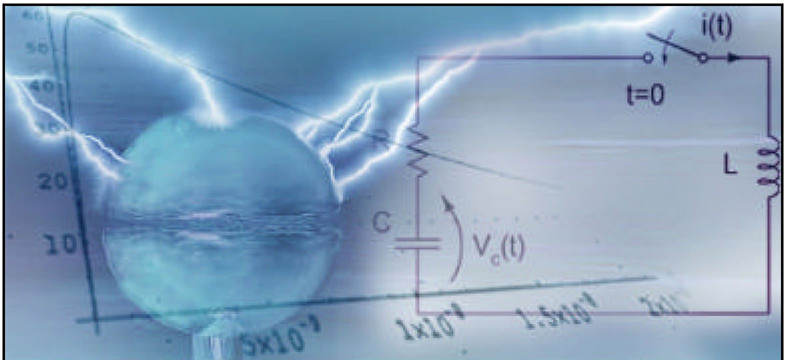
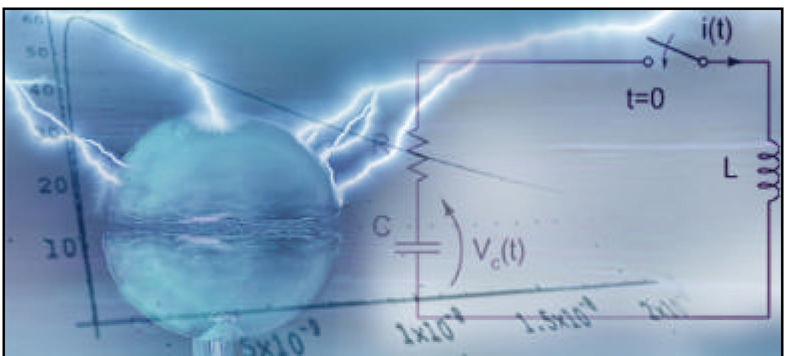


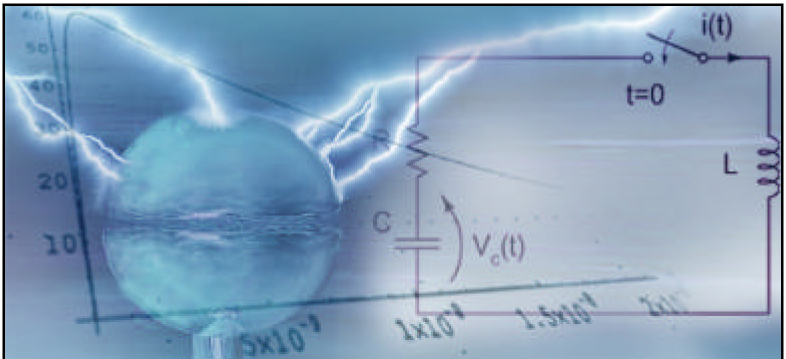
Unità 3

Reti nel dominio delle frequenze



Reti nel dominio delle frequenze

Introduzione



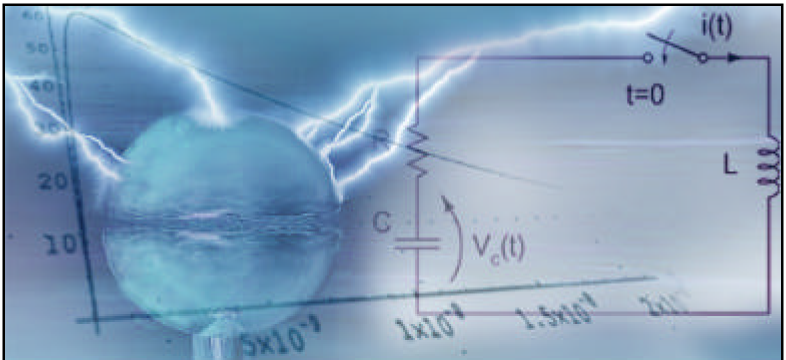
Introduzione

Contenuto Unità 3

Cosa c'è nell'Unità 3

- In questa sezione si affronteranno
  - introduzione all'Unità
  - trasformate di Laplace
  - reti nel dominio di Laplace
  - applicazioni
  - trasformate di Fourier

4



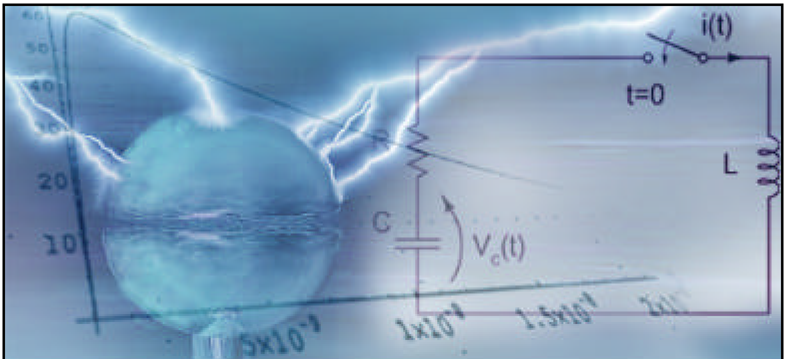
Introduzione

Scopi dell'Unità

Generalizzazione calcolo simbolico

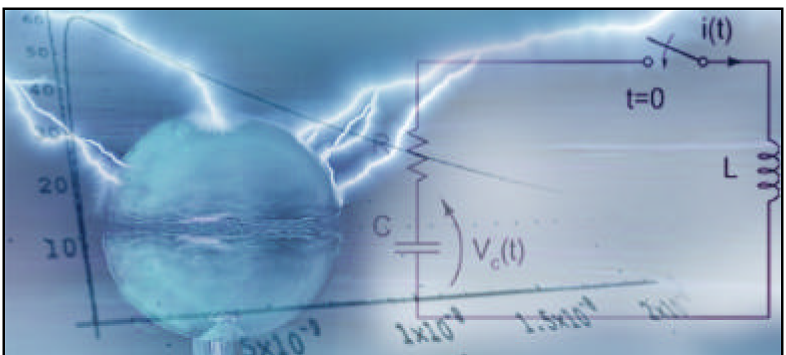
- **Limiti** calcolo simbolico basato sui fasori
  - ingressi sinusoidali
- **Generalizzazione** per ingressi arbitrari:
  - metodo delle Trasformate di Laplace
  - metodo delle Trasformate di Fourier

6



Reti nel dominio delle frequenze

Trasformate di Laplace



Trasformate di Laplace

Definizioni

Elemento analitico

- **Integrale importante** definito su un segnale arbitrario f(t):

$$L[f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

  - l'intervallo comincia da zero meno per consentire la presenza di segnali impulsivi nell'origine
  - l'integrale rimane lo stesso se il segnale viene reso causale (cioè nullo per t<0)
  - **s** è una **variabile complessa** arbitraria che ha dimensioni di pulsazione $s = s + jw$

9

Osservazioni 1/2

- **Non** necessariamente l'integrale esiste per tutti i valori della variabile complessa s
  - la regione del piano s dove l'integrale esiste si chiama **regione di regolarità (o di convergenza)**

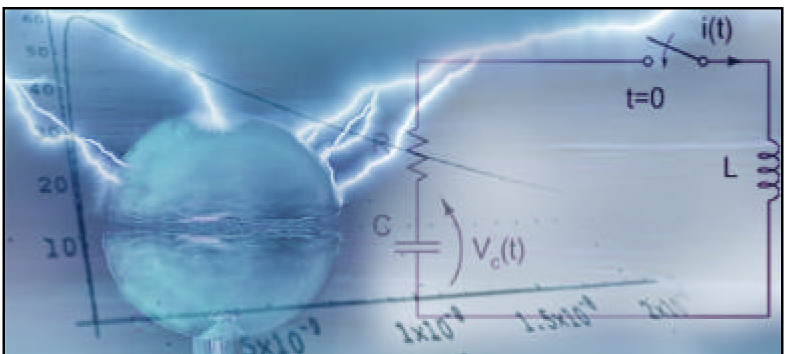
- Nella regione del piano complesso s, dove esso esiste, l'integrale rappresenta un **elemento analitico** di un funzione analitica F(s).

10

Osservazioni 2/2

- La funzione analitica F(s) si può definire per tutti i valori di s usando un **prolungamento analitico**
- La funzione analitica F(s) viene chiamata **trasformata di Laplace** del segnale f(t)
  - le trasformate e le funzioni da cui derivano si indicano con la stessa lettera. In **maiuscolo** la Trasformata, in **minuscolo** la funzione da trasformare

11



Trasformate di Laplace

Trasformate importanti

Trasformata dell'impulso

$$f(t) = d(t)$$

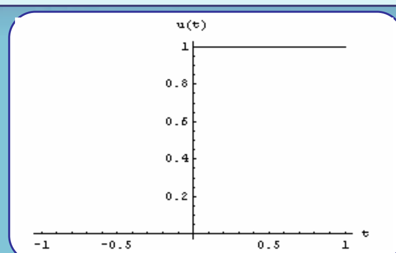
$$\mathrm{L}[d(t)] = \int_{0_-}^{\infty} d(t) e^{-st} dt = 1 = \Delta(s)$$

- **L'elemento analitico** definisce la trasformata di Laplace in tutto il piano complesso
  - la regione di regolarità è tutto il piano complesso

13

Trasformata del gradino 1/2

$$\boxed{f(t) = u(t)}$$



$$\mathrm{L}[u(t)] = \int_{0}^{\infty} e^{-st} dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re}[s] > 0$$

- L'elemento analitico definisce la trasformata di Laplace per **Re[s]>0**

14

Trasformata del gradino 2/2

- La **regione di regolarità** è il semipiano verticale limitato dall'asse immaginario
- Il prolungamento analitico di 1/s rimane 1/s in tutto il piano complesso
- Si ha: $\boxed{U(s) = \frac{1}{s}}$

15

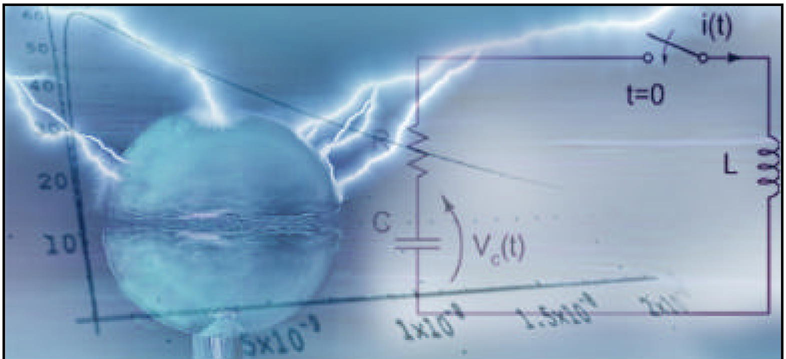
Trasformata di una costante

$$f(t) = c$$

- Poiché la trasformata di Laplace di una funzione coincide con la trasformata di Laplace della sua parte causale risulta immediatamente:

$$\boxed{C(s) = cU(s) = \frac{c}{s}}$$

16



Trasformate di Laplace

Proprietà delle Trasformate di Laplace

Linearità

- La trasformata di Laplace di una **combinazione lineare di segnali** è data dalla combinazione lineare delle trasformate di Laplace con gli stessi coefficienti

$$f(t) = C_1\, f_1(t) + C_2\, f_2(t) + ..C_n\, f_n(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F(s) = C_1\, F_1(s) + C_2\, F_2(s) + ..C_n\, F_n(s)}$$

18

Derivazione

- La trasformata di Laplace **della derivata di un segnale** è (a meno di una costante legata alla condizione iniziale) proporzionale alla trasformata del segnale con fattore s

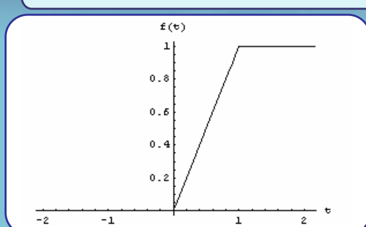
$$g(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$

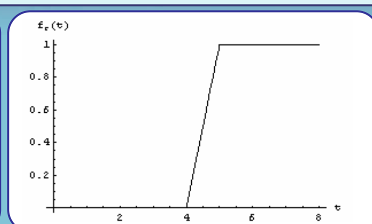
$$\Downarrow$$

$$\boxed{G(s) = s\,F(s) - f(0\_)}$$

19

Translazione





- **Funzione ritardata** $f_r(t)$

$$f(t) \quad \Rightarrow \quad f_r(t) = f(t - t_o)u(t - t_o)$$

- **Trasformata di Laplace funzione ritardata $f_r(t)$**

$$\boxed{F_r(s) = F(s)e^{-st_o}}$$

20

Modulazione

- **Funzione modulata** $f_m(t)$

$$f(t) \Rightarrow f_m(t) = f(t)e^{s_o t}$$

- **Trasformata di Laplace** funzione modulata $f_m(t)$

$$\boxed{F_m(s) = F(s - s_o)}$$

21

Moltiplicazione per potenze di t

- **Funzione moltiplicata** per t^n

$$f(t) \Rightarrow f_n(t) = t^n f(t)$$

- **Trasformata di Laplace** della funzione $f_n(t) = t^n f(t)$

$$\boxed{F_n(s) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{d s^n}}$$

22

Convoluzione di funzioni causali 1/2

- **Convoluzione** di due funzioni f(t) e g(t)

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t')g(t')dt' = g * f$$

- Convoluzione w(t) di due funzioni f(t) e g(t) causali (prodotto integrale)

$$w(t) = f * g = \int_{0}^{t} f(t - t')g(t')dt' = g * f$$

23

Convoluzione di funzioni causali 2/2

- **Trasformata di Laplace** del prodotto integrale tra f(t) e g(t):

$$w(t) = f * g = \int_{0}^{t} f(t - t')g(t')dt' = g * f$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{W(s) = F(s)G(s)}$$

