

CAPITOLO DECIMO

LA MODULAZIONE DI FREQUENZA E LA MODULAZIONE DI FASE

1. Generalità

Nella modulazione di frequenza l'ampiezza del segnale modulato è mantenuta costante, mentre la frequenza istantanea varia, rispetto al valore in assenza di modulazione, proporzionalmente al valore istantaneo del segnale modulante e la rapidità con cui avviene tale variazione è determinata dalla rapidità della legge di variazione nel tempo del segnale modulante stesso. Supponiamo, ad esempio, che un segnale di 100 MHz venga modulato in frequenza con un segnale modulante sinusoidale di frequenza 1000 Hz; con una certa ampiezza del segnale modulante, la frequenza del segnale modulato può variare, supponiamo, di 100 000 Hz in più e in meno rispetto al valore di 100 MHz che si ha in assenza di modulazione; la frequenza istantanea varia, cioè, con legge sinusoidale assumendo tutti i valori compresi fra i limiti estremi 99,9 MHz ÷ 100,1 MHz e tale variazione si ripete ad un «ritmo» di 1000 volte al secondo.

Si è già dimostrato nel capitolo III che l'espressione del valore istantaneo $v(t)$ del segnale modulato in frequenza con un segnale modulante di valore istantaneo $v_m(t)$ e di forma qualunque è:

$$v(t) = V_0 \cos \left[\omega_0 t + K_f \int_0^t v_m(t) dt \right] \quad (1)$$

in cui V_0 è l'ampiezza del segnale che non viene alterata nel processo di modulazione di frequenza, ω_0 è la pulsazione del segnale in assenza di modulazione e K_f è una costante di proporzionalità caratteristica del dispositivo che effettua la modulazione. La pulsazione istantanea del segnale modulato è:

$$\omega(t) = \omega_0 + K_f v_m(t) \quad (2)$$

Il segnale modulato in frequenza $v(t)$ si può anche esprimere mediante un numero complesso \bar{V} in modo che sia: $v(t) = \text{parte reale di } \bar{V}$.

Esprimendo il numero complesso \bar{V} nella forma esponenziale, la sua espressione è:

$$\bar{V} = V_0 e^{j \int \omega(t) dt} = V_0 e^{j \omega_0 t} \cdot e^{j K_f \int v_m(t) dt}$$

Si può, infatti, constatare che la parte reale di questa espressione è data dalla (1).

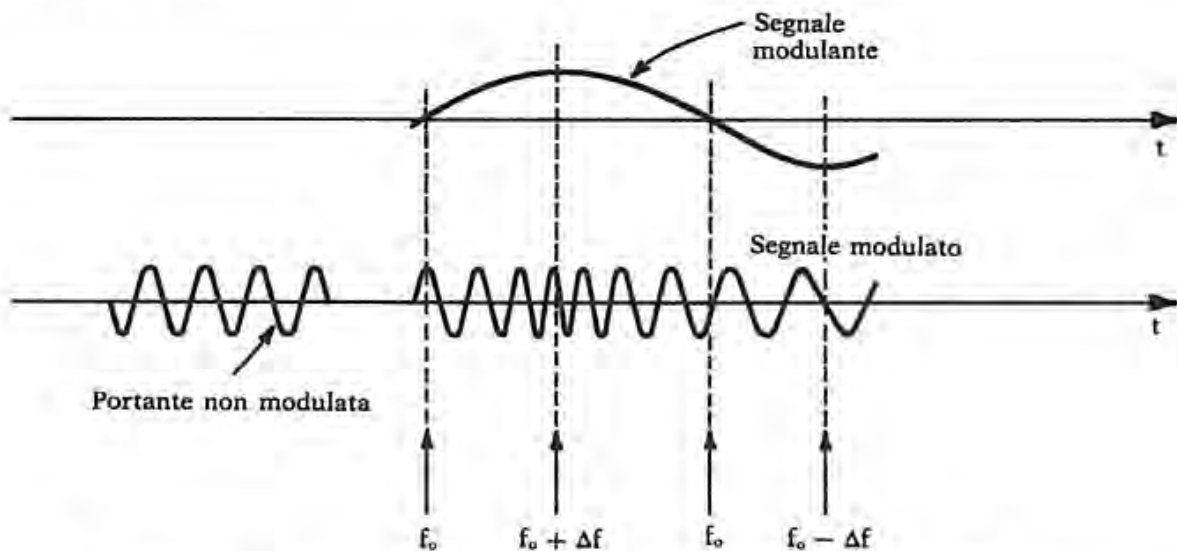


Fig. 1. - Segnale modulante e corrispondente segnale modulato in frequenza.

Nel caso particolarmente interessante in cui il segnale modulante sia di forma sinusoidale ed espresso dalla relazione: $v_m(t) = V_m \cos \omega_m t$, le relazioni (1) e (2) diventano rispettivamente:

$$v(t) = V_0 \cos \left[\omega_0 t + \frac{K_f V_m}{\omega_m} \sin \omega_m t \right] \quad (3)$$

$$\omega(t) = \omega_0 + K_f V_m \cos \omega_m t \quad (4)$$

La frequenza istantanea f del segnale modulato con modulazione sinusoidale è:

$$f = \frac{\omega(t)}{2\pi} = f_0 + \frac{K_f V_m}{2\pi} \cos \omega_m t = f_0 + \Delta f \cdot \cos \omega_m t \quad (5)$$

in cui f_0 è la frequenza in assenza di modulazione e la quantità $\Delta f = K_f V_m / 2\pi$, proporzionale all'ampiezza del segnale modulante, è la *deviazione massima di frequenza* del segnale modulato. La frequenza istantanea varia fra i limiti estremi: $f_{\min} = f_0 - \Delta f$ e $f_{\max} = f_0 + \Delta f$ (fig. 1).

Introducendo la quantità Δf nella relazione (3) l'espressione del segnale modulato in frequenza con modulazione sinusoidale può riscriversi nella maniera seguente:

$$v(t) = V_0 \cos \left[\omega_0 t + \frac{\Delta f}{f_m} \sin \omega_m t \right] = V_0 \cos [\omega_0 t + m \sin \omega_m t] \quad (6)$$

in cui si è posto: $m = \frac{\Delta f}{f_m}$. La quantità m , rapporto fra la massima deviazione di frequenza e la frequenza del segnale modulante, è chiamata *indice di modulazione* o, più precisamente, *indice di modulazione di fase nella modulazione di frequenza*; infatti m rappresenta la massima «deviazione di fase» del segnale modulato in frequenza.

2. Composizione dello spettro di frequenze di un segnale modulato in frequenza con modulazione sinusoidale

Per esaminare la composizione dello spettro di frequenze di un segnale modulato in frequenza con segnale modulante sinusoidale occorre espandere l'espressione (6) che, facendo uso della nota relazione trigonometrica:

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

si può scrivere nella seguente forma:

$$v(t) = V_0 \cos(m \sin \omega_m t) \cdot \cos \omega_0 t - V_0 \sin(m \sin \omega_m t) \cdot \sin \omega_0 t \quad (7)$$

I termini:

$$\cos(m \sin \omega_m t) \quad \text{e} \quad \sin(m \sin \omega_m t)$$

possono essere espressi mediante uno sviluppo in serie di funzioni speciali, dette funzioni di Bessel di prima specie; si ha:

$$\begin{aligned} \cos(m \sin \omega_m t) = J_0(m) + 2J_2(m) \cos 2\omega_m t + 2J_4(m) \cos 4\omega_m t + \\ + 2J_6(m) \cos 6\omega_m t + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sin(m \sin \omega_m t) = 2J_1(m) \sin \omega_m t + 2J_3(m) \sin 3\omega_m t + \\ + 2J_5(m) \sin 5\omega_m t + 2J_7(m) \sin 7\omega_m t + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

in cui $J_0(m)$, $J_1(m)$, $J_2(m)$, $J_3(m)$, ..., $J_n(m)$, ... sono rispettivamente le funzioni di Bessel di ordine 0, 1, 2, 3, ..., n , ... della variabile indipendente (argomento) $m = \frac{\Delta f}{f_m}$, rappresentate graficamente in funzione di m nella figura 2.

Sostituendo gli sviluppi (8) e (9) nell'espressione (7) e facendo uso delle due seguenti relazioni trigonometriche:

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} \cos(x - y) - \frac{1}{2} \cos(x + y)$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cos(x - y) + \frac{1}{2} \cos(x + y)$$

l'espressione di $v(t)$ diventa infine:

$$\begin{aligned} v(t) = J_0(m) V_0 \cos \omega_0 t - J_1(m) V_0 \cos(\omega_0 - \omega_m)t + J_1(m) V_0 \cos(\omega_0 + \omega_m)t + \\ + J_2(m) V_0 \cos(\omega_0 - 2\omega_m)t + J_2(m) V_0 \cos(\omega_0 + 2\omega_m)t + \\ - J_3(m) V_0 \cos(\omega_0 - 3\omega_m)t + J_3(m) V_0 \cos(\omega_0 + 3\omega_m)t + \\ + \dots \end{aligned}$$

Il primo termine dello sviluppo di $v(t)$ rappresenta la portante e gli altri termini, in numero infinito, sono le «componenti laterali» le cui frequenze differiscono in più e in meno da quella portante di multipli interi della frequenza modulante. Le ampiezze delle componenti, compresa la portante, dipendono dal valore dell'indice di modulazione m e sono date dal prodotto dell'ampiezza V_0 della portante non modulata per la corrispon-

