitorio una grandezza in particolare tra tutte quelle relative al circuito (una tensione o una corrente in un solo ramo), il problema si riconduce sempre alla risoluzione di una equazione integro differenziale di ordine n.

1. Definizione della equazione risolutiva integro-differenziale

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 =$$

$$= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + ... + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

Nell'ipotesi di rete tempo-invariante i coefficienti a_i e b_i (parametri R, L, C, M…) sono costanti.

Per le reti tempo-varianti occorre tener conto del fatto che questi parametri variano nel tempo e la risoluzione diventa più complessa.

Una volta scritta l'equazione integro differenziale si passa alla seconda fase della risoluzione.

2. Risoluzione della equazione integro-differenziale

L'integrale generale della equazione integro-differenziale

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 =$$
$$= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

è pari alla somma

- dell'integrale dell'omogenea associata $y_0(t)$ e
- dell'integrale particolare $y_p(t)$:

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

con:
- u(t) noto per t>0 e
- siano note le condizioni iniziali: y(t) e le sue n-1 derivate in $t=0^+$

Per determinare <u>***l'integrale generale***</u> o <u>***risposta libera***</u> dovuta

- alla <u>energia elettromagnetica</u> accumulata precedentemente dagli induttori e
- alla <u>energia elettrostatica</u> accumulata precedentemente dai condensatori,

occorre risolvere <u>*l'equazione caratteristica della omogenea associata, che per una equazione differenziale di ordine n sarà:*</u>

$$a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a \cdot \lambda + a_0 = 0$$

si possono presentare 3 casi:

a) <u>Radici reali distinte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_n$</u>

$$\boldsymbol{y_0(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + \ldots\ldots + C_n \cdot e^{\lambda_n t}}$$

b) <u>k delle n soluzioni, sono coincidenti</u>

$$\boldsymbol{y_0(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + \ldots\ldots + C_{k-1} \cdot e^{\lambda_{k-1} t} + e^{\lambda_k t} \cdot (C_1 + C_2\, t + \ldots + C_k\, t^{k-1})}$$

c) <u>m coppie uguali di radici complesse coniugate λ=a+jb</u>

$$\boldsymbol{y_0(t) = e^{at} \left\{ \left[A_1 + A_2 \cdot t + \ldots . A_m \cdot t^{m-1} \right] \cos bt + \left[B_1 + B_2 \cdot t + \ldots . + B_m \cdot t^{m-1} \right] \sin bt \right\}}$$

per una coppia di radici complesse coniugate:

$$y_0(t) = e^{at} \{ A \cos bt + B \sin bt \}$$

C_1, C_2,……C_n sono n costanti di integrazione che si determinano imponendole condizioni iniziali:

$$y_i(o^+)\ ,\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0^+},\dots\dots\dots,\left.\frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}}\right|_{t=0^+}$$

Per determinare ***l'integrale particolare*** o ***risposta forzata*** dovuta

- alle tensioni impresse dai generatori di tensione o
- alle correnti impresse dai generatori di corrente,

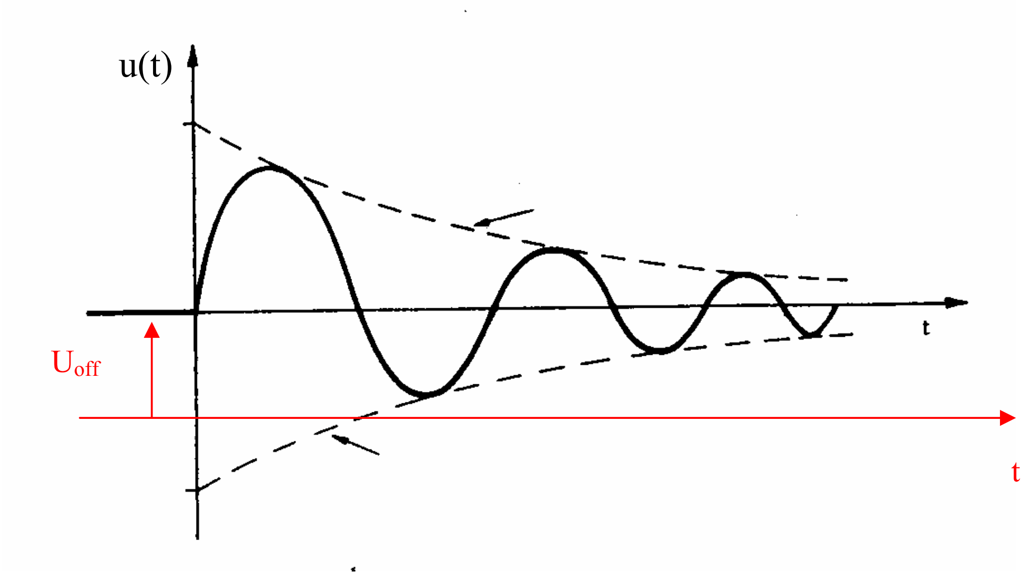
il procedimento è più complicato.

In generale l'integrale particolare $y_p(t)$ dipende dal tipo di u(t) applicato.

Nei casi più frequenti u(t) è esprimibile come un <u>generico ingresso cisoidale</u>

$$u(t) = Uoff + Ue^{\sigma t}\cos\left(\omega t + \varphi\right)\cdot u_{-1}(t) \qquad \text{con U} > 0$$

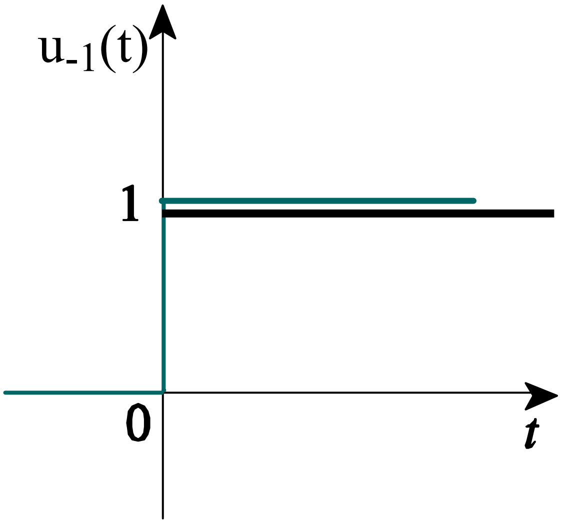
Nell'esempio riportato nel grafico, la tensione di offset, che comporterebbe una traslazione della curva, è nulla *Uoff*=0V



Da questa espressione, modificando i parametri, sono ricavabili segnali elementari e composti.

