

# MODULAZIONE DI PORTANTE SINUSOIDALE CON SEGNALI NUMERICI

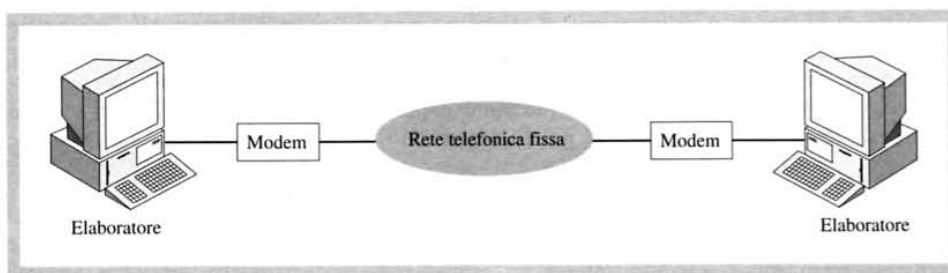
## 3.1 Introduzione

I segnali emessi da una sorgente numerica binaria hanno uno spettro che si estende dalla continua a una frequenza pari a circa  $\frac{3}{4}f_k$ , dove  $f_k$  è la frequenza di cifra del segnale (vedi par. 1.4). La trasmissione di tali segnali su canali di tipo passa-banda richiede un'operazione di modulazione che ne modifichi lo spettro in modo da renderlo compatibile con la banda disponibile. Uno dei casi tipici in cui è richiesta tale modulazione, che consiste nella variazione di uno o più parametri di una portante sinusoidale in relazione al contenuto del segnale, è la trasmissione su linea telefonica, la cui banda passante si estende da 300 a 3400 Hz; in tal caso si parla di *modulazione in banda fonica*, e il dispositivo che esegue la modulazione del segnale uscente e la demodulazione del segnale entrante è denominato *modem* (fig. 3.1). La modulazione di segnali numerici è inoltre utilizzata in tutti i sistemi di radiocomunicazione digitali, siano essi riguardanti la trasmissione dati o il trasferimento di informazione audio-video; in tali sistemi, che includono per esempio la telefonia GSM o DCS 1800 e le trasmissioni TV-SAT digitali, l'esigenza di determinare un'occupazione di banda del segnale in alta frequenza è ovvia.

Si tenga conto, nel seguito della trattazione, che i grafici sono riferiti, per semplicità di rappresentazione, a segnali in banda base squadrati, e quindi a spettro esteso; nella pratica però i segnali modulanti possono avere banda limitata, come per esempio dopo il passaggio attraverso un formatore che ne determina uno spettro a coseno rialzato.

### 3.1.1 Frequenza di cifra e velocità di modulazione

Il modo più semplice di modulare un segnale numerico binario consiste nell'associare due stati diversi della portante alle cifre 0 e 1, dove la diversità degli stati può riguardare l'ampiezza, la frequenza o la fase della portante; in questo caso l'occupazione di banda

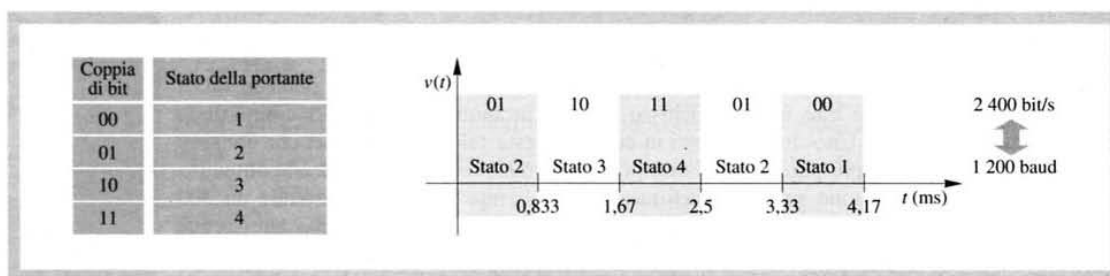


**Fig. 3.1**  
La comunicazione numerica su linea telefonica richiede la presenza dei modem.

del segnale modulato è proporzionale alla banda base del segnale e quindi, in ultima analisi, alla sua frequenza di cifra. La necessità di incrementare la frequenza di cifra senza ulteriore aumento di banda, evidenziatasi in particolare nella trasmissione dati su linea telefonica, ma anche nei sistemi radio numerici, ha condotto a modulazioni in cui la portante può essere modulata con un numero di stati maggiore di due, e in particolare con  $2^n$  stati, dove  $n > 1$  è il numero di bit associati a ciascuno stato della portante. In questi casi la *velocità di modulazione*, ovvero il numero di segnalazioni al secondo, dove per segnalazione si intende un singolo stato della portante, è diverso dalla frequenza di cifra, dato che a ogni segnalazione corrispondono più bit trasmessi. L'unità di misura assegnata alla velocità di modulazione è il *baud*<sup>(1)</sup>:

$$1 \text{ baud} = 1 \text{ segnalazione/s} \quad [3.1]$$

Per esempio, mediante una modulazione a quattro stati è possibile associare due bit a ciascuno stato della portante, ottenendo una frequenza di cifra della trasmissione doppia rispetto alla velocità di modulazione; se quest'ultima è pari per esempio a 1200 baud, la frequenza di cifra è di 2400 bit/s (fig. 3.2).



**Fig. 3.2**  
Differenza  
tra frequenza  
di cifra  
e velocità  
di modulazione.

In generale, definiti il numero di bit associati a ciascuno stato  $n$  e il numero di stati diversi della portante  $N = 2^n$ , la frequenza di cifra  $f_k$  e la velocità di modulazione  $v_b$  sono legate dalla relazione

$$f_k = v_b \cdot n = v_b \log_2 N \quad [3.2]$$

### ES 3.1

Un modem trasmette a 1600 baud e 4800 bit/s. Determinare il numero di bit associati a ciascuno stato della portante e il numero di tali stati.

$$f_k \left[ \frac{\text{bit}}{\text{sec}} \right] = v_b \left[ \frac{\text{segnalazioni}}{\text{sec}} \right] \cdot n \left[ \frac{\text{bit}}{\text{segnalazione}} \right]$$

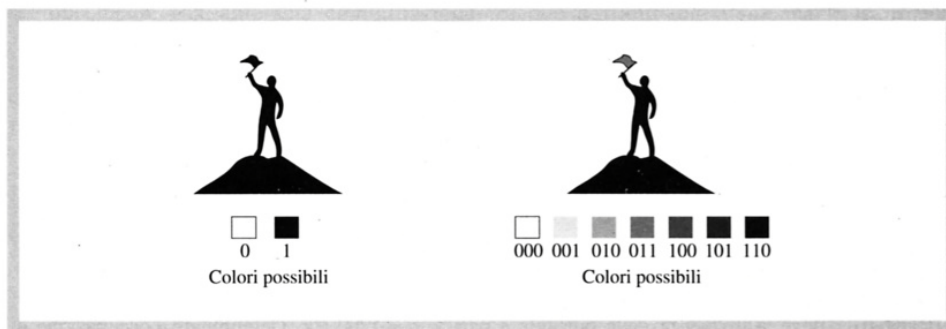
### 3.1.2 Tasso di errore

In una trasmissione numerica binaria possono verificarsi due tipi di errori:

- *errore di sostituzione*: il valore logico del bit viene interpretato in modo alterato a causa di rumori, distorsioni o interferenze intervenute nella trasmissione;
- *errore di omissione o di inserzione*: il ricevitore non rileva un bit trasmesso oppure ne inserisce uno non presente nel segnale ricevuto. Tali errori sono dovuti alla perdita di sincronizzazione tra la cadenza delle operazioni di lettura e il ritmo con cui si presentano i bit al ricevitore: se il ricevitore è più lento rispetto alla frequenza di cifra del segnale si avrà errore di omissione, se è più veloce si avrà errore di inserzione.

<sup>(1)</sup> Si faccia attenzione al fatto che in campo commerciale in alcuni casi, ma *impropriamente*, il baud è utilizzato con il significato di bit/s.

La piccola probabilità, sempre presente, che si verifichino errori in ricezione, si traduce nel *tasso di errore* della trasmissione (o *BER*, *Bit Error Ratio*), definito dal numero di bit che mediamente sono ricevuti a livello errato rispetto al totale dei bit trasmessi. Naturalmente la tolleranza agli errori dipende dal tipo di applicazione che si considera: mentre per esempio la trasmissione di un testo può accettare senza gravi conseguenze un tasso di errore di  $10^{-3}$  (un bit errato su 1000), un sistema bancario può richiedere un tasso di errore inferiore a  $10^{-7}$ . Il tasso di errore, determinato fondamentalmente dalla presenza di rumore nel sistema di comunicazione, è strettamente legato alla *frequenza di cifra* della trasmissione. Per limitare la presenza del rumore in ingresso al ricevitore, questo è preceduto da un filtro la cui banda passante coincide con la banda occupata dal segnale; nell'ipotesi di rumore gaussiano, ovvero a densità di potenza costante, il rumore che entra nel ricevitore è quindi proporzionale alla larghezza di banda del segnale. Ne consegue che se la trasmissione è di tipo binario, all'aumento della frequenza di cifra corrisponde un aumento del tasso di errore in seguito all'incremento della banda del segnale. Se la *frequenza di cifra* viene incrementata aumentando *gli stati della portante*, ugualmente aumenta il tasso di errore perché i diversi stati risultano meno differenziati tra loro; di conseguenza è più probabile che il rumore possa produrre un errore di riconoscimento dello stato della portante (si veda l'analogia, già rappresentata nel vol. 1, par. 5.6.2, sviluppata in fig. 3.3). Oltre a quanto detto, nel caso di modulazione del segnale, il tasso di errore è legato al tipo di modulazione adottata (per l'approfondimento di tale aspetto si rimanda però a testi specialistici).



**Fig. 3.3**  
Segnalazione a distanza con bandiere colorate. Aumentando il numero dei colori disponibili diventa più facile interpretare in maniera errata il colore della bandiera.

### 3.1.3 Efficienza spettrale

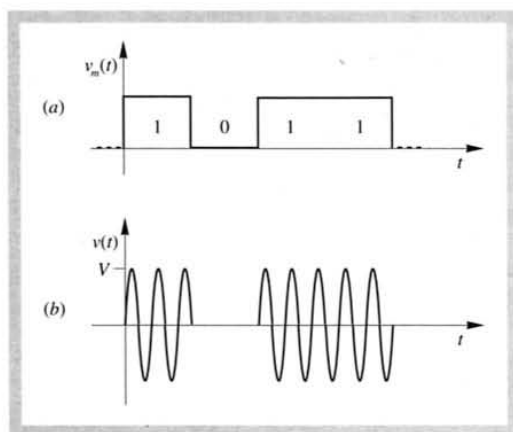
Il rapporto tra la frequenza di cifra  $f_k$  e la larghezza di banda  $BW_s$  del segnale modulato è definito come *efficienza spettrale*  $E$  della modulazione:

$$E = \frac{f_k}{BW_s} \quad \left[ \frac{\text{bit}}{\text{s} \cdot \text{Hz}} = \frac{\text{bps}}{\text{Hz}} \right] \quad [3.3]$$

In pratica l'efficienza spettrale rappresenta la diretta indicazione della quantità di bit/s che è possibile trasmettere per ogni hertz di banda occupata dal segnale modulato; un maggiore valore di tale parametro corrisponde, a parità di frequenza di cifra, a una minore occupazione in banda traslata.

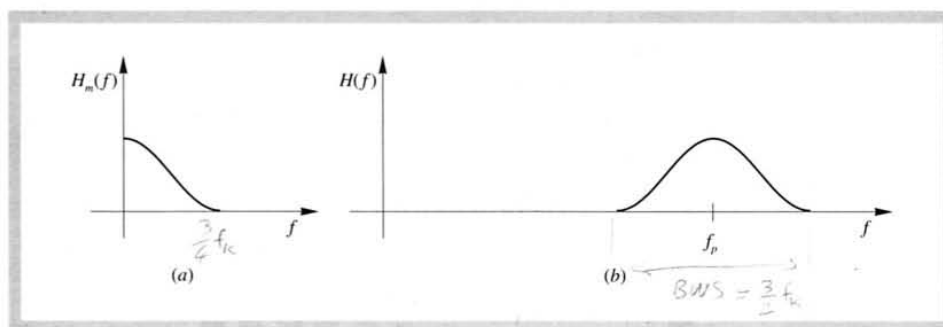
## 3.2 Modulazione ASK

Di semplice realizzazione, la *modulazione a spostamento di ampiezza*, in sigla ASK (*Amplitude Shift Keying*), è stata la prima modulazione numerica impiegata, ma per le prestazioni limitate in termini di tasso di errore è oggi scarsamente utilizzata. Nella forma designata



**Fig. 3.4**  
Modulazione  
ASK:  
(a) segnale  
modulante e  
(b) segnale  
modulato.

**Fig. 3.5**  
Modulazione  
ASK: spettri  
(a) del segnale  
modulante e  
(b) del segnale  
modulato.



### ES 3.2

Un segnale numerico a frequenza di cifra  $f_k = 200$  bit/s viene modulato in tecnica ASK dove la frequenza della portante è pari a  $f_p = 1200$  Hz. Determinare l'occupazione di banda del segnale modulato nell'ipotesi che il segnale in banda base occupi  $\frac{3}{4}f_k$ . Il segnale ASK può essere inviato su linea telefonica?

Risposta:  $BW_S = [1050, 1350]$  Hz

## 3.3 Modulazione FSK

La *modulazione a spostamento di frequenza*, in sigla FSK (*Frequency Shift Keying*), consiste nell'associare ai due livelli del segnale binario due valori di frequenza che indicheremo con  $f_1$  e  $f_2$  (fig. 3.6).