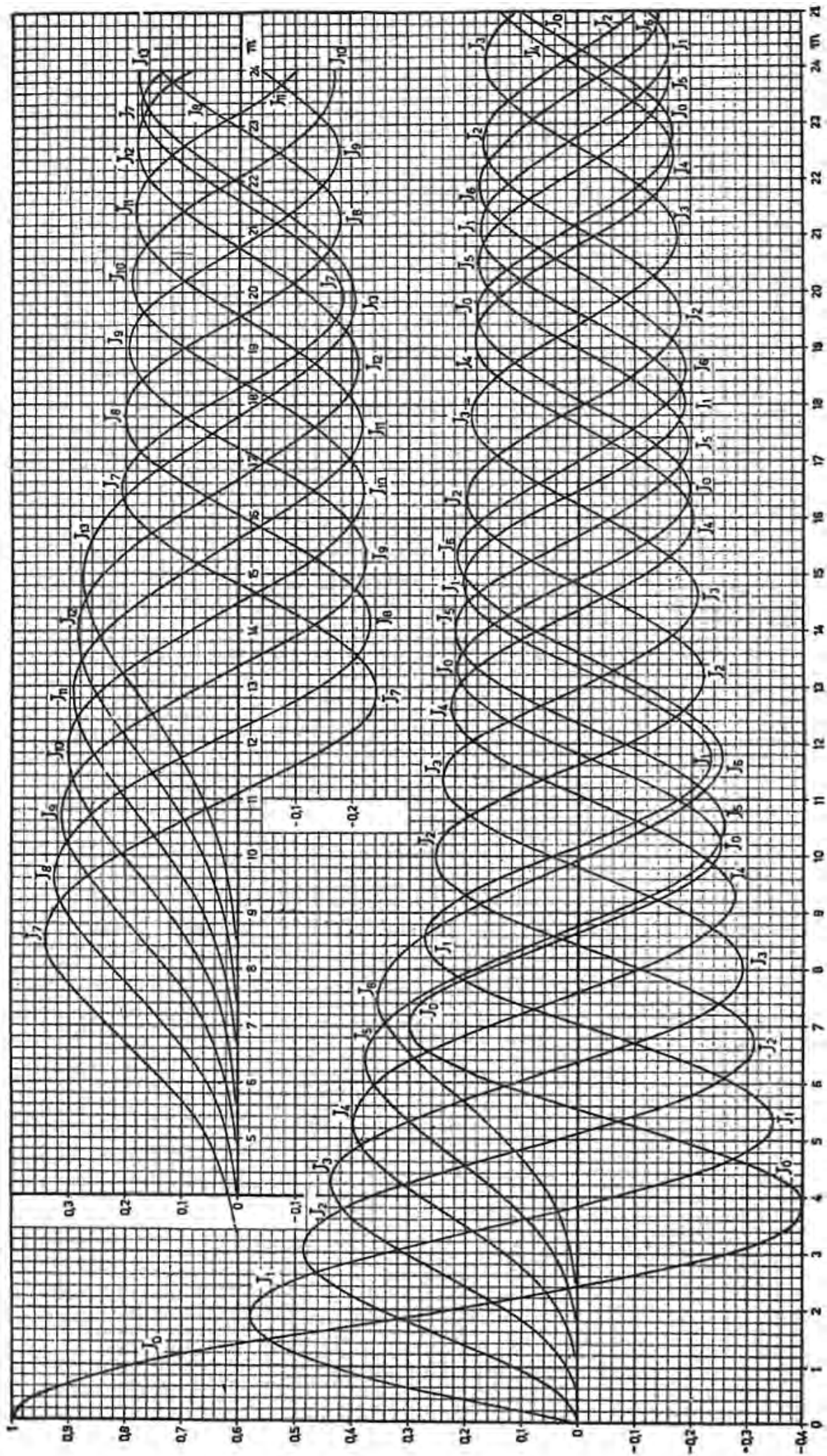


Fig. 2. - Funzioni di Bessel.

dente funzione di Bessel. La seguente tabella riassume la composizione dello spettro del segnale modulato.

Frequenza delle componenti	Ampiezza delle componenti
f_0	$J_0(m) V_0$
$f_0 - f_m$	$J_1(m) V_0$
$f_0 + f_m$	$J_1(m) V_0$
$f_0 - 2f_m$	$J_2(m) V_0$
$f_0 + 2f_m$	$J_2(m) V_0$
...	...
$f_0 - nf_m$	$J_n(m) V_0$
$f_0 + nf_m$	$J_n(m) V_0$
...	...

Dai diagrammi delle funzioni di Bessel si osserva che se l'indice m è minore di 0,5, soltanto la prima coppia di componenti laterali, di frequenza $f_0 - f_m$ e $f_0 + f_m$, ha ampiezza apprezzabile, mentre le altre componenti diventano importanti quando il valore di m aumenta. Inoltre, poiché $m = K_f V_m / \omega_m$ varia inversamente alla frequenza di modulazione, è evidente che la modulazione di frequenza produce un grande numero di componenti laterali quando la frequenza del segnale modulante è bassa (m grande) e poche componenti quando la frequenza di modulazione è alta (m piccolo).

La funzione $J_0(m)$ si annulla per particolari valori di m , il più piccolo dei quali è circa 2,40. Questo significa che quando la deviazione di frequenza Δf è uguale a 2,4 volte il valore della frequenza modulante la portante sparisce dallo spettro del segnale modulato in frequenza. Questo fatto permette di realizzare un metodo per la misura della deviazione di frequenza prodotta da una data ampiezza del segnale modulante e quindi è possibile, noto il valore della frequenza modulante, ottenere il valore della costante K_f caratteristica del modulatore: si applica il segnale modulato in frequenza all'ingresso di un filtro fortemente selettivo che lasci passare alla sua uscita soltanto la

NOTA: La funzione di Bessel di ordine n e di argomento m è definita dalla serie:

$$J_n(m) = \frac{m^n}{2^n \cdot n!} \left\{ 1 - \frac{m^2}{2(2n+2)} + \frac{m^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2)(2n+4)} - \frac{m^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \dots \right\}$$

Nel caso in cui $m \ll 1$, si può scrivere:

$$J_0(m) \approx 1 \quad J_1(m) \approx \frac{m}{2} \quad J_2(m) \approx \frac{m^2}{8} \quad J_3(m) \approx \frac{m^3}{48} \quad J_n \approx \frac{m^n}{2^n \cdot n!}$$

Nel caso in cui $m \gg n$, si può scrivere:

$$J_n(m) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi m}} \cos \left(m - \frac{2n+1}{4} \pi \right)$$

portante e si osserva l'annullamento di quest'ultima all'uscita del filtro in corrispondenza dei particolari valori di $m = K_f V_m / \omega_m$ che annullano la $J_0(m)$.

Aumentando, a partire dal valore zero, l'ampiezza del segnale modulante, il primo annullamento della portante si ha per una ampiezza V_m per cui $m = 2,4$ e quindi si ottiene:

$$\Delta f = 2,4 f_m \quad \text{e} \quad K_f = 2,4 \omega_m / V_m$$

I valori di m che annullano la funzione $J_0(m)$ sono: 2,4048; 5,520; 8,654; 11,792; 14,931; 18,071; 21,212; ecc. Questi valori sono chiamati «gli zeri di Bessel» della funzione $J_0(m)$.

Per esaminare la composizione e la forma dello spettro di un segnale modulato in frequenza con modulazione sinusoidale conviene riferirsi ad un particolare esempio. Consideriamo un segnale a radiofrequenza che sia modulato con una deviazione massima di frequenza Δf uguale, ad esempio, a 75 kHz da un segnale modulante di opportuna ampiezza e di frequenza uguale a 7,5 kHz. In tal caso l'indice di modulazione m è $75/7,5 = 10$. Per avere lo spettro del segnale modulato è necessario calcolare i valori delle varie funzioni di Bessel per $m = 10$. In figura 3(a) sono riportati i valori di $J_n(10)$ per diversi valori di n , in cui n assume, ovviamente, soltanto valori interi. La curva tratteggiata che si ottiene rappresenta il cosiddetto «involuppo dello spettro» poichè l'altezza delle varie righe dello spettro è proporzionale ai valori di $J_n(10)$. In figura 3(b) è rappresentato lo spettro di ampiezza del segnale modulato dell'esempio in considerazio-

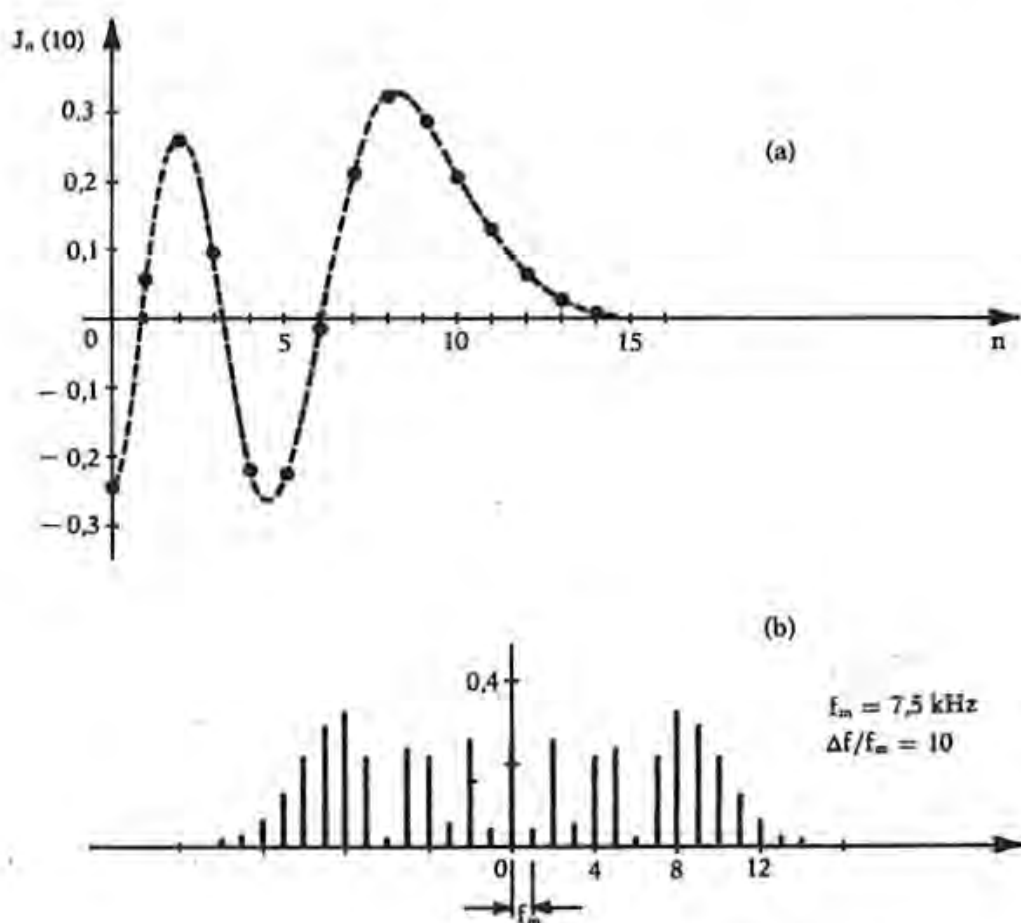


Fig. 3. - (a) Valori dei coefficienti $J_n(10)$ in funzione di n . (b) Spettro di un segnale modulato in frequenza con $m = 10$.

ne. Si osserva che i valori di $J_n(10)$ diminuiscono rapidamente verso lo zero per n maggiore di 10, ma hanno ancora valore apprezzabile fino a $n=14$; lo spettro si compone quindi, in pratica, di $2 \cdot 14 = 28$ righe oltre alla riga della portante (14 righe laterali da ambo i lati della riga della portante). La distanza fra le righe è uguale alla frequenza modulante f_m che, nell'esempio considerato, è di 7,5 kHz.