Esempi

Funzione gradino:

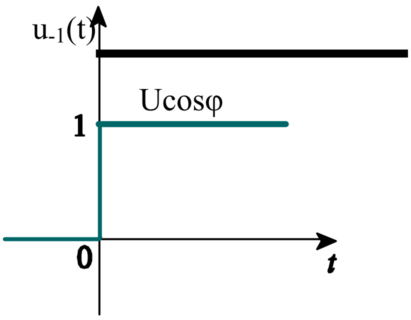


$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

per **σ = 0; ω = 0 U=1 e φ = 0;**

✓ GRADINO PARI A U cosφ

$$u(t) = U \cdot \cos\varphi \cdot u_{-1}(t)$$

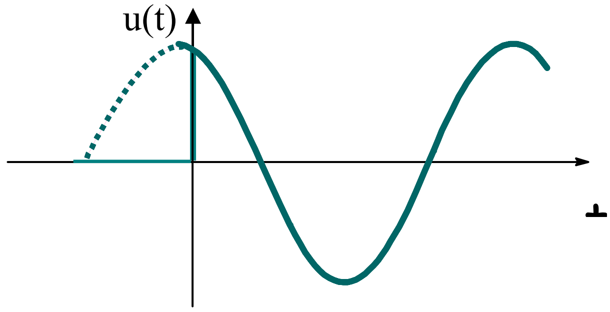


✓ **σ = 0; ω ≠ 0; 0<φ>π/2**

COSINUSOIDE

0 < φ < π/2

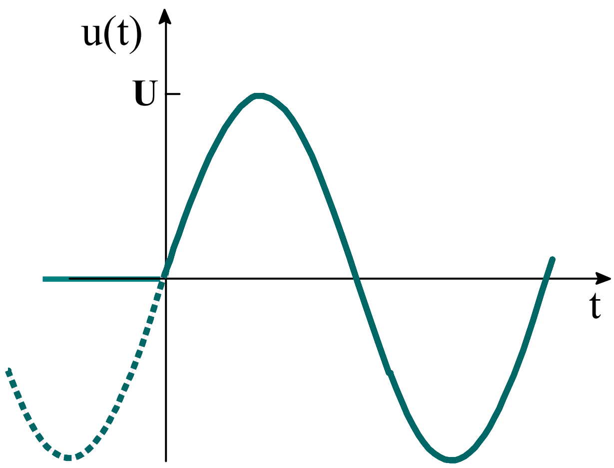
$$u(t) = U \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot u_{-1}(t)$$



✓ **σ = 0; ω ≠ 0;**
φ = - π/2

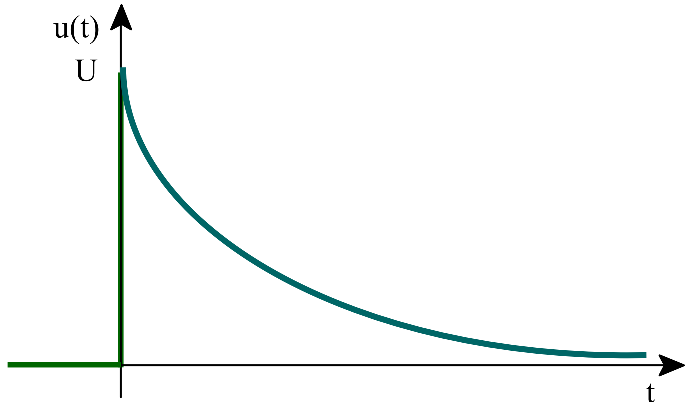
SINUSOIDE

$$u(t) = U \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \cdot u_{-1}(t) = U \cdot sen(\omega t) \cdot u_{-1}(t)$$



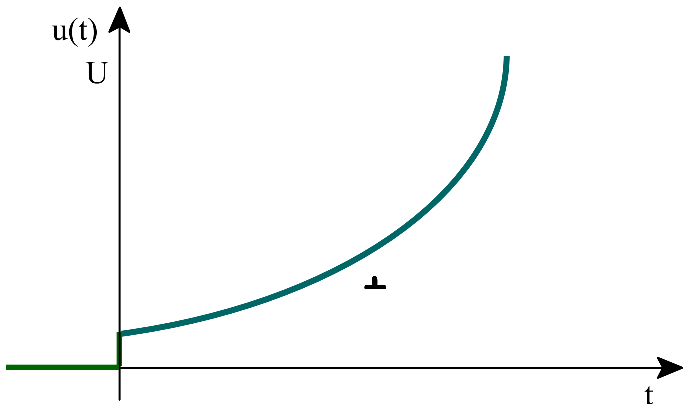
✓ **σ < 0; ω = 0;** ESPONENZIALE DECRESCENTE

$$u(t) = U \cdot e^{\sigma t} \cos(\varphi) \cdot u_{-1}(t)$$



✓ **σ > 0; ω = 0;** ESPONENZIALE CRESCENTE

$$u(t) = U \cdot e^{\sigma t} \cos(\varphi) \cdot u_{-1}(t)$$



Poiché se u(t) è cisoidale $y_p(t)$ è anch'esso cisoidale dello stesso tipo, nota la natura del segnale impresso l'integrale particolare avrà una espressione del tipo :

$$y_p(t) = y_p \cdot e^{\sigma_p t} \cos(\omega t + \varphi_p)$$

dove i parametri incogniti saranno definiti imponendo le condizioni iniziali.

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

La risposta completa del circuito è dovuta

- ✓ ad un'eccitazione applicata in ingresso a cui corrisponde una risposta forzata
- ✓ alle condizioni iniziali a cui corrisponde una risposta libera.

Si dice che sono verificate le ipotesi di stato zero, se le tensioni iniziali ai capi di condensatori e le correnti iniziali attraverso gli induttori sono rispettivamente uguali a zero.