24

Integrazione nel tempo

- **Funzione $f_i(t)$** integrale nel tempo:

$$f(t) \quad \Rightarrow \quad f_i(t) = \int_{0_-}^{t} f(t')dt'$$

- **Trasformata di Laplace** dell' integrale $f_i(t)$

$$\boxed{F_i(s) = \frac{F(s)}{s}}$$

25

Divisione per t

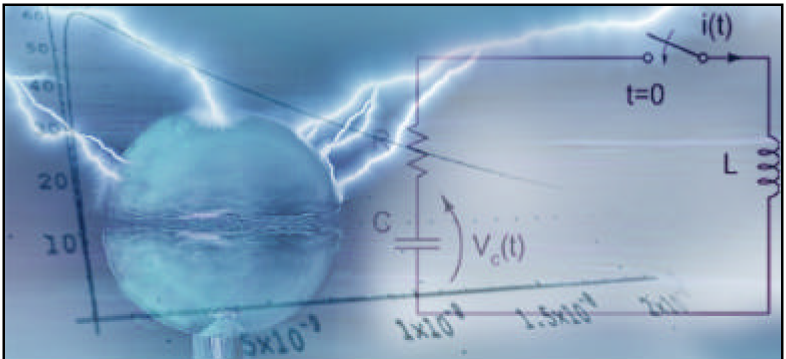
- **Funzione g(t):**

$$g(t) = \frac{f(t)}{t}$$

- **Trasformata di Laplace** di g(t)

$$\boxed{G(s) = \int_{s}^{\infty} F(s')ds'}$$

26



Trasformate di Laplace

Trasformate fondamentali

Funzione esponenziale

Funzione esponenziale

$$g(t) = e^{at}$$

- la funzione esponenziale può essere concepita come la funzione 1 modulata

Trasformata di Laplace di g(t)=1 e^{at}

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s-a}}$$

28

Funzioni trigonometriche 1/2

- **Funzione coseno**:

$$\cos(w\,t) = \frac{1}{2}e^{jw\,t} + \frac{1}{2}e^{-jw\,t}$$

usando la linearità

- **Trasformata di Laplace** del coseno:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{s-jw} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+jw} = \frac{s}{s^2+w^2}$$

$$\boxed{L[\cos(w\,t)] = \frac{s}{s^2+w^2}}$$

29

Funzioni trigonometriche 2/2

- **Funzione seno**:

$$\sin(w\,t) = \frac{1}{2j}e^{jw\,t} - \frac{1}{2j}e^{-jwt}$$

- usando la linearità

- **Trasformata di Laplace** del seno:

$$\frac{1}{2j}\frac{1}{s-jw} - \frac{1}{2j}\frac{1}{s+jw} = \frac{w}{s^2+w^2}$$

$$\boxed{L[\sin(w\,t)] = \frac{w}{s^2+w^2}}$$

30

Funzioni cisoidali 1/2

- **Funzione cisoidale coseno**:

$$e^{-s\,t}\cos(w\,t)$$

  - usando la modulazione

- **Trasformata di Laplace** della cisoide coseno:

$$\boxed{L[e^{-s\,t}\cos(w\,t)] = \frac{s+s}{(s+s\,)^2 + w^2}}$$

31

Funzioni cisoidali 2/2

- **Funzione cisoidale seno**:

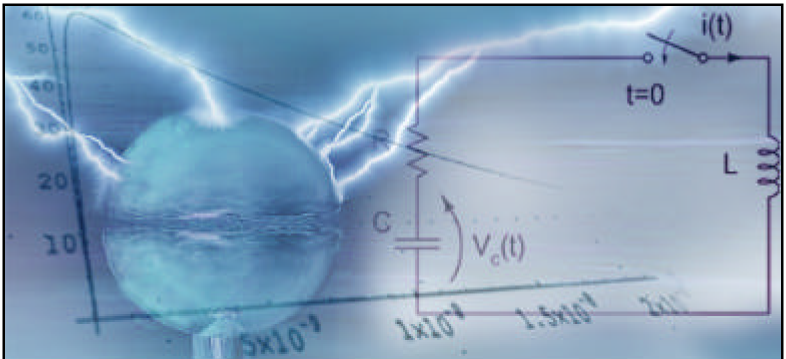
$$e^{-s\,t}\sin(w\,t)$$

  - usando la modulazione

- **Trasformata di Laplace** della cisoide seno:

$$\boxed{L[e^{-s\,t}\sin(w\,t)] = \frac{w}{(s+s\,)^2 + w^2}}$$

32

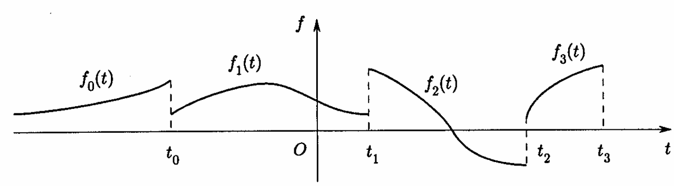


Trasformate di Laplace

Funzioni definite a tratti

Rappresentazione matematica 1/2

- **Le funzioni definite a tratti** presentano espressioni matematiche differenti a seconda dell'intervallo di tempo considerato:



34

Rappresentazione matematica 2/2

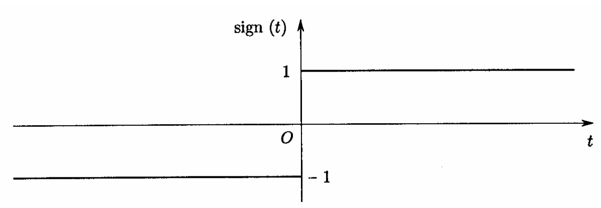
- espessione matematica valida per qualsiasi istante t

$$f(t) = f_o(t) + [f_1(t) - f_o(t)]u(t - t_o) +$$
$$[f_2(t) - f_1(t)]u(t - t_1) + \ldots\ldots$$

35

Funzione segno

- Esprimere la **funzione sign(t)**



$$f_o(t) = -1, \quad f_1(t) = +1$$

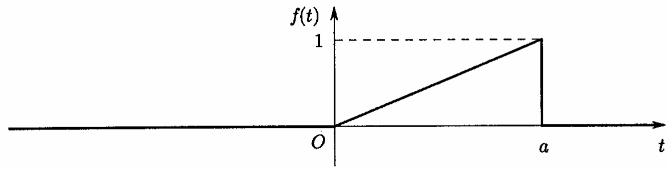
$$\Downarrow$$

$$f(t) = -1 + [1 - (-1)]u(t) = -1 + 2u(t)$$

36

Impulso triangolare

- Esprimere **l'impulso triangolare**



$$f_o(t) = 0, \quad f_1(t) = \frac{1}{a}t, \quad f_2(t) = 0$$

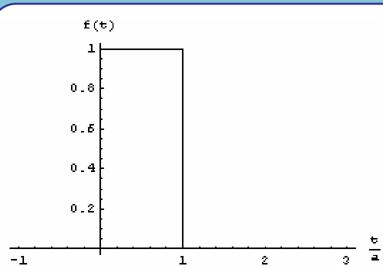
$$\Downarrow$$

$$f(t) = \frac{t}{a}u(t) - \frac{t}{a}u(t-a)$$

37

Trasformata impulso rettangolare

- Calcolare la **trasformata di Laplace** dell'impulso rettangolare



$$f_o(t) = 0, \quad f_1(t) = 1, \quad f_2(t) = 0$$

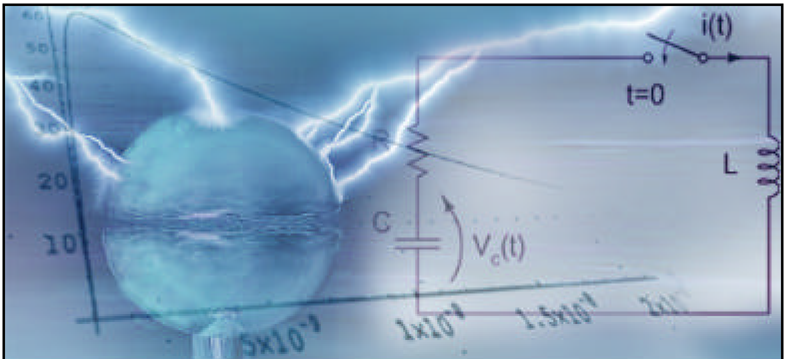
$$\Downarrow$$

$$f(t) = u(t) - u(t-a)$$

$$\Downarrow$$

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-as}$$

38



Trasformate di Laplace

Caratteristiche delle Trasformate di Laplace

Regione di convergenza 1/2

- Le **singolarità** di una trasformata di Laplace sono i valori di s in cui **non esiste** la trasformata
- Se la singolarità deriva da uno zero del denominatore, essa si chiama **polo**

40

Regione di convergenza 2/2

- La **regione di regolarità** è il semipiano verticale posto a destra della singolarità più a destra
- Un segnale definito in un intervallo limitato di tempo ha trasformata di Laplace **regolare** in tutti i punti del piano complesso s

41

Esempi 1/2

- **Determinare** la regione di convergenza della trasformata di Laplace della cisoide coseno

$$e^{-s\,t}\cos(w\,t) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{s+s}{(s+s)^2+w^2}$$

- Le singolarità sono i valori di s per cui si annulla il denominatore:

$$(s+s)^2+w^2=0 \;\Rightarrow\; s_{1,2}=-s\pm jw$$

- Semipiano di regolarità: $\boxed{\mathrm{Re}[s]>-s}$

42

Esempi 2/2

- **Determinare** la regione di convergenza della trasformata di Laplace dell'impulso triangolare

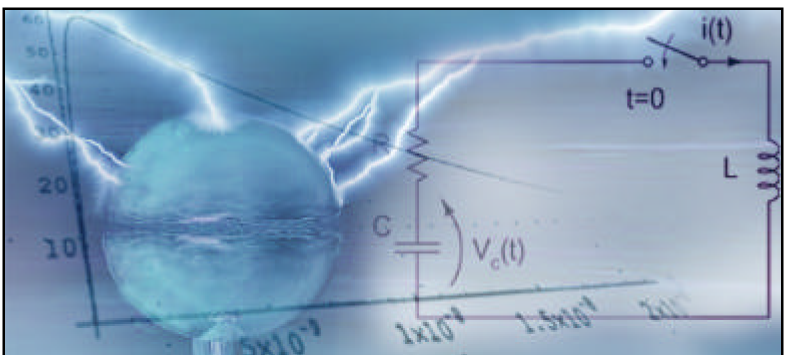
$$f(t) = \frac{t}{a}u(t) - \frac{t}{a}u(t-a) = $$

$$= \frac{t}{a}u(t) - \frac{t-a}{a}u(t-a) - u(t-a)$$

$$\Rightarrow \boxed{F(s) = \frac{1}{as^2} - \frac{1}{as^2}e^{-as} - \frac{1}{s}e^{-as}}$$

- La singolarità s=0 è solo **apparente**
  - la funzione è definita su intervallo finito [0-a]
- La **regione di convergenza** è tutto il piano complesso s

43



Trasformate di Laplace

Antitrasformate di Laplace

Generalità 1/2

- Una funzione analitica F(s) è una trasformata di Laplace se:
  - ha un **semipiano destro di regolarità**
  - nel semipiano di regolarità ha **crescita lenta** (cresce cioè come un polinomio)

45

Generalità 2/2

- La funzione **causale** f(t) che ha F(s) come Trasformata di Laplace è data:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{B_r} F(s)e^{st}\,ds$$

  - B_r retta verticale arbitraria posta nel semipiano di regolarità

46

Esercizio

- La seguente funzione F(s) è una Trasformata di Laplace?

$$F(s) = \frac{1}{s\,\sin(p\ s)}$$

  - **no.** Le singolarità sono in:

$$s = n \ (n \text{ intero positivo o negativo arbitrario})$$

  - **non esiste semipiano destro di regolarità**

47

Casi pratici

- **Nelle reti elettriche**, le trasformate di Laplace sono in pratica funzioni razionali di s o funzioni razionali moltiplicate per esponenziali

- Le funzioni razionali moltiplicate per esponenziali si riducono alle razionali mediante la **formula del ritardo**:

$$F(s)e^{-as} \Rightarrow f(t-a)u(t-a)$$

- È sempre utile utilizzare le tabelle di **antitrasformazione**

48

Tabella

	Antitrasformata $F(s)$	Trasformata $f(t)$
1.	$\frac{1}{s}$	1
2.	$\frac{1}{s^2}$	t
3.	$\frac{1}{s^n}\quad n = 1, 2, \ldots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!},\quad 0! = 1$
4.	$\frac{1}{s^n}\quad n > 0$	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$
5.	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
6.	$\frac{1}{(s-a)^n}\quad n = 1, 2, \ldots$	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!},\quad 0! = 1$
7.	$\frac{1}{(s-a)^n}\quad n > 0$	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{\Gamma(n)}$
8.	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
9.	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
10.	$\frac{1}{(s-b)^2+a^2}$	$\frac{e^{bt}\sin at}{a}$
11.	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\cos at$
12.	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
13.	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
14.	$\frac{1}{(s-b)^2-a^2}$	$\frac{e^{bt}\sinh at}{a}$
15.	$\frac{P(s)}{Q(s)}$	$\sum_{k=1}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}e^{\alpha_k t}$

49

Funzioni razionali proprie

- Riga 15:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}e^{a_k t} = \sum_{k=1}^{n} R(a_k)e^{a_k t}$$

- P(s) e Q(s) sono **polinomi** di s
- il grado di P(s) **è inferiore** a quello di Q(s)
- a_k (k=1,2..n) sono gli zeri tutti semplici di Q(s)
- $R(a_k) = \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}$ residuo nel polo a_k

50

Esempio

- Calcolare la **antitrasformata** di $F(s)=\dfrac{s+4}{s^2+3s+2}=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$
- Usiamo la riga 15 della tabella:
  - $a_1=-2,\quad a_2=-1$
  - $\dfrac{P(a_1)}{Q'(a_1)}=\dfrac{P(-2)}{Q'(-2)}=\dfrac{2}{-1}=-2,\qquad \dfrac{P(-1)}{Q'(-1)}=\dfrac{3}{1}=3,$
  - $f(t)=\dfrac{P(a_1)}{Q'(a_1)}e^{a_1 t}+\dfrac{P(a_2)}{Q'(a_2)}e^{a_2 t}=-2e^{-2t}+3e^{-t}$

51

Funzioni razionali improprie

- **Funzione razionale impropria**: $\dfrac{P(s)}{Q(s)}=a_o s^h+a_1 s^{h-1}+..+a_h+\dfrac{N(s)}{Q(s)}$
  - **h** differenza grado numeratore e denominatore
  - il grado di N(s) (resto della divisione dei polinomi P(s) e Q(s)) è inferiore a quello di Q(s)
  - $a_o s^h+a_1 s^{h-1}+..+a_h$ è il **polinomio quoziente**

$$\frac{P(s)}{Q(s)}\Rightarrow a_o d^{(h)}(t)+..+a_h d(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}e^{a_k t}$$