Teoricamente la larghezza dello spettro di un segnale modulato in frequenza è infinita, ma in pratica da un certo valore di n in poi l'ampiezza delle componenti diventa talmente piccola da potere, senza apprezzabile alterazione del segnale modulato, tralasciare tutte queste componenti. Nell'esempio fatto, lo spettro del segnale modulato occupa una larghezza di banda di $2 \cdot 14 \cdot 7,5 = 210$ kHz.

Come altro esempio, in figura 4 sono rappresentati i valori di $J_n(m)$ nel caso di $m = 25$ ed il corrispondente spettro delle ampiezze supponendo $f_m = 4$ kHz e quindi un valore di Δf uguale a $25 \cdot 4 = 100$ kHz.

In figura 5(a) e (b) sono riportate due serie di spettri; la serie in (a) è ottenuta fissando il valore della frequenza f_m del segnale modulante e dando a quest'ultimo diversi valori dell'ampiezza; la serie di spettri in (b) è ottenuta, invece, mantenendo costante l'ampiezza del segnale modulante con diversi valori della frequenza f_m . Negli spettri in (a) la distanza fra le righe, uguale a f_m , è costante mentre è diversa, per ciascuno spettro, la massima deviazione di frequenza Δf che subisce il segnale modulato: $\Delta f = m \cdot f_m$; si osserva chiaramente l'aumento del numero delle righe laterali all'aumentare dell'indice m . Negli spettri in (b) la deviazione massima di frequenza Δf che subisce il segnale modulato è costante, mentre è diversa per ciascuno spettro la distanza fra le righe essendo diversa f_m ; si osserva che la larghezza di banda totale richiesta per includere tutte le righe laterali significative (cioè di ampiezza apprezzabile)

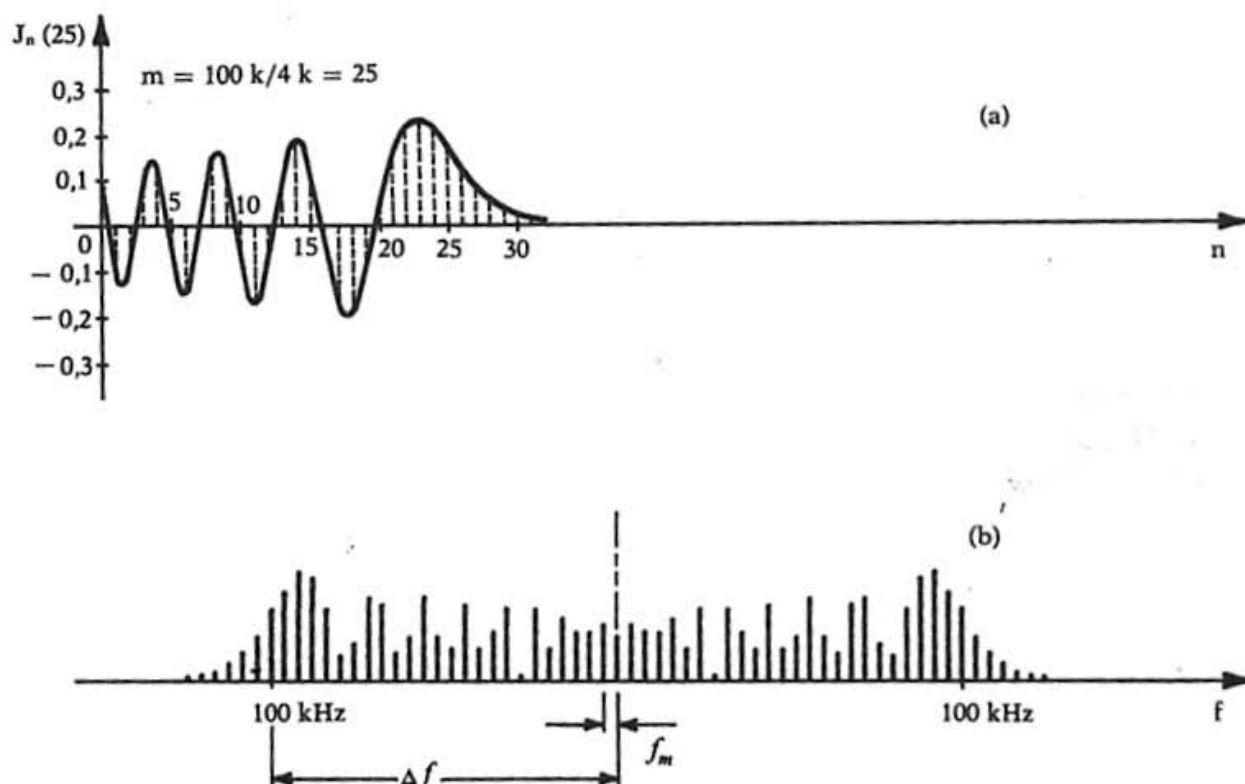


Fig. 4. - (a) Valori delle funzioni di Bessel per $m=25$; (b) spettro del segnale modulato con deviazione $\Delta f = 100$ kHz.

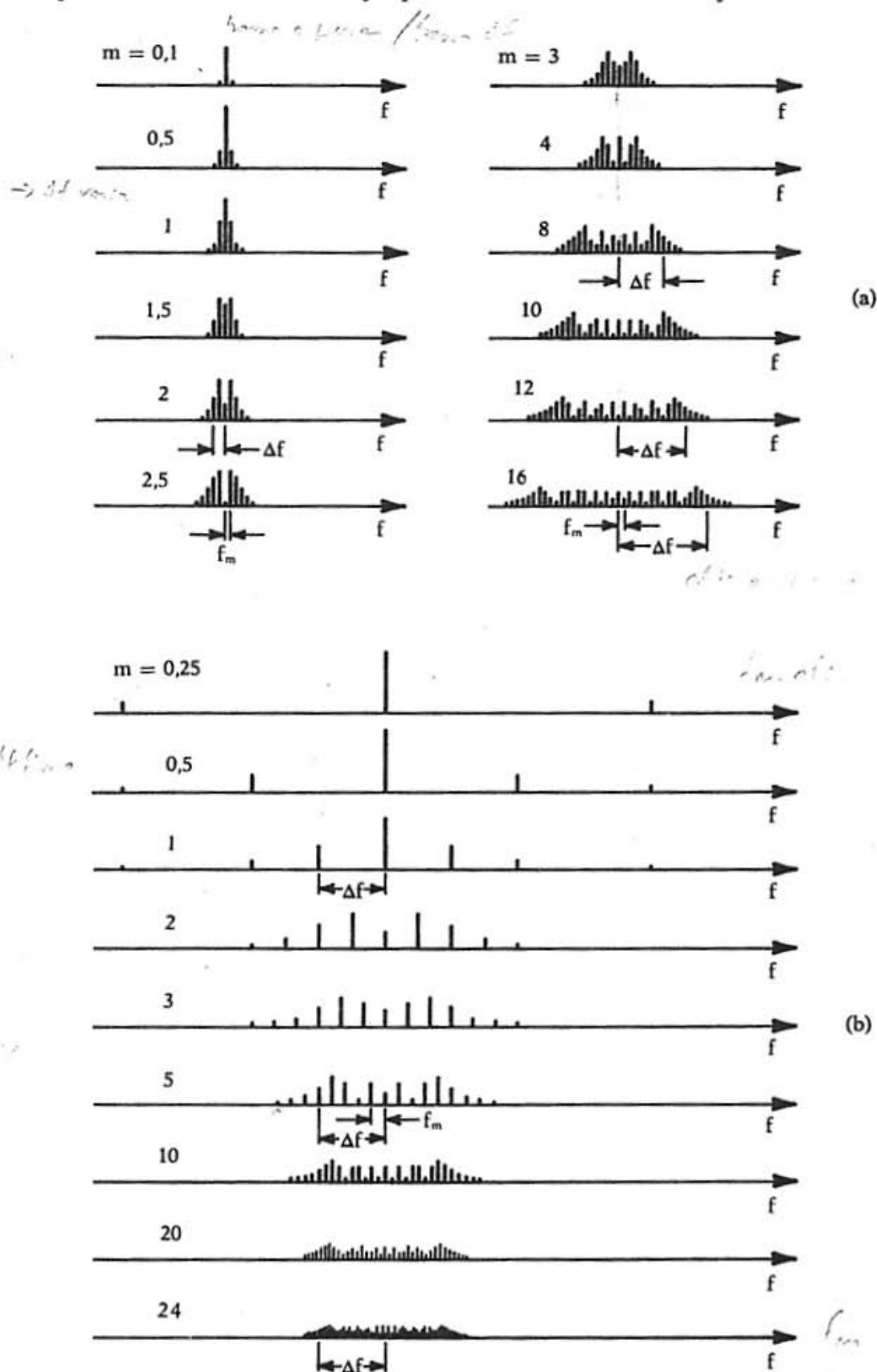


Fig. 5. - Spettri del segnale modulato in frequenza: in (a), con frequenza modulante costante, ma per diversi valori dell'ampiezza del segnale modulante; in (b), con ampiezza del segnale modulante costante, ma con diversi valori della sua frequenza.

diminuisce alquanto con l'aumentare dell'indice m . Si osserva, inoltre, che, eccetto per valori di m piccoli, quasi tutte le righe significative dello spettro sono contenute entro un intervallo uguale a $2 \Delta f$.