Tali frequenze possono essere espresse mediante la somma o sottrazione di una deviazione di frequenza  $\Delta f$  da un valore a riposo  $f_p$ :

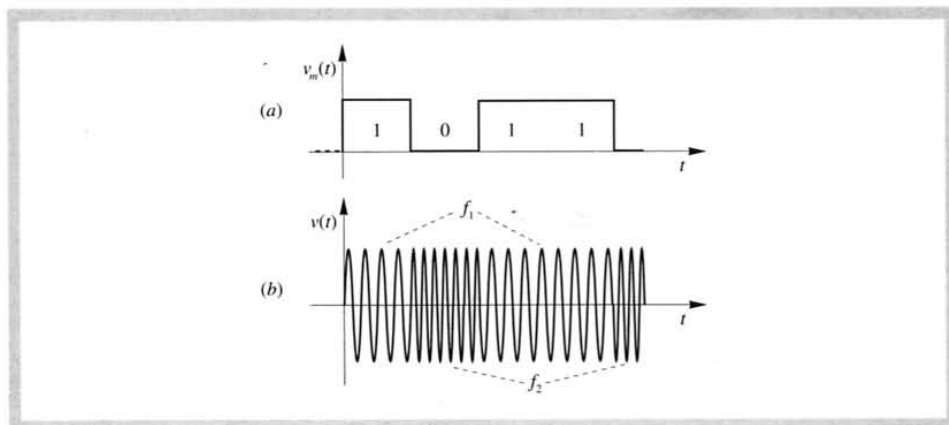
$$f_1 = f_p - \Delta f$$

$$f_2 = f_p + \Delta f$$

[3.4]

(<sup>2</sup>) In fig. 3.4, come nei successivi grafici FSK e PSK, sono rispettate le regole di assegnazione per le cifre 0 e 1 enunciate dalla raccomandazione ITU-T V.1.

OOK (*On-Off Keying*) consiste nell'assegnare un'ampiezza  $V$  alla portante in corrispondenza della cifra 1, mentre l'ampiezza è nulla se la cifra da trasmettere è 0 (fig. 3.4)(<sup>2</sup>). Poiché la modulazione ASK OOK corrisponde in pratica a una modulazione di ampiezza a portante soppressa, il relativo spettro comprende una doppia banda centrata sulla frequenza della portante e l'occupazione di banda del segnale modulato è doppia rispetto alla banda base (fig. 3.5); se quest'ultima ha estensione pari a  $\frac{3}{4}f_k$  l'occupazione in banda traslata è pari a  $\frac{3}{2}f_k$  con efficienza spettrale  $E = \frac{2}{3} = 0,67$  bps/Hz. Per ridurre l'occupazione di banda è possibile trasmettere una sola banda laterale o sopprimere parzialmente una delle due bande.

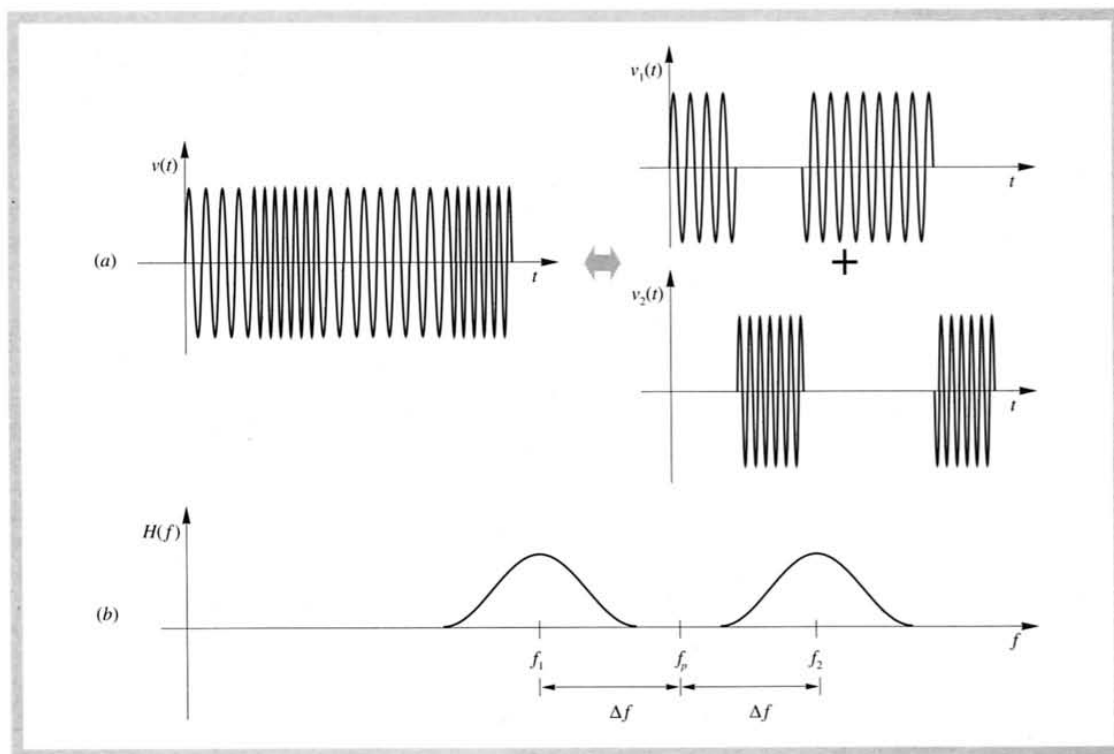


**Fig. 3.6**  
Modulazione  
FSK:  
(a) segnale  
modulante e  
(b) segnale  
modulato.

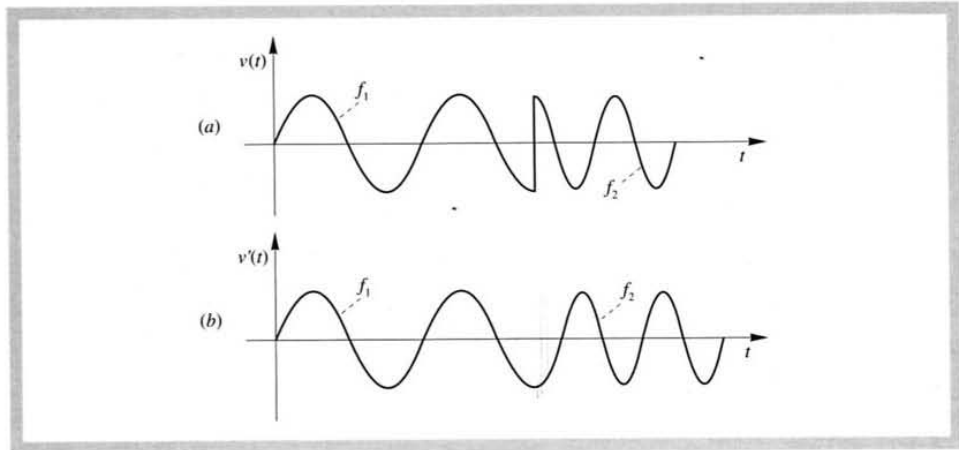
In prima analisi un segnale FSK può essere visto come la sovrapposizione di due segnali modulati in ASK con frequenze delle portanti pari a  $f_1$  e  $f_2$  (fig. 3.7a). Da questo punto di vista lo spettro FSK coincide con un doppio spettro ASK riferito alle frequenze  $f_1$  e  $f_2$  (fig. 3.7b).

In realtà l'analisi dello spettro FSK è più complessa poiché il segnale non viene generato semplicemente mediante una commutazione tra due portanti (fig. 3.8a), ma le transizioni da uno stato all'altro avvengono con continuità di fase (fig. 3.8b), e cioè in modo tale da evitare variazioni repentine alle quali corrisponde un allargamento della banda occupata dal segnale. Risulta inoltre che se le frequenze delle portanti sono sufficientemente vicine tra loro le due sottobande si fondono in un'unica banda centrata attorno alla frequenza  $f_p$ .

**Fig. 3.7**  
(a) Segnale FSK  
come  
sovrapposizione  
di due segnali  
ASK e  
(b) relativo  
spettro.



**Fig. 3.8**  
Cambiamento di frequenza  
(a) con discontinuità di fase e (b) con continuità di fase.



In ogni caso la scomposizione in due segnali ASK è accettabile se la deviazione di frequenza  $\Delta f$  è maggiore della massima frequenza  $f_{\max}$  del segnale modulante; in tal caso dalla fig. 3.7b si ottiene una larghezza in banda traslata pari a

$$B_{FSK} = 2(\Delta f + f_{\max}) \quad [3.5]$$

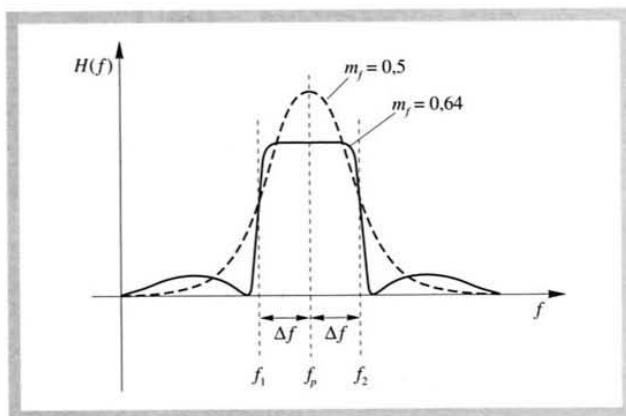
come risulta anche dalla formula di Carson [2.26]. L'efficienza spettrale in questo caso è piuttosto limitata; ipotizzando al solito  $f_{\max} = \frac{3}{4}f_k$  ed essendo  $B_{FSK} > 4f_{\max} = 3f_k$  si ottiene  $E < \frac{1}{3} = 0,33$  bps/Hz. Diminuendo  $\Delta f$  è possibile ottenere occupazioni di banda più favorevoli, che vengono solitamente rappresentate in funzione dell'indice di modulazione  $m_f$ , definito come

$$m_f = \frac{f_2 - f_1}{f_k} \quad [3.6]$$

Due casi notevoli, per  $m_f = 0,5$  e  $m_f = 0,64$  sono rappresentati in fig. 3.9. Nel secondo caso, trascurando le code dello spettro, la banda occupata è limitata a un intervallo pari approssimativamente a  $f_2 - f_1 = 0,64f_k$  e si ottiene pertanto una notevole efficienza spettrale,

$$\text{pari a } E = \frac{1}{0,64} = 1,56 \text{ bps/Hz.}$$

**Fig. 3.9**  
Spettro FSK  
per indice  
di modulazione  
pari a 0,5 e 0,64.



### ESEMPIO 3.1

Secondo la raccomandazione ITU-T V.23 per modem in banda fonica a 1200 bit/s, ai livelli binari 1 e 0 corrispondono rispettivamente le frequenze  $f_1 = 1300$  Hz e  $f_2 = 2100$  Hz. Si ottiene quindi  $m_f = 0,67$  e lo spettro è approssimativamente quello rappresentato in fig. 3.9 per  $m_f = 0,64$ .

### 3.3.1 Modulazione MSK

La modulazione angolare a minimo spostamento, in sigla MSK (*Minimum Shift Keying*) consiste in un particolare trattamento FSK per cui la frequenza della portante è relazionata alla frequenza di cifra del segnale, in modo che la durata del bit  $T_{\text{bit}}$  contenga esattamente un numero dispari di quarti del periodo  $T_p$  della portante:

$$T_{\text{bit}} = \frac{2n+1}{4} T_p \Rightarrow f_p = \frac{2n+1}{4} f_k \quad n \text{ intero positivo} \quad [3.7]$$

Utilizzando la deviazione di frequenza

$$\Delta f = \frac{f_k}{4} \quad [3.8]$$

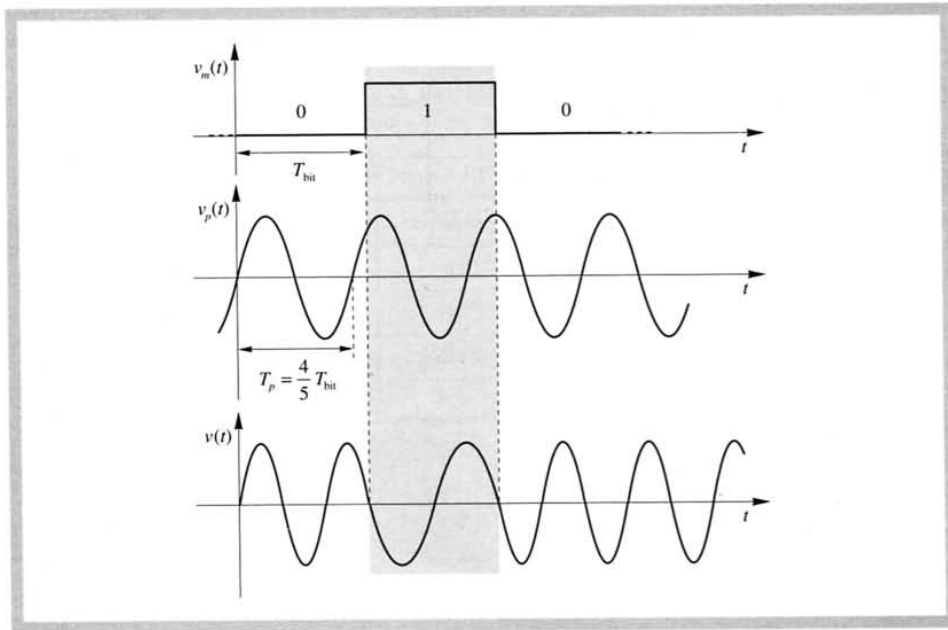
si ottiene

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{2n+1}{4} f_k - \frac{f_k}{4} = \frac{n}{2} f_k \Rightarrow T_{\text{bit}} = \frac{n}{2} T_1 \\ f_2 &= \frac{2n+1}{4} f_k + \frac{f_k}{4} = \frac{n+1}{2} f_k \Rightarrow T_{\text{bit}} = \frac{n+1}{2} T_2 \end{aligned} \quad [3.9]$$

e cioè  $T_{\text{bit}}$  contiene  $n$  semiperiodi di  $f_1$  e  $n+1$  semiperiodi di  $f_2$ ; in tal modo risulta semplice costruire un modulatore in cui il passaggio da una frequenza all'altra avvenga con continuità di fase. In fig. 3.10 è rappresentato un esempio di modulazione MSK con  $n=2$ . L'indice di modulazione del processo MSK è pari a

$$m_f = \frac{f_2 - f_1}{f_k} = \frac{\frac{n+1}{2} f_k - \frac{n}{2} f_k}{f_k} = 0,5 \quad [3.10]$$

e pertanto lo spettro è quello rappresentato in fig. 3.9. La sua estensione è pari a circa due volte  $f_2 - f_1$  ovvero  $2m_f f_k = f_k$  con efficienza spettrale pari a 1 bps/Hz.