52

Esempio 1/2

- **Calcolare** la antitrasformata di

$$F(s) = \frac{6s^3 + 18s^2 + 12s + 9}{s^2 + 3s + 2} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- dalla divisione dei polinomi:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = 6s + \frac{9}{s^2 + 3s + 2}$$

53

Esempio 2/2

- Poli:
  - $a_1 = -2, \quad a_2 = -1$
  - $\frac{P(a_1)}{Q'(a_1)} = \frac{P(-2)}{Q'(-2)} = -9, \qquad \frac{P(-1)}{Q'(-1)} = 9,$
  - $f(t) = 6d'(t) + \frac{P(a_1)}{Q'(a_1)} e^{a_1 t} + \frac{P(a_2)}{Q'(a_2)} e^{a_2 t} =$

$$= 6d'(t) - 9e^{-2t} + 9e^{-t}$$

54

Presenza polo doppio

- Polo doppio nell'origine:

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{P(s)}{s^2 Q_1(s)}$$

- **Q_1 (s) ha zeri non nulli** a_k (k=1,..n) tutti semplici
- P(s) ha grado inferiore a Q(s)

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \Rightarrow \frac{P(0)}{Q_1(0)}t+\frac{d}{ds}\left[\frac{P(s)}{Q_1(s)}\right]_{s=0} + \sum_{k=1}^{n}\frac{P(a_k)}{a_k^2 Q_1'(a_k)}e^{a_k t}$$

55

Esempio

- **Calcolare** la antitrasformata di:

$$F(s)=\frac{s+3}{s^2(s+1)}=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{P(s)}{s^2 Q_1(s)}$$

- polo doppio in s=0
- $a_1=-1, \quad \frac{P(a_1)}{a_1^2 Q_1'(a_1)}=2$
- $\frac{P(0)}{Q_1(0)}=3, \quad \frac{d}{ds}\left[\frac{P(s)}{Q_1(s)}\right]_{s=0}=-2$

$$\boxed{f(t)=3t-2+2e^{-t}}$$

56

Presenza poli complessi

- **In generale** i coefficienti dei polinomi sono reali:
  - **i poli complessi** esistono in coppie complesse coniugati
  - $a_{1,2} = -s_o \pm jw_o, \qquad a_2 = a_1^*$
  - $\dfrac{P(a_1)}{Q(a_1)} e^{a_1 t} + \dfrac{P(a_1^*)}{Q(a_1^*)} e^{a_1^* t} = 2\mathrm{Re}\left[\dfrac{P(a_1)}{Q(a_1)} e^{a_1 t}\right] =$

$$= 2e^{-s_o t}\left\{\mathrm{Re}\left[\frac{P(a_1)}{Q(a_1)}\right]\cos(w_o t) - \mathrm{Im}\left[\frac{P(a_1)}{Q(a_1)}\right]\sin(w_o t)\right\}$$

57

Esempio

- **Calcolare** la antitrasformata di:

$$F(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 9s + 33}{(s^2 + 4s + 3)(s^2 + 9)} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- poli complessi coniugati in $a_1 = j3, \qquad a_2 = -j3,$
- poli reali in $a_3 = -3, \qquad a_4 = -1,$
- $\dfrac{P(a_1)}{Q'(a_1)} = -\dfrac{1}{15} + j\dfrac{1}{30} \qquad \dfrac{P(a_3)}{Q'(a_3)} = -\dfrac{1}{6} \qquad \dfrac{P(a_4)}{Q'(a_4)} = \dfrac{13}{10}$

$$\boxed{f(t) = \frac{13}{10}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{2}{15}\cos(3t) - \frac{1}{15}\sin(3t)}$$

58

Valore iniziale

- **Quando** esiste, il valore iniziale $f(0_+)$ si può calcolare senza antitrasformare

$$\boxed{f(0_+) = \lim_{s \to \infty} \left[s\,F(s) \right]}$$

59

Esempio

- **Calcolare** il valore iniziale della funzione f(t) che ha la seguente trasformata di Laplace:

$$F(s) = \frac{(s^2+6)(2s^3+2s^2+s+10)}{(s^2+s+5)(s^2+s+1)(s^2+s)}$$

- **risulta**:

$$\boxed{f(0_+) = \lim_{s \to \infty} \left[s\,F(s) \right] = 2}$$

60

Valore finale

- **Quando** esiste, il valore finale si può calcolare senza antitrasformare

$$\boxed{f(\infty) = \lim_{s \to 0} \left[s\,F(s) \right]}$$

61

Esempio

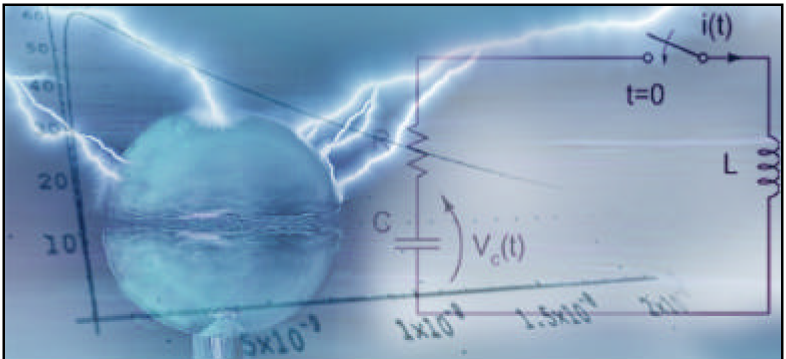
- **Calcolare** il valore finale della funzione f(t) che ha la seguente trasformata di Laplace:

$$F(s) = \frac{(s^2+6)(2s^3+2s^2+s+10)}{(s^2+s+5)(s^2+s+1)(s^2+s)}$$

- **risulta**:

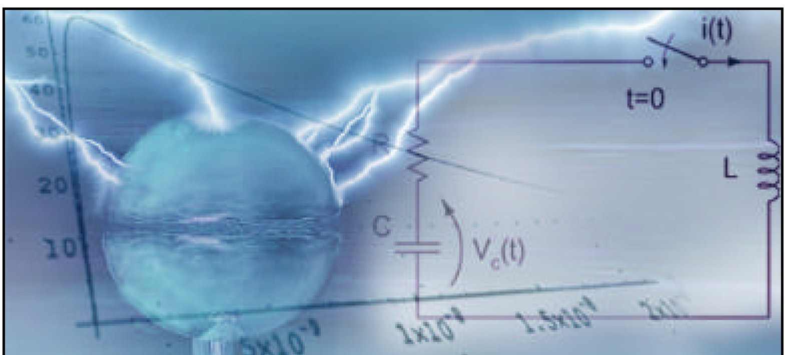
$$\boxed{f(\infty) = \lim_{s \to 0} \left[s\,F(s) \right] = 12}$$

62



Reti nel dominio delle frequenze

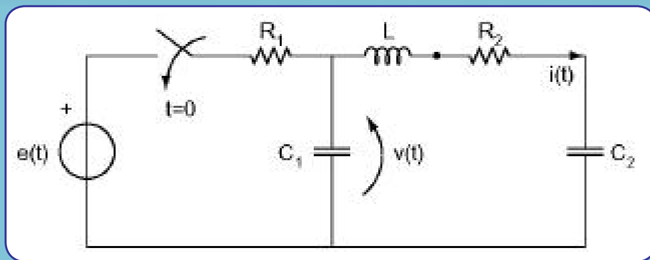
Metodo delle trasformate di Laplace



Metodo delle trasformate di Laplace

Idea fondamentale

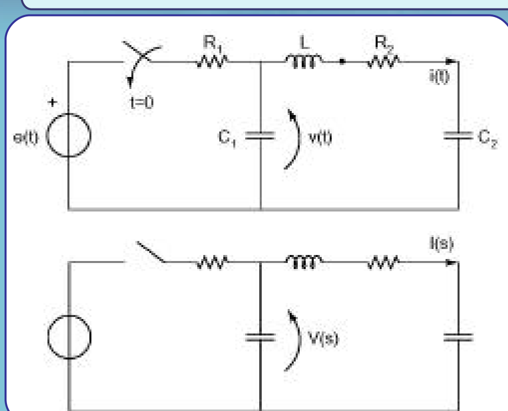
Rete nel dominio del tempo



- **Idea fondamentale**: introdurre le trasformate di Laplace come incognite

65

Rete in Laplace

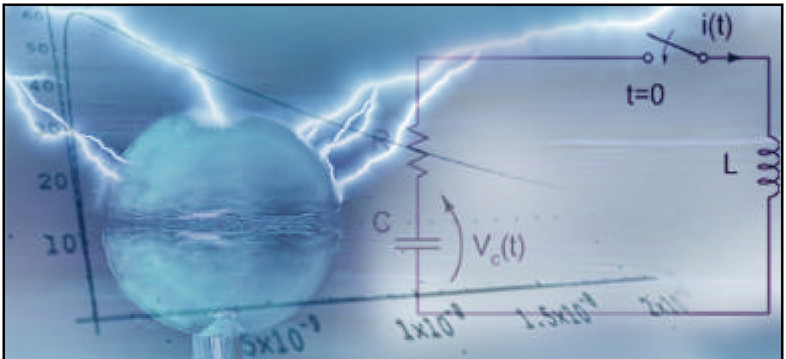


Dominio del tempo

Dominio di Laplace?

- I **versi** nel dominio di Laplace sono relativi alle grandezze istantanee v(t) ed i(t)

66

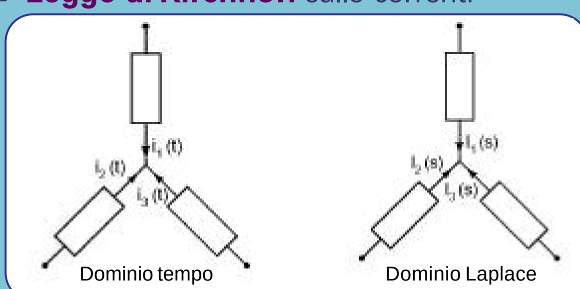


Metodo delle trasformate di Laplace

Deduzione della rete nel dominio di Laplace

Leggi di Kirchhoff 1/2

- **Legge di Kirchhoff** sulle correnti



$$i_1(t)+i_2(t)+i_3(t)=0$$

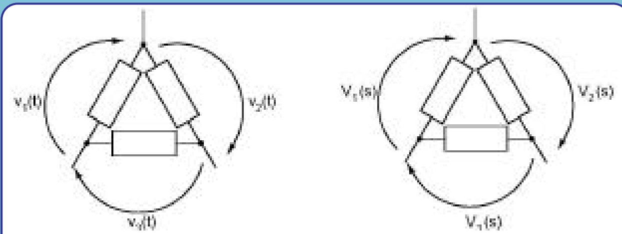
$$\downarrow \quad \boxed{\textit{linearità}}$$

$$I_1(s)+I_2(s)+I_3(s)=0$$

68

Leggi di Kirchhoff 2/2

- **legge di Kirchhoff** sulle tensioni



Dominio tempo Dominio Laplace

$$v_1(t)+v_2(t)+v_3(t)=0$$

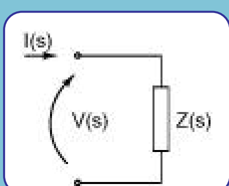
$$\downarrow \boxed{\text{linearità}}$$

$$V_1(s)+V_2(s)+V(s)_3=0$$

69

Impedenza

- Concetto fondamentale



$\Leftarrow$ **simbolo (convenzione utilizzatori)**

equazione costitutiva:

$$\Downarrow$$

$$V(s)=Z(s)\,I(s)$$

$$\Uparrow$$

impedenza

70

Impedenza di un resistore

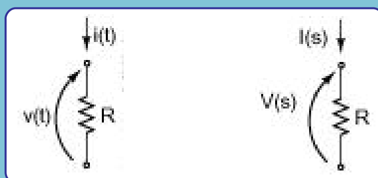
- relazione costitutiva nel dominio del **tempo**

$$v(t) = R\ i(t)$$

- relazione costitutiva nel dominio di **Laplace**

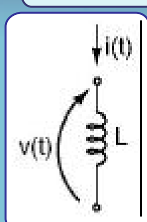
$$V(s) = R\ I(s)$$

Simbologia usata nel dominio di Laplace: la stessa



71

Rappresentazione di un induttore



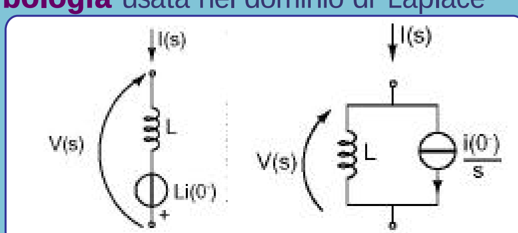
Dominio del tempo $v(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$

Dominio di Laplace

$$V(s) = L\,s\,I(s) - Li(0_-) = sLI - Li(0_-)$$

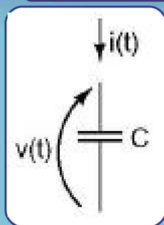
$$V(s) = Z(s)I(s) - Li(0_-) \quad (Z = s\,L)$$

Simbologia usata nel dominio di Laplace



72

Rappresentazione di un condensatore



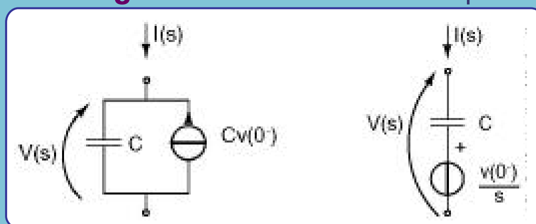
Dominio del tempo $i(t) = C\dfrac{d}{dt}v(t)$

Dominio di Laplace

$I(s) = s\,C\,V(s) - Cv(0\_)$

$V(s) = Z(s)I(s) + \dfrac{v(0\_)}{s}$ $\left(Z = \dfrac{1}{s\,C}\right)$

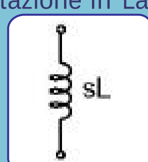
- **Simbologia** usata nel dominio di Laplace



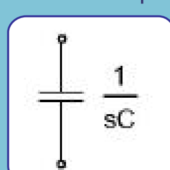
73

Impedenze di elementi scarichi

- Un elemento con memoria si dice **scarico** se presenta condizioni iniziali nulle
  - rappresentazione in Laplace di induttore scarico