3. Larghezza di banda di un segnale modulato in frequenza

Dallo sviluppo dell'espressione del segnale modulato in frequenza con modulazione sinusoidale risulta che le componenti del segnale hanno frequenze separate fra loro di un intervallo uguale alla frequenza di modulazione f_m , come si ha nella modulazione di ampiezza, ma il loro numero, anziché essere limitato a tre come nella modulazione di ampiezza sinusoidale, è invece teoricamente infinito. In pratica, tuttavia, hanno solo importanza quelle componenti la cui ampiezza non è inferiore ad una certa frazione dell'ampiezza V_0 della portante in assenza di modulazione. Si può quindi parlare di *larghezza di banda* B del segnale modulato in frequenza, compresa fra i limiti $f_0 - N f_m$ e $f_0 + N f_m$, cioè: $B = 2 N f_m$ in cui N è il numero di componenti laterali di ampiezza tale da essere considerate significative. Per calcolare la larghezza di banda occorre, perciò, conoscere il valore di N per ogni valore che può assumere l'indice di modulazione m . Il valore di N viene calcolato definendo la larghezza di banda B come la larghezza minima di banda entro cui sono contenute tutte le righe dello spettro corrispondenti alle componenti che hanno l'ampiezza maggiore dell'1% dell'ampiezza V_0 della portante non modulata, scartando tutte le componenti marginali dello spettro le cui ampiezze $J_n(m) V_0$ sono inferiori, da un certo valore di $n = N + 1$ in poi, a $0,01 V_0$, per le quali è, quindi, $J_n(m) < 0,01$.

Nella seguente tabella è riportato il numero di righe laterali utili N per diversi valori dell'indice m .

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N	3	4	6	7	8	9	10	11	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Si osserva, in particolare, che per $m=5$, il numero N di righe laterali deve essere uguale a 8 [infatti è $J_9(5) = 0,0055 < 0,01$] e quindi in tal caso la larghezza di banda B è: $B = 2 \cdot 8 \cdot f_m = 16 f_m$. È anche possibile ricavare il valore di N per un dato m servendosi della seguente formula empirica:

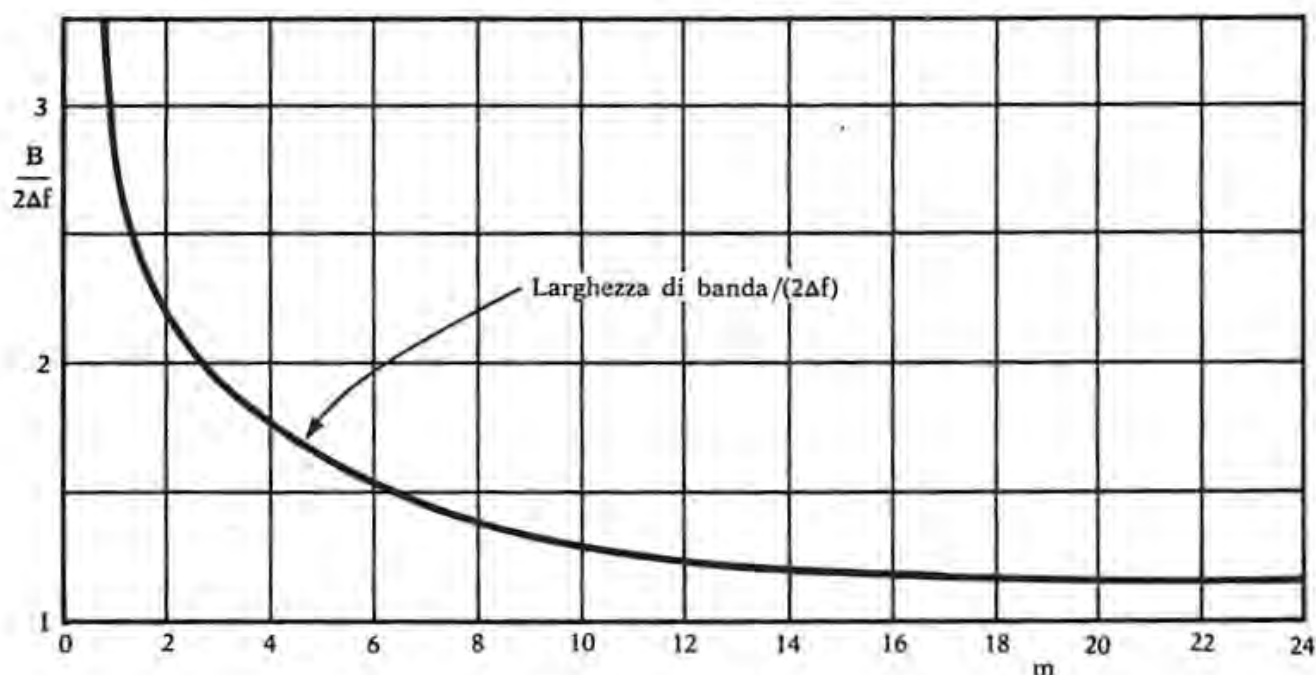
$$N = m + 2,4 m^{0,27} - 1 \quad (10)$$

Per valori di m molto grandi ($m > 100$) il numero N di componenti laterali significative tende ad essere uguale a m e la larghezza di banda B diventa praticamente quasi uguale a:

$$2 m f_m = 2 (\Delta f / f_m) f_m = 2 \Delta f$$

cioè quasi uguale al doppio della massima deviazione di frequenza del segnale modulato. Per valori di m bassi e minori di 10, invece, il numero di righe significative dello spettro che cadono al di fuori dell'intervallo $2 \Delta f$ cresce piuttosto rapidamente al diminuire di m e la larghezza di banda B diventa alquanto più grande di $2 \Delta f$. La larghezza di banda è, pertanto, sempre maggiore del doppio della massima deviazione di frequenza, pur avvicinandosi al valore $2 \Delta f$ per grandi valori di m . In base alla relazione empirica (10) si ha, infatti:

$$B = 2 N f_m = 2 (m + 2,4 m^{0,27} - 1) f_m = 2 \Delta f + 2 (2,4 m^{0,27} - 1) f_m$$

Fig. 6. - Rapporto $B/2\Delta f$ in funzione dell'indice $m = \Delta f/f_m$.

Per grandi valori di m si può verificare che il termine $2(2,4 m^{0,27} - 1)f_m$ diventa piccolo e praticamente trascurabile rispetto a $2\Delta f$.

In figura 6 è rappresentato il rapporto $B/2\Delta f$ in funzione dell'indice m : per grandi valori di m tale rapporto tende verso il valore 1, mentre per i piccoli valori di m cresce notevolmente.

Uno dei vantaggi principali dei sistemi a modulazione di frequenza consiste nel fatto che, in certe condizioni, tali sistemi presentano, rispetto a quelli a modulazione di ampiezza, una maggiore indipendenza dalle perturbazioni che derivano sia dall'interferenza fra stazioni trasmittenti diverse, sia dai disturbi (comunemente chiamati con la denominazione di «rumore») di origine esterna e interna agli apparati. Il comportamento di un sistema di comunicazioni nei riguardi dei disturbi è espresso mediante il cosiddetto «rapporto segnale/disturbo» o «rapporto segnale/rumore» all'uscita del ricevitore(*).

Nella modulazione di frequenza, il rapporto segnale/disturbo all'uscita del ricevitore è tanto più grande quanto maggiore è la deviazione di frequenza Δf del segnale modulato e pertanto, per ottenere i vantaggi nei riguardi dei disturbi, è necessario usare

(*) Un qualunque disturbo provoca una variazione istantanea sia dell'ampiezza sia della frequenza del segnale. Le variazioni di ampiezza nel ricevitore F.M. vengono eliminate da un circuito limitatore e interessano quindi solo le variazioni della frequenza. Nella modulazione di ampiezza, un eventuale disturbo che produce una variazione di ampiezza del segnale può essere reso «inoffensivo» aumentando l'ampiezza del segnale, cioè aumentando la potenza in trasmissione. Infatti nel ricevitore, se il segnale ricevuto è forte, entra in azione il C.A.G. che riduce di molto la sensibilità del ricevitore, per cui la tensione di disturbo, data la bassa amplificazione, non è più in grado di produrre un rumore udibile. (In A.M. quando si ricevono segnali molto deboli si sente un notevole rumore di fondo che scompare completamente quando si riceve un segnale di forte intensità, per la conseguente azione del C.A.G.).

Nella modulazione di frequenza, per rendere inefficace l'effetto del disturbo che produce una variazione di frequenza del segnale, non è necessario aumentare la potenza di trasmissione, ma basta aumentare la deviazione di frequenza Δf prodotta dal segnale di informazione modulante, che deve essere più grande di quella prodotta dal disturbo. Infatti nel ricevitore, dopo la demodulazione, l'ampiezza del segnale di bassa frequenza utile è proporzionale alla deviazione di frequenza del segnale ricevuto.

valori della deviazione di frequenza i più grandi possibili; tuttavia, per non allargare troppo la larghezza di banda B , occorre che Δf non superi un certo valore massimo ammissibile. Il valore della deviazione di frequenza massima, risultante dal compromesso fra diverse esigenze, è stato fissato a 75 kHz per la radiodiffusione F.M. commerciale.

Per ottenere, inoltre, una fedele riproduzione dei suoni, nei sistemi di radiodiffusione la massima frequenza audio modulante è stata scelta di 15 kHz. La larghezza di canale per la trasmissione a modulazione di frequenza è stata fissata a 200 kHz; infatti, con $\Delta f = 75$ kHz è $2\Delta f = 150$ kHz e aggiungendo un margine di 25 kHz a ciascuna estremità della banda, per comprendere anche le componenti utili le cui frequenze cadono al di fuori dell'intervallo $2\Delta f$, si arriva a fissare per B il valore di 200 kHz.

Dal diagramma di figura 6 che fornisce il rapporto $B/2\Delta f$ si ricava che quando l'indice di modulazione m è inferiore a 10, con un valore di Δf uguale a 75 kHz, la larghezza di banda diventa maggiore dei 200 kHz ammessi. Questo si verifica, sempre supponendo $\Delta f = 75$ kHz, per frequenze modulanti maggiori di 7,5 kHz. Tuttavia, occorre notare che, nelle ordinarie radiotrasmissioni, l'ampiezza delle componenti del segnale audio modulante aventi frequenze maggiori di 7,5 kHz è considerevolmente più piccola di quella che si ha alle frequenze delle note medie e basse. Di conseguenza, essendo Δf proporzionale all'ampiezza, le ampiezze delle componenti del segnale modulante aventi frequenze più alte producono deviazioni di frequenza sostanzialmente inferiori a quella massima ammissibile di 75 kHz e a queste frequenze audio il sistema lavora entro una banda più stretta di quella permessa. Infatti, la larghezza di banda è talmente inferiore a quella permessa che si è trovato conveniente includere delle reti di *preenfas*i nel trasmettitore, le quali producono una esaltazione dei toni alti del segnale audio prima di effettuare la modulazione di frequenza; le componenti a frequenza più alta del segnale modulante, che ordinariamente non contengono molta energia, vengono esaltate al di sopra del loro livello naturale. Ovviamente, per conservare la fedeltà dei suoni riprodotti, è necessario che nel ricevitore vi sia una *rete di deenfasi* con una curva di risposta in frequenza esattamente complementare a quella della rete di *preenfas*i in trasmissione, in modo da riottenere la originaria distribuzione di energia nello spettro del segnale di bassa frequenza, riportando le ampiezze delle componenti ad alta frequenza del segnale audio, accentuate in trasmissione, di nuovo al loro livello naturale. L'uso della rete di *deenfas*i nel ricevitore riduce il rumore, che si manifesta prevalentemente sui toni alti e, come si esaminerà meglio in seguito, permette di migliorare il rapporto segnale-disturbo all'uscita del ricevitore.