**Fig. 3.10**  
Modulazione  
MSK.

### 3.3.2 Modulazione GMSK

Il segnale modulato MSK ha componenti al di fuori della banda indicata non trascurabili in termini di interferenza da canale adiacente nei sistemi radio. Per ovviare a tale inconveniente, qualora si voglia evitare l'utilizzo di filtri dopo la modulazione, è possibile limitare la banda base con un particolare filtro formatore a monte del modulatore. Poiché la curva di risposta in frequenza di tale filtro è di tipo gaussiano, la modulazione che ne deriva è definita *modulazione gaussiana a minimo spostamento*, in sigla GMSK (*Gaussian MSK*). Grazie al prefiltraggio l'occupazione in banda traslata diminuisce, e aumenta quindi l'efficienza spettrale. Per esempio nei sistemi radiomobili GSM vengono assegnati 200 kHz di banda a ciascuna portante, sulla quale sono trasmessi 270 kbit/s; l'efficienza spettrale è dunque pari a 1,35 bps/Hz.

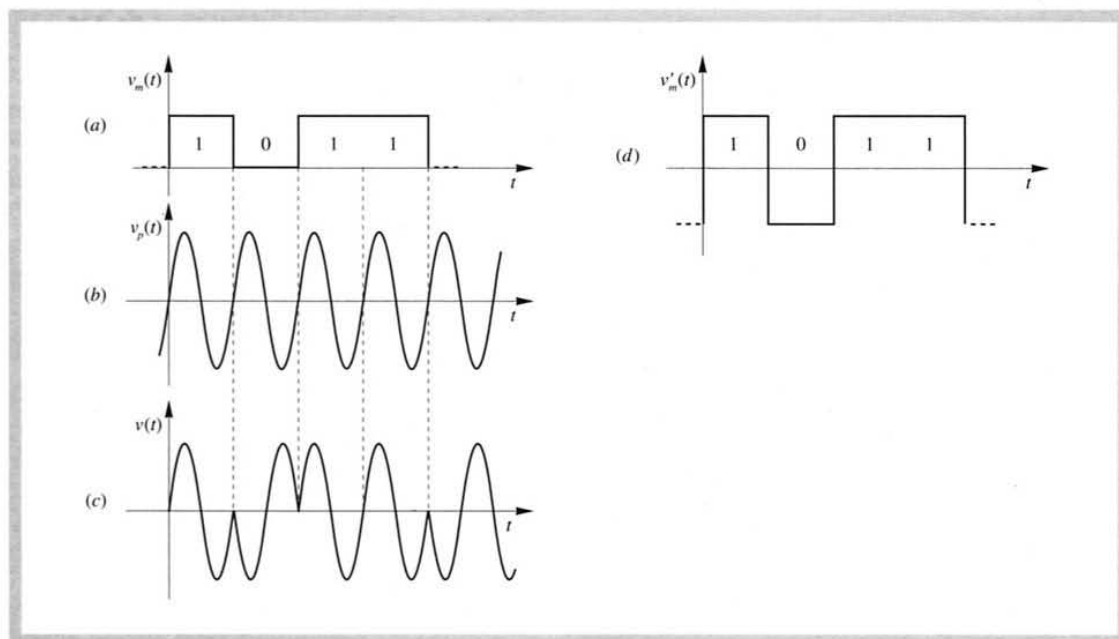
### 3.4 Modulazione PSK

La *modulazione a spostamento di fase*, in sigla PSK (*Phase Shift Keying*), consiste, nella sua più semplice realizzazione, nell'associare alle due cifre binarie 1 e 0 due valori diversi di fase della portante, come per esempio  $0^\circ$  e  $180^\circ$  (fig. 3.11). La modulazione PSK bifase equivale a una modulazione AM DSB eseguita su un segnale bipolare. Infatti in tale modulazione il segnale modulato è proporzionale al prodotto tra modulante e portante, e pertanto ipotizzando un segnale modulante a due livelli  $V$  e  $-V$  corrispondenti rispettivamente alle cifre 1 e 0 (fig. 3.11d), si ottiene un segnale modulato

$$v(t) = \begin{cases} V_p \cos(\omega_p t) & \text{cifra 1} \\ -V_p \cos(\omega_p t) = V_p \cos(\omega_p t + \pi) & \text{cifra 0} \end{cases} \quad [3.11]$$

Poiché naturalmente, a parte la componente continua, gli spettri dei segnali di fig. 3.11a e d sono identici, lo spettro PSK è identico a quello ASK, con tutto ciò che ne deriva.

**Fig. 3.11**  
Modulazione PSK:  
(a) segnale modulante,  
(b) portante e  
(c) segnale modulato.  
(d) Segnale modulante bipolare.



**ES 3.3** Un segnale numerico a frequenza di cifra  $f_k = 600$  bit/s viene modulato in tecnica PSK con frequenza della portante pari a  $f_p = 1200$  Hz. Determinare l'occupazione di banda del segnale modulato nell'ipotesi che il segnale in banda base occupi  $\frac{3}{4}f_k$ . Il segnale PSK può essere inviato su linea telefonica?

### 3.4.1 Modulazione DPSK

La modulazione PSK richiede in ricezione una portante di riferimento con la quale confrontare la fase del segnale al fine di determinare la sequenza di bit ricevuta. Per superare tale ostacolo si preferisce ricorrere alla *modulazione a spostamento di fase differenziale*, in sigla DPSK (*Differential PSK*), in cui si fa corrispondere ai due livelli binari rispettivamente nessuna variazione di fase o variazione di  $180^\circ$  rispetto alla segnalazione precedente; in fig. 3.12 è rappresentato il caso in cui alla cifra zero corrisponde continuità di fase, mentre alla cifra 1 corrisponde inversione. Il problema di individuare il valore della prima cifra ricevuta è facilmente risolto dall'invio di una sequenza prestabilita prima della comunicazione vera e propria.

Naturalmente un segnale DPSK, avendo lo stesso andamento di un segnale PSK (cambiano solo le regole per generare il segnale), conserva le stesse caratteristiche spettrali di quest'ultimo.

### 3.4.2 Modulazioni polifase

Nelle *modulazioni polifase* sono possibili quattro oppure otto variazioni di fase di tipo differenziale, di modo che a ciascuna segnalazione è associata rispettivamente una coppia o una terna di bit. In tab. 3.1 sono rappresentati gli schemi individuati dalle raccomandazioni ITU-T V.26 e V.27; si noti come a valori di fase consecutivi corrispondano coppie o terne di bit caratterizzate dalla variazione di una sola cifra binaria, in modo tale da minimizzare l'errore associato alla errata interpretazione del segnale.

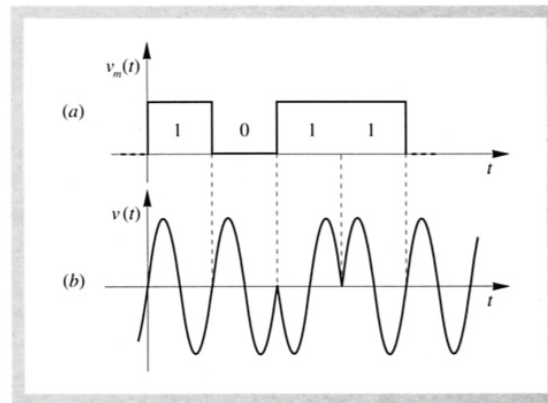
**Tab. 3.1** (a) Schemi possibili per la 4-DPSK; (b) schema della 8-DPSK.

Dibit	Alternativa A	Alternativa B
00	$0^\circ$	$45^\circ$
01	$90^\circ$	$135^\circ$
11	$180^\circ$	$225^\circ$
10	$270^\circ$	$315^\circ$

(a)

Tribit	Variazione
001	$0^\circ$
000	$45^\circ$
010	$90^\circ$
011	$135^\circ$
111	$180^\circ$
110	$225^\circ$
100	$270^\circ$
101	$315^\circ$

(b)



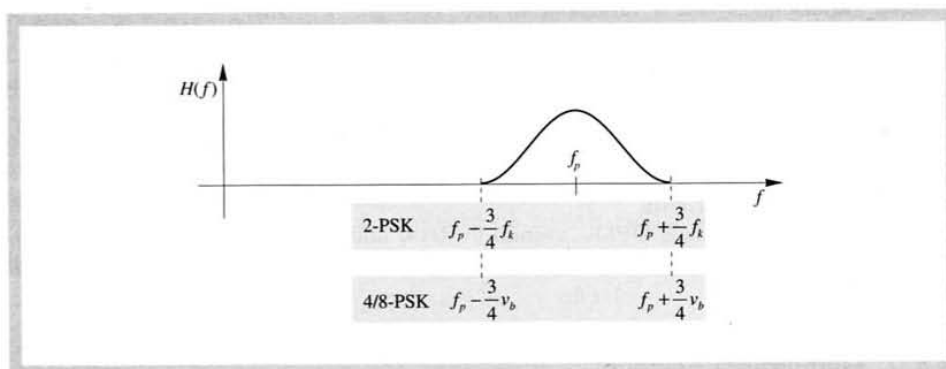
**Fig. 3.12**  
Modulazione  
DPSK:  
(a) segnale  
modulante e  
(b) segnale  
modulato.

Poiché è dimostrabile che l'aumento delle possibili variazioni di fase, a parità di velocità di segnalazione in baud, non influisce sull'occupazione di banda del segnale modulato, le modulazioni polifase introducono un netto miglioramento dell'efficienza spettrale, che risulta raddoppiata o triplicata rispetto alla modulazione bifase. Ipotizzando un segnale modulante formato, con occupazione in banda base pari a  $\frac{3}{4}f_k$ , lo spettro del segnale polifase è identico allo spettro PSK, avendo sostituito la velocità di segnalazione  $v_b$  a  $f_k$  (fig. 3.13); l'efficienza spettrale è pari in tal caso a

$$E = \frac{f_k}{\frac{3}{2}v_b} = \frac{2}{3} \cdot \frac{f_k}{v_b} \quad [3.12]$$

ovvero migliorata di un fattore 2 o 3 rispetto alla PSK.

**Fig. 3.13**  
Occupazione  
di banda  
di un segnale  
polifase.



#### ES 3.4

Un segnale a frequenza di cifra  $f_k = 4800$  bit/s, avente occupazione in banda base pari a  $\frac{3}{4}f_k$ , subisce una modulazione a otto stati dove la frequenza della portante è pari a  $f_p = 1800$  Hz. Determinare la velocità di segnalazione in baud della comunicazione, l'occupazione in banda traslata e l'efficienza spettrale ottenuta.

Risposta:  $BW_s = [600, 3000]$  Hz

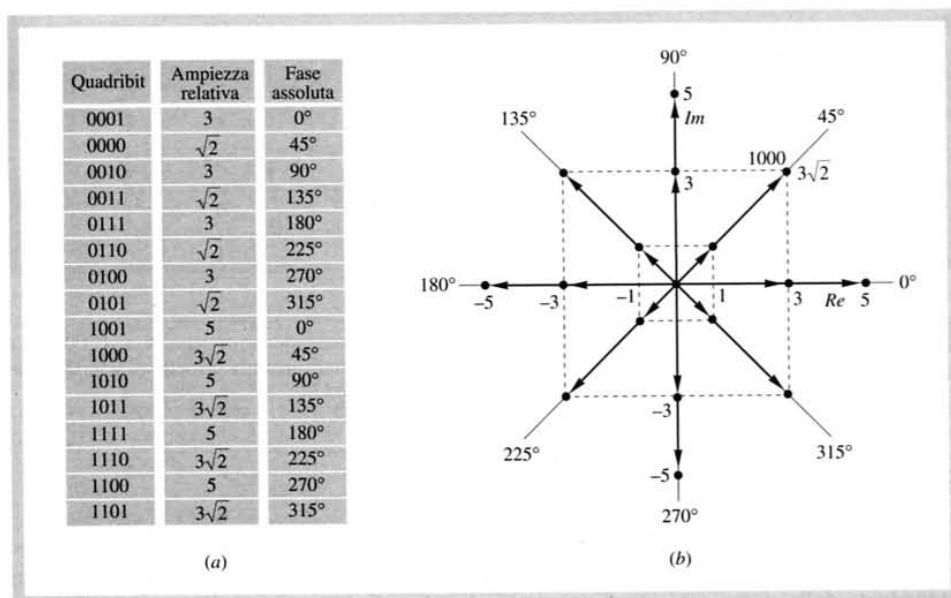
### 3.5 Modulazione QAM

La *modulazione di ampiezza in quadratura*, in sigla QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*), è basata sulla combinazione di una modulazione polifase, con fase assoluta, e di una modulazione di ampiezza multilivello. È così denominata in quanto il segnale QAM può essere visto come la somma di due segnali in quadratura di fase modulati in ampiezza; indicando infatti con  $A_m$  e  $\varphi_m$  rispettivamente l'ampiezza e la fase del segnale modulato, applicando la nota relazione  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$  si ottiene

$$\begin{aligned} v(t) &= A_m \cos(\omega_p t + \varphi_m) = A_m \cos \varphi_m \cos(\omega_p t) - A_m \sin \varphi_m \sin(\omega_p t) = \\ &= A_{mx} \cos(\omega_p t) - A_{my} \sin(\omega_p t) \end{aligned} \quad [3.13]$$

dove  $A_{mx}$  e  $A_{my}$  sono le ampiezze delle due componenti in quadratura e  $\omega_p$  è la pulsazione della portante. Ciascun tipo di modulazione QAM è caratterizzato da un diagramma, denominato *costellazione*, in cui sono rappresentati sul piano complesso i possibili vettori

relativi ai diversi stati della portante, o, per semplicità, i punti del piano individuati da tali vettori; per motivi legati alla costruzione degli apparati di mo-demodulazione, tali punti giacciono sempre su quadrati centrati sugli assi. La forma più semplice di modulazione QAM, enunciata dalla raccomandazione ITU-T V.29, prevede 16 stati diversi della portante, con un fattore 4 tra frequenza di cifra e velocità di segnalazione (in realtà la stessa raccomandazione indica la possibilità di una modulazione QAM a otto stati per una velocità di trasmissione inferiore); la tabella di associazione e il relativo diagramma vettoriale sono rappresentati in fig. 3.14.