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

La ***risposta completa*** del circuito è dunque la somma della:

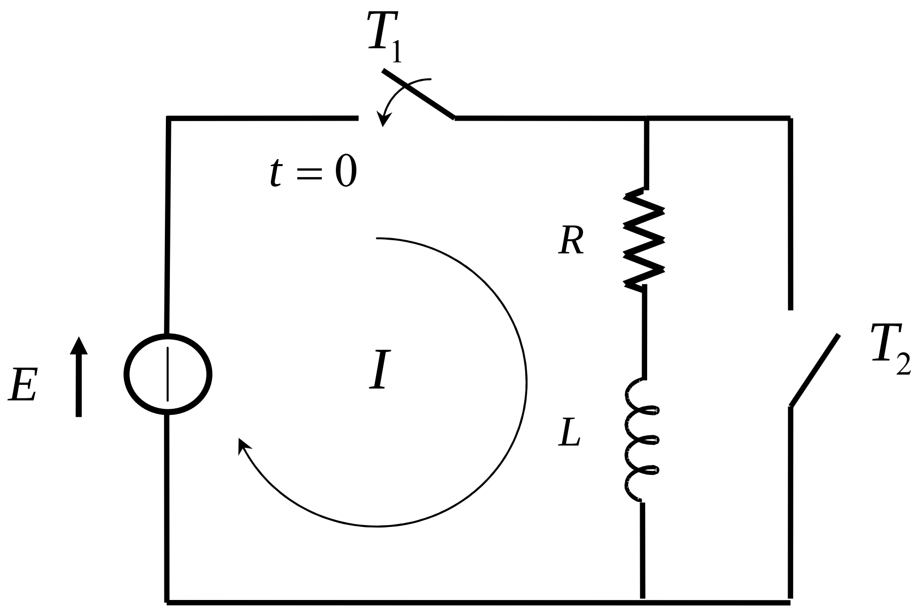
- ***Risposta con ingresso zero***, (risposta libera o termine transitorio), dovuta alle energie accumulate nelle capacità e nelle induttanze e mutue induttanze.
- ***Risposta con stato zero***, (risposta forzata o termine permanente), dovuta alle correnti e alle tensioni impresse dai generatori.

In generale durante il transitorio sono presenti i contributi della risposta libera e della risposta forzata.

In un sistema stabile, nella nuova condizione di regime permanente (alla fine del transitorio), è presente la sola risposta forzata dovuta alle tensioni e alle correnti impresse dai generatori

3.ESEMPI DI SISTEMI DEL 1° ORDINE

Questo tipo di sistema è realizzato utilizzando solo una capacità o una induttanza.
Consideriamo ad esempio le fasi di carica e scarica di un induttore mediante il seguente circuito:



Ipotesi:induttore scarico (ipotesi di stato zero)

Inizialmente l'interruttore T_1 è aperto perciò risulta I = 0 (regime iniziale).

Dopo la chiusura dell'interruttore T_1, si ha una fase transitoria seguita da una nuova condizione di funzionamento a regime stazionario nella quale l'induttanza si comporta come un cortocircuito e pertanto si ha:

$$I = \frac{E}{R} \qquad \text{(regime finale)}$$

Passando da una fase di regime stazionario ad un'altra si ha una fase transitoria durante la quale la corrente I varia nel tempo, dal valore iniziale I=0 a quello finale I=E/R. Poiché durante il transitorio, la corrente I varia nel tempo, occorre considerare anche gli effetti dell'induttanza L, poiché l'equazione costitutiva di L se la corrente varia è:

$$u_L = L\frac{di(t)}{dt}.$$

Sudiamo quindi separatamente:

A) la prima <u>fase transitoria di carica</u> e
B) la seconda <u>fase transitoria di scarica</u>.

A) Fase di carica: l'interruttore T_1 si chiude mentre T_2 è aperto, l'induttore comincia a caricarsi.

L'equazione del circuito, applicando la LKT alla maglia, é:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E$$

a cui corrisponde l'equazione omogenea associata:

$$\lambda L+R=0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda=-\frac{R}{L}=-\frac{1}{\tau}$$

dove $\tau=\dfrac{L}{R}$ è la costante di tempo del circuito.

L'integrale generale vale quindi:

$$i_O=C_1 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

L'integrale particolare è invece del tipo:

$$i_p=C_2 E$$

perciò l'integrale generale o risposta completa dell'equazione differenziale del circuito è:

$$i(t)=i_o(t)+i_p(t)=C_1 e^{-\frac{t}{\tau}}+C_2 E$$

Le due costanti si determinano imponendo le condizioni iniziali.

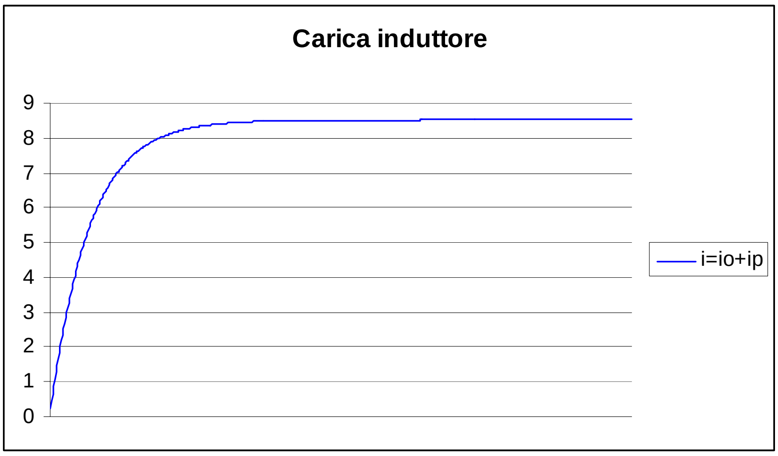
Considerando che: $$i(t) = i_o(t) + i_p(t) = C_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + C_2 E$$

$$\begin{cases} i(0+) = 0 \\ i(\infty) = \dfrac{E}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 E = 0 \\ C_2 E = \dfrac{E}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{E}{R} \\ C_2 = \dfrac{1}{R} \end{cases}$$

si ottiene:

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

In teoria il transitorio dura un tempo infinito.
In realtà dopo un tempo pari a 4÷5 τ, la corrente assume un valore circa uguale a E/R e il transitorio si può ritenere estinto.