La larghezza di canale di una trasmissione a modulazione di frequenza, uguale a 200 kHz, è notevolmente più grande di quella per una trasmissione a modulazione di ampiezza; ne risulta l'impossibilità pratica di realizzare trasmissioni a modulazione di frequenza nel campo delle onde medie e corte, perché, a parte le difficoltà tecniche, questi campi risulterebbero coperti da pochi canali adiacenti. La modulazione di frequenza si usa soltanto nel campo delle onde V.H.F. e U.H.F., rispettivamente da 30 a 300 MHz e da 300 a 3000 MHz e per i collegamenti in ponte radio.

Per la radiodiffusione si usa la gamma che è compresa fra 88 MHz e 108 MHz.

Composizione dello spettro e larghezza di banda di un segnale modulato in frequenza con un segnale modulante di forma qualsiasi

Quando il segnale modulante è di forma qualunque e, quindi, costituito da più componenti sinusoidali, la determinazione dello spettro del segnale modulato in

frequenza è molto difficoltosa poiché la modulazione prodotta da una componente del segnale modulante *non* è indipendente dalla modulazione dovuta ad un'altra componente del segnale modulante stesso, come si ha, invece, nella modulazione di ampiezza. Nel segnale modulato appaiono componenti addizionali le cui frequenze corrispondono alla somma e alla differenza di ciascuna frequenza modulante e delle sue armoniche con tutte le altre frequenze modulanti e loro armoniche. Se, per esempio, il segnale modulante è:

$$v_m(t) = V_{m1} \cos \omega_{m1}t + V_{m2} \cos \omega_{m2}t \quad (11)$$

oltre alle componenti che si hanno supponendo che ciascun termine della (11) esegua la modulazione separatamente, con indice di modulazione rispettivamente:

$$m_1 = K_f V_{m1} / \omega_{m1} \quad \text{e} \quad m_2 = K_f V_{m2} / \omega_{m2}$$

il segnale modulato in frequenza ha anche componenti aventi frequenze date dalla relazione:

$$f_0 \pm p f_{m1} \pm q f_{m2}$$

dette «frequenze di combinazione», in cui p e q assumono tutti i possibili valori interi; le ampiezze di queste componenti addizionali sono date dai prodotti:

$$J_p(m_1) \cdot J_q(m_2) \cdot V_0$$

come risulta dalla seguente tabella:

Componente	Frequenza della componente	Ampiezza della componente
Portante	f_0	$J_0(m_1) J_0(m_2) V_0$
Bande laterali dovute alla f_{m1}	$f_0 \pm f_{m1}$	$J_1(m_1) J_0(m_2) V_0$
	$f_0 \pm 2 f_{m1}$	$J_2(m_1) J_0(m_2) V_0$

Bande laterali dovute alla f_{m2}	$f_0 \pm f_{m2}$	$J_0(m_1) J_1(m_2) V_0$
	$f_0 \pm 2 f_{m2}$	$J_0(m_1) J_2(m_2) V_0$

Bande laterali di combinazione	$f_0 \pm f_{m1} \pm f_{m2}$	$J_1(m_1) J_1(m_2) V_0$
	$f_0 \pm f_{m1} \pm 2 f_{m2}$	$J_1(m_1) J_2(m_2) V_0$
	$f_0 \pm 2 f_{m1} \pm f_{m2}$	$J_2(m_1) J_1(m_2) V_0$

Quando il segnale modulante ha una forma qualunque, la distribuzione delle righe dello spettro del segnale modulato in frequenza non è, in generale, simmetrica rispetto alla riga della portante, a differenza della modulazione di ampiezza in cui tale simmetria esiste sempre. Come esempio, in figura 7 è rappresentato lo spettro del segnale modulato in frequenza con un segnale modulante costituito da due componenti supposte, per semplicità, aventi la stessa ampiezza, ma frequenza una doppia dell'altra ($f_{m2} = 2 f_{m1}$) e i cui rispettivi indici di modulazione siano $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$. Appare evidente la *asimmetria* dello spettro rispetto alla portante.

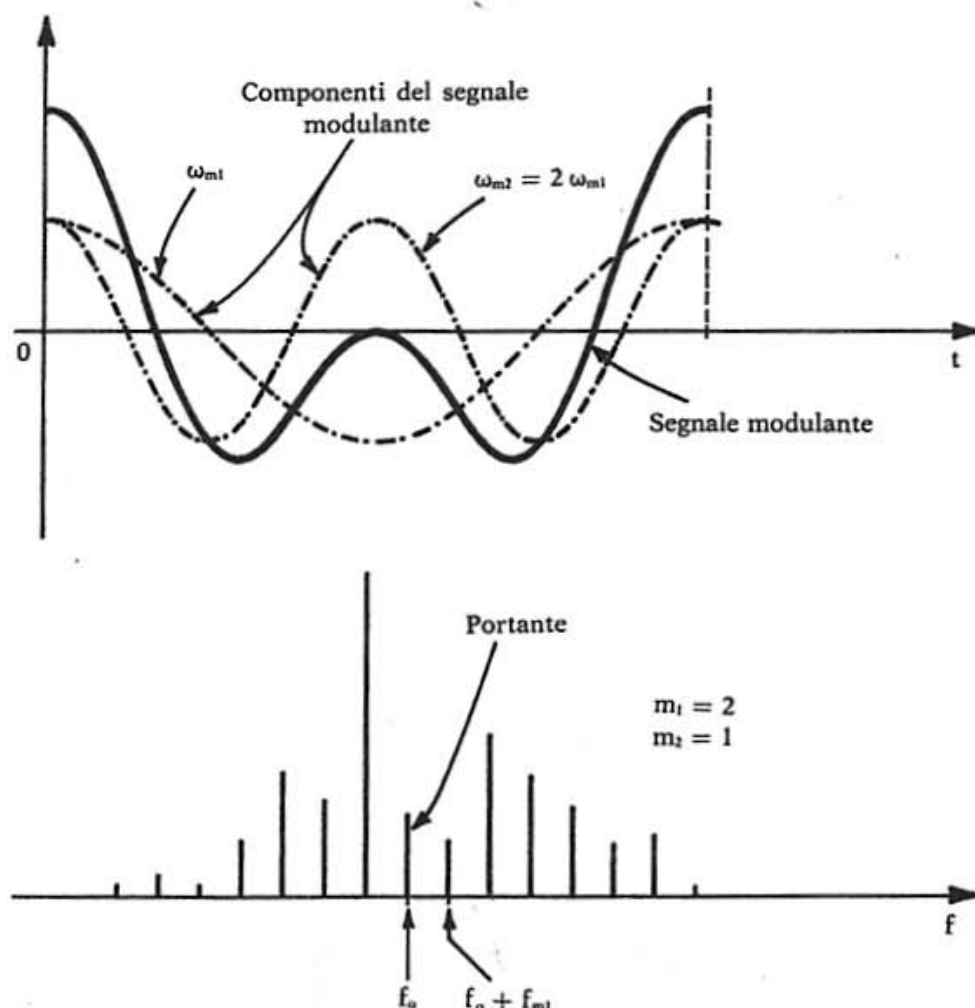


Fig. 7. - Segnale modulante composto da due componenti sinusoidali e spettro corrispondente del segnale modulato in frequenza.

Quando il segnale modulante è di forma qualsiasi, il numero di componenti addizionali presenti nel segnale modulato cresce enormemente; ad esempio, se il segnale modulante è:

$$v_m(t) = V_{m1} \cos \omega_{m1}t + V_{m2} \cos \omega_{m2}t + V_{m3} \cos \omega_{m3}t$$

le componenti del segnale modulato hanno frequenze date dall'espressione:

$$f_0 \pm p f_{m1} \pm q f_{m2} \pm r f_{m3}$$

in cui p , q e r assumono tutti i possibili valori interi. Tuttavia, l'enorme aumento delle righe laterali dello spettro non comporta un apprezzabile allargamento della banda di frequenze occupata dal segnale modulato. L'indice di modulazione *effettivo* relativo a ciascuna componente del segnale modulante subisce, infatti, in generale, una riduzione se la modulazione totale è suddivisa fra più componenti modulanti. In realtà, se la massima deviazione di frequenza prodotta da un segnale modulante di forma complessa è fissata, l'energia del segnale modulato resta tutt'al più concentrata in una banda più stretta di quella che si avrebbe con modulazione sinusoidale, a parità di deviazione di frequenza. La larghezza di banda richiesta per una trasmissione a modulazione di frequenza può essere approssimativamente calcolata con la *relazione di Carson*:

$$B \simeq 2(\Delta f + f_{m\max})$$

in cui Δf è la massima deviazione di frequenza ($\Delta f = 75$ kHz) e $f_{m\max}$ è la più alta frequenza contenuta nel segnale modulante di forma complessa. Con $\Delta f = 75$ kHz e $f_{m\max} = 15$ kHz si ha: $B = 2(75 + 15) = 180$ kHz. Aggiungendo un margine ad entrambe le estremità della banda, si è fissato per B il valore di 200 kHz, come si è già accennato.

Occorre notare che non converrebbe assumere per $f_{m\max}$ il valore di 4,5 kHz, come nei sistemi a modulazione di ampiezza, al fine di ridurre la larghezza di canale del segnale modulato in frequenza. Infatti, ne risulterebbe una scarsa fedeltà nella riproduzione dei suoni e non si avrebbe una efficace riduzione della larghezza di banda che, da 180 kHz con $f_{m\max} = 15$ kHz, scenderebbe appena, con $f_{m\max} = 4,5$ kHz, al valore di $2(75 + 4,5) = 159$ kHz.