**Fig. 3.14**  
(a) Tabella di associazione e  
(b) diagramma relativi alla modulazione 16-QAM.

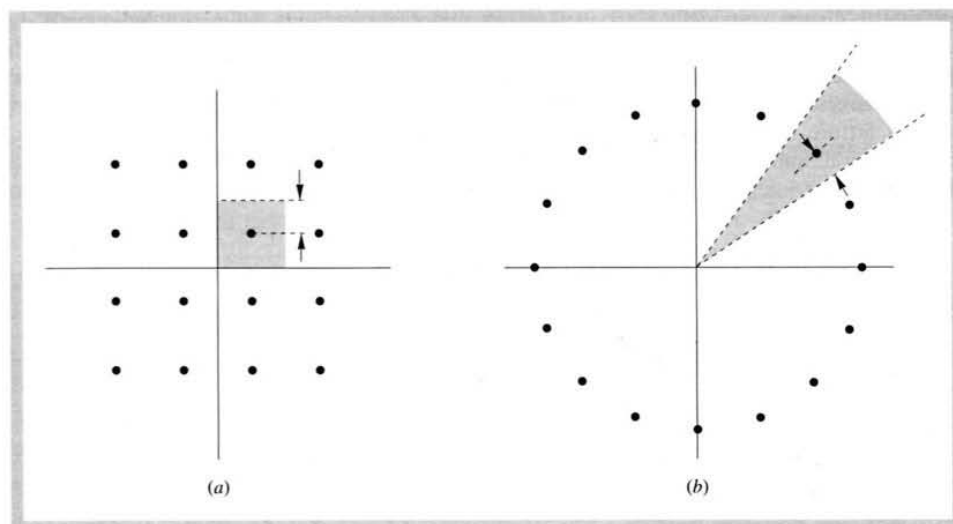
Per quanto riguarda lo spettro QAM vale quanto detto a proposito delle modulazioni polifase; pertanto, nell'ipotesi di segnale con spettro in banda base pari a  $\frac{3}{4}f_k$ , per l'efficienza spettrale vale la [3.12], che mediante la [3.2] può essere riscritta come

$$E = \frac{2}{3} \cdot n = \frac{2}{3} \cdot \log_2 N \quad [3.14]$$

essendo  $n$  e  $N$  rispettivamente il numero di bit associati a ciascuno stato della portante e il numero degli stati possibili. A quanto detto si deve però aggiungere che in realtà, per comunicazioni in banda fonica, le code dello spettro QAM possono essere trascurate, ottenendo un'occupazione reale approssimativamente pari alla velocità di segnalazione in baud. Per esempio, la raccomandazione ITU-T V.34 prevede una portante a 1959 Hz con una velocità di segnalazione pari a 3429 baud; lo spettro risultante si estende da 244 a 3674 Hz, ai limiti quindi della banda telefonica.

Il miglioramento introdotto dalla modulazione QAM rispetto alla PSK consiste nella maggiore immunità al rumore, a parità di potenza di picco e di punti della costellazione. In fig. 3.15 sono rappresentate le costellazioni relative alla 16-QAM individuate dalla raccomandazione ITU-T V.32 e a una ipotetica 16-PSK. In esse risultano visibili le aree di decisione, e cioè le zone entro le quali il vettore rappresentativo può scostarsi dalla sua posizione teorica senza che venga causato errore; si noti come la distanza minima dal confine dell'area di decisione sia maggiore nel caso della modulazione QAM.

**Fig. 3.15**  
Costellazioni  
(a) 16-QAM e  
(b) 16-PSK.



### ES 3.5

Si vuole utilizzare una modulazione QAM per trasmettere un segnale a 12000 bit/s associando cinque bit a ogni stato della portante. Determinare la velocità di segnalazione in baud e il numero di punti della costellazione QAM.

## 3.6 Modulazioni TCM

Un sensibile miglioramento della immunità al rumore, nel caso di modulazioni QAM a elevata complessità, deriva dalla tecnica di *codifica Trellis*, da cui derivano le modulazioni individuate dalla sigla TCM (*Trellis Code Modulation*). Tale tecnica utilizza un codificatore di tipo convoluzionale, il cui output dipende cioè, oltre che dai bit correnti, dalle cifre binarie emesse in precedenza. Si consideri come esempio una modulazione 8-PSK che utilizzi una codifica Trellis per trasmettere per ogni stato della portante una coppia di bit; la tabella di corrispondenza, in cui  $b_i$  e  $b_{i-1}$  sono i bit correnti da trasmettere mentre  $b_{i-2}$  e  $b_{i-4}$  sono bit trasmessi in precedenza, è riportata in tab. 3.2.

Si noti come la codifica Trellis introduca un bit aggiuntivo rispetto al numero dei bit da trasmettere, con conseguente raddoppio degli stati della portante; per trasmettere infatti una coppia di bit per segnalazione è sufficiente una modulazione 4-PSK, mentre il segnale codificato richiede una 8-PSK. Quest'ultima modulazione però, grazie al particolare tipo di codifica adottata, risulta meno sensibile al rumore di una 4-PSK. In primo luogo si noti che ogni coppia  $b_{i-2} - b_{i-4}$ , nota al ricevitore in quanto già acquisita, individua una sottocostellazione a quattro soli stati, il cui stato attuale dipende dai bit informativi  $b_i$  e  $b_{i-1}$ ; per esempio la coppia 00 individua la sottocostellazione  $0^\circ-90^\circ-180^\circ-270^\circ$ . Oltre a ciò, si deve considerare che la decisione sulla segnalazione ricevuta non avviene segnalazione per segnalazione, ma tiene conto dell'evoluzione degli stati considerando blocchi di segnalazioni successive, in modo tale da migliorare la bontà della stima eseguita; quando viene rilevata una transizione incompatibile con la catena dei bit ricevuti, viene scelta la più vicina segnalazione che crea una sequenza di stati valida.

Riassumendo si può osservare quindi che una modulazione TCM, sebbene introduca uno o anche più bit aggiuntivi al numero dei bit informativi, determinando quindi una maggiore complessità della costellazione QAM associata, determina una maggiore immunità al rumore rispetto a una corrispondente QAM con una costellazione più semplice, ma priva di codifica convoluzionale.

Tab. 3.2 Codifica TCM 8-PSK.

Bit da trasmettere	Bit trasmessi	Output del codificatore	Fase del segnale emesso
$b_i \ b_{i-1}$	$b_{i-2} \ b_{i-4}$		
0 0	0 0	000	0°
0 0	0 1	110	270°
0 0	1 0	010	315°
0 0	1 1	100	225°
0 1	0 0	001	180°
0 1	0 1	111	90°
0 1	1 0	011	135°
0 1	1 1	101	45°
1 0	0 0	110	270°
1 0	0 1	000	0°
1 0	1 0	100	225°
1 0	1 1	010	315°
1 1	0 0	111	90°
1 1	0 1	001	180°
1 1	1 0	101	45°
1 1	1 1	011	135°

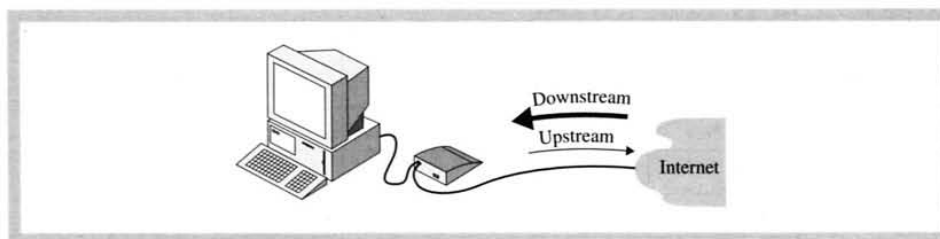
**ESEMPIO 3.2**

Al fine di superare il problema costituito dalla ristrettezza della banda telefonica, sono state sviluppate modulazioni TCM che per la propria complessità esulano da questo testo, ma di cui vogliamo dare un cenno. La raccomandazione ITU-T V.34 stabilisce lo standard per modem a 28 800 e 33 600 bit/s; tali frequenze di cifra sono raggiunte rispettivamente con velocità di segnalazione pari a 3000 e 3429 baud, utilizzando modulazioni TCM con costellazioni a 1408 e 1664 punti. L'efficienza spettrale, includendo il bit aggiuntivo Trellis e considerando l'occupazione di banda pari alla velocità di segnalazione, raggiunge i 10,7 bps/Hz. La velocità di 33 600 bit/s è superata solo, sotto certe condizioni, dai modem V.90 e V.92, che potenzialmente arrivano a 56 000 bit/s; tali standard, che si differenziano dalle tecniche sin qui esaminate, saranno considerati nel seguito del presente corso.

**3.7 XDSL**

Le tecnologie di tipo DSL (*Digital Subscriber Line*, linea di abbonato digitale), indicate anche come XDSL (la X rappresenta una possibile lettera identificativa di una specifica tecnologia), sono state sviluppate per consentire l'accesso numerico ad alta velocità mediante il doppino che connette ciascun utente telefonico alla propria centrale locale. Grazie a tali tecniche l'utenza può (o potrà) usufruire di servizi tipici delle reti a larga banda, quali la diffusione video a qualità standard, la videoconferenza ad alta qualità o l'accesso a Internet

**Fig. 3.16**  
Asimmetria dei flussi in un collegamento a Internet.



ad alta velocità, senza che il gestore dei servizi debba ricorrere a dispendiosi cablaggi in fibra o in coassiale. Esistono numerose varianti di tecnologie DSL, alcune delle quali in fase di sperimentazione e/o di standardizzazione. In molti casi tali tecniche privilegiano la velocità con la quale la rete trasmette all'utente (flusso di *downstream*, letteralmente «a valle»), rispetto alla velocità con cui l'utente trasmette alla rete (flusso di *upstream*, letteralmente «a monte»); quest'aspetto ben si accorda con la fruizione di alcuni servizi, quali per esempio Internet, video *on demand* o consultazione di database, in cui tipicamente il flusso di *downstream* è ben più elevato di quello di *upstream* (fig. 3.16).

Le caratteristiche principali delle tecnologie DSL sono rappresentate in tab. 3.3; tra queste, la più adatta alla grande utenza è senza dubbio ADSL (*Asymmetric Digital Subscriber Line*), per il fatto che prevede un elevato flusso di *downstream* sulle distanze tipiche dei rilegamenti di utente (lunghezza media circa 1,5 km, massima 5-6 km) e può essere utilizzata contemporaneamente al servizio telefonico di base (POTS); il valore del *downstream* consente la fruizione di servizi televisivi (un segnale video numerico ha una frequenza di cifra di 4-8 Mbit/s).

**Tab. 3.3** Tecnologie DSL.

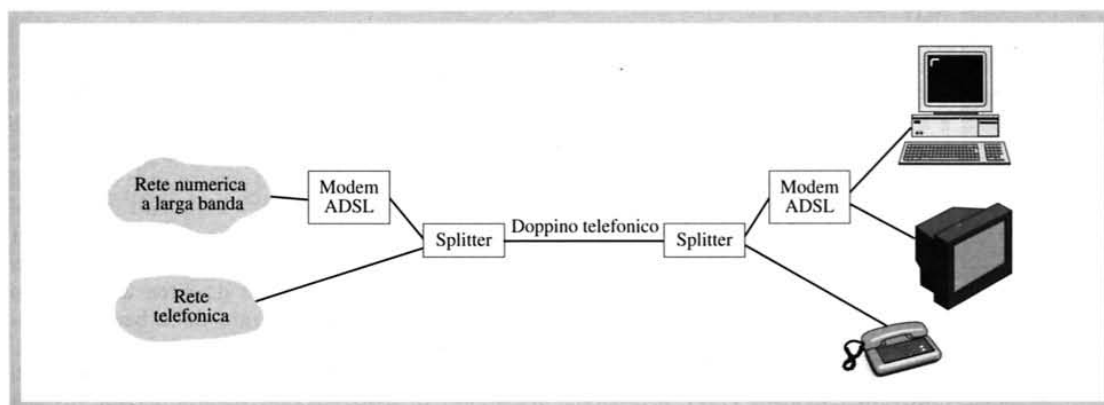
Tecnologia		Downstream	Upstream	Distanza massima (km)	Compatibilità POTS	N. di doppini
ADSL - R-ADSL ( <i>Asymmetric DSL - Rate adaptive ADSL</i> )		1,5-8 Mbit/s	640 kbit/s - 1,54 Mbit/s	5,5 (3,5 per le velocità massime)	SÌ	1
ADSL Lite (ADSL Splitterless)		1 Mbit/s	512 kbit/s	5,5	SÌ	1
IDSL (ISDN DSL)		144 kbit/s	144 kbit/s	8	NO	1
HDSL ( <i>High bit-rate DSL</i> )		2 Mbit/s	2 Mbit/s	4,5	NO	2/3
SDSL ( <i>Single-line DSL</i> )		2 Mbit/s	2 Mbit/s	3,5	NO	1
VDSL ( <i>Very high bit-rate DSL</i> )	Asimmetrica Simmetrica	13-52 Mbit/s 34 Mbit/s	1,5-2,3 Mbit/s 34 Mbit/s	1,4 (0,3 per le velocità massime)	NO	1

*Note*

- 1) A causa del carattere sperimentale delle tecnologie i dati in tabella sono solo indicativi.
- 2) Le prestazioni sono fortemente condizionate dallo stato della linea (corrosione, presenza di giunti, rumore, ecc.) e dalla eventuale presenza di linee in derivazione.

### 3.7.1 ADSL

Lo schema di utilizzo di un sistema trasmissivo ADSL, rappresentato in fig. 3.17, prevede sia dal lato centrale sia dal lato utente la presenza di dispositivi denominati *splitter* (divisori), la cui funzione è quella di separare il segnale fonico da quello ADSL. Tali dispositivi non



**Fig. 3.17**  
Schema  
di utilizzo  
di un sistema  
ADSL.

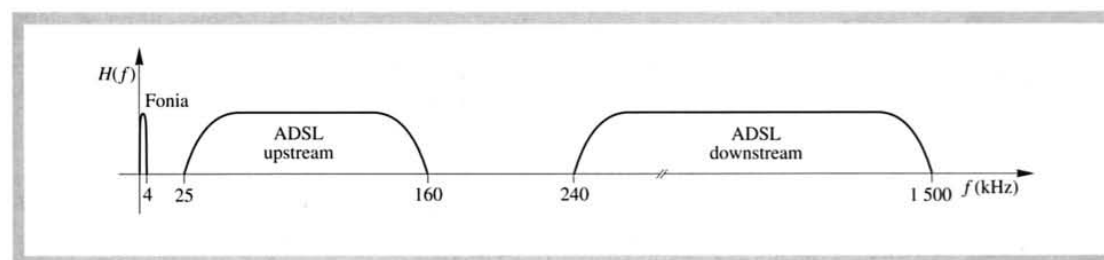
sono altro che filtri passa-basso e passa-alto che indirizzano i segnali in bassa frequenza (voce) e in alta frequenza (ADSL) rispettivamente verso il terminale telefonico e verso il modem ADSL. La presenza dello splitter dal lato utente impone il ricablaggio interno alla sede di abbonato, per fare in modo che il segnale ADSL raggiunga i terminali utilizzatori dove essi sono posti; per superare tale problema è in fase di sviluppo una tecnologia denominata *ADSL Splitterless* che può fare a meno degli splitter, semplificando in questo modo l'installazione di un accesso ADSL. Si noti che la connessione ADSL, non interferendo con il normale traffico telefonico, può essere attiva 24 ore su 24 e non richiedere quindi alcuna procedura di accesso ai servizi.

