Numeri complessi

Un numero complesso z, costituito da una parte reale e una immaginaria, è scritto nella seguente forma:

$$z = x + j \cdot y$$

dove x e y sono numeri reali, j è l'unità immaginaria definita dalla relazione

$$j^2 = -1$$

e il segno "+" non indica l'operazione di addizione ma è parte integrante del numero complesso. La parte reale e quella immaginaria del numero complesso z, indicate anche con con $\mathrm{Re}\{z\}$ e $j \cdot \mathrm{Im}\{z\}$, sono uguali rispettivamente a x e $j \cdot y$ con x e y numeri reali.

Il numero complesso z è rappresentato sul piano complesso nel quale l'asse delle ordinate è l'asse immaginario e l'asse delle ascisse è quello reale (fig. 1.6.1).

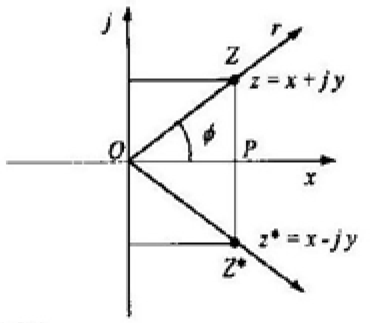

Fig. 1.6.1

- Si definisce coniugato del numero complesso $z = x + j \cdot y$, Il numero complesso z^* che ha il coefficiente della sua parte immaginaria opposto a quello di z:

$$z^* = x - j \cdot y$$

- Si definisce modulo $|z|$ del numero complesso z la radice quadrata del prodotto ottenuto moltiplicando z e il suo coniugato z^*:

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{(x + j \cdot y) \cdot (x - j \cdot y)}$$

$$|z| = \sqrt{\left(x^2 + y^2\right)}$$

- Si definisce argomento di un numero complesso z, definito a meno di multipli interi di $2 \cdot \pi$, l'angolo la cui tangente goniometrica è uguale al rapporto tra il coefficiente y della parte immaginaria e la parte reale x:

$$\phi = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$$

e nella forma completa si ha:

$$\phi = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} \pm 2 \cdot k \cdot \pi$$

con k intero positivo.

Al numero complesso z è associato un vettore $\vec{OZ}$ che individua un punto del piano complesso avente coordinate $(x,\ y)$.

Sono considerati positivi gli angoli ϕ ottenuti con r, lato libero dell'angolo, che ruota in senso antiorario. Dal triangolo rettangolo OPZ della figura 1.6.1

si ha:

$$x = |z| \cdot \cos\ \phi$$

$$y = |z| \cdot \mathrm{sen}\ \phi$$

e pertanto un numero complesso $z = x + j \cdot y$ può essere scritto in forma **trigonometrica**:

$$z = x + j \cdot y$$

$$z = |z| \cdot (\cos \phi + j \cdot \mathrm{sen}\ \phi)$$

Un numero complesso può essere rappresentato nelle seguenti forme equivalenti:

- **forma cartesiana** $z = x + j \cdot y$
- **forma trigonometrica** $z = |z| \cdot (\cos \phi + j \cdot \mathrm{sen}\ \phi)$
- **forma esponenziale** $z = |z| \cdot e^{j \cdot \phi}$
- **forma polare** $z = |z| \angle \phi$

È utile ricordare le relazioni di Eulero:

$$e^{j \cdot \phi} = \cos \phi + j \cdot \mathrm{sen}\ \phi \qquad [1.6.1]$$

$$e^{-j \cdot \phi} = \cos \phi - j \cdot \mathrm{sen}\ \phi \qquad [1.6.2]$$

Addizionando e sottraendo la [1.6.1] e la [1.6.2] si ha:

$$\cos\phi = \frac{e^{j-\phi} + e^{-j\cdot\phi}}{2}$$

$$\mathrm{sen}\phi = \frac{e^{j\cdot\phi} - e^{-j\cdot\phi}}{2 \cdot j}$$