R (Ω)	L (H)	E	τ
27	1	230	0,037

Le tensioni $u_R(t)$ e $u_L(t)$ saranno:

$$u_R(t) = Ri(t) \quad \Rightarrow \quad u_R(t) = R\frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

e

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad u_L(t) = L\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

B) <u>Fase di scarica</u>: l'interruttore T_1 si apre e contemporaneamente si chiude T_2. L'induttore inizialmente carico di energia elettromagnetica accumulata nella fase precedente di carica, comincia a scaricarsi, e la corrente varia a partire dal valore iniziale I=E/R fino al valore I=0.

L'equazione del circuito, applicando la LKT alla maglia, é:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

a cui corrisponde ancora l'omogenea associata:

$$\lambda L + R = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}$$

L'integrale dell'equazione differenziale del circuito vale quindi:

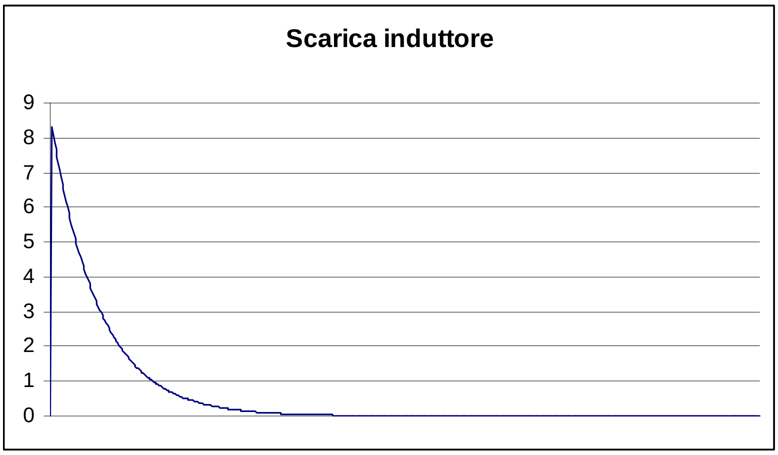
$$i = i_O = C_1 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

dove C_1 si determina in base alla condizione iniziale

$$i(0+) = \frac{E}{R} \Rightarrow \qquad C_1 = \frac{E}{R}$$

e quindi:

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



In teoria il transitorio dura un tempo infinito.
In realtà dopo un tempo pari a 4÷5 τ, la corrente si può ritenere nulla e il transitorio estinto.

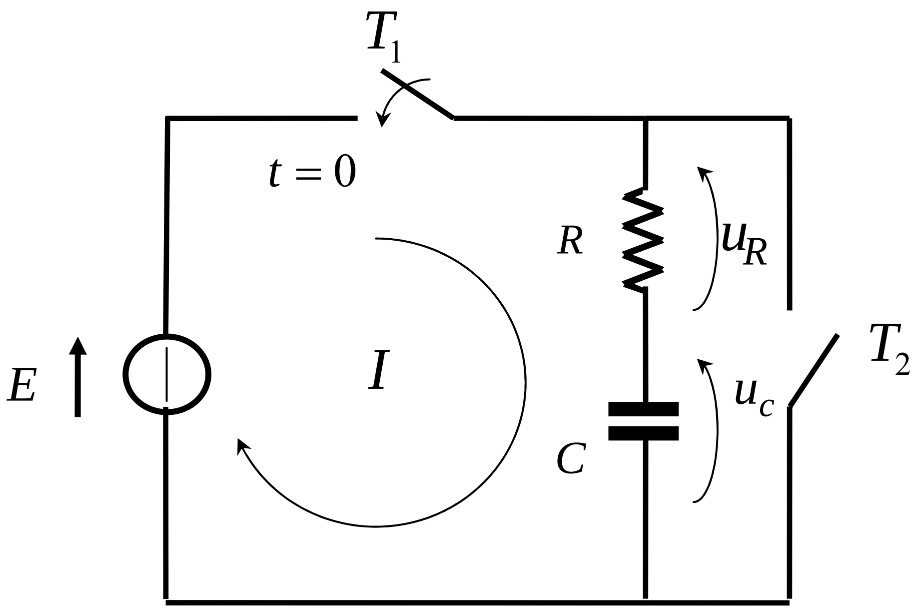
Le tensioni $u_R(t)$ e $u_L(t)$ saranno:

$$u_R(t) = Ri(t) \quad \Rightarrow \; u_R(t) = R\frac{E}{R}\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

e

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \;\Rightarrow u_L(t) = L\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = -Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

Analogamente si determina l'integrale generale relativo alla carica e alla scarica di un condensatore:



Durante la carica (T_1 chiuso e T_2 aperto).

L'equazione del circuito è:

$$\begin{cases} E = Ri + u_C \\ i = C\dfrac{du_C}{dt} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E = RC\frac{du_C}{dt} + u_C$$

In maniera analoga a quanto visto per la carica di un induttore si trova:

omogenea associata: $RC\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\dfrac{1}{RC} = -\dfrac{1}{\tau}$

- integrale generale: $u_{CO}(t) = C_1 e^{-\frac{t}{\tau}}$
- integrale particolare: $u_{CP}(t) = C_2 E$

soluzione dell'equazione: $u_C(t) = u_{CO} + u_{CP} = C_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + C_2 E$

Il valore delle costanti C_1 e C_2 si trova considerando che a regime (istante iniziale e finale) il condensatore si comporta come un interruttore aperto e quindi i=0. Risulta pertanto:

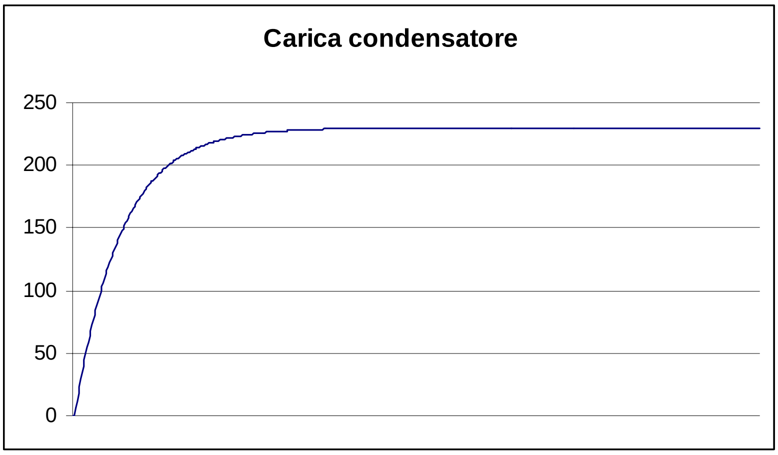
per t=0+ $\quad u_C(0+) = 0$

per t=∞ $\quad u_C(\infty) = E$ (essendo Ri=0)

$$\begin{cases} u_C(0+) = 0 \\ u_C(\infty) = E \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 + C_2 E = 0 \\ C_2 E = E \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = -E \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

e quindi:

$$u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



La corrente e la tensione ai capi del resistore, in base alle equazioni costitutiva saranno:

$$i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} = C\frac{d}{dt}\left(E(1 - e^{-t/\tau})\right) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$$

e

$$u_R(t) = Ri(t) = R\frac{E}{R}e^{-t/\tau} = Ee^{-t/\tau}$$

<u>La fase di scarica</u> inizia quando si commutano i due interruttori (T_1 apre e T_2 chiude).