4. Rappresentazione vettoriale di un segnale modulato in frequenza

Nella modulazione di frequenza l'ampiezza del segnale modulato rimane costante durante il processo di modulazione e uguale a quella della portante non modulata V_0 . La modulazione altera la frequenza istantanea del segnale, il quale può essere rappresentato vettorialmente mediante un vettore ruotante di lunghezza fissa, ma di velocità angolare variabile con la legge del segnale modulante, rispetto alla velocità angolare costante del vettore rappresentativo del segnale non modulato.

Riferendosi ad un vettore ruotante con velocità angolare costante ω_0 , rappresentante il segnale non modulato (vettore non modulato) e ad un vettore della stessa lunghezza, ma ruotante con velocità variabile, rappresentativo del segnale modulato in frequenza (vettore modulato), si può constatare che nel semiciclo positivo del segnale modulante il vettore modulato ruota con velocità angolare maggiore di quella del vettore non modulato, mentre durante il semiciclo negativo la velocità angolare è inferiore a quella del vettore non modulato. Ne risulta, di conseguenza, che nei semiperiodi in cui il segnale modulante $v_m(t) = V_m \cos \omega_m t$ è decrescente, la deviazione istantanea di fase $\theta(t) = m \sin \omega_m t$ del segnale modulato è positiva e il vettore modulato «sorpasa», durante la rotazione, il vettore non modulato; invece, nei semiperiodi in cui il segnale modulante è crescente, la deviazione di fase $\theta(t)$ è negativa e il vettore modulato viene «sorpasato» da quello non modulato. In pratica è più comodo pensare il vettore non modulato fisso nel piano (cioè solidale con un piano ruotante a velocità angolare ω_0); allora il vettore modulato oscilla pendolarmente intorno alla posizione di quello non modulato con un ritmo pari alla frequenza del segnale modulante e la sua punta si muove su una circonferenza di raggio uguale alla sua lunghezza V_0 . In un certo istante del ciclo di modulazione, l'angolo fra i due vettori è $\theta(t) = m \sin \omega_m t$ e la deviazione angolare massima è uguale, in radianti, all'indice di modulazione m . In figura 8 è rappresentato il vettore modulato in diversi istanti del ciclo di modulazione nel caso in cui $m = 0,7$, corrispondente ad una deviazione angolare massima θ_{\max} di $40^\circ 06'$.

Nel caso in cui m è alquanto maggiore di 1, l'oscillazione pendolare del vettore modulato intorno a quello non modulato non si limita ad una frazione di angolo piatto o giro, come nel caso di figura 8, ma comprende diversi giri completi del vettore nei due sensi di rotazione; ad esempio, per $m = 20$, si ha una elongazione angolare massima di 20 radianti, cioè di $1146^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 66^\circ$.

Il vettore modulato oscillante può, a sua volta, essere considerato come risultante, istante per istante durante il ciclo di modulazione, da una somma vettoriale di un

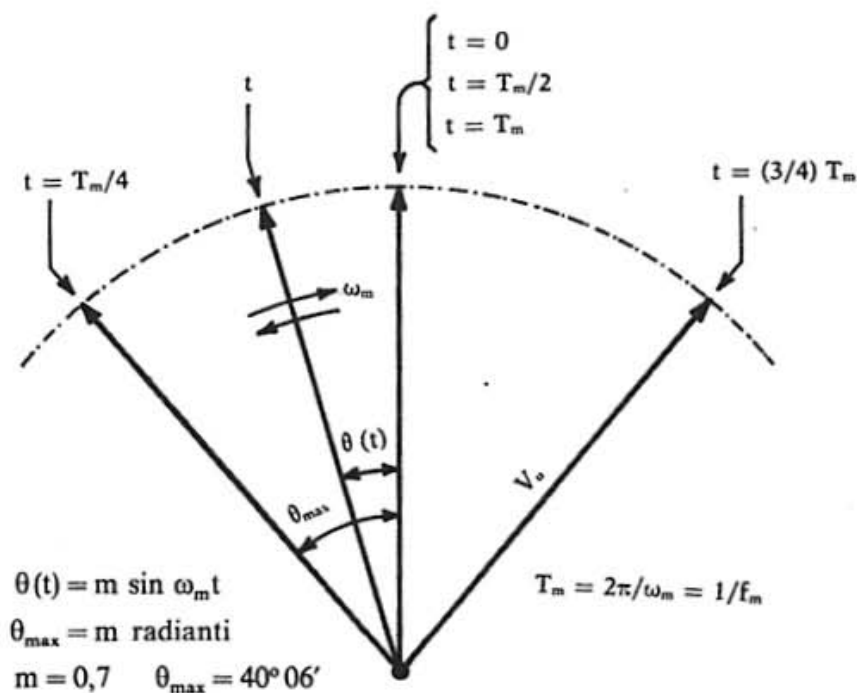


Fig. 8. - Rappresentazione vettoriale di un segnale modulato in frequenza.

numero teoricamente infinito di vettori, come risulta dallo sviluppo del segnale modulato in frequenza che si può scrivere nella seguente maniera:

$$\begin{aligned}
 v(t) = & J_0(m) V_0 \cos \omega_0 t - 2 J_1(m) V_0 \sin \omega_m t \cdot \sin \omega_0 t + \\
 & + 2 J_2(m) V_0 \cos 2 \omega_m t \cdot \cos \omega_0 t - 2 J_3(m) V_0 \sin 3 \omega_m t \cdot \sin \omega_0 t + \\
 & + 2 J_4(m) V_0 \cos 4 \omega_m t \cdot \cos \omega_0 t + \dots
 \end{aligned}$$

Il primo termine dello sviluppo è la portante in presenza di modulazione e può essere rappresentato su un piano ruotante con velocità angolare ω_0 mediante un vettore verticale la cui lunghezza è costante durante il ciclo di modulazione e uguale a $J_0(m) V_0$. Il secondo termine è rappresentato, sempre sullo stesso piano ruotante, da un vettore la cui lunghezza pulsa al ritmo della modulazione e, in un istante qualsiasi del ciclo del segnale modulante, è uguale a $2 J_1(m) V_0 \sin \omega_m t$; tale vettore di lunghezza variabile è, però, ortogonale al precedente e quindi orizzontale, poiché nel termine relativo dello sviluppo appare $\sin \omega_0 t$ anziché $\cos \omega_0 t$. Il terzo termine dello sviluppo è rappresentato da un vettore verticale la cui lunghezza pulsa con una frequenza doppia di quella del segnale modulante e con legge: $2 J_2(m) V_0 \cos 2 \omega_m t$. Analogamente si possono rappresentare i termini successivi dello sviluppo mediante vettori alternativamente orizzontali e verticali le cui lunghezze variano con frequenze uguali a multipli interi della frequenza del segnale modulante durante un ciclo di quest'ultimo.

Durante il ciclo di modulazione, la poligonale dei vettori si deforma poiché i vettori, eccettuato il primo di lunghezza fissa $J_0(m) V_0$, variano nella loro lunghezza che, in alcuni istanti, diventa nulla; la deformazione della poligonale è, però, tale da dar luogo, istante per istante, ad un vettore risultante (vettore modulato) che conserva inalterata la sua lunghezza, pur oscillando intorno al vettore non modulato di lunghezza V_0 .

5. Modulazione di fase

Come si è già esposto nel capitolo III, la modulazione di fase si ottiene variando l'angolo di fase θ del segnale da modulare, che possiamo scrivere nella forma:

$$v(t) = V_0 \cos(\omega_0 t + \theta)$$

in modo che la deviazione istantanea di fase, rispetto al valore θ_0 in assenza di modulazione, sia direttamente proporzionale al valore istantaneo del segnale modulante $v_m(t)$. Si fa in modo, quindi, che sia:

$$\theta(t) = \theta_0 + K_p v_m(t)$$

in cui K_p è una costante di proporzionalità caratteristica del modulatore di fase. Il valore di θ_0 è inessenziale e può, per semplicità, essere assunto uguale a zero. La fase complessiva istantanea $\varphi(t)$ è allora:

$$\varphi(t) = \omega_0 t + K_p v_m(t)$$

e l'espressione del segnale modulato in fase è:

$$v(t) = V_0 \cos \varphi(t) = V_0 \cos [\omega_0 t + K_p v_m(t)]$$

Durante il processo di modulazione l'ampiezza del segnale modulato rimane costante al valore V_0 .

Si rimanda al capitolo III per l'osservazione delle forme d'onda del segnale modulato in fase con diversi tipi di segnale modulante.

Se il segnale modulante è di forma sinusoidale, assumendo per esso l'espressione

$$v_m(t) = V_m \sin \omega_m t$$

il segnale modulato in fase è dato dalla relazione:

$$v(t) = V_0 \cos(\omega_0 t + K_p V_m \sin \omega_m t)$$

La quantità $K_p V_m$ rappresenta la massima deviazione di fase del segnale modulato durante il ciclo di modulazione; in seguito verrà indicata con $\Delta\theta$. È quindi:

$$v(t) = V_0 \cos(\omega_0 t + \Delta\theta \sin \omega_m t)$$

Per ottenere la frequenza istantanea f del segnale modulato in fase occorre derivare rispetto al tempo l'espressione della fase complessiva istantanea $\varphi(t)$; si ha:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_0 + \Delta\theta \cdot \omega_m \cos \omega_m t$$

e quindi la frequenza istantanea è:

$$f = f_0 + \Delta\theta \cdot f_m \cos \omega_m t$$

La quantità $\Delta\theta \cdot f_m = \Delta f$ è la massima deviazione di frequenza che subisce il segnale modulato in fase; essa dipende sia dall'ampiezza, sia dalla frequenza del segnale modulante e rappresenta «l'indice equivalente di modulazione di frequenza nella modulazione di fase».

Per eseguire un confronto fra la modulazione di frequenza e la modulazione di fase riferiamoci alla seguente tabella riassuntiva delle espressioni dei segnali modulanti e modulati:

Tipo di modulazione	Segnale modulante	Segnale modulato
Modulazione di frequenza	$V_m \cos \omega_m t$	$V_0 \cos \left(\omega_0 t + \frac{\Delta f}{f_m} \sin \omega_m t \right)$
Modulazione di fase	$V_m \sin \omega_m t$	$V_0 \cos (\omega_0 t + \Delta \theta \sin \omega_m t)$
	$\Delta f/f_m = K_f V_m/\omega_m = m$	$K_p V_m = \Delta \theta$

Confrontando le due espressioni per il segnale modulato in frequenza e per quello modulato in fase si osserva che esse sono formalmente identiche. Pertanto, la trattazione già fatta per lo spettro di frequenze del segnale modulato in frequenza può essere estesa al segnale modulato in fase. Per la modulazione di frequenza, l'argomento delle funzioni di Bessel è:

$$m = \Delta f/f_m = K_f V_m/\omega_m$$

mentre per la modulazione di fase l'argomento è $\Delta \theta = K_p V_m$. Perciò, lo spettro di frequenze di un segnale modulato in fase con una deviazione massima di fase $\Delta \theta$, ad esempio, uguale a 12 radianti, è identico, come composizione, allo spettro di un segnale modulato in frequenza avente un indice equivalente di modulazione di fase $m = \Delta f/f_m$ uguale a 12.