La tecnologia ADSL prevede due tecniche di modulazione distinte, denominate CAP (*Carrierless Amplitude/Phase modulation*, modulazione di ampiezza e fase a portante soppressa) e DMT (*Discrete Multi-Tone modulation*, modulazione a multifrequenza discreta). La prima è attualmente più diffusa, ma la seconda gode della standardizzazione ANSI-ETSI-ITU e, sebbene di realizzazione più complessa, appare come la tecnologia destinata a prevalere.

#### CAP

La modulazione CAP altro non è che una modulazione QAM a portante soppressa; la differenza principale tra un modulatore QAM tradizionale e un modulatore CAP è che quest'ultimo costruisce la forma d'onda digitalmente e la trasmette in linea dopo una conversione D/A. In dipendenza dallo stato e dalla lunghezza della linea, un modulatore CAP utilizza da 4 a 512 stati della portante (2-9 bit per segnalazione). La banda di upstream si estende da 25 a 160 kHz ed è quindi ben separata dalla banda fonica (300-3400 Hz); ciò semplifica la realizzazione dei filtri per lo *splitting*. La banda di downstream, più estesa per la maggiore velocità di modulazione supportata, si estende da 240 kHz sino a circa 1,5 MHz (nelle condizioni migliori). L'utilizzazione dello spettro per sistemi CAP è rappresentata in fig. 3.18.

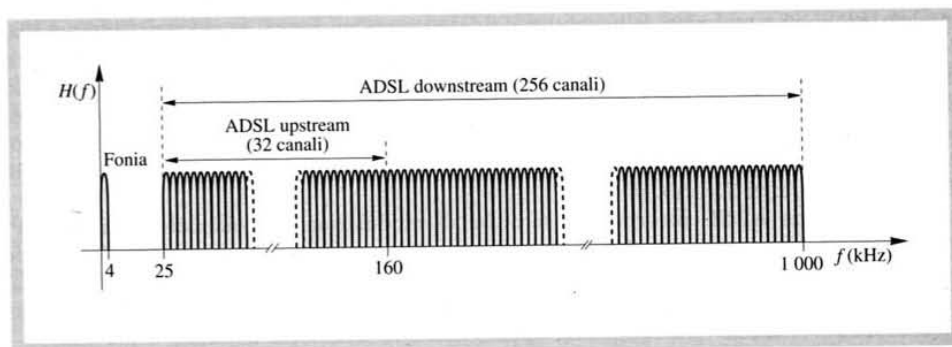
**Fig. 3.18**  
Utilizzazione  
dello spettro  
nei sistemi CAP.



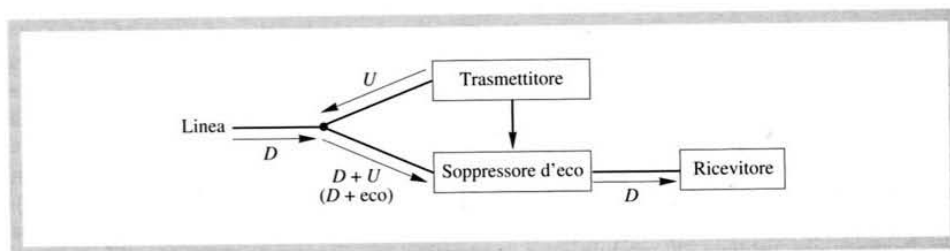
## DMT

Invece di usare un singolo segnale per ciascun verso di trasmissione, i sistemi DMT suddividono il flusso numerico in numero molto elevato di flussi minori, ciascuno dei quali è trasmesso indipendentemente dagli altri con una tecnica di moltiplicazione a divisione di frequenza; in ricezione i flussi acquisiti vengono poi opportunamente aggregati per ricostruire il segnale numerico di origine. Per quanto riguarda il downstream, lo spettro utile è suddiviso in 256 canali, ciascuno avente una larghezza di banda pari a circa 4 kHz. Attraverso ogni canale è trasmesso un segnale QAM a 4 kbaud cui è associato un numero di bit per segnalazione variabile da 2 a 15; di conseguenza il massimo flusso per ciascun canale è pari a 60 kbit/s. Lo spettro del segnale DMT di downstream si estende da circa 25 kHz sino a circa 1 MHz; anche in questo caso lo spettro ADSL è ben separato dalla banda fonica. Lo spettro del segnale DMT di upstream condivide la banda utilizzata dai primi 32 canali di downstream (fig. 3.19); a causa della sovrapposizione delle bande di downstream e di upstream i modem DMT necessitano di circuiti di soppressione dell'eco, grazie ai quali è possibile cancellare dal segnale ricevuto i contributi del segnale trasmesso che a esso si sovrappongono (fig. 3.20).

**Fig. 3.19**  
Utilizzazione  
dello spettro  
nei sistemi  
DMT.



**Fig. 3.20**  
Principio  
della soppressione  
dell'eco.



All'inizio della trasmissione, viene valutata la bontà di ciascun canale in termini di distorsione e rapporto  $S/N$ , e sulla base di tale valutazione viene assegnato un numero di stati QAM opportuno a ciascun canale valido (meno stati per i canali più degradati, più stati per quelli meno degradati), mentre i canali peggiori sono esclusi dalla trasmissione; tale processo di ottimizzazione continua durante la trasmissione: se un canale si degrada, il relativo flusso diminuisce e i bit in eccesso sono riassegnati a un canale migliore.

**ES 3.6**

Due modem ADSL-DMT comunicano tra loro associando mediamente 8 bit a ciascuna segnalazione QAM. Determinare le frequenze di cifra dei flussi di downstream e di upstream.

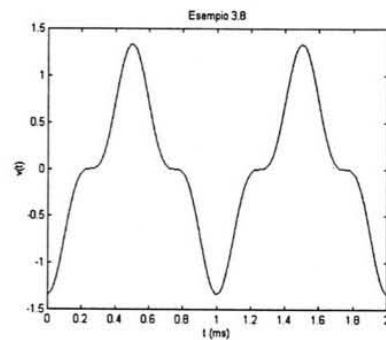
Risposta:  $f_{kd} = 8,19$  Mbit/s;  $f_{ku} = 1,02$  Mbit/s

**MATLAB 3.3**

```

t=0:.001:2;
Vo=sin(2*pi*t-(pi/2))+...
(1/3)*sin(6*pi*t-(pi/2));
plot(t,Vo)
xlabel('t (ms)')
ylabel('v(t)')
title('Esempio 3.8')

```

**ES 3.13****MATLAB**

Un segnale periodico  $v(t)$  è pari alla somma di due sinusoidi caratterizzate rispettivamente da frequenze  $f_1 = 12$  kHz e  $f_2 = 24$  kHz, fasi iniziali nulle, ampiezze  $A_1 = 2$  V e  $A_2 = 0,5$  V. Determinare la forma d'onda risultante dal passaggio di tale segnale in un quadripolo avente la risposta in frequenza rappresentata in fig. 3.31.

**ES 3.14**

Si vuole trasmettere attraverso un quadripolo lineare un'onda quadra a valore medio nullo la cui frequenza è  $f = 40$  kHz; la fedeltà richiesta è stabilita, nel dominio della frequenza, dal criterio del 5% (vedi esercizio 3.12). Determinare la larghezza di banda richiesta al quadripolo.

Risposta:  $BW = 720$  kHz

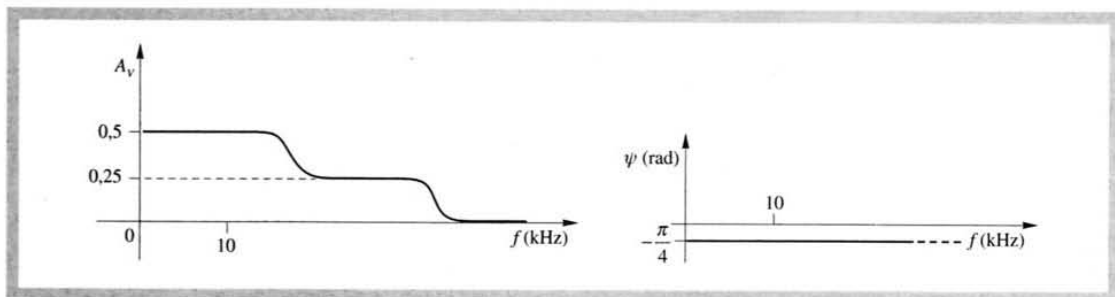
### 3.4 Estensione del teorema di Fourier a segnali non periodici

#### 3.4.1 Sviluppo in serie di Fourier del segnale rettangolare

In generale, i segnali trasmessi da un sistema di telecomunicazioni sono non periodici. Poiché è possibile applicare l'analisi armonica anche a tale categoria di segnali, è necessario discuterne la relativa rappresentazione nel dominio della frequenza, che presenta alcune differenze rispetto a quella dei segnali periodici. Per potere fare ciò senza dovere affrontare le difficoltà matematiche implicate, prenderemo lo spunto dallo studio di un particolare segnale periodico: il segnale rettangolare. Consideriamo il segnale rappresentato in fig. 3.32, avente ampiezza picco-picco  $V$ , periodo  $T$  e durata degli impulsi pari a  $\tau$ ; il calcolo delle ampiezze  $A_n$  del relativo sviluppo in serie di Fourier conduce al seguente risultato:

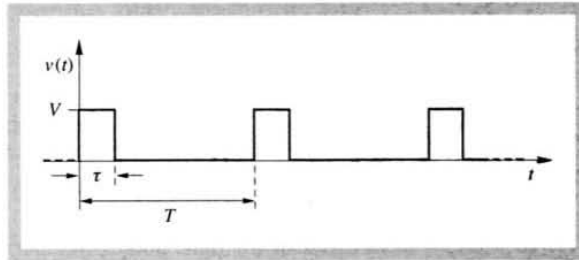
$$A_0 = V\tau f_0 \quad ; \quad A_n = \frac{2V}{\pi n} |\sin(n\pi f_0 \tau)| \quad [3.16]$$

**Fig. 3.31**  
Esercizio 3.13:  
risposta  
in frequenza  
del quadripolo.



La seconda delle [3.16] è rappresentata graficamente da uno spettro delle ampiezze il cui *inviluppo*, e cioè la curva continua  $A(f)$  che unisce le estremità superiori delle righe dello spettro, si ottiene sostituendo il termine  $nf_0$  con  $f$  nell'espressione di  $A_n$ ; mediante tale sostituzione, in cui l'indice  $n = \frac{nf_0}{f_0}$  va sostituito con  $\frac{f}{f_0}$ , si perviene al seguente risultato:

$$A(f) = \frac{2Vf_0}{\pi f} |\sin(\pi f \tau)| \quad [3.17]$$



**Fig. 3.32**  
Segnale  
rettangolare.

Tale funzione ha l'andamento pulsante e smorzato rappresentato in fig. 3.33, dato che vi compaiono un termine oscillante  $\sin(\pi f \tau)$ , le cui oscillazioni negative cambiano segno a causa della funzione modulo, e un termine di smorzamento  $\frac{1}{f}$ ; il fatto che l'inviluppo tenda al valore  $2Vf_0\tau$  per valori di  $f$  che si avvicinano a zero può essere dimostrato con metodi matematici avanzati.

Il primo zero dell'inviluppo si ha quando l'argomento della funzione seno assume valore pari a  $\pi$ , e cioè alla frequenza  $f_a$  tale che

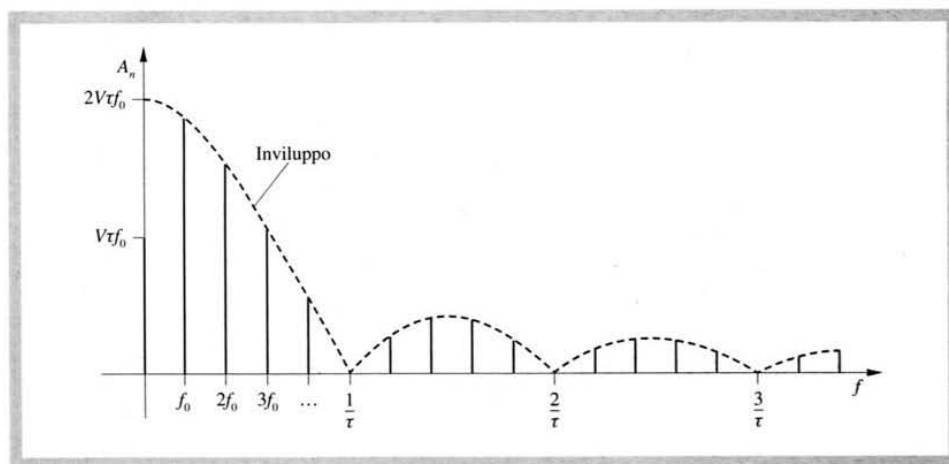
$$\pi f_a \tau = \pi \quad [3.18]$$

dalla quale si ottiene

$$f_a = \frac{1}{\tau} \quad [3.19]$$

Le ulteriori caratteristiche dello spettro possono essere ricavate senza particolari difficoltà, cosa che assegneremo come esercizio.

- ES 3.15** a) Ricavare il valore di  $A_0$  per il segnale di fig. 3.32.  
b) Mostrare che nell'inviluppo [3.17] gli zeri successivi al primo si hanno a frequenze  $2f_a$ ,  $3f_a$ , ecc.