In questo caso si ottiene:

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

perciò l'omogenea associata:

$$RC\lambda + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$$

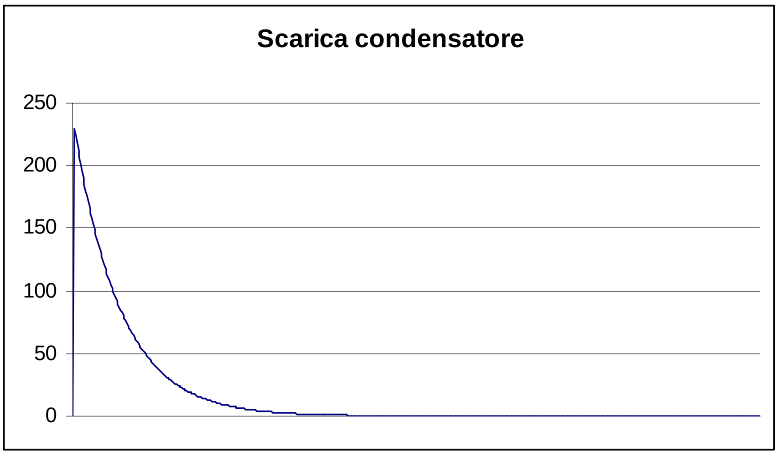
e l’integrale generale: $u_{CO}(t) = C_1 e^{-\frac{t}{\tau}}$

integrale particolare: $u_{CP}(t) = 0$

soluzione dell’equazione: $u_C(t) = u_{CO} = C_1 e^{-\frac{t}{\tau}}$

Il valore della costante C_1 si trova considerando che inizialmente il condensatore è caricato ad una tensione E. Risulta pertanto:

per t=0+ $u_C(0+) = E$



$C_1 = E$

e quindi:

$u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

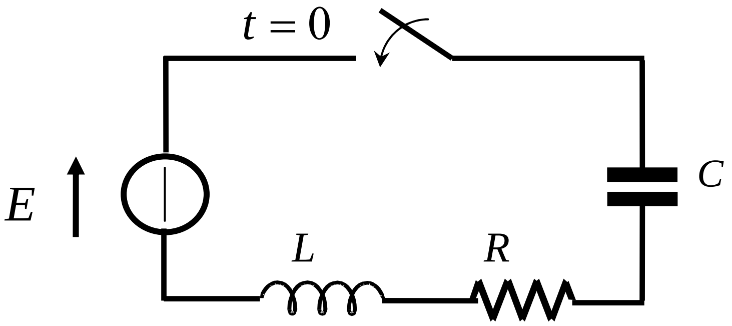
La corrente e la tensione ai capi del resistore, in base alle equazioni costitutive saranno:

$$i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad i(t) = C\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{R}e^{-t/\tau}\right) = -\frac{E}{R}e^{-t/\tau}$$

e

$$u_{R(t)} = Ri(t) \quad \Rightarrow \quad u_R(t) = R\left(-\frac{E}{R}e^{-t/\tau}\right) = -Ee^{-t/\tau}$$

4.ESEMPIO DI SISTEMA DEL 2° ORDINE



Condizioni iniziali: all'istante t=0 la corrente che circola nel circuito è nulla (I=0).

L'equazione del circuito si ottiene applicando la LKT alla maglia:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int idt = E$$

dalla quale, derivando, si ottiene:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$$

pertanto l'equazione omogenea associata assume la forma:

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

Le soluzioni della equazione omogenea associata sono:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{LC}}}{2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \alpha \pm \beta$$

avendo posto:

$$\alpha = -\frac{R}{2L} \quad \text{e} \quad \beta = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

In base ai valori assunti dai tre parametri R, L e C si possono distinguere i tre casi seguenti:

a) Radici reali e distinte

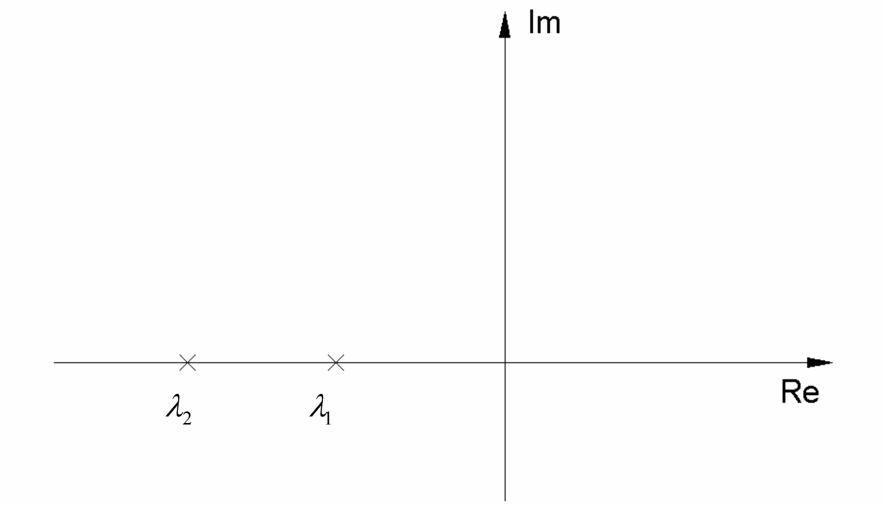
Si ottengono quando il discriminante dell'equazione è positivo e cioè quando:

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$$

e le soluzioni dell'equazione omogenea sono:

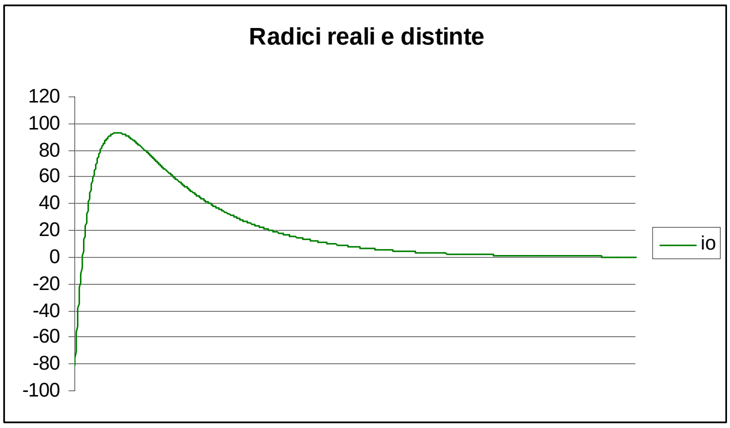
$$\lambda_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \alpha + \beta$$

$$\lambda_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \alpha - \beta$$



L'integrale generale dell'equazione differenziale assume quindi la forma seguente:

$$i_O(t) = C_1 e^{(\alpha+\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-\beta)t} = e^{\alpha t}\left(C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}\right)$$



andamento sovrasmorzato

La soluzione risulta avere uno <u>smorzamento eccessivo senza oscillazioni.</u>

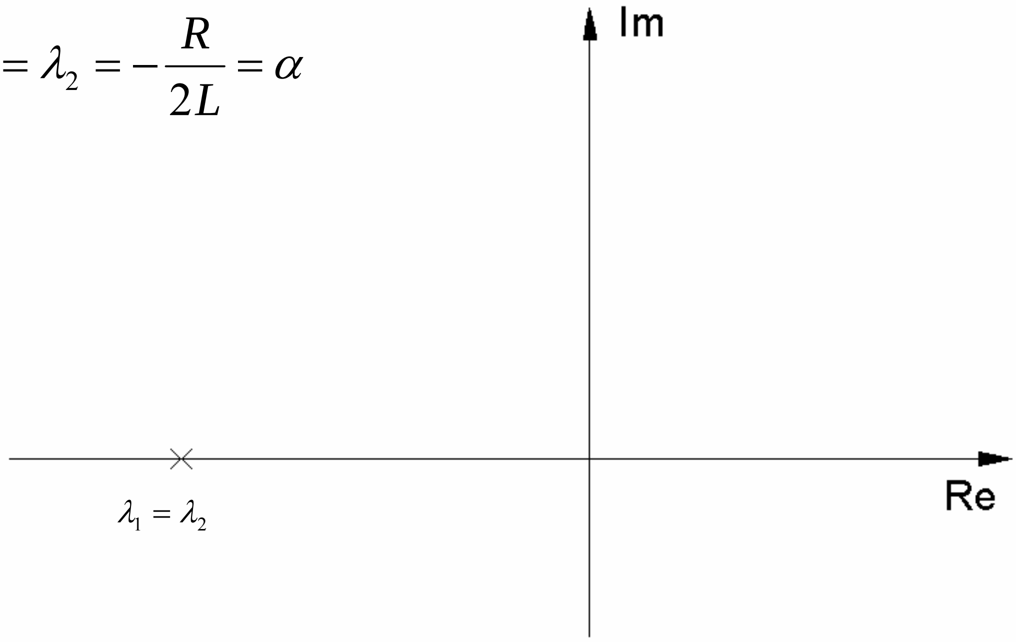
b) Radici reali e coincidenti

Si ottengono quando il discriminante dell'equazione è nullo:

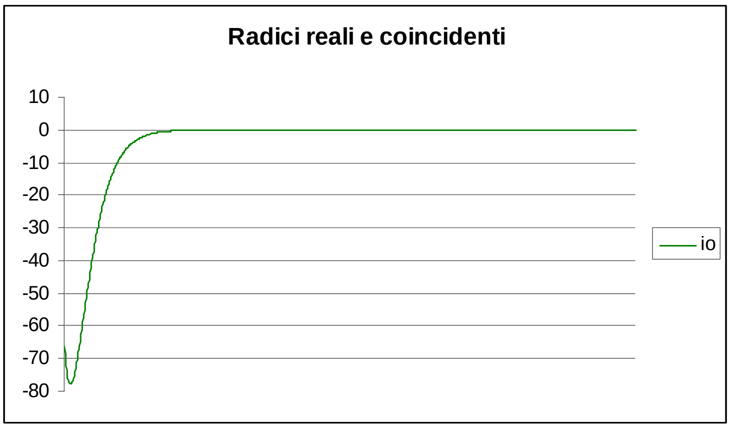
$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$$

Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{R}{2L} = \alpha$$



$$i_O(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 + C_2 t\right)$$



andamento sovrasmorzato critico

La soluzione risulta avere il <u>massimo smorzamento senza oscillazioni</u>.

c) Radici complesse coniugate

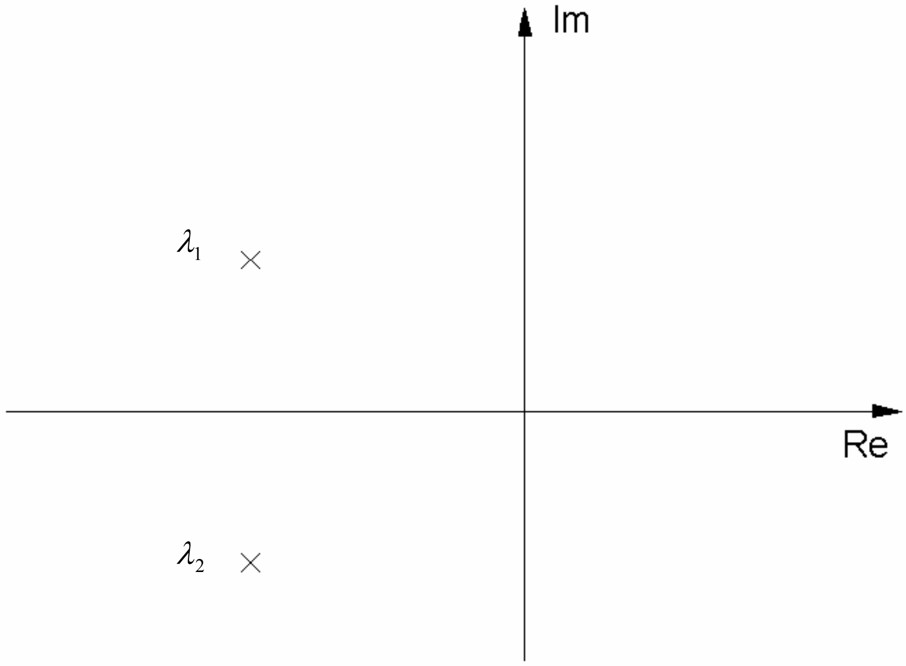
Se il discriminante dell'equazione è negativo si ha:

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$$

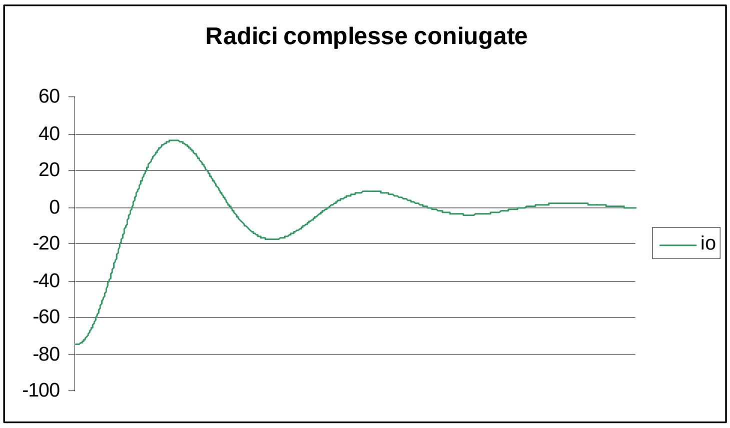
e le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono:

$$\lambda_1 = -\frac{R}{2L} + j\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \alpha + j\beta$$

$$\lambda_2 = -\frac{R}{2L} - j\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \alpha - j\beta$$



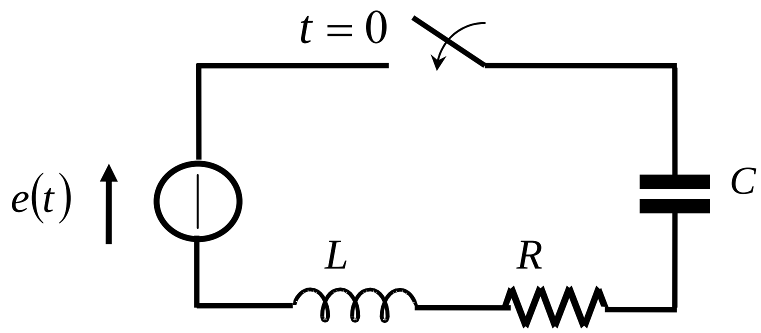
$$i_O(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t\right)$$



andamento sottosmorzato

In questo caso si ha una <u>soluzione di natura oscillatoria</u>.

Studiamo ora lo stesso circuito supponendo che il <u>generatore di tensione sia di tipo sinusoidale:</u>



$$e(t) = E_M \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\gamma = arctg\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

All’istante iniziale la corrente è nulla (i=0).
Quando l’interruttore è chiuso si può scrivere:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int idt = E_M \sin(\omega t + \varphi)$$

Derivando rispetto al tempo e dividendo per L si trova:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{\omega E_M}{L}\cos(\omega t + \varphi)$$

L'equazione omogenea associata è la stessa del caso di generatore costante, mentre l'integrale particolare sarà del tipo:

$$i_p = \frac{E_M}{Z}\sin(\omega t + \varphi + \gamma) \quad \text{con} \quad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

Il termine i_p è il segnale che permane dopo che il transitorio si è esaurito.

A seconda dei valori assunti da R, L, C si potranno presentare i seguenti casi:

a) Radici reali e distinte

$$i(t) = i_{o1}(t) + i_p(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}\right) + \frac{E_M}{Z}\sin(\omega t + \varphi + \gamma)$$

b) Radici reali e coincidenti

$$i(t) = i_{o2}(t) + i_p(t) = e^{\alpha t}(C_1 + C_2 t) + \frac{E_M}{Z}\sin(\omega t + \varphi + \gamma)$$

c) Radici complesse coniugate

$$i(t) = i_{o3}(t) + i_p(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t) + \frac{E_M}{Z}\sin(\omega t + \varphi + \gamma)$$

Per determinare il valore delle costanti C_1 e C_2 nei tre casi diversi, si dovranno imporre le <u>condizioni iniziali</u>.

a) I° condizione: per t=0 $\quad i(0+)=0$

$$i(0+)=C_1+C_2+\frac{E_M}{Z}\sin(\varphi+\gamma)=0$$

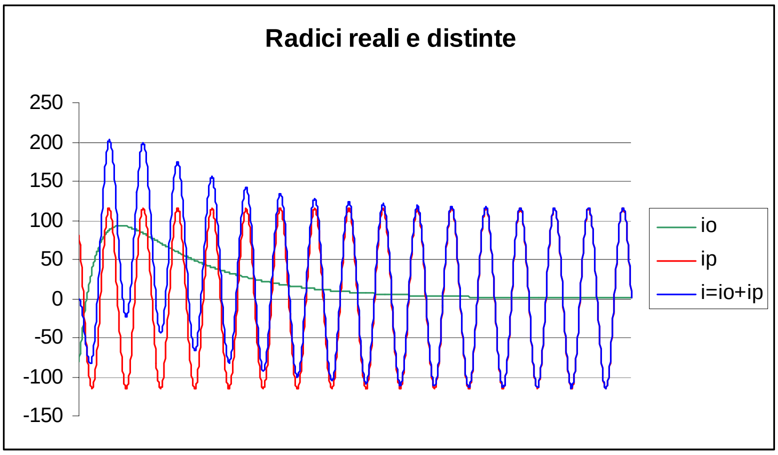
II° condizione: per t=0 $\quad \frac{di}{dt}(0+)=0$

$$\frac{di}{dt}(t)=\alpha e^{\alpha t}\left(C_1e^{\beta t}+C_2e^{-\beta t}\right)+\beta e^{\alpha t}\left(C_1e^{\beta t}-C_2e^{-\beta t}\right)+\omega\frac{E_M}{Z}\cos(\omega t+\varphi+\gamma)$$

$$\frac{di}{dt}(0+)=\alpha(C_1+C_2)+\beta(C_1-C_2)+\omega\frac{E_M}{Z}\cos(\varphi+\gamma)=0$$

quindi le costanti C_1 e C_2 si determinano dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} C_1+C_2=-\frac{E_M}{Z}\sin(\varphi+\gamma) \\ (\alpha+\beta)C_1+(\alpha-\beta)C_2=-\omega\frac{E_M}{Z}\cos(\varphi+\gamma) \end{cases}$$