Esiste, tuttavia, una significativa differenza fra un segnale modulato in frequenza e un segnale modulato in fase e questa differenza sta nei rispettivi argomenti delle funzioni di Bessel. Nella modulazione di frequenza l'argomento delle funzioni di Bessel è dipendente sia dall'ampiezza, sia dalla frequenza del segnale modulante: $m = \Delta f/f_m$, mentre nella modulazione di fase l'argomento è funzione soltanto dell'ampiezza del segnale modulante ed è indipendente dalla sua frequenza: $\Delta \theta = K_p V_m$.

Nella modulazione di fase, qualunque sia la frequenza del segnale modulante, se quest'ultimo ha sempre la stessa ampiezza si ottiene lo stesso valore di $\Delta \theta$; ne risulta che, per un certo valore di V_m , qualunque sia f_m , il numero di righe dello spettro è lo stesso in ciascun caso, mentre è diversa la separazione fra le righe la quale dipende dalla frequenza modulante. In figura 9(a), (b) e (c) sono rappresentati tre spettri di frequenza del segnale modulato in fase, per lo stesso valore di V_m , e quindi di $\Delta \theta$, che in figura è stato supposto uguale a 12, ma per tre diverse frequenze modulanti. Si vede come il numero di righe che compongono lo spettro sia lo stesso per i tre casi (a), (b) e (c), mentre la distanza fra le righe è diversa. Nella stessa figura 9, in (d), (e) e (f), sono rappresentati, a scopo di confronto, tre spettri di un segnale modulato in frequenza, ottenuti usando le stesse frequenze modulanti come per i casi (a), (b) e (c) relativi alla modulazione di fase. Si vede che lo spettro in (a), relativo al segnale modulato in fase con $\Delta \theta = 12$ e $f_m = 1$ kHz, è identico allo spettro in (d) del segnale modulato in frequenza con $m = 12$ e $f_m = 1$ kHz e la larghezza di banda dei due spettri è di 32 kHz.

Riferendosi sempre alla figura 9, si supponga ora di lasciare costante l'ampiezza del segnale modulante e di raddoppiare la sua frequenza, portandola da 1 kHz a 2 kHz. [Casi (b) ed (e) in fig. 9]. Nella modulazione di fase, l'argomento delle funzioni di Bessel rimane inalterato al valore $\Delta \theta = 12$ e quindi rimane invariato il numero di righe dello spettro, pur raddoppiando la distanza fra le righe, come è rappresentato in (b); la larghezza di banda diventa, allora, di 64 kHz, cioè doppia di quella che si aveva in (a).

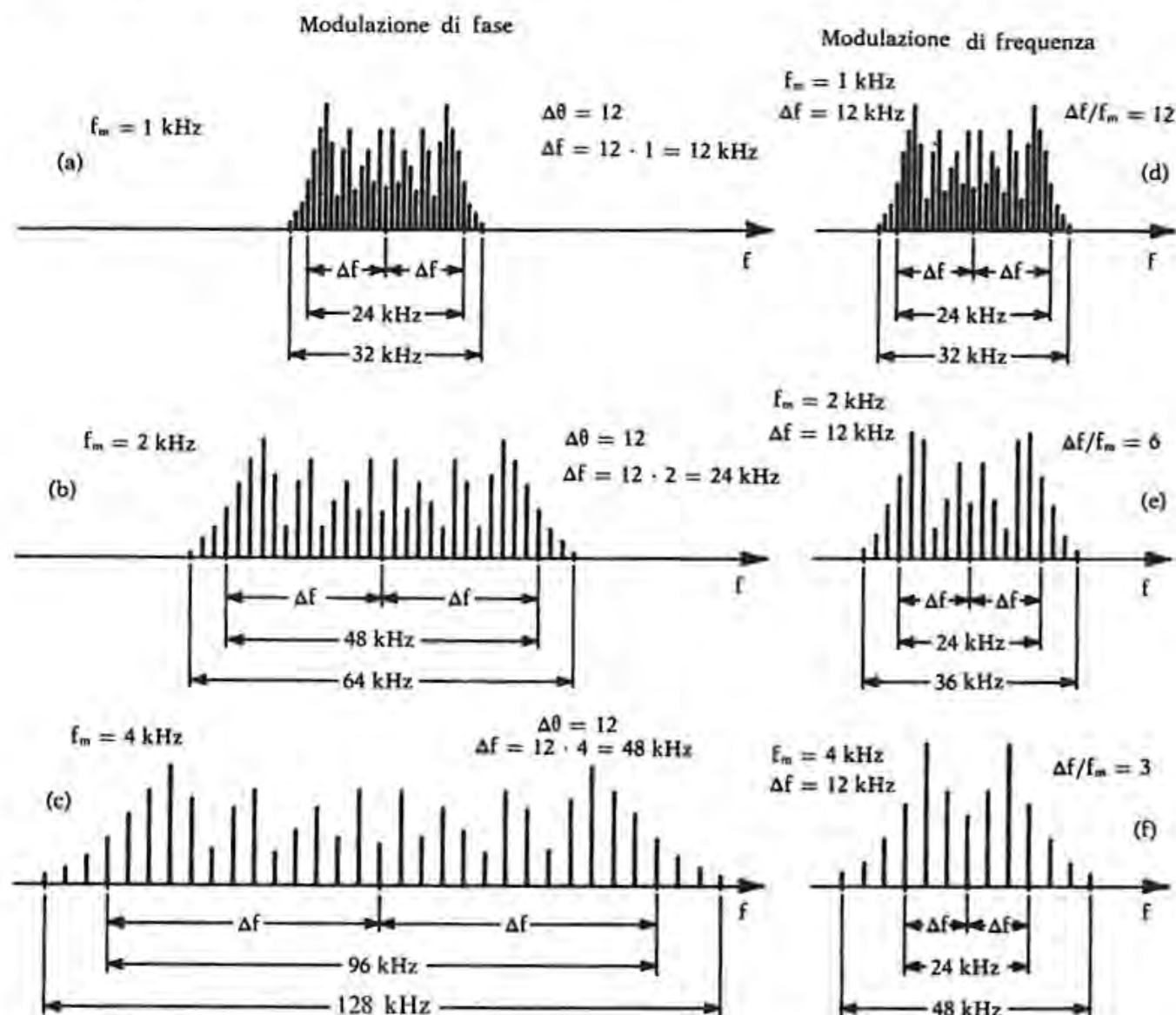


Fig. 9. - Confronto fra gli spettri in F.M. e in P.M.

Nella modulazione di frequenza, invece, l'argomento delle funzioni di Bessel m non rimane costante, ma, essendo sempre la stessa l'ampiezza del segnale modulante, con una frequenza di quest'ultimo doppia di quella nel caso (d), tale argomento si dimezza e passa da 12 a 6; il numero di righe significative dello spettro si riduce e la nuova larghezza di banda, pur essendo raddoppiata la distanza fra le righe, diventa di circa 36 kHz [caso (e)], anziché di 64 kHz come nella modulazione di fase.

Lasciando sempre costante l'ampiezza del segnale modulante, si porti ora la frequenza di quest'ultimo al valore di 4 kHz, cioè quadruplo del valore considerato in (a) e in (d). [Casi (c) ed (f)]. Nella modulazione di fase, rimanendo costante il numero di righe dello spettro, dato che $\Delta\theta$ rimane costante al valore 12, la larghezza di banda diventa di ben 128 kHz, essendo la distanza fra le righe di 4 kHz [caso (c)]. Nella modulazione di frequenza, invece, l'argomento delle funzioni di Bessel è ora uguale a 3 e il numero di righe componenti lo spettro è ancora minore che nel caso (e); la banda diventa uguale a 48 kHz circa [caso (f)], anziché a 128 kHz come nella modulazione di fase. Dalla figura 9 si constata, quindi, che, a parità di ampiezza del segnale modulante, variando la frequenza di quest'ultimo, la larghezza di banda varia molto meno con la

modulazione di frequenza (nell'esempio considerato, da 32 kHz a 48 kHz) che con la modulazione di fase (da 32 kHz a 128 kHz). La modulazione di frequenza, perciò, utilizza effettivamente meglio un dato canale che non la modulazione di fase.

6. Conversione della modulazione di fase in modulazione di frequenza

Dalle definizioni stesse di modulazione di frequenza e di modulazione di fase, se $v_m(t)$ è il generico segnale modulante, la frequenza istantanea del segnale modulato è data dalle espressioni seguenti, rispettivamente per la modulazione di frequenza e per quella di fase:

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \varphi(t) = f_0 + \frac{K_f}{2\pi} \cdot v_m(t) \quad (12)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \varphi(t) = f_0 + \frac{K_p}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} [v_m(t)] \quad (13)$$

Dal confronto fra la (12) e la (13) si deduce che il segnale modulato in fase con un segnale modulante $v_m(t)$ equivale ad un segnale modulato in frequenza con un segnale modulante $v'_m(t) = dv_m(t)/dt$. Tale proprietà permette di realizzare un metodo per ottenere la modulazione di frequenza mediante un dispositivo che produca una modulazione di fase.

Si supponga, infatti, di modulare in fase una oscillazione a radiofrequenza non direttamente con il segnale modulante vero e proprio, ma con un segnale che sia l'integrale rispetto al tempo del segnale modulante, cioè avente l'espressione:

$$a \int_0^t v_m(t) dt \quad (14)$$

in cui a è una costante di proporzionalità.