**Fig. 3.33**  
Spettro delle  
ampiezze del  
segnale  
rettangolare.

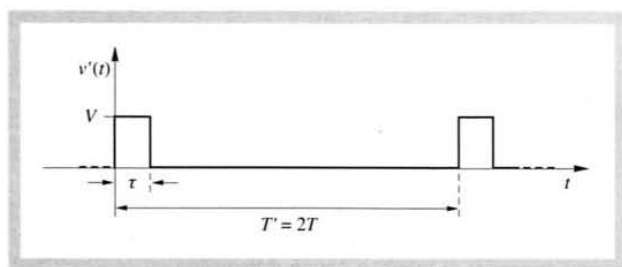
### 3.4.2 Estensione della rappresentazione nel dominio della frequenza ai segnali non periodici

Si consideri ora il segnale rettangolare  $v'(t)$  rappresentato in fig. 3.34, avente periodo doppio rispetto a quello di fig. 3.32, e quindi frequenza dimezzata, ma ampiezza e durata degli impulsi identici. Tale segnale ha uno spettro delle ampiezze simile a quello di fig. 3.33, dove in particolare:

- la posizione degli zeri dell'involuppo sull'asse delle frequenze è identica, dato che  $\tau$  è rimasto invariato;
- la distanza tra righe successive, pari alla frequenza  $f'_0$  del segnale, è dimezzata rispetto alla fig. 3.33;
- la curva dell'involuppo è attenuata di un fattore 2 in quanto tutte le quantità presenti nell'espressione [3.17] sono invariate, tranne la frequenza  $f'_0$  del segnale, che si è ridotta di un fattore 2.

Lo spettro risultante è rappresentato in fig. 3.35, in cui, essendo l'involuppo dimezzato, ma il numero di righe per unità di frequenza raddoppiato, si ha che la «densità di ampiezza per unità di frequenza», ossia la rilevanza delle componenti presenti in un intervallo unitario di frequenza, è rimasta invariata<sup>(6)</sup>. La densità di ampiezza degli spettri considerati, che indicheremo con  $H(f)$ , si può ottenere dividendo l'espressione dell'involuppo per l'intervallo di frequenza occupato da ciascuna componente, e cioè  $f'_0$ ; il risultato è una funzione di  $f$  in cui compaiono i soli parametri  $V$  e  $\tau$  (che sono infatti rimasti invariati):

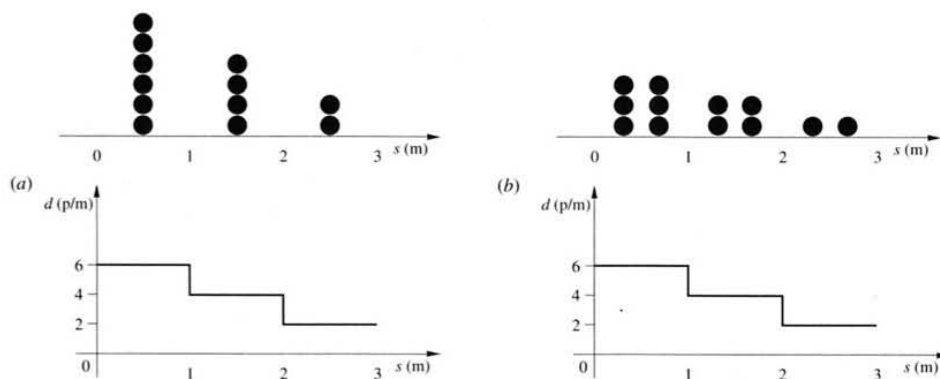
$$H(f) = \frac{2V}{\pi f} |\sin(\pi f \tau)| \quad [3.20]$$



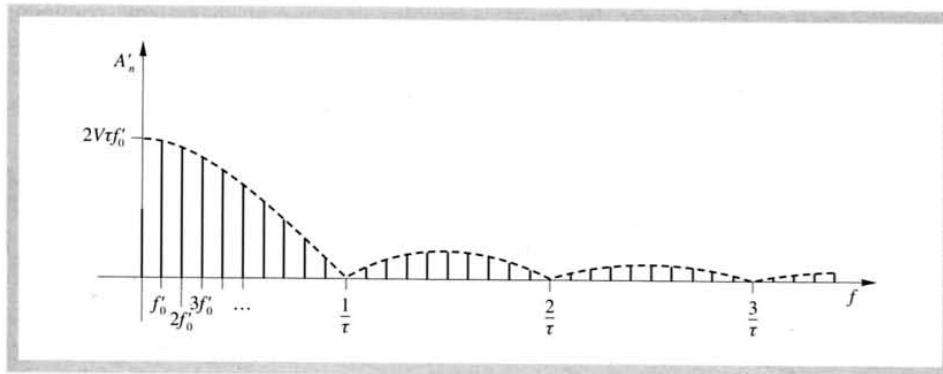
**Fig. 3.34**  
Segnale  
rettangolare 2.

Considerando segnali aventi periodo sempre più grande, ma impulsi invariati, i relativi spettri avranno ampiezze minori, ma righe sempre più ravvicinate. Immaginando ora di ripetere questa operazione infinite volte, il secondo impulso si allontanerà sempre più dal primo, per cui il segnale risultante sarà un impulso singolo, e cioè un segnale *non periodico*. Lo spettro di tale segnale avrà ampiezze

<sup>(6)</sup> Se si considera un intervallo sull'asse delle frequenze, il numero di componenti raddoppia, ma ognuna di esse ha ampiezza dimezzata, per cui la quantità definita «densità di ampiezza» rimane invariata. Per comprendere ciò si consideri la disposizione delle palline in fig. 1a, in cui si ha una «densità di palline», espressa dal numero di palline per metro, avente l'andamento del grafico sottostante; in fig. 1b la disposizione è diversa ma la densità è invariata.



**Fig. 1**  
Diverse  
disposizioni  
aventi uguale  
«densità  
di palline»  
(p/m: palline  
per metro).



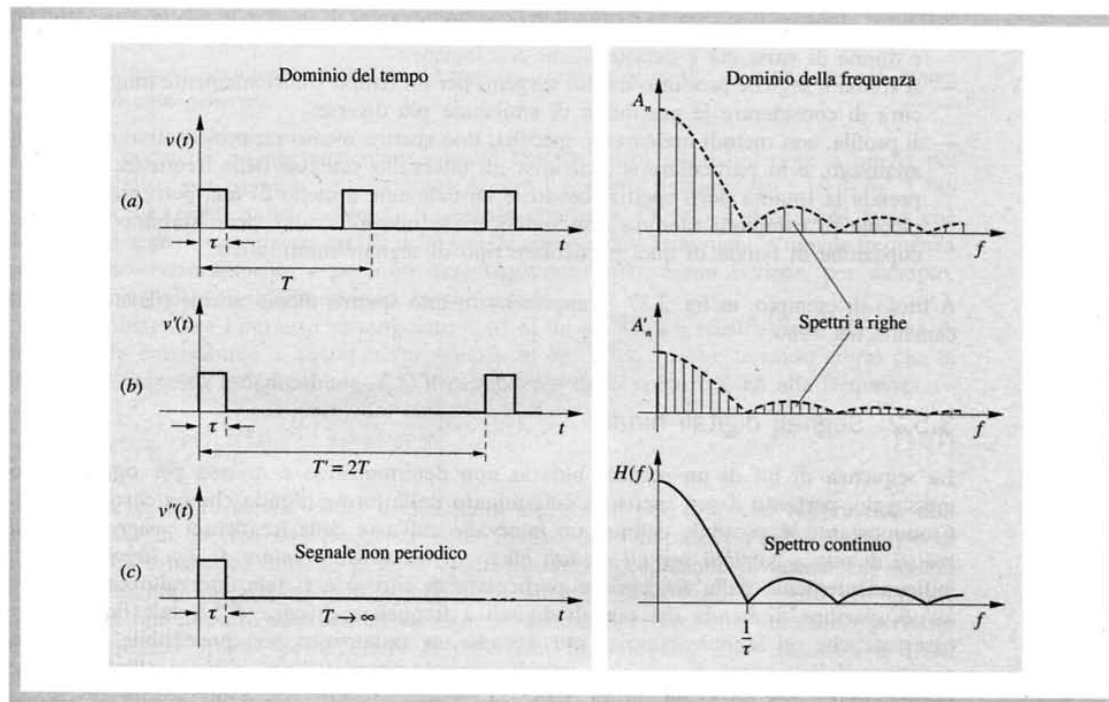
**Fig. 3.35**  
Spettro  
delle ampiezze  
del segnale  
rettangolare 2.

infinitamente piccole e righe infinitamente ravvicinate, ma avrà mantenuto la stessa densità di ampiezza  $H(f)$  degli spettri precedenti; la rappresentazione grafica di  $H(f)$  (fig. 3.36c) costituisce lo spettro delle ampiezze del segnale non periodico ottenuto. Se il segnale che stiamo considerando è una tensione,  $H(f)$  si misurerà in V/Hz.

Lo spettro del segnale a impulso singolo differisce dunque da quelli dei segnali periodici per le seguenti caratteristiche:

- in esso sono presenti componenti a tutte le frequenze possibili (essendo il segnale non periodico non ne è definita la frequenza, pertanto lo spettro non rispetta alcuna regola legata a un valore «speciale» della frequenza);
- la sua rappresentazione grafica continua rappresenta la densità di ampiezza delle componenti in funzione della frequenza.

**Fig. 3.36**  
Spettro  
del segnale  
rettangolare  
per  $T \rightarrow \infty$ .



Poiché lo spettro delle ampiezze del segnale a impulso singolo è un diagramma continuo, lo stesso si può dire dello spettro delle fasi, rappresentato anch'esso da una funzione continua di  $f$ . Tali risultati possono essere estesi più in generale, sotto alcune condizioni matematiche peraltro sempre verificate per i segnali fisici, all'insieme dei segnali non periodici; possiamo pertanto così riassumere:

*la rappresentazione nel dominio della frequenza di un segnale non periodico è costituita da due funzioni  $H(f)$  e  $\Psi(f)$ , che possono essere definite rispettivamente «densità di ampiezza» e fase, i cui diagrammi costituiscono lo spettro delle ampiezze e quello delle fasi del segnale considerato.*

Le argomentazioni riguardanti la limitazione in frequenza degli spettri sono valide anche per i segnali non periodici, per i quali sono analogamente definite occupazione e larghezza di banda; pertanto i concetti esposti nel par. 3.3.7 si devono considerare applicabili anche a sistemi attraversati da segnali non periodici.

### 3.5 Spettro dei segnali non deterministici

#### 3.5.1 Segnali analogici

Lo spettro dei segnali analogici non deterministici non può essere studiato matematicamente, non essendo nota a priori alcuna caratteristica dei segnali stessi.

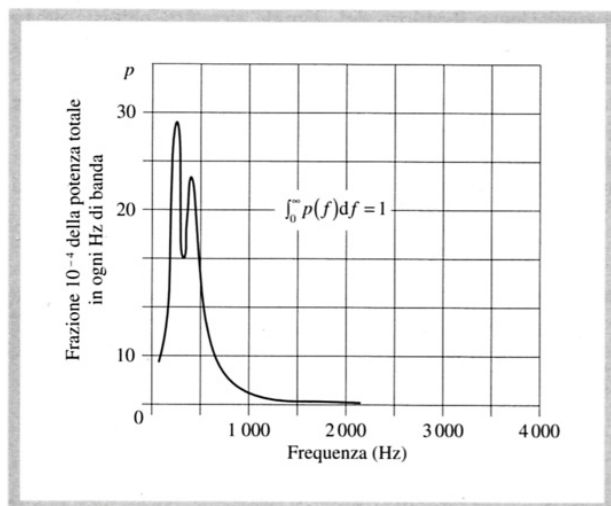
Tali segnali devono essere dunque esaminati dal punto di vista statistico, cosa che avviene con le seguenti modalità:

- si individua una ben precisa categoria di segnali, come per esempio potrebbe essere un segnale audio vocale in lingua italiana;
- si seleziona, nell'insieme delle possibili sorgenti, un campione di queste, ritenuto rappresentativo di tutto l'insieme (nell'esempio considerato, un numero elevato di uomini e donne di varie età e caratteristiche fisiologiche);
- si studia il segnale prodotto da tali sorgenti per un tempo sufficientemente lungo, avendo cura di considerare le possibilità di emissione più diverse;
- si profila, con metodi matematici specifici, uno spettro medio rappresentativo dei segnali analizzati, e in particolare si individua un intervallo sull'asse delle frequenze che comprenda la totalità degli spettri rilevati, eventualmente a meno di una percentuale molto piccola di campioni ritenuta non significativa; tale intervallo viene stabilito come occupazione di banda di quel particolare tipo di segnale informativo.

A titolo di esempio, in fig. 3.37 è rappresentato uno spettro medio vocale rilevato statisticamente nel 1960.

#### 3.5.2 Segnali digitali binari

La sequenza di bit di un segnale binario non deterministico è diversa per ogni diverso messaggio, pertanto il suo spettro è determinato dalla forma d'onda che ha caso per caso. Ciononostante, è possibile definire un intervallo sull'asse delle frequenze comprendente gli spettri di tutti i possibili segnali digitali binari aventi un dato valore di  $T_{\text{bit}}$  (ovvero di  $f_k$ ), indipendentemente dalla successione particolare di cifre 0 e 1; tale intervallo corrisponde all'occupazione di banda dei segnali digitali a frequenza di cifra  $f_k$ . A tale fine si deve osservare che un segnale binario, pur avendo un andamento non prevedibile, è sempre costituito dalla somma di segnali a impulso singolo ritardati l'uno rispetto all'altro, come rappresentato, per pochi bit, in fig. 3.38.

**Fig. 3.37**

Spettro vocale rilevato su un campione maschile-femminile di lingua italiana nel 1960 da Barducci e Bianchi.

Ora, un segnale avente la stessa forma d'onda di un altro, ma traslata sull'asse del tempo, può essere ottenuto con le stesse componenti armoniche del primo, solo opportunamente ritardate nel tempo, ovvero sfasate di una certa quantità; pertanto tutti i segnali a impulso singolo differiscono tra loro solo nello spettro delle fasi, ma non in quello delle ampiezze. Se dunque lo spettro delle ampiezze del singolo impulso è limitato a un intervallo  $BS$  sull'asse delle frequenze, qualsiasi segnale generato da una sua ripetizione non può comprendere armoniche al di fuori di tale intervallo. Si può quindi enunciare il seguente risultato:

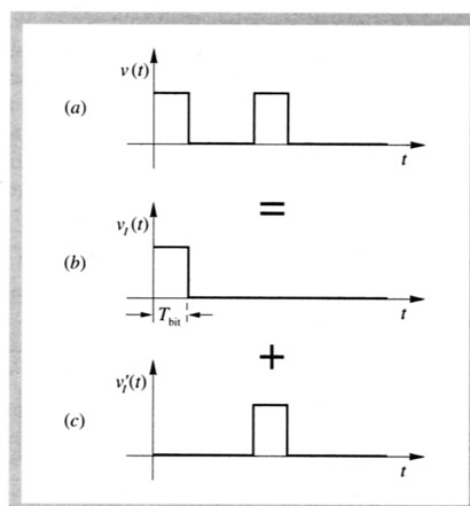
*la banda occupata da un singolo impulso comprende quella di tutti i segnali binari da esso generati.*

La banda occupata da un particolare segnale binario potrà essere inferiore a quella del singolo impulso; per esempio, una sequenza di cifre 1 generata dall'impulso  $v_1(t)$  di fig. 3.38b avrebbe occupazione nulla, essendo un segnale continuo. Questo è dovuto al fatto che sommando segnali con diversi spettri delle fasi, le componenti armoniche a uguale frequenza si sommano vettorialmente e possono dare risultante nulla, come avviene, per esempio, per due sinusoidi di uguale ampiezza in controfase.