  - rappresentazione in Laplace di condensatore scarico



74

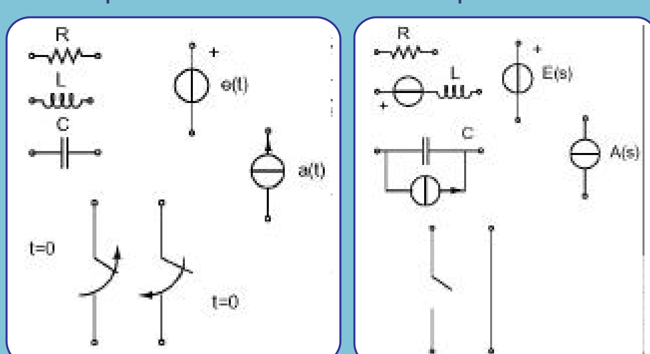
Presenza interruttori

- **Cosa succede** degli eventuali interruttori presenti nella rete nel dominio del tempo quando si passa nel dominio di Laplace?
  - **ipotesi:** gli interruttori sono attivati nell'istante t=0
    - gli interruttori che si chiudono diventano corto circuiti nel dominio di Laplace
    - gli interruttori che si aprono diventano circuiti aperti nel dominio di Laplace

75

Sommario Tempo-Laplace

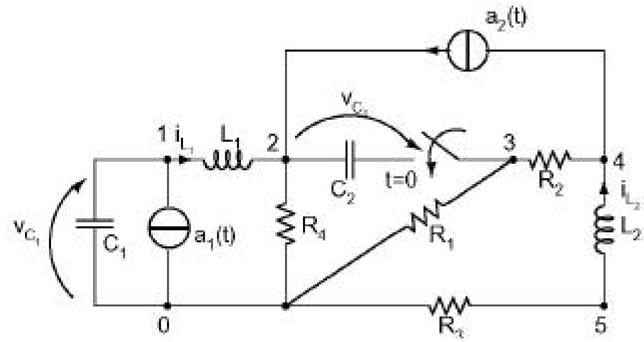
- **Passaggio** di una rete nel dominio del tempo alla corrispondente nel dominio di Laplace



76

Esempio 1 / 8

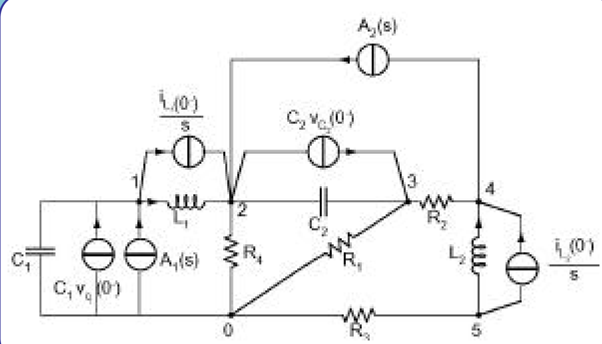
- Rete nel dominio del tempo



77

Esempio 2 / 8

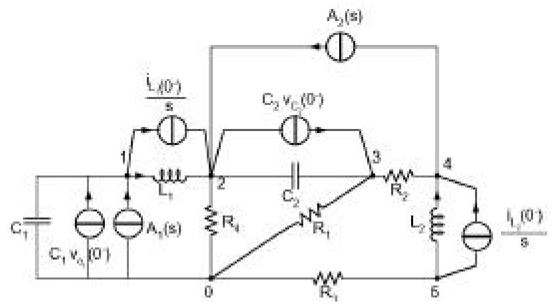
- Rete nel dominio di Laplace



78

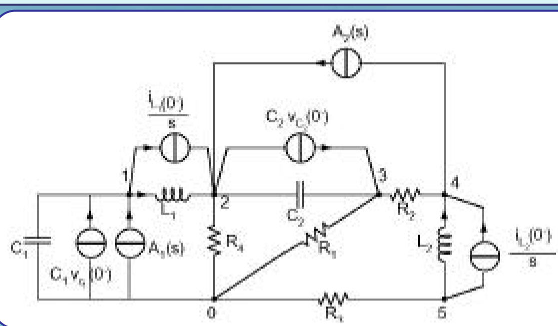
Esempio 3/8

- Formulazione della rete nel dominio di Laplace
  - metodo dei nodi ($V_1(s)$,..$V_5(s)$, tensioni ai nodi):



79

Esempio 4/8



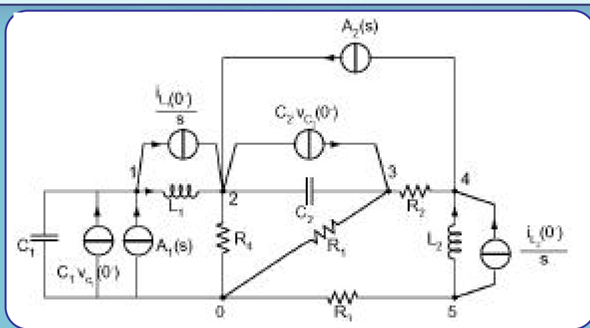
- **nodo 1**

$$\left(sC_1 + \frac{1}{sL_1}\right)V_1(s) - \frac{1}{sL_1}V_2(s) =$$

$$= C_1 v_{C_1}(0\_) + A_1(s) - \frac{i_{L_1}(0\_)}{s}$$

80

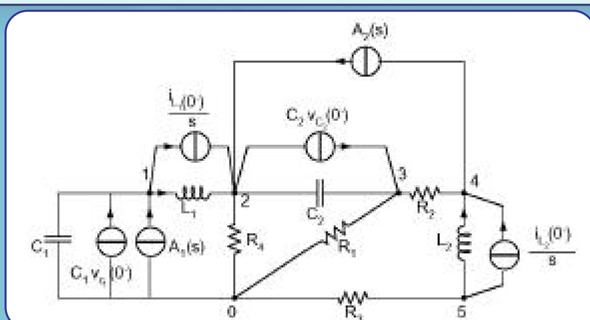
Esempio 5/8



- **nodo 2** $$-\frac{1}{sL_1}V_1(s)+\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{sL_1}+sC_2\right)V_2(s)-sC_2V_3(s)=$$ $$=\frac{i_{L_1}(0_-)}{s}-C_2v_{C_2}(0_-)+A_2(s)$$

81

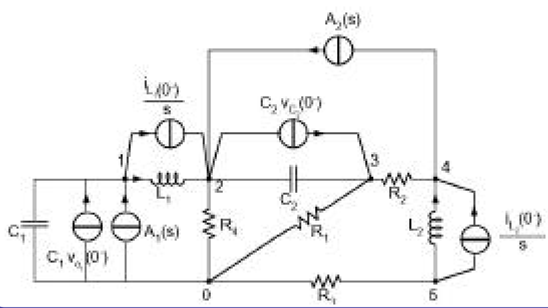
Esempio 6/8



- **nodo 3** $$-sC_2V_2(s)+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+sC_2\right)V_3(s)-\frac{1}{R_2}V_4(s)=$$ $$=C_2v_{C_2}(0_-)$$

82

Esempio 7 / 8



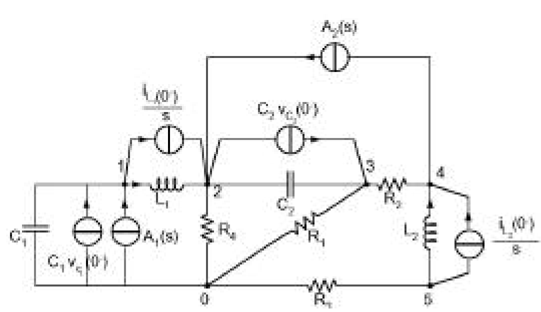
- **nodo 4**

$$-\frac{1}{R_2}V_3(s)+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{sL_2}\right)V_4(s)-\frac{1}{sL_2}V_5(s)=$$

$$=\frac{i_{L_2}(0_-)}{s}-A_2(s)$$

83

Esempio 8 / 8

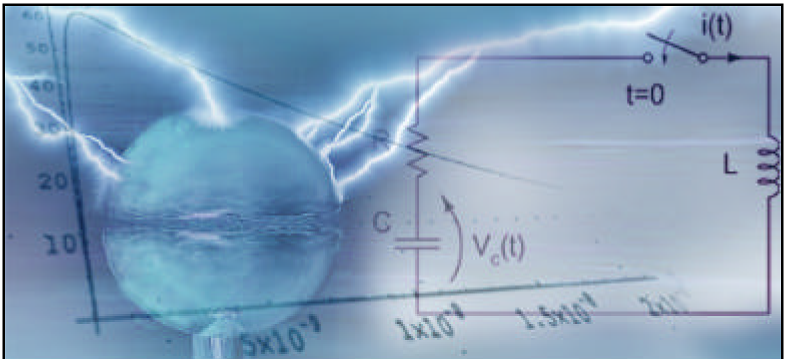


- **nodo 5**

$$-\frac{1}{sL_2}V_4(s)+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{sL_2}\right)V_5(s)=$$

$$=-\frac{i_{L_2}(0_-)}{s}$$

84

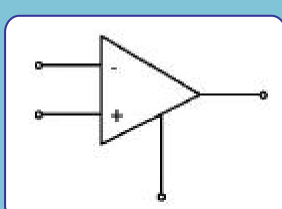


Metodo delle trasformate di Laplace

Presenza di multipoli

Amplificatori operazionali

- Gli **amplificatori operazionali** hanno nel dominio di Laplace le stesse relazioni costitutive che si hanno nel dominio del tempo. Mantengono quindi lo stesso simbolo



Dominio del tempo: $i_-(t)=0, \quad i_+(t)=0$

$v_-(t)-v_+(t)=0$

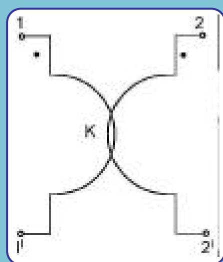
Dominio di Laplace: $I_-(s)=0, \quad I_+(s)=0$

$V_-(s)-V_+(s)=0$

86

Trasformatori ideali

- I **trasformatori ideali** hanno nel dominio di Laplace le stesse relazioni costitutive che si hanno nel dominio del tempo. Mantengono quindi lo stesso simbolo



Dominio del tempo:

$$v_1(t) = k\, v_2(t)$$
$$k\, i_1(t) = -i_2(t)$$

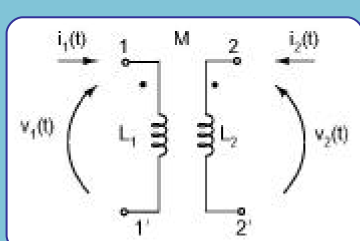
Dominio di Laplace:

$$V_1(s) = k\, V_2(s)$$
$$k I_1(s) = -I_2(s)$$

87

Trasformatori 1/2

- **Trasformatori** nel dominio del **tempo**

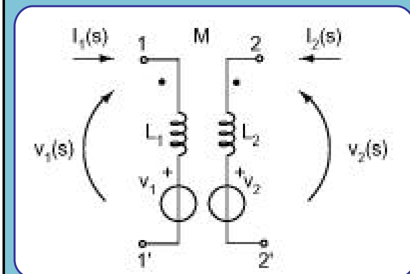


$$v_1(t) = L_1 \frac{d\, i_1(t)}{dt} + M \frac{d\, i_2(t)}{dt}$$
$$v_2(t) = M \frac{d\, i_1(t)}{dt} + L_2 \frac{d\, i_2(t)}{dt}$$

88

Trasformatori 2/2

- **Trasformatori** nel dominio di **Laplace**



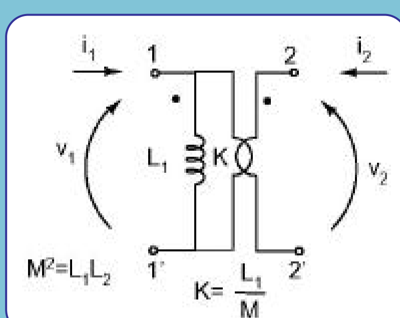
$$v_1 = L_1\, i_1(0\_) + M\; i_2(0\_)$$
$$v_2 = M\, i_1(0\_) + L_2\; i_2(0\_)$$

$$V_1(s) = s\,L_1\,I_1(s) + sMI_2(s) - v_1$$
$$V_2(s) = sMI_1(s) + sL_2\,I_2(s) - v_2$$

89

Trasformatori perfetti 1/2

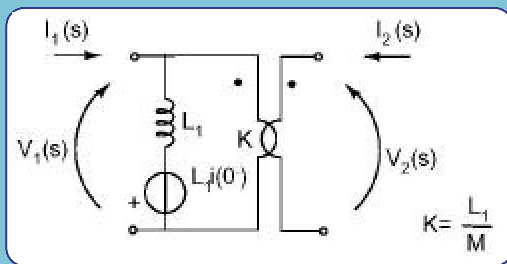
- Trasformatore nel dominio del **tempo**
  - per **trasformatori perfetti**, è preferibile usare il circuito



90

Trasformatori perfetti 2/2

- Trasformatore nel dominio di **Laplace**
  - per **trasformatori perfetti**, è preferibile usare il circuito

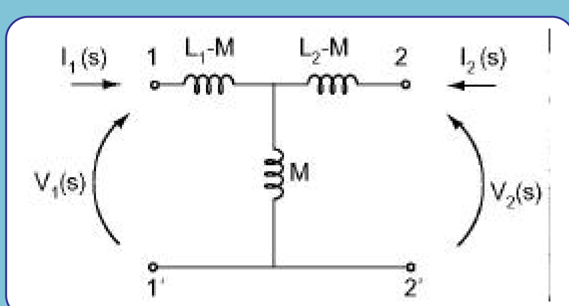


$$\hat{i}(0_-) = i_1(0_-) + \frac{M}{L_1} i_2(0_-)$$

91

Trasformatore scarico

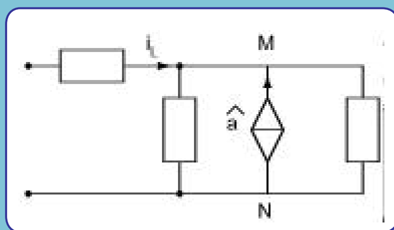
- **Trasformatore scarico** nel dominio di **Laplace**
  - per trasformatori scarichi, è preferibile usare il circuito a T



92

Generatore pilotato 1/2

- Rete con **generatore pilotato** nel dominio del **tempo**
  - è interessante considerare il caso in cui il generatore dipendente ha relazione costitutiva con memoria