Il dispositivo modulatore di fase fornirà alla sua uscita un segnale modulato la cui frequenza istantanea è data dalla relazione (13), nella quale il segnale modulante che vi appare è dato dall'espressione (14). La frequenza istantanea del segnale modulato uscente dal modulatore di fase è quindi:

$$f = f_0 + \frac{K_p}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[a \int_0^t v_m(t) dt \right]$$

cioè:

$$f = f_0 + \frac{aK_p}{2\pi} \cdot v_m(t) \quad (15)$$

L'espressione (15), a parte la presenza della costante aK_p anziché della costante K_f , è del tutto identica alla espressione (12) relativa alla frequenza istantanea del segnale modulato in frequenza con il segnale modulante $v_m(t)$. Di conseguenza, il segnale modulato in fase con un segnale modulante del tipo:

$$a \int_0^t v_m(t) dt$$

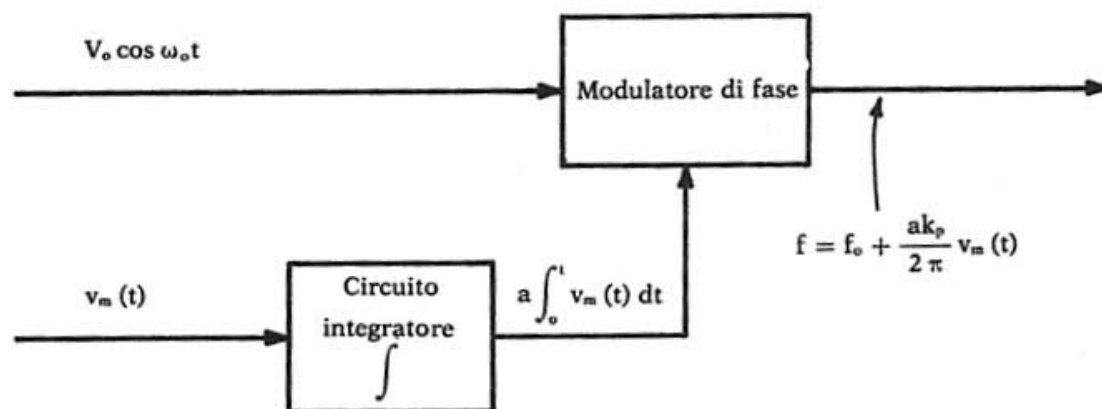


Fig. 10. - Modulazione di frequenza dalla modulazione di fase.

è un segnale modulato in frequenza con il segnale modulante $v_m(t)$ vero e proprio.

Avendo, quindi, a disposizione un dispositivo modulatore di fase, si può ottenere la modulazione di frequenza applicando il segnale modulante non direttamente all'ingresso del modulatore, ma attraverso un circuito integratore che ne faccia l'integrale nel tempo; il segnale ottenuto all'uscita dell'integratore viene utilizzato per modulare in fase l'oscillazione a radiofrequenza e il segnale modulato che ne risulta è un segnale modulato in frequenza dal vero e proprio segnale modulante. In figura 10 è rappresentato schematicamente il metodo per ottenere la modulazione di frequenza tramite una modulazione di fase.

Un semplicissimo esempio di circuito integratore è riportato in figura 11. È necessario che anche per le frequenze modulanti più basse la reattanza capacitiva del condensatore sia molto piccola e, quindi, trascurabile rispetto al valore della resistenza R . In tale ipotesi si può ritenere, allora, che la corrente $i(t)$ nel circuito in figura 11 sia uguale a $v_i(t)/R$. La tensione di uscita $v_u(t)$ ai capi del condensatore C è perciò:

$$v_u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{v_i(t)}{R} dt$$

cioè:

$$v_u(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t v_i(t) dt$$

La costante a che appare nella (14) è, perciò, uguale a $1/RC$ per il circuito di figura 11.

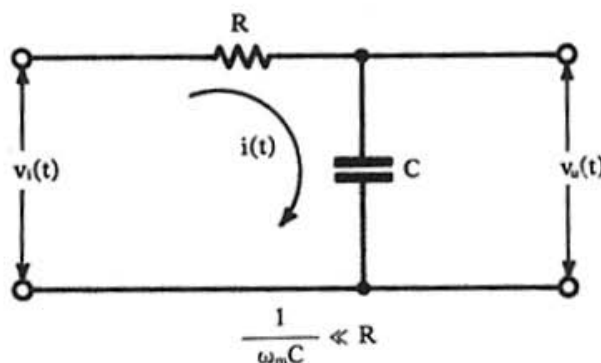


Fig. 11. - Rete integratrice.

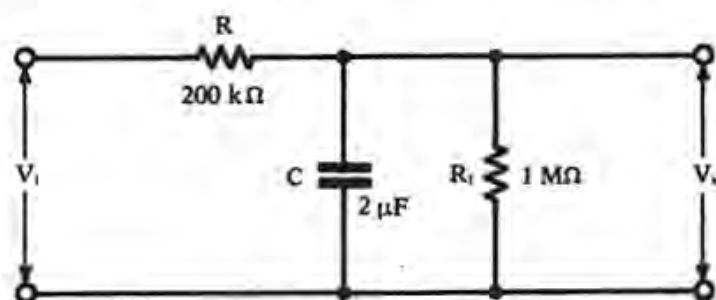


Fig. 12. - Rete integratrice.

Un altro esempio di circuito integratore è riportato in figura 12 con i valori dei componenti. Con i valori indicati in figura si ha:

$$\frac{\bar{V}_u}{\bar{V}_i} = \frac{1}{1,02 + j2,51 f_m}$$

Si nota che, per le frequenze maggiori di 50 Hz, questa espressione si può sostituire, entro l'1 %, con l'espressione:

$$\frac{\bar{V}_u}{\bar{V}_i} = \frac{1}{j2,51 f_m}$$

che è quella tipica di un circuito integratore ideale.

7. Potenza di un segnale modulato in frequenza o in fase

Nel processo di modulazione di frequenza o di fase, l'ampiezza del segnale modulato rimane costante e uguale al valore che ha in assenza di modulazione. Di conseguenza, anche la potenza del segnale modulato è costante e uguale al valore prima della modulazione. Nella modulazione di ampiezza, alla portante è sempre associata una potenza che è uguale a quella dell'oscillazione non modulata e la modulazione comporta un aumento di potenza, poiché si aggiunge la potenza concentrata sulle bande laterali. Nella modulazione di frequenza o di fase, invece, *la potenza complessiva del segnale modulato rimane inalterata: la potenza viene sottratta dalla portante e trasferita alle componenti che costituiscono le bande laterali*. Per quei valori di m (o di $\Delta\theta$) per cui l'ampiezza della portante si annulla la potenza del segnale modulato è tutta concentrata sulle bande laterali (fig. 13). Ciò può dedursi analiticamente servendosi della seguente proprietà delle funzioni di Bessel:

$$J_0^2(m) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(m) = 1$$

La potenza totale P del segnale modulato è la somma delle potenze associate alle singole componenti del segnale stesso e, per la proprietà suddetta, tale somma è uguale alla potenza P_0 della portante in assenza di modulazione; infatti:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \frac{J_0^2(m) V_0^2}{R} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{J_n^2(m) V_0^2}{R} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} \left[J_0^2(m) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(m) \right] = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} = P_0 \end{aligned}$$

8. Effetto della moltiplicazione di frequenza e della conversione di frequenza sui segnali modulati in frequenza

Se un segnale modulato in frequenza viene applicato all'ingresso di un circuito moltiplicatore di frequenza (ad esempio, un amplificatore in classe C con carico risonante accordato su una armonica della frequenza portante di ingresso) il segnale di uscita, oltre ad una diversa frequenza portante, ha anche un diverso indice di modulazione che è uguale a quello del segnale di ingresso moltiplicato per il fattore di moltiplicazione di frequenza. Infatti, se la frequenza di ingresso è: $f = f_0 + \Delta f \cos \omega_m t$ e h è il fattore di moltiplicazione, la frequenza del segnale di uscita è:

$$f' = hf = h(f_0 + \Delta f \cos \omega_m t) = hf_0 + h\Delta f \cos \omega_m t$$

Il nuovo indice di modulazione m' è quindi:

$$m' = h\Delta f / f_m \quad \text{cioè} \quad m' = hm$$

Poiché l'indice di modulazione m' del segnale di uscita dal moltiplicatore è diverso dall'indice m del segnale di ingresso, la composizione dello spettro e, conseguentemente, la larghezza di banda, risultano modificati; tuttavia, ciò non comporta alcuna deformazione della modulazione e quindi la moltiplicazione di frequenza non introduce alcuna distorsione nella legge di modulazione.

Se un segnale modulato in frequenza viene applicato ad un convertitore di frequenza, il suo spettro viene semplicemente traslato sull'asse delle frequenze e centrato su una nuova frequenza portante, ma la composizione dello spettro stesso rimane inalterata poiché l'indice di modulazione e, quindi, la larghezza di banda, non vengono modificati nel processo di conversione. Infatti, se f^* è la frequenza che si fa «battere» con la frequenza f del segnale, la frequenza f' all'uscita del convertitore è:

$$f' = f \pm f^* = (f_0 + \Delta f \cos \omega_m t) \pm f^* = (f_0 \pm f^*) + \Delta f \cos \omega_m t$$

La nuova frequenza portante è $f_0 \pm f^*$, in cui vale il segno $+$ o il segno $-$ a seconda se il carico all'uscita del convertitore è accordato sulla frequenza somma o sulla frequenza differenza; l'indice di modulazione m conserva il valore $\Delta f / f_m$ che aveva prima della conversione.

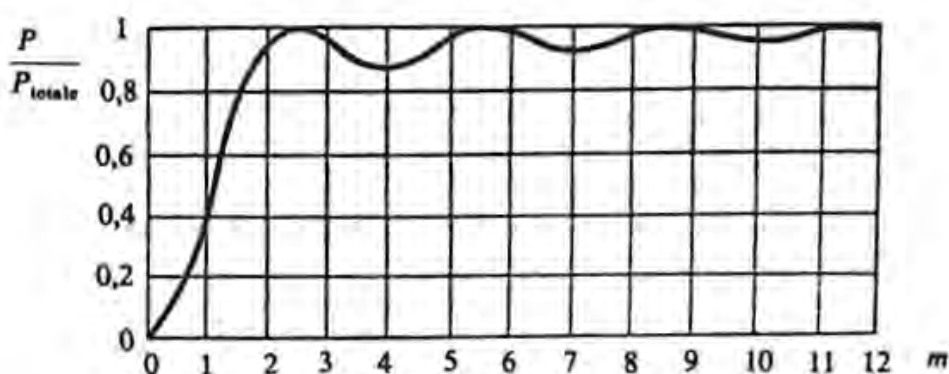


Fig. 13 - Potenza relativa delle bande laterali di un segnale modulato in frequenza, in funzione dell'indice di modulazione m .