Esaminiamo ora l'impulso rettangolare  $v_1(t)$  di fig. 3.38b. Lo spettro delle ampiezze di tale segnale corrisponde a quello rappresentato in fig. 3.36c, in cui, tenendo conto che la durata dell'impulso è denominata  $T_{\text{bit}}$ , il primo zero dello spettro si ha alla frequenza

$$f_a = \frac{1}{T_{\text{bit}}} = f_k \text{ (Hz)} \quad [3.21]$$

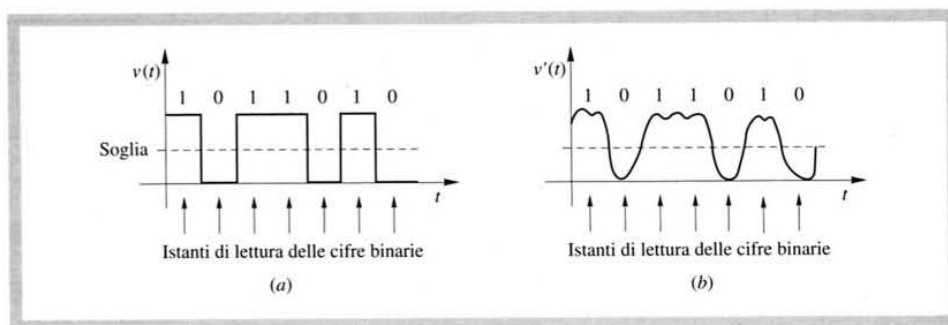
Si noti che  $f_a$  ha lo stesso valore di  $f_k$ , ma si esprime in Hz, dato che rappresenta non già un flusso di bit, ma una frequenza dello spettro delle ampiezze. Poiché lo spettro di fig. 3.36c ha estensione infinita, si deve desumere che l'occupazione di banda dei segnali generati dall'impulso rettangolare è infinita, o almeno, nella pratica, tanto più grande quanto più tale impulso approssima un impulso rettangolare ideale; è necessario pertanto chiedersi quanto grande possa essere la differenza tra i segnali reali trasmessi e quelli perfettamente rettangolari, in modo tale da conoscere l'effettiva richiesta di una trasmissione binaria in termini di banda. A tale proposito si deve osservare il modo di operare del

**Fig. 3.38**

Un segnale binario è rappresentabile come la somma di segnali a impulso singolo.

dispositivo ricevente (fig. 3.39a), il quale legge il valore del segnale ricevuto nell'istante in cui è minore la probabilità di errore, e quindi a centro impulso, nell'istante più lontano dai fronti di salita e di discesa del segnale; in base poi al superamento o meno di una certa soglia, interpreta il valore letto come cifra 0 o 1. Pertanto l'andamento del segnale negli istanti lontani dal centro bit non influisce sulla lettura del segnale; ciò che importa è che in un piccolo intervallo di tempo intorno al centro bit il segnale si mantenga dalla parte giusta della soglia, ovvero al di sopra, se è stato trasmesso 1, al di sotto se è stato trasmesso 0 (fig. 3.39b).

**Fig. 3.39**  
Lettura  
di un segnale  
digitale binario  
da parte  
del dispositivo  
ricevente.



Detto questo, nella trasmissione di segnali digitali binari esistono due possibilità:

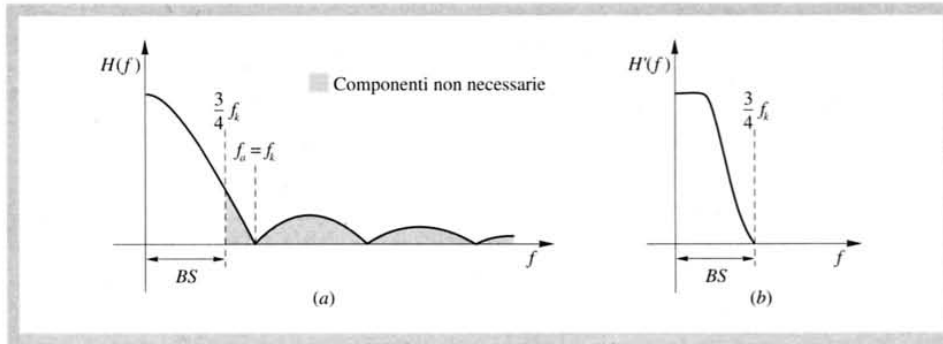
- utilizzare sequenze di impulsi rettangolari, lasciando che lo spettro del segnale sia tagliato dal sistema di trasmissione, con conseguente arrotondamento degli impulsi;
- conformare già in partenza lo spettro del segnale, mediante l'attraversamento di un quadripolo denominato *formatore*, che determina un segnale dall'andamento più arrotondato e a banda limitata, compatibilmente con la banda passante del sistema; lo spettro del segnale in questo caso è detto *a coseno rialzato*.

In entrambi i casi la banda richiesta al sistema di trasmissione può essere determinata sperimentalmente, limitando sempre più la banda passante del sistema o quella del quadripolo formatore, sino a constatare la non corretta ricezione del messaggio binario. Il risultato di tale operazione, pur dipendendo da fattori specifici dei diversi sistemi di comunicazione, può essere quantificato nelle seguenti espressioni

$$BS = \left[ 0, \frac{3}{4}f_k \right] \quad ; \quad BW_s = \frac{3}{4}f_k \quad [3.22]$$

In relazione ai due casi precedentemente prospettati, le [3.22] hanno il seguente significato:

- se si utilizzano impulsi rettangolari, è sufficiente che nella trasmissione siano conservate le componenti a frequenza compresa tra 0 e  $\left(\frac{3}{4}\right)f_k$  dello spettro del segnale in partenza (fig. 3.40a); la larghezza di banda del segnale si può considerare quindi pari a  $\left(\frac{3}{4}\right)f_k$ , dato che le componenti a frequenza più alta possono essere trascurate;
- è possibile utilizzare un formatore che genera uno spettro a coseno rialzato con banda limitata a  $\left(\frac{3}{4}\right)f_k$  (fig. 3.40b).



**Fig. 3.40**  
Occupazione di banda (a) di una sequenza di impulsi rettangolari e (b) di un segnale con spettro a coseno rialzato.

Anche se la costante moltiplicativa presente nelle [3.22] può assumere valori leggermente diversi nelle diverse applicazioni, vale in tutti i casi il seguente dato fondamentale:

*la larghezza di banda di un segnale digitale binario è proporzionale alla sua frequenza di cifra.*

Nei capitoli successivi considereremo valide, a titolo di riferimento, le [3.22], pur nella consapevolezza che a seconda dell'applicazione la banda occupata dal segnale binario potrà discostarsi un po' da tale valutazione.

### ESEMPIO 3.9

Supponendo valide le [3.22], determinare l'occupazione di banda di un segnale digitale binario a 16000 B/s.

### SOLUZIONE

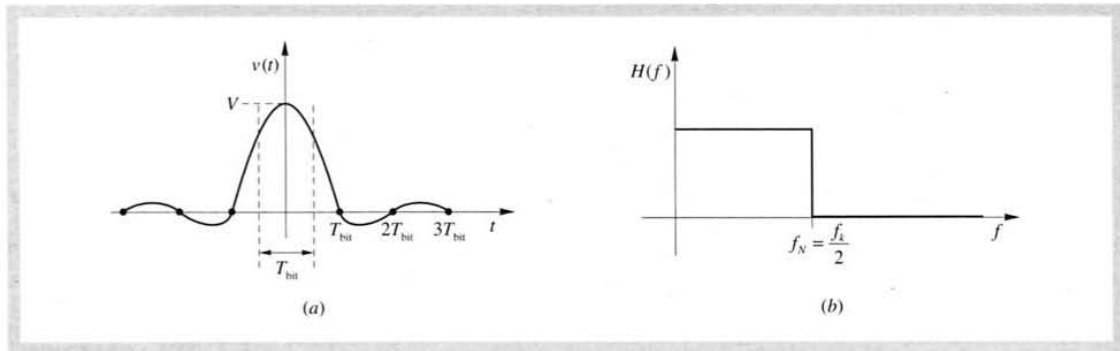
La frequenza di cifra è pari a  $f_k = 16000 \cdot 8 = 128$  kbit/s, pertanto la banda occupata dal segnale si estende da 0 alla frequenza  $\left(\frac{3}{4}\right)f_k = 96$  kHz.

**ES 3.16** Supponendo valide le [3.22], determinare la banda passante minima richiesta a un canale di trasmissione per trasmettere correttamente un segnale digitale binario i cui bit hanno la durata  $T_{\text{bit}} = 0,5 \mu\text{s}$ .

Dal punto di vista strettamente matematico, esistono segnali aventi occupazione di banda inferiore rispetto a quanto espresso dalle [3.22]; in particolare, è possibile dimostrare che il singolo impulso avente la minore occupazione di banda possibile è un segnale definito *impulso di Nyquist*<sup>(7)</sup> la cui espressione, in cui  $V$  è l'ampiezza dell'impulso e  $T_{\text{bit}}$  la durata della cifra binaria, è la seguente

$$v(t) = V \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi t}{T_{\text{bit}}}\right)}{\frac{\pi t}{T_{\text{bit}}}} \quad [3.23]$$

<sup>(7)</sup> Harry Nyquist, scienziato statunitense di origine svedese (Nilsby 1889 - ? 1976). Si occupò di elettronica e telecomunicazioni, al cui sviluppo partecipò con numerosi contributi, in particolare nell'ambito della teoria dell'informazione; è noto per avere enunciato il teorema del campionamento, il criterio di stabilità dei sistemi reazionati, nonché per avere interpretato la natura del rumore termico.



**Fig. 3.41**  
(a) Impulso di Nyquist e (b) relativo spettro.

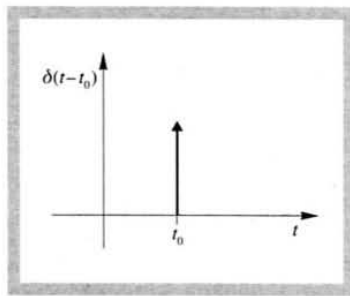
Come mostrato in fig. 3.41a, tale segnale è simmetrico rispetto all'istante  $t=0$ , in cui assume il valore  $V$ , e si annulla in tutti gli istanti  $t = \pm kT_{\text{bit}}$  (con  $k$  intero  $> 0$ ), come richiesto a un singolo impulso binario. Lo spettro dell'impulso di Nyquist è una funzione costante fino alla *frequenza di Nyquist*

$$f_N = \frac{1}{2T_{\text{bit}}} = \frac{f_k}{2} \text{ Hz} \quad [3.24]$$

dopo la quale si annulla (fig. 3.41b). L'impulso di Nyquist, pur rappresentando l'impulso binario a banda minima, a causa del suo spettro discontinuo non si presta ad applicazioni pratiche.

**ES 3.17** Determinare il risparmio di banda che si otterrebbe, in percentuale, utilizzando impulsi di Nyquist piuttosto che un segnale con spettro a coseno rialzato (si faccia riferimento alla fig. 3.40b).

Risposta: 33 %



**Fig. 1.16**  
Delta di Dirac  
centrata in  $t_0$ .

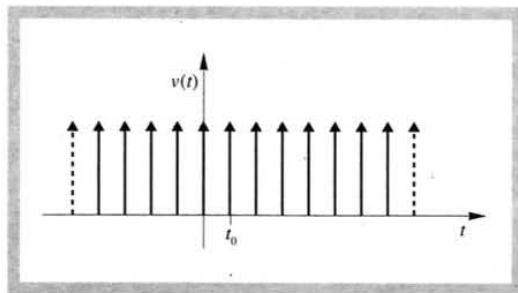
Pertanto, per la trasformata di Fourier della funzione delta si ottiene

$$\bar{F}_\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega 0} = 1 \quad [1.43]$$

Osserviamo infine che la funzione  $\delta(t - t_0)$  rappresenta un impulso a delta di Dirac che occorre in un istante  $t_0 \neq 0$  (fig. 1.16).

### ESEMPIO 1.5

Determinare l'espressione matematica del treno di impulsi a delta di Dirac rappresentato in fig. 1.17.