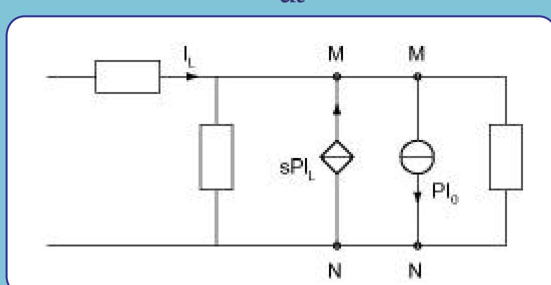


$$\hat{a} = P\frac{d\, i_L}{dt}$$

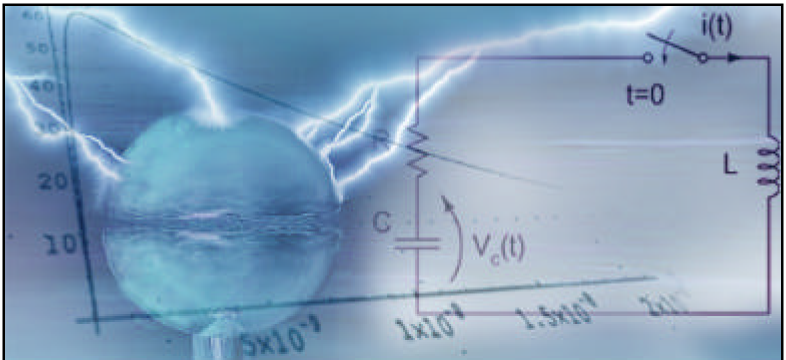
93

Generatore pilotato 2/2

- Rete con **generatore pilotato** nel dominio di **Laplace**
  - se $i_L(0_-) = I_o$: $\hat{a} = P\frac{d\, i_L}{dt} \Rightarrow \hat{A}(s) = sPI_L(s) - P\, I_o$



94



Metodo delle trasformate di Laplace

Sommario del metodo

Fasi del metodo

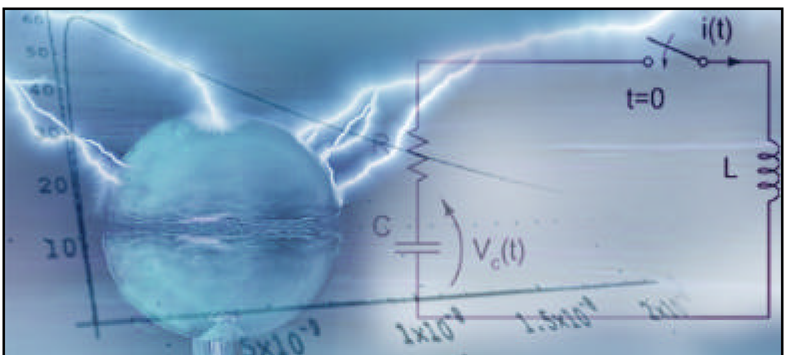
- **Trasformazione della rete** dal dominio del tempo al dominio di Laplace
- **Calcolo della rete** in Laplace con metodi circuitali
- **Calcolo delle antitrasformate** per le grandezze di uscita

96

Vantaggi del metodo

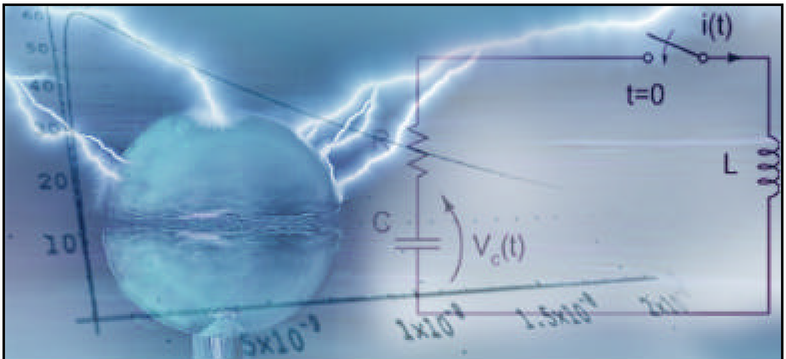
- Alcuni **vantaggi**
  - reti anche non degeneri
  - presenza di generatori impulsivi
  - non richiede calcolo preventivo valori iniziali
  - grande interpetrabilità fisica

97



Reti nel dominio delle frequenze

Applicazioni

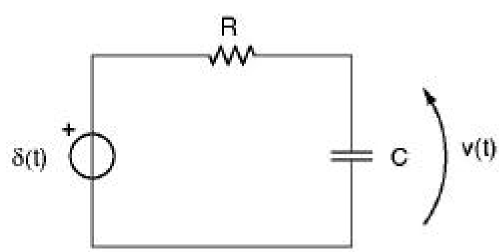


Applicazioni

Presenza generatore impulsivo

Rete nel dominio del tempo

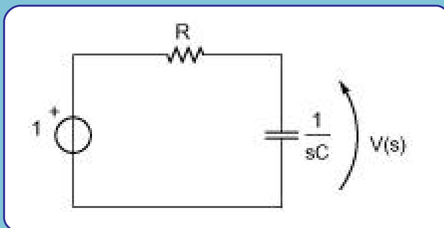
- **Calcolare** $v(t)=v_C(t)$
  - rete nel dominio del tempo



100

Rete nel dominio di Laplace

- Condizione iniziale: $v_C(0_-) = 0$
- Trasformata Laplace ingresso $\Delta(s) = 1$
  - **rete nel dominio di Laplace**



$$V_C(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} 1 = \frac{1}{1 + sCR}$$

101

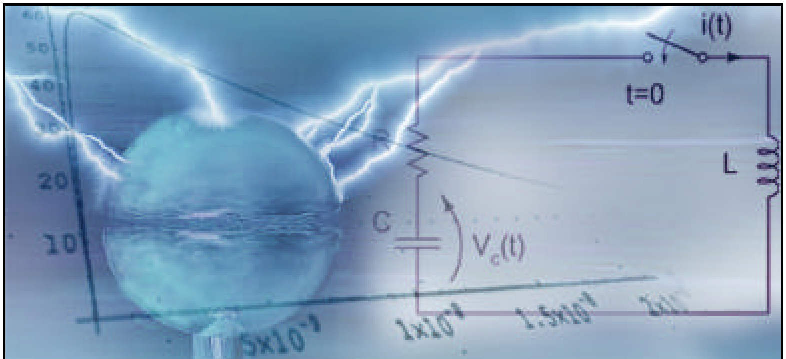
Risultati finali

- Valore iniziale :

$$v_C(0_+) = \lim_{s \to \infty} [sV(s)] = \frac{1}{CR} \neq v_C(0_-) = 0$$

- Poli della trasformata: $a_o = -\frac{1}{RC}$
- Uscita $v_C(t) = \frac{P(a_o)}{Q'(a_o)} e^{a_o t} = \frac{1}{CR} e^{-\frac{t}{CR}}$
  - anche se la rete non è degenere, c'è discontinuità dello stato per la presenza di ingresso impulsivo

102

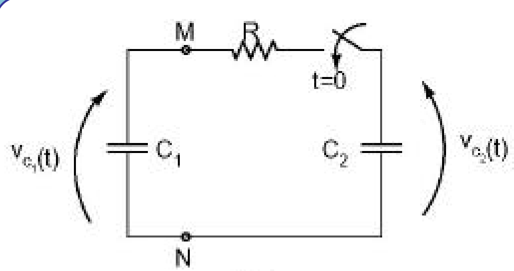


Applicazioni

Scarica condensatori in serie

Rete nel dominio del tempo

- **Calcolare** $v_{C1}(t)$
  - rete nel dominio del tempo

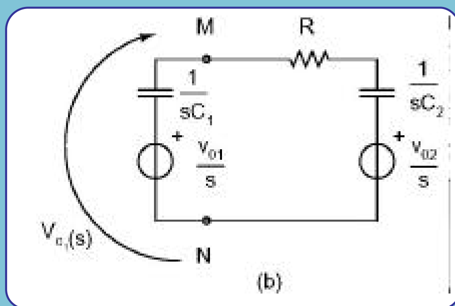


(a)

104

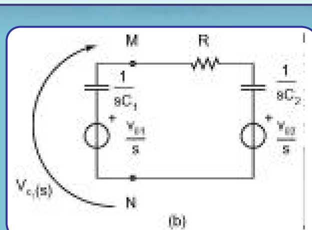
Rete nel dominio di Laplace 1/2

- Condizioni iniziali: $v_{C_1}(0_-) = \frac{Q_1}{C_1} = v_{01}, \qquad v_{C_2}(0_-) = \frac{Q_2}{C_2} = v_{02}$
- Non ci sono ingressi



105

Rete nel dominio di Laplace 2/2



- **millman porge:**

$$V_{C_1}(s) = \frac{sC_1 \frac{v_{01}}{s} + \frac{v_{02}}{s\left(R + \frac{1}{sC_2}\right)}}{sC_1 + \frac{1}{R + \frac{1}{sC_2}}} = \frac{C_1\left(v_{01} + C_2 R\, s\, v_{01}\right) + C_2 v_{02}}{s\left(C_1 + C_2 + sRC_1C_2\right)}$$

106

Risultati finali 1/2

Valore finale:

$$v_{C1}(\infty) = \lim_{s \to 0}\left[sV_{C1}(s) \right] = \frac{C_1 v_{01} + C_2 v_{02}}{C_1 + C_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2}$$

- la carica totale si è conservata

Poli della trasformata: $a_1 = 0, \qquad a_2 = -\dfrac{1}{RC_1 \| C_2}$

107

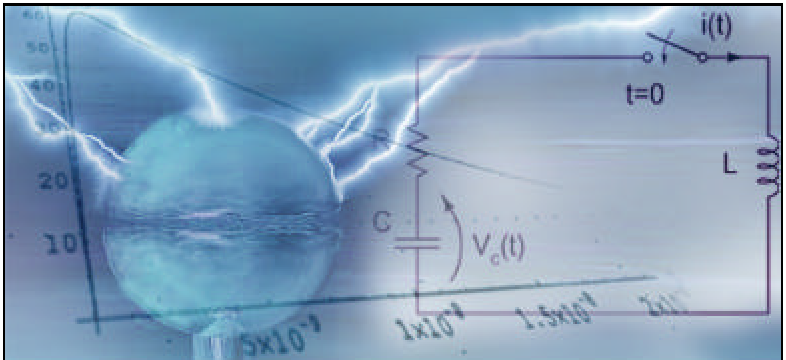
Risultati finali 2/2

Poli della trasformata: $a_1 = 0, \qquad a_2 = -\dfrac{1}{RC_1 \| C_2}$

Uscita:

$$v_C(t) = \frac{P(a_1)}{Q(a_1)} e^{a_1 t} + \frac{P(a_2)}{Q(a_2)} e^{a_2 t} = v_{C1}(\infty) + \left(v_{01} - v_{C1}(\infty) \right) e^{a_2 t}$$

108

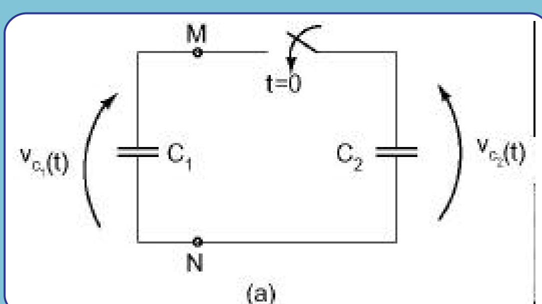


Applicazioni

Maglia di condensatori

Rete nel dominio del tempo

- **Calcolare** $v_{C1}(t)= v_{C2}(t)$
  - rete nel dominio del tempo



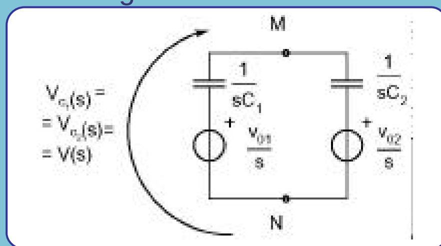
110

Rete nel dominio di Laplace 1/2

- Condizioni iniziali:

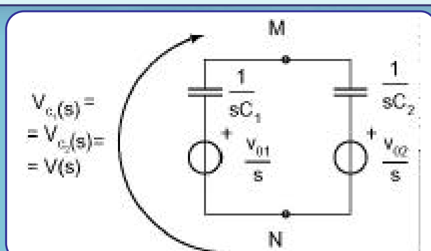
$$v_{C_1}(0_-) = \frac{Q_1}{C_1} = v_{01}, \qquad v_{C_2}(0_-) = \frac{Q_2}{C_2} = v_{02}$$

- Non ci sono ingressi



111

Rete nel dominio di Laplace 2/2



- **millman porge:**

$$V_{C_1}(s) = \frac{sC_1 \frac{v_{01}}{s} + sC_2 \frac{v_{02}}{s}}{sC_1 + sC_2} = \frac{C_1 v_{01} + C_2 v_{02}}{s\left(C_1 + C_2\right)}$$

112

Risultati finali 1/2

- Valore finale

$$v_{C1}(\infty) = \lim_{s \to 0}\left[sV_{C1}(s)\right] = \frac{C_1 v_{01} + C_2 v_{02}}{C_1 + C_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2}$$

- Valore iniziale

$$v_{C1}(0_+) = \lim_{s \to \infty}\left[sV_{C1}(s)\right] = \frac{C_1 v_{01} + C_2 v_{02}}{C_1 + C_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2}$$

  - **la carica totale si è conservata**

113

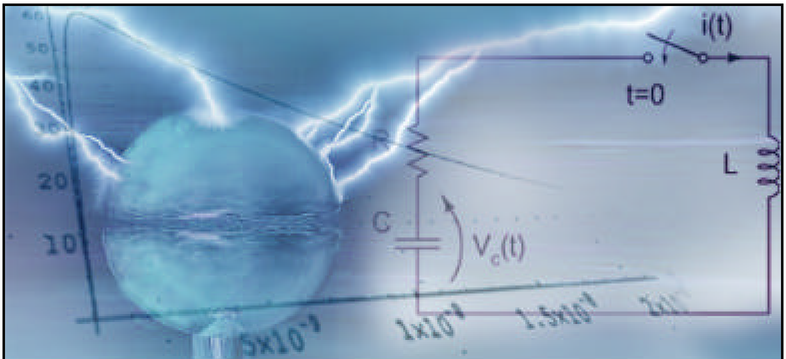
Risultati finali 2/2

- Poli della trasformata:
- Uscita:

$$a_0 = 0$$

$$v_{C_1}(t) = v_{C_2}(t) = \frac{P(a_1)}{Q'(a_1)} e^{a_1 t} = \frac{C_1 v_{01} + C_2 v_{02}}{C_1 + C_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2}$$