R (Ω)	L (H)	C (mF)	EM (V)	φ (rad)	γ (rad)	ω (rad/s)
27	1	10	230	1	1,3	70

Si vede che nei primi istanti del transitorio si ha una sovracorrente rispetto alla risposta permanente $i_p(t)$ che si annulla dopo il transitorio stesso.

b) I° condizione: per t=0

$$i(0+) = C_1 + \frac{E_M}{Z}\sin(\varphi + \gamma) = 0$$

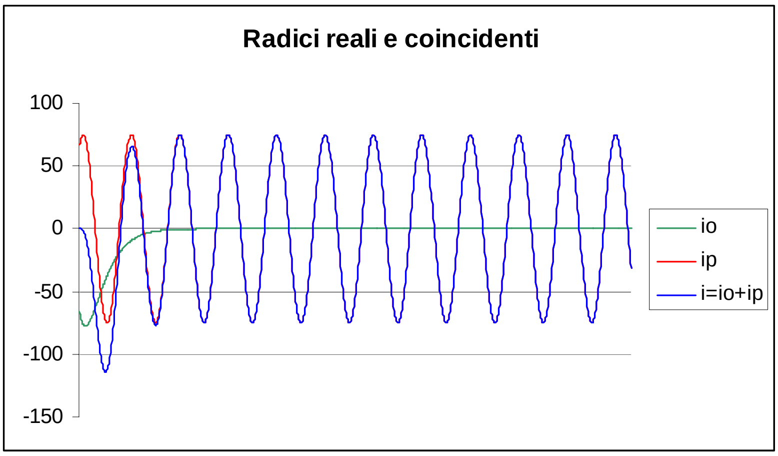
II° condizione: per t=0 $\quad \frac{di}{dt}(0+) = 0$

$$\frac{di}{dt}(t) = \alpha e^{\alpha t}(C_1 + C_2 t) + e^{\alpha t}C_2 + \omega\frac{E_M}{Z}\cos(\omega t + \varphi + \gamma)$$

$$\frac{di}{dt}(0+) = \alpha C_1 + C_2 + \omega\frac{E_M}{Z}\cos(\varphi + \gamma) = 0$$

Il sistema da risolvere sarà allora il seguente:

$$\begin{cases} C_1 + \dfrac{E_M}{Z}\sin(\varphi+\gamma) = 0 \\ \alpha C_1 + C_2 + \omega\dfrac{E_M}{Z}\cos(\varphi+\gamma) = 0 \end{cases}$$



R (Ω)	L (H)	C (μF)	E_M (V)	φ (rad)	γ (rad)	ω (rad/s)
850	10	60	150	0	1,3	70

In questo caso <u>si può avere una sovracorrente più elevata e pericolosa, quanto più risultano vicini tra loro i picchi delle correnti i_o e i_p.</u>

c) I° condizione: per t=0

$$i(0+) = C_1 + \frac{E_M}{Z}\sin(\varphi+\gamma) = 0$$

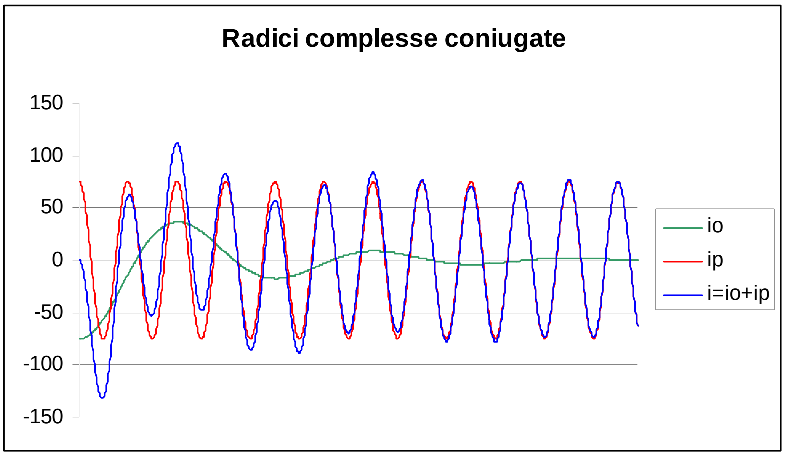
II° condizione: per t=0 $\quad \dfrac{di}{dt}(0+) = 0$

$$\frac{di}{dt}(t) = \alpha e^{\alpha t}\left(C_1 \cos\beta t + C_2 sen\beta t\right) + e^{\alpha t}\beta\left(-C_1 sen\beta t + C_2 \cos\beta t\right) +$$
$$+\,\omega\frac{E_M}{Z}\cos\left(\omega t + \varphi + \gamma\right)$$

$$\frac{di}{dt}(0+) = \alpha C_1 + \beta C_2 + \omega\frac{E_M}{Z}\cos\left(\varphi + \gamma\right) = 0$$

Il sistema da risolvere sarà il seguente:

$$\begin{cases} C_1 + \dfrac{E_M}{Z}\sin\left(\varphi + \gamma\right) = 0 \\ \alpha C_1 + \beta C_2 + \omega\dfrac{E_M}{Z}\cos\left(\varphi + \gamma\right) = 0 \end{cases}$$



R (Ω)	L (H)	C (μF)	EM (V)	ϕ (rad)	γ (rad)	ω (rad/s)
250	31	100	150	0,26	1,3	70

Anche in questo caso si può avere una sovracorrente più elevata e pericolosa, quanto più risultano vicini tra loro i picchi delle correnti i_o e i_p