**Fig. 1.17**  
Esempio 1.5.

### SOLUZIONE

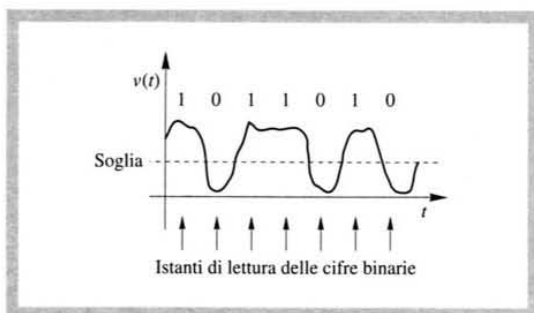
L'impulso in  $t = 0$  è  $\delta(t)$ , mentre i successivi sono  $\delta(t - t_0)$ ,  $\delta(t - 2t_0)$ , ecc.; analogamente gli impulsi che precedono quello centrato in  $t = 0$  sono  $\delta(t + t_0)$ ,  $\delta(t + 2t_0)$ , ecc. Poiché il treno di impulsi è infinitamente esteso in entrambe le direzioni del tempo, si può scrivere

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nt_0) \quad [1.44]$$

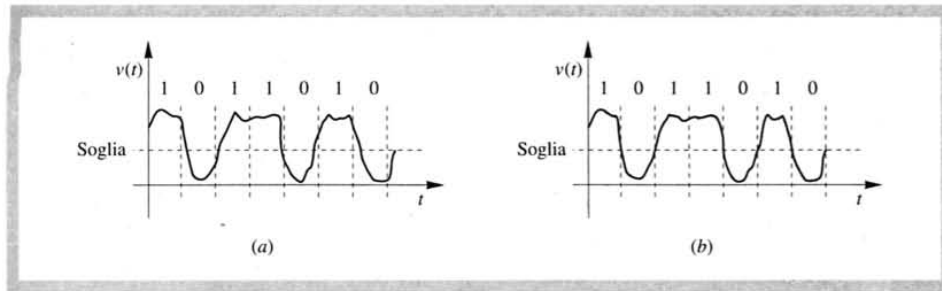
## 1.5 Segnali digitali binari

Come già discusso nel vol. 1, par. 3.5.2, nonostante il fatto che la sequenza di bit di un segnale binario non deterministico sia diversa per ogni diverso messaggio, è possibile definire un intervallo sull'asse delle frequenze comprendente gli spettri di tutti i possibili segnali digitali binari aventi una data frequenza di cifra  $f_k$ , indipendentemente dalla successione particolare di cifre 0 e 1. In particolare, ricordiamo che la banda occupata da un singolo impulso comprende quella di tutti i segnali binari generati come sequenze dello stesso impulso. Si pone ora il problema di determinare quale sia la forma d'onda che deve avere l'impulso di base al fine di garantire una comunicazione il più possibile esente da errori con un consumo di banda accettabile. A tale proposito si consideri il riconoscimento di

**Fig. 1.18**  
Lettura  
di un segnale  
digitale binario  
da parte  
del dispositivo  
ricevente.



un segnale numerico binario *sincrono*, ovvero tale che la durata di ciascun bit sia identica. Il dispositivo che opera tale riconoscimento deve essere in grado di leggere il valore del segnale ricevuto nell'istante in cui è minore la probabilità di errore, e quindi a centro bit, nell'istante più lontano dai fronti di salita e di discesa del segnale; in base poi al superamento o meno di una certa soglia, interpreterà il valore letto come cifra 0 o 1. Si noti la necessità di mantenere la sincronizzazione tra il segnale ricevuto e la cadenza temporale di lettura, che deve essere identica alla frequenza di cifra del segnale (fig. 1.18).



**Fig. 1.19**  
(a) Segnale non regolare nelle transizioni;  
(b) segnale regolare nelle transizioni.

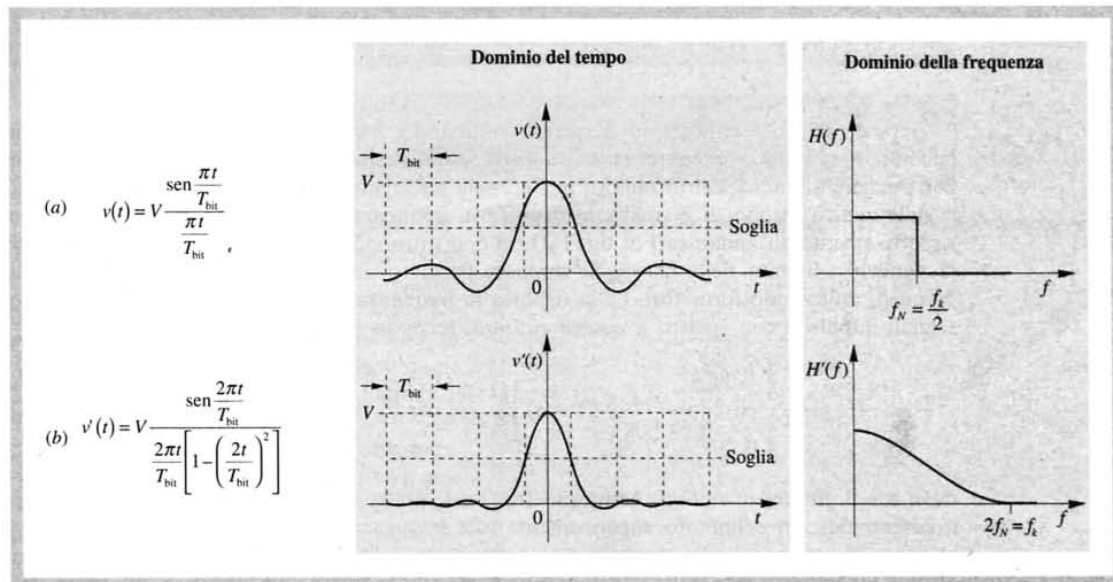
La soluzione più comune del problema della sincronizzazione consiste nella estrazione del segnale di clock del ricevitore dallo stesso segnale ricevuto, sulla base delle sue transizioni da un livello all'altro, ovvero in base agli istanti in cui il segnale attraversa la soglia; pertanto sarebbe opportuno che il segnale, oltre che ad assumere il corretto livello a centro bit, mantenesse una cadenza regolare nelle transizioni da un livello all'altro (fig. 1.19).

Da quanto detto risulta che per ottenere la migliore comunicazione la forma d'onda del segnale all'entrata del dispositivo di rivelazione deve soddisfare due condizioni, dette *criteri di Nyquist*, enunciabili come di seguito:

- *primo criterio*: negli istanti di lettura la forma d'onda deve assumere un valore esattamente coincidente con uno dei due livelli che definiscono le cifre 0 e 1;
- *secondo criterio*: gli istanti di transizione devono risultare distanziati tra loro esattamente di quantità multiple della durata del bit  $T_{\text{bit}}$ .

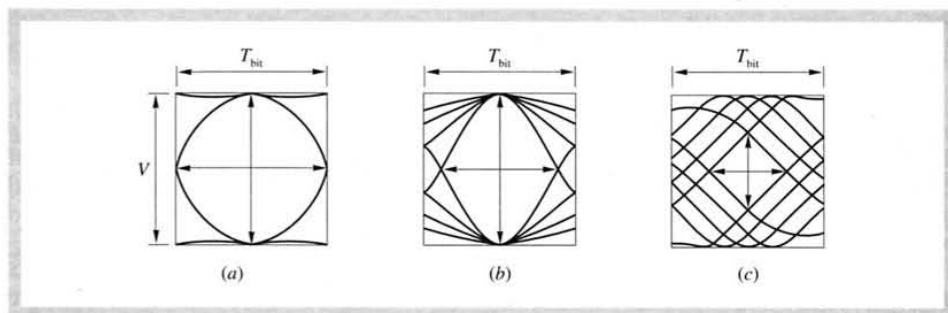
L'*impulso di Nyquist* rappresentato in fig. 1.20a, già introdotto nel vol. 1 par. 3.5.2 come l'impulso singolo a banda minima, soddisfa solo il primo criterio; si può notare infatti come gli istanti di transizione non siano distanziati di  $T_{\text{bit}}$ . L'impulso singolo a banda minima che soddisfa entrambi i criteri di Nyquist è il segnale, rappresentato in fig. 1.20b, denominato *impulso ottimo di Nyquist*; la sua occupazione di banda è doppia rispetto a quella dell'impulso di Nyquist, ovvero è pari alla frequenza di cifra del segnale.

**Fig. 1.20**  
(a) impulso di Nyquist;  
(b) impulso ottimo di Nyquist.



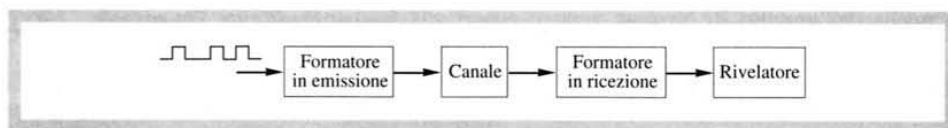
Se un generico segnale numerico binario viene osservato sullo schermo di un oscilloscopio con l'asse dei tempi sincronizzato con il clock del segnale, si ottiene una figura che per la sua forma viene chiamata *diagramma ad occhio*. Se sono soddisfatti entrambi i criteri di Nyquist si ottiene il diagramma di fig. 1.21a, con la massima apertura orizzontale e verticale dell'occhio; se è soddisfatto solo il primo criterio si ottiene il diagramma di fig. 1.21b, in cui permane la massima apertura verticale; se il segnale non rispetta alcuno dei due criteri si ottiene un diagramma del tipo di fig. 1.21c.

**Fig. 1.21**  
Diagrammi a occhio nei casi di rispetto (a) di entrambi i criteri, (b) del solo primo criterio, (c) di nessun criterio di Nyquist.



Sebbene i due impulsi di fig. 1.20 costituiscano in teoria una base vantaggiosa per la generazione di segnali numerici binari (il primo per la minore occupazione di banda, il secondo perché soddisfa entrambi i criteri di Nyquist), si deve considerare il problema della formazione di tali segnali. Un sistema di comunicazione numerico prevede infatti la presenza a monte e a valle del canale, di due quadripoli denominati rispettivamente *formatore in emissione* e *formatore in ricezione* (fig. 1.22). La funzione di tali quadripoli consiste nel trasformare il segnale d'ingresso, di tipo squadrato, in modo da ottimizzare la trasmissione lungo il canale e la rivelazione del segnale.

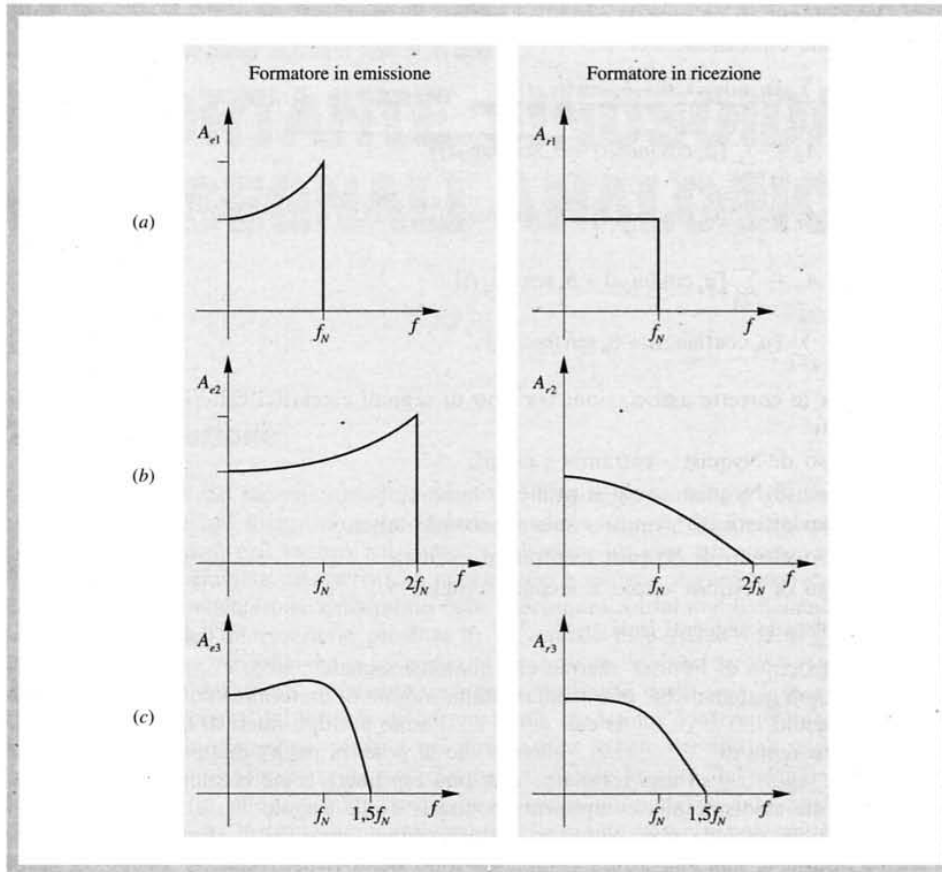
**Fig. 1.22**  
Schema a blocchi di un sistema di comunicazione numerico.



La ricerca della risposta in frequenza ottima dei formatori in modo da minimizzare l'effetto di rumore o interferenze esula dagli scopi di questa trattazione. Si dimostra che per ottenere all'uscita del formatore in ricezione un segnale basato sull'impulso di Nyquist o sull'impulso ottimo di Nyquist, le risposte in frequenza dei formatori dovrebbero avere rispettivamente gli andamenti di fig. 1.23a e b, e tutto ciò è tecnicamente irrealizzabile per la pendenza infinita delle curve. Si rinuncia pertanto a soddisfare il secondo criterio di Nyquist, utilizzando formatori, dalla risposta in frequenza tipica di fig. 1.23c, che generano segnali impulsivi con spettro a *coseno rialzato*, secondo l'espressione

$$H(f) \propto \begin{cases} 1 & \text{per } f \leq f_N(1 - \alpha) \\ \cos^2 \left\{ \frac{\pi}{4\alpha} \left[ \frac{f}{f_N} - (1 - \alpha) \right] \right\} & \text{per } f_N(1 - \alpha) < f \leq f_N(1 + \alpha) \\ 0 & \text{per } f > f_N(1 + \alpha) \end{cases} \quad [1.45]$$

dove  $\alpha$  è il *fattore di roll-off*, compreso tra 0 e 1. Dalla [1.45] si desume che uno spettro a coseno rialzato è limitato superiormente alla frequenza  $f_N(1 + \alpha)$ . Per  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1$  si ottengono come casi limite rispettivamente gli spettri dell'impulso di Nyquist e dell'impulso ottimo di Nyquist; ponendo il valore tipico  $\alpha = 0,5$  si ottiene uno spettro compreso tra



**Fig. 1.23**  
Risposta  
in frequenza  
dei formatori  
per la generazione  
all'ingresso  
del rivelatore  
(a) dell'impulso  
di Nyquist,  
(b) dell'impulso  
ottimo  
di Nyquist,  
(c) di un segnale  
con spettro  
a coseno  
rialzato.

0 e  $1,5f_N$  (fig. 1.24), ovvero, ricordando che  $f_N = \frac{f_k}{2}$ , il segnale ha un'occupazione di banda

$$BS = \left[ 0, \frac{3}{4} f_k \right]$$

[1.46]

**Fig. 1.24**  
Spettri a coseno  
rialzato.

La costante moltiplicativa presente nella [1.46] può assumere valori leggermente diversi nelle diverse applicazioni, in relazione a valori di  $\alpha$  diversi da 0,5. Vale comunque il seguente dato fondamentale: la larghezza di banda di un segnale digitale binario è proporzionale alla sua frequenza di cifra.

Nei capitoli successivi considereremo valida, a titolo di riferimento, la [1.46], pur nella consapevolezza che a seconda dell'applicazione la banda occupata dal segnale binario potrà discostarsi un po' da tale valutazione.