114

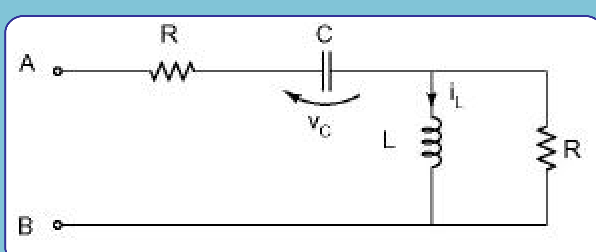


Applicazioni

Effetto condizioni iniziali

Rappresentazione Thevenin 1/4

- **Rappresentare** con Thevenin nel dominio di Laplace la rete indicata in figura



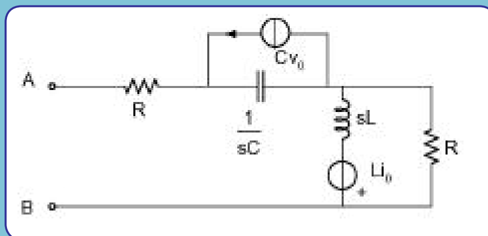
116

Rappresentazione Thevenin 2/4

Condizioni iniziali:

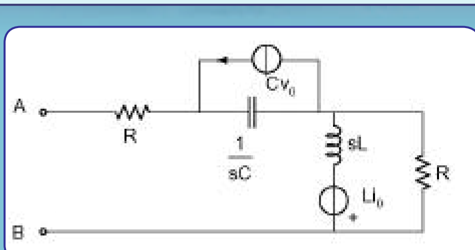
$$v_C(0_-) = v_0, \qquad i_L(0_-) = i_0$$

- bipolo nel dominio di Laplace



117

Rappresentazione Thevenin 3/4

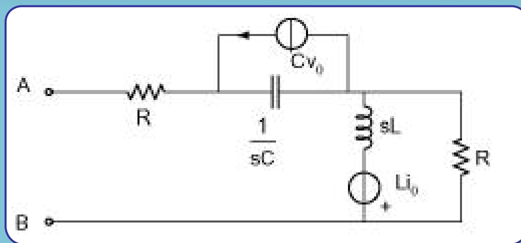


- impedenza equivalente
  - reso inerte il bipolo risulta:

$$Z(s) = R + \frac{1}{sC} + R\,||(sL) = R + \frac{1}{sC} + \frac{sRL}{R+sL}$$

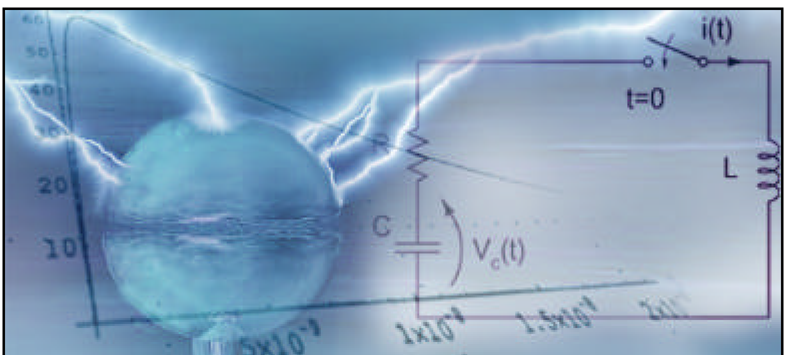
118

Rappresentazione Thevenin 4/4



- tensione a vuoto
  - usando sovrapposizione: $V_o(s) = -\frac{R}{R+sL} L i_o + \frac{v_o}{s}$

119

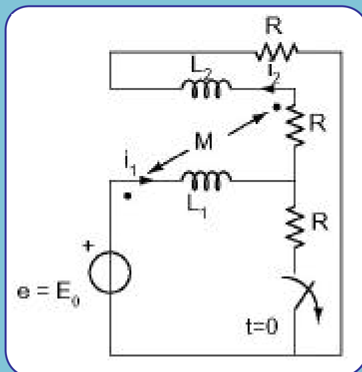


Applicazioni

Reti degeneri

Rete nel dominio del tempo

- **Calcolare** il valore iniziale i(0+)
  - rete nel dominio del tempo

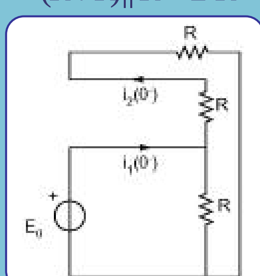


121

Calcolo dati nel dominio di Laplace 1/2

- **Condizioni iniziali**
  - prima dell'apertura dell'interruttore:

$$i_1(0_-) = \frac{E_o}{(R+R)\|R} = \frac{3}{2}\frac{E_o}{R}, \qquad i_2(0_-) = \frac{R}{R+2R} i_1(0_-) = \frac{E_o}{2R}$$



122

Calcolo dati nel dominio di Laplace 2/2

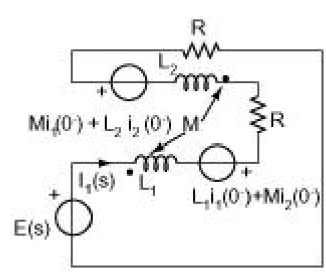
- L'ingresso costituito dal generatore costante E_o da luogo a:

$$E(s) = \frac{E_o}{s}$$

123

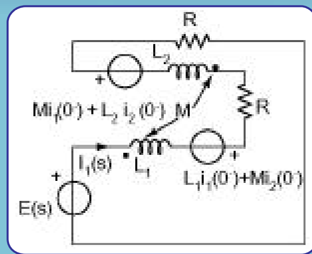
Rete nel dominio di Laplace 1/2

- **utilizzando il circuito equivalente** dei trasformatori risulta:



124

Rete nel dominio di Laplace 2/2



Si ottiene:

$$I(s)=\frac{\frac{E_o}{s}+\left(L_1+M\right)i_1(0_-)+\left(L_2+M\right)i_2(0_-)}{2R+s\left(L_1+L_2+2M\right)}$$

125

Risultato finale

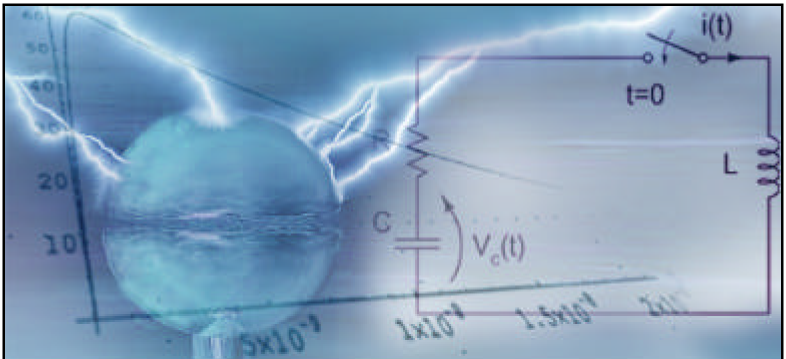
- è richiesto solo il **valore iniziale**:

$$i(0_+)=\lim_{s\to\infty}(sI(s))=\frac{\left(L_1+M\right)i_1(0_-)+\left(L_2+M\right)i_2(0_-)}{L_1+L_2+2M}=$$

$$=\frac{\frac{3}{2}\left(L_1+M\right)+\frac{1}{2}\left(L_2+M\right)}{L_1+L_2+2M}\frac{E_o}{R}\neq i_1(0_+)\neq i_2(0_+)$$

- stato discontinuo (rete degenere!)

126

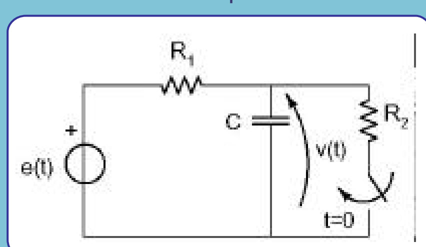


Applicazioni

Ingresso discontinuo

Rete nel dominio del tempo 1/2

- **Calcolare la tensione** v(t) sul condensatore
  - rete nel dominio del tempo



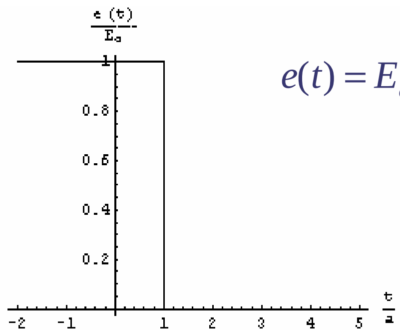
ingresso discontinuo:

$$e(t) = E_o - E_o u(t-a)$$

128

Rete nel dominio del tempo 2/2

Ingresso discontinuo:

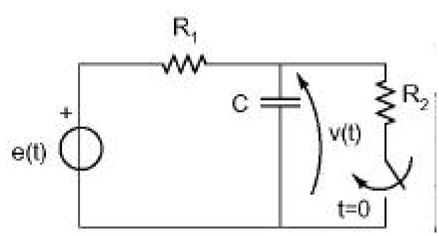


$$e(t) = E_o - E_o u(t-a)$$

129

Calcolo dati nel dominio di Laplace 1/2

- Condizioni iniziali
  - prima dell'apertura dell'interruttore l'ingresso vale E_o da molto tempo
    - regime stazionario: $v(0\_) = E_o$

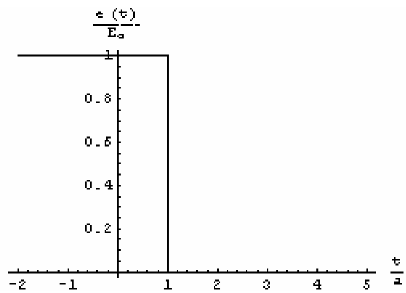


130

Calcolo dati nel dominio di Laplace 2/2

- **Trasformata E(s)** dell'ingresso

$$e(t) = E_o - E_o u(t-a)$$

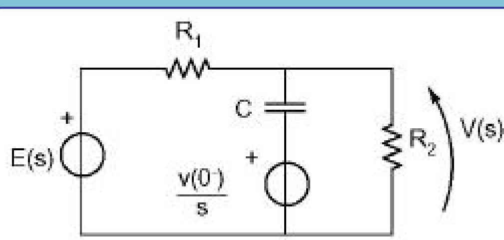


$$E(s) = \frac{E_o}{s} - \frac{E_o}{s} e^{-as}$$

131

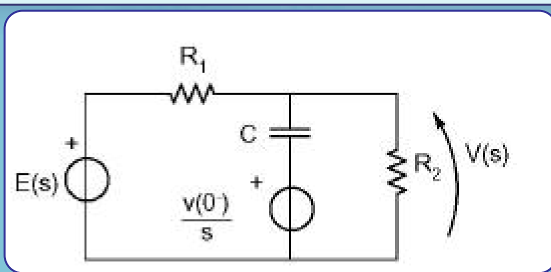
Rete nel dominio di Laplace 1/3

- Rete nel dominio di Laplace



132

Rete nel dominio di Laplace 2/3



- **si ottiene (Millman):**

$$V(s) = \frac{\dfrac{E(s)}{R_1} + sC\dfrac{v(0\_)}{s}}{\dfrac{1}{R_1} + sC + \dfrac{1}{R_2}}$$

133

Rete nel dominio di Laplace 3/3

- **separando il termine esponenziale:**

$$V(s) = \frac{\dfrac{E(s)}{R_1} + sC\dfrac{v(0\_)}{s}}{\dfrac{1}{R_1} + sC + \dfrac{1}{R_2}} =$$

$$= \frac{R_2 + CR_1R_2s}{s(R_1 + R_2 + CR_1R_2s)}E_o - \frac{E_o}{R_1s(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + sC)}e^{-as}$$

$\Uparrow$ Razionale fratta

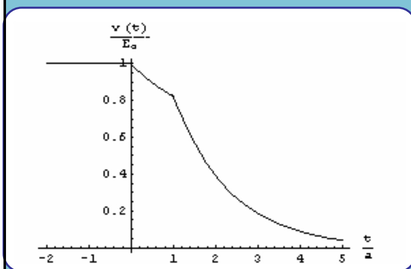
$\Uparrow$ Razionale fratta x esponen.

134

Risultati finali

Antitrasformando:

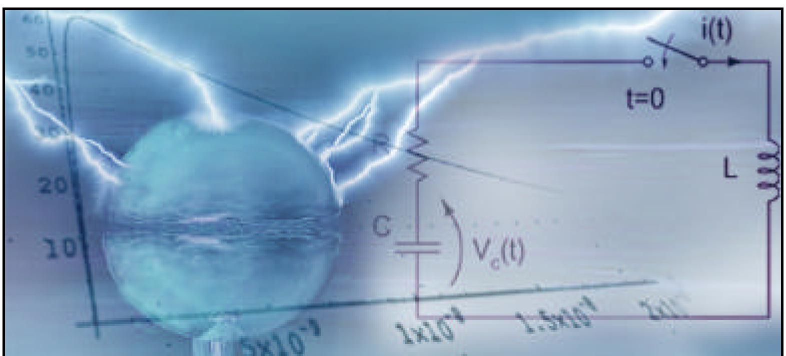
$$v(t) = \frac{R_2 + R_1 e^{-\frac{t}{t}}}{R_2 + R_1} E_o + \frac{R_2(-1 + e^{-\frac{t-a}{t}})}{R_2 + R_1} E_o u(t-a), \qquad t = CR_1 \parallel R_2$$



$$R_1 = 1\Omega, \quad R_2 = 1\Omega, \quad C = 2F$$

- stato continuo **(rete non degenere!)**

135

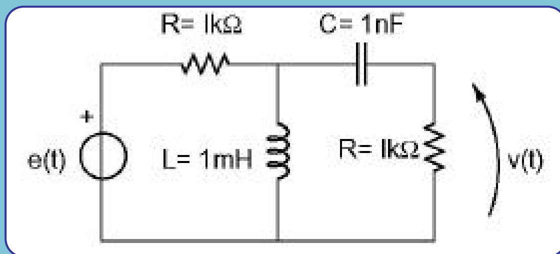


Applicazioni

Ingresso costituito
da impulso triangolare

Rete nel dominio del tempo 1/2

- Calcolare la **tensione v(t)** sul condensatore
  - rete nel dominio del tempo



Ingresso: impulso triangolare

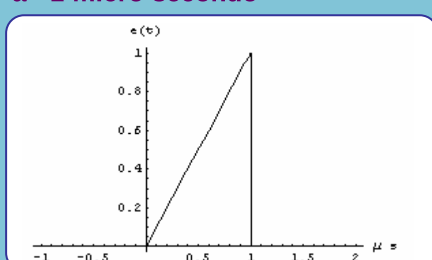
137

Rete nel dominio del tempo 2/2

Ingresso: impulso triangolare

$$e(t) = \frac{M}{a} t \left[u(t) - u(t-a) \right]$$

M=1 V, a= 1 micro secondo



138

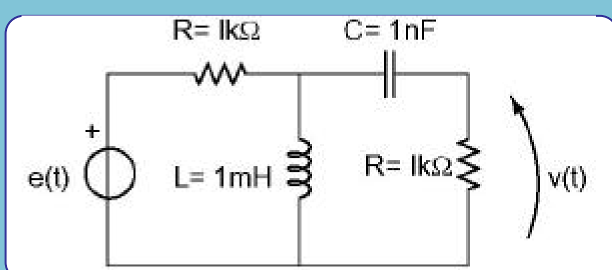
Considerazioni sulle unità di misura

- **I valori dei parametri della rete sono tipici**
  - per non introdurre fastidiose potenze di 10 conviene utilizzare un sistema (coerente) di misure in cui:
    - le correnti si misurano in mA
    - le tensioni si misurano in V
    - i tempi si misurano in micro secondi
    - le frequenze si misurano in MHz
    - le resistenze si misurano in Kilo ohm
    - le induttanze si misurano in mH
    - le capacità si misurano in nF

139

Calcolo dati nel dominio di Laplace 1/2

- **Condizioni iniziali**
  - prima dell'apertura dell'interruttore l'ingresso è nullo da molto tempo
    - induttore e condensatore scarichi
      - condizioni iniziali nulle:



140

Calcolo dati nel dominio di Laplace 2/2

- Trasformata E(s) dell'ingresso e(t)

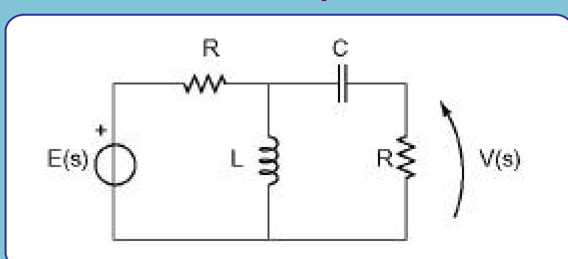
$$e(t) = \frac{M}{a} t\left[u(t) - u(t-a)\right] = t\,u(t) - [1 + (t-1)]u(t-1)$$

$$E(s) = \frac{1}{s^2} - \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)e^{-s} = \frac{1}{s^2} - \frac{s+1}{s^2}e^{-s}$$

141

Rete nel dominio di Laplace 1/3

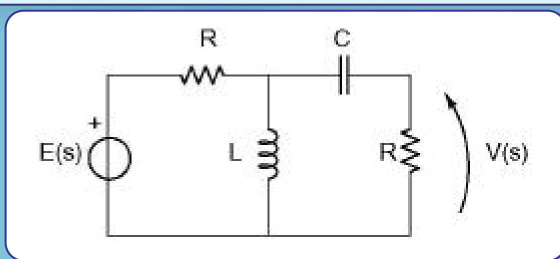
- Rete nel **dominio di Laplace**



- per calcolare V(s) usare cascata di partitori di tensione

142

Rete nel dominio di Laplace 2/3



- **si ottiene:**

$$V(s)=\frac{(R+\frac{1}{sC})||(sL)}{(R+\frac{1}{sC})||(sL)+R}\,\frac{R}{R+\frac{1}{sC}}E(s)$$

143

Rete nel dominio di Laplace 3/3

- separando il termine esponenziale:

$$V(s)=\frac{(R+\frac{1}{sC})||(sL)}{(R+\frac{1}{sC})||(sL)+R}\,\frac{R}{R+\frac{1}{sC}}E(s)=$$

$$=\frac{1}{2s^2+2s+1}-\frac{s+1}{2s^2+2s+1}e^{-s}$$

$$\Uparrow \qquad\qquad \Uparrow$$

Razionale fratta **Razionale fratta x espon.**

144

Antitrasformazione 1/2

Antitrasformazione $V(s)=\dfrac{1}{2s^2+2s+1}-\dfrac{s+1}{2s^2+2s+1}e^{-s}$

- antitrasformazione: $\dfrac{1}{2s^2+2s+1}$
  - poli complessi coniugati $s_{1,2}=\dfrac{-1\pm j}{2}$
  - residuo $R[s_1]=\dfrac{1}{4s_1+2}=-\dfrac{j}{2}$
- si ottiene:

$$\frac{1}{2s^2+2s+1} \Rightarrow 2\mathrm{Re}\{R[s_1]e^{s_1 t}\}=e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

145

Antitrasformazione 2/2

Antitrasformazione $-\dfrac{s+1}{2s^2+2s+1}e^{-s}$

- fattore razionale $-\dfrac{s+1}{2s^2+2s+1}$
  - poli complessi coniugati $s_{1,2}=\dfrac{-1\pm j}{2}$
  - residuo $R_e[s_1]=\dfrac{s_1}{4s_1+2}=\dfrac{-1+j}{4}$
- **si ottiene:**

$$-\frac{s+1}{2s^2+2s+1} \Rightarrow 2\mathrm{Re}\{R[s_1]e^{s_1 t}\}=-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}[\sin\left(\frac{t}{2}\right)+\cos\left(\frac{t}{2}\right)]$$

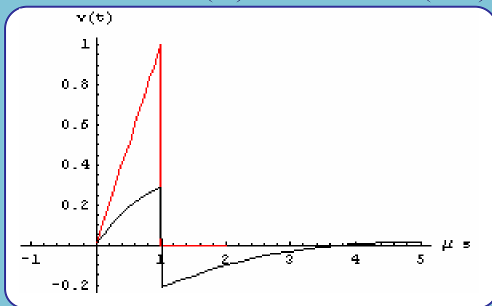
$$-\frac{s+1}{2s^2+2s+1}e^{-s} \Rightarrow -\frac{1}{2}e^{-\frac{t-1}{2}}[\sin\left(\frac{t-1}{2}\right)+\cos\left(\frac{t-1}{2}\right)]u(t-1)$$

146

Risultati finali

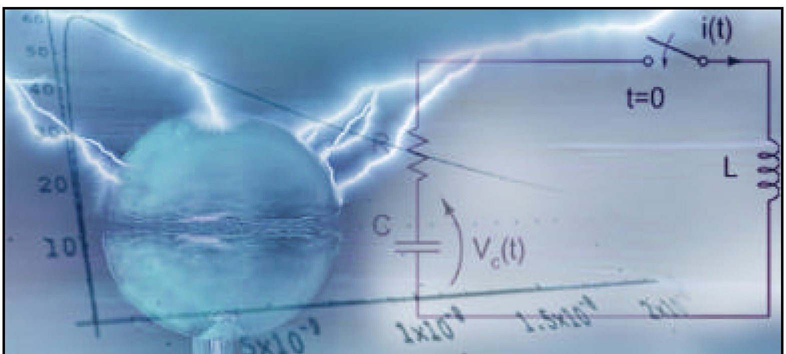
- Risultato finale:

$$v(t) = e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t}{2}\right)u(t) - \frac{1}{2}e^{-\frac{t-1}{2}}\left[\sin\left(\frac{t-1}{2}\right) + \cos\left(\frac{t-1}{2}\right)\right]u(t-1)$$



- uscita discontinua (**non è una variabile di stato!**)

147



Applicazioni

Transitori

Generalità 1/2

- **Reti considerate**: reti passive con ingressi costanti o sinusoidali
  - i contributi associati alle condizioni iniziali sono dei transitori
  - i contributi associati agli ingressi sono in parte transitori, in parte termini a regime

149

Generalità 2/2

- **Contributo all'uscita dell'ingresso**:

$$\underbrace{Y(s)}_{\text{uscita}} = \overbrace{H(s)}^{\text{funzione trasferimento}} \underbrace{S(s)}_{\text{ingresso}}$$

- I poli dell'uscita derivano dai poli della funzione di trasferimento H(s) e dai poli dell'ingresso S(s)

150

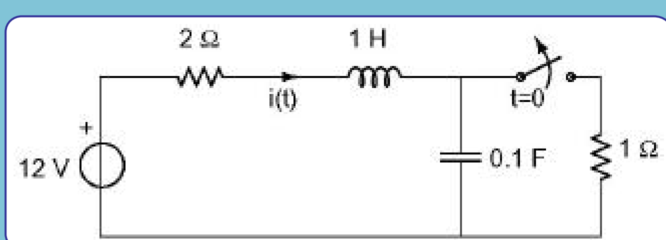
Proprietà poli uscita

- I **poli della funzione di trasferimento** H(s) sono i poli di rete e danno luogo a transitori
- I **poli dell'ingresso S(s)** danno luogo ai termini di regime
  - i contributi dei poli di ingresso coincidono con i contributi di regime e possono essere calcolati in modo più semplice (senza antitrasformare) con il calcolo fasoriale

151

Esempio con ingresso costante 1/6

- **Calcolare la corrente** i(t) erogata dopo l'apertura dell'interruttore
- Rete nel dominio del tempo
- Ingresso: costante 12V

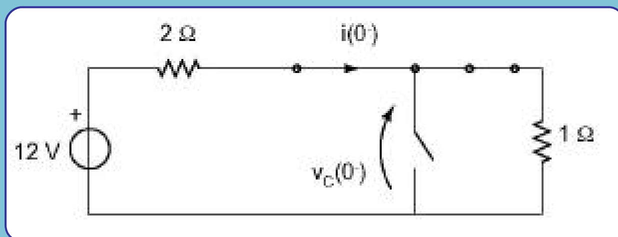


Esempio con ingresso costante 2/6

- **Condizioni iniziali**:
  - induttore è corto circuito
  - condensatore è circuito aperto

$$v_C(0_-)=\frac{1}{1+2}12=4\,V$$

$$i_L(0_-)=i(0_-)=\frac{12}{3}=4\,A$$



153

Esempio con ingresso costante 3/6

- **Trasformata E(s)** dell’ingresso e(t)=12 volt

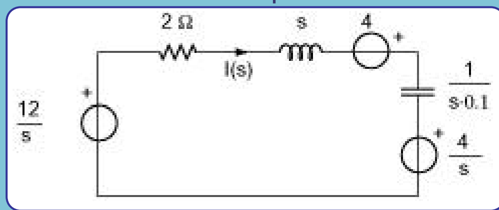
$$e(t)=12\,V \qquad E(s)=\frac{12}{s}$$

- impedenza dell’induttore di 1H: s
- impedenza del condensatore di 0.1F: 10/s

154

Esempio con ingresso costante 4/6

Rete nel dominio di Laplace



- si ottiene:

Razionale fratta

$$I(s) = \frac{\frac{12}{s} + 4 - \frac{4}{s}}{2 + s + \frac{10}{s}} = \frac{4(s+2)}{s^2 + 2s + 10}$$

155

Esempio con ingresso costante 5/6

Antitrasformazione

$$I(s) = \frac{4(s+2)}{s^2 + 2s + 10}$$

- non esiste polo nell'origine dell'ingresso: il termine di regime è nullo!
  - poli di rete complessi coniugati

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-10} = -1 \pm j3$$

  - residuo $R[s_1] = \frac{4(s_1+2)}{2s_1+2} = \frac{4(-1+j3+2)}{2(-1+j3)+2} = 2 - j\frac{2}{3}$

156

Esempio con ingresso costante 6/6

- si ottiene il **transitorio cisoidale**:

$$I(s)=\frac{4(s+1)}{s^2+2s+10} \quad \Rightarrow \quad 2\mathrm{Re}\{R[s_1]e^{s_1 t}\}=$$

$$=i(t)=e^{-t}[4\cos(3t)+\frac{4}{3}\sin(3t)]$$

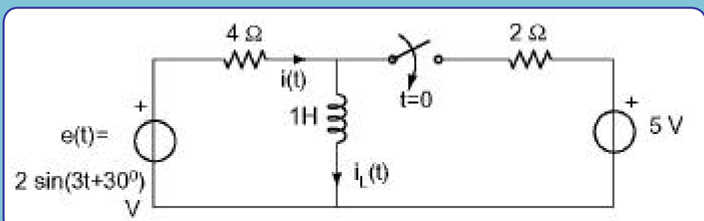
157

Esempio con ingresso sinusoidale 1/9

- **Calcolare** la tensione i(t) erogata dopo la chiusura dell'interruttore
- Rete nel dominio del tempo
  - ingresso: sinusoidale

$$e(t)=2\sin(3t+30^o)$$

$$w=3\ rad/s$$



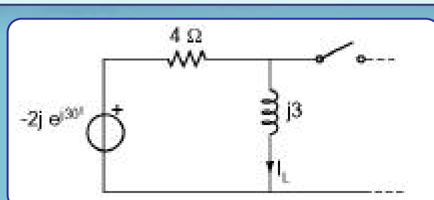
Esempio con ingresso sinusoidale 2/9

Condizioni iniziali:

- prima della chiusura dell'interruttore c'è regime sinusoidale e la rete viene rappresentata nel dominio dei fasori
  - il **generatore vale** $E = -2\,j\,e^{j30^o}$
  - **induttore** (non è corto circuito) ha **impedenza j3**

159

Esempio con ingresso sinusoidale 3/9



$$I_L = \frac{-2\,j\,e^{j30^0}}{4 + j3} = -(\frac{6}{25} + j\,\frac{8}{25})e^{j\,30^0}$$

$$i_L(t) = \mathrm{Re}[I_L e^{jw\,t}] =$$

$$= -\frac{6}{25}\cos(w\,t + 30^0) + \frac{8}{25}\sin(w\,t + 30^0)$$

$$i_L(0\_) = \mathrm{Re}[I_L] = -0.0478 \quad [A]$$

160

Esempio con ingresso sinusoidale 4/9

- Trasformata degli ingressi:

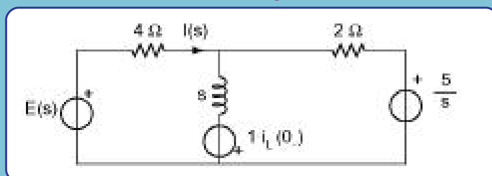
$$e(t) = 2\sin(3t + 30^o) = \sqrt{3}\sin(3t) + \cos(3t)$$

$$E(s) = \sqrt{3}\frac{3}{s^2+9} + \frac{s}{s^2+9} = \frac{3\sqrt{3}+s}{s^2+9}$$

$$5\,V \Rightarrow \frac{5}{s}$$

impedenza dell'induttore di 1H: s

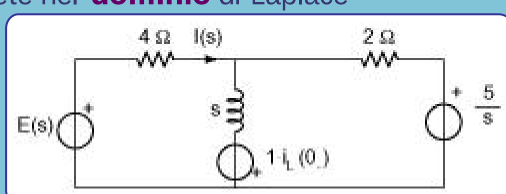
- **rete nel dominio di Laplace**



161

Esempio con ingresso sinusoidale 5/9

- rete nel **dominio** di Laplace



- si ottiene (sovrapposizione degli effetti):

$$I(s) = \frac{E(s)}{4+s\,||2} + \frac{i_L(0\_)}{s+4\,||\,2}\frac{2}{4+2} - \frac{1}{4}\frac{4||\,s}{2+4||\,s}\frac{5}{s} =$$

$$= \frac{(2+s)(3\sqrt{3}+s)}{2(4+3s)(s^2+9)} + \frac{i_L(0\_)}{4+3s} - \frac{5}{2(4+3s)}$$

162

Esempio con ingresso sinusoidale 6/9

Antitrasformazione

$$I(s) = \frac{(2+s)(3\sqrt{3}+s)}{2(4+3s)(s^2+9)} + \frac{i_L(0\_)}{4+3s} - \frac{5}{2(4+3s)}$$

- c'è solo un polo di rete in s_o=-4/3. Il transitorio è dato dal suo contributo
  - residuo $R(s_o) = \frac{(2+s_o)(3\sqrt{3}+s_o)}{2\times 3(s_o^2+9)} + \frac{i_L(0\_)}{3} - \frac{5}{2\times 3} = -0.8095$
  - si ottiene il transitorio:

$$\boxed{i_t(t) = -0.8095 e^{s_o t} = -0.8095 e^{-4t/3}}$$

163

Esempio con ingresso sinusoidale 7/9

Termine di regime

$$I(s) = \frac{(2+s)(3\sqrt{3}+s)}{2(4+3s)(s^2+9)} + \frac{i_L(0\_)}{4+3s} - \frac{5}{2(4+3s)}$$

- invece di calcolare i residui, è più veloce calcolare direttamente i termini di regime
  - principio di sovrapposizione degli effetti

$$i_p(t) = i'_p(t) + i''_p(t)$$

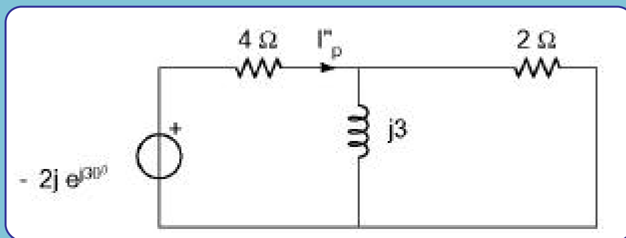
- non c'è contributo in continua sull'uscita

$$i'_p(t) = 0$$

164

Esempio con ingresso sinusoidale 8 / 9

- Per il **contributo in alternata**



$$I''_p = \frac{-2\,j\,e^{j30^o}}{4+(j3)\,||\,2} = 0.127 - j0.343$$

165

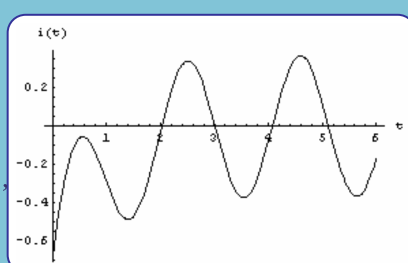
Esempio con ingresso sinusoidale 9 / 9

$$I''_p = \frac{-2\,j\,e^{j30^o}}{4+(j3)\,||\,2} = 0.127 - j0.343$$

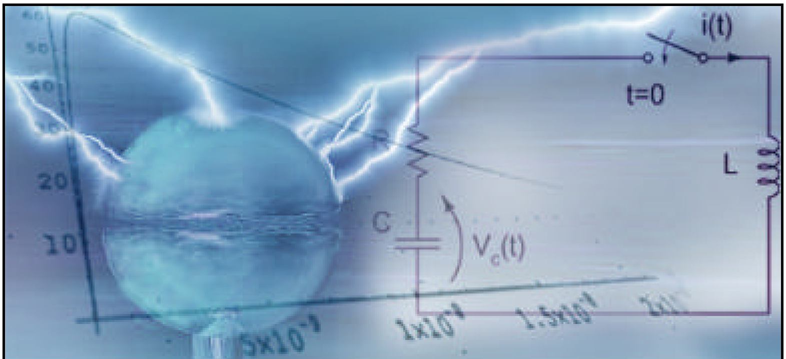
$$i_p(t) = 0.127\cos(3t) + 0.343\sin(3t)$$

- **Espressione finale:**

$$i(t) = i_t(t) + i_p(t) =$$
$$= -0.8095\,e^{-4t/3} +$$
$$+0.127\cos(3t) + 0.343\sin(3t),$$
$$t > 0$$

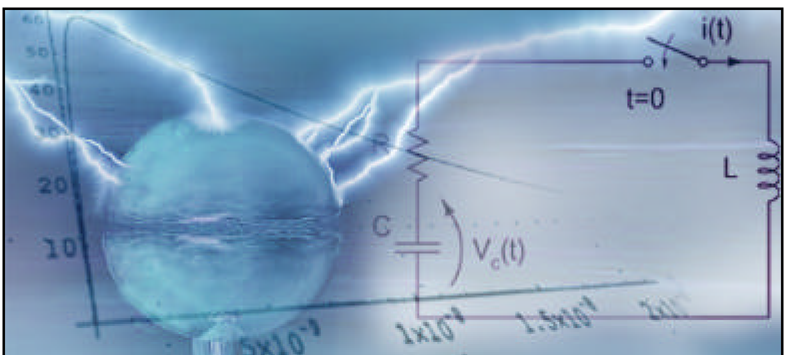


166



Reti nel dominio delle frequenze

Trasformate di Fourier

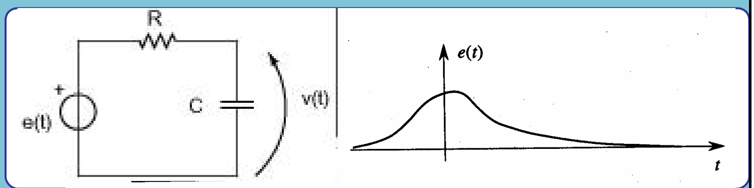


Trasformate di Fourier

Definizioni e proprietà

Scopo

- Si consideri il circuito con ingresso arbitrario



169

Rappresentazione di segnali con sinusoidi

- Integrale di Fourier

$$f(t) = \int_0^{\infty} F_M(w)\cos[wt + j(w)]dw = \int_0^{\infty} f_w(t)dw$$

- ogni funzione è somma di (infinite) sinusoidi elementari:

pulsazione

$$\Downarrow$$

$$f_w(t) = F_M(w)\cos\left[wt + j(w)\right]$$

$$\Uparrow \qquad \Uparrow$$

Valor massimo **fase**

170

Modulo e Fase delle sinusoidi 1/2

$$f(t) = \int_0^{\infty} f_w(t)dw \qquad f_w(t) = F_M(w)\cos\left[wt + j(w)\right]$$

- Le funzioni rappresentabili con integrale di Fourier sono le **distribuzioni temperate (segnali)**
- La pulsazione **varia in generale con continuità** da zero ad infinito

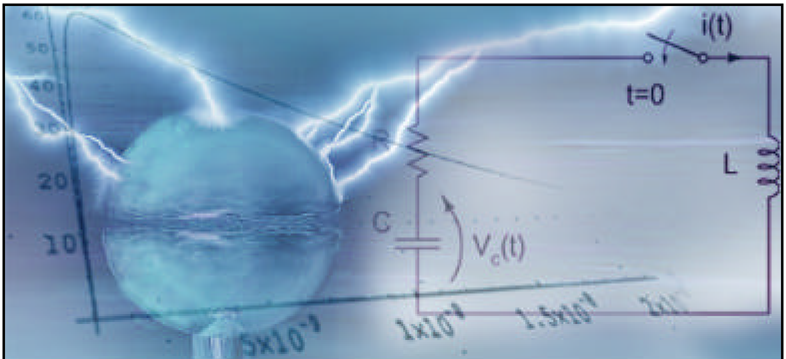
171

Modulo e Fase delle sinusoidi 2/2

- Il valor massimo e la fase delle sinusoidi elementari sono funzioni della pulsazione e si calcolano con la formula

$$F_w = F_M(w)e^{jj(w)} = \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jwt}dt$$

172



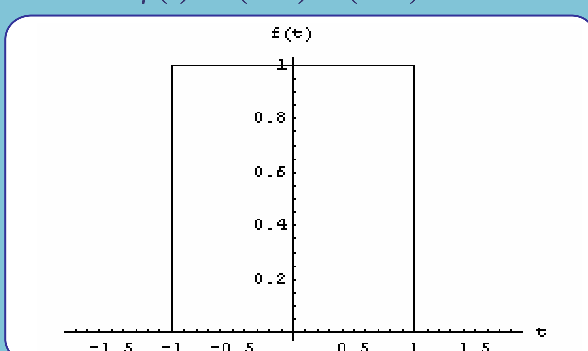
Trasformate di Fourier

Impulso rettangolare

Rappresentazione nel tempo

- **Rappresentare** con integrale di Fourier l'impulso rettangolare

$$f(t) = u(t+1) - u(t-1)$$



174

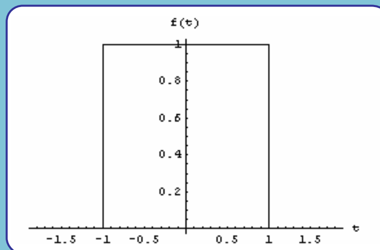
Rappresentazione nelle pulsazioni

- **Risulta** $f(t) = \int_0^{\infty} f_w(t)dw$

$$f_w(t) = F_M(w)\cos[wt + j(w)]$$

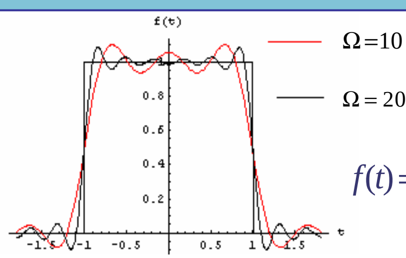
$$F_w = \frac{1}{p}\int_{-1}^{1} e^{-jwt}dt = 2\frac{\sin(w)}{p\,w}$$

$$F_M(w) = 2\left|\frac{\sin(w)}{p\,w}\right|, \quad j(w) = 0, p$$



Approssimazione con intervallo finito

- **Approssimazione dell'integrale di Fourier**
  - nei casi pratici l'intervallo di integrazione infinito $0 \le w \le \infty$ viene approssimato con un intervallo di integrazione $0 \le w \le \Omega$ finito ma continuo



$$f(t) = \int_0^{\infty} f_w(t)dw \approx \int_0^{\Omega} f_w(t)dw$$

176

Numero finito di pulsazioni 1/2

- **Approssimando successivamente l'integrale** con una somma, il numero di sinusoidi che rappresenta un segnale è finito

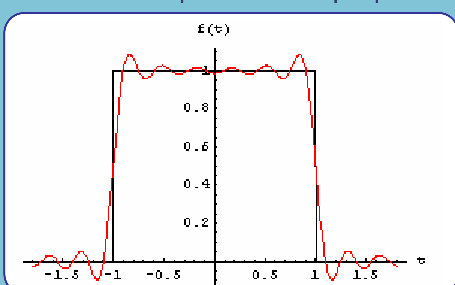
$$f(t) = \int_0^{\infty} f_w(t)dw \approx \int_0^{\Omega} f_w(t)dw \approx h\sum_{i=0}^{\frac{\Omega}{h}} f_{ih}(t)$$

  - l'impulso rettangolare è approssimato con Ω/h sinusoidi con pulsazioni equispaziate di h

177

Numero finito di pulsazioni 2/2

- **L'impulso rettangolare** è approssimato con Ω/h sinusoidi con pulsazioni equispaziate di h

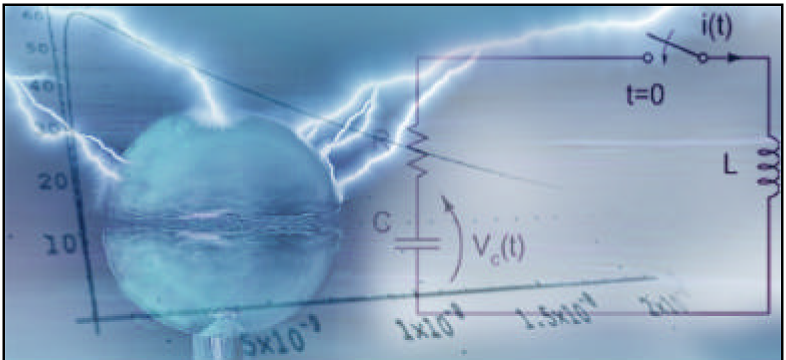


$$\Omega = 20$$

$$h = 1/10$$

Il segnale in rosso è la sovraprosizione di 200 sinusoidi elementari equispaziate (a partire dalla pulsazione nulla) di 0.1 rad/s

178



Trasformate di Fourier

Generalità sul metodo di Fourier

Descrizione

- **Calcolare** l'uscita di una rete con ingresso costituito da un segnale arbitrario
  - **approssimare** gli ingressi con funzioni sinusoidali elementari
  - **calcolare** l'uscita relativa ad ognuna delle sinusoidi elementare con il metodo dei fasori
  - **sommare** le uscite così ottenute

Il procedimento è esatto se le funzioni elementari sono infinite cioè sono riferite a tutte le pulsazioni variabili con continuità da zero ad infinito

180

Integrale e Trasformata di Fourier 1/2

- Da un punto di vista matematico è preferibile introdurre l'integrale di Fourier nella forma:

$$f(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{jwt} dw$$

  - si introducono anche **pulsazioni negative**!

181

Integrale e Trasformata di Fourier 2/2

- Viene definita la seguente **trasformata di Fourier:**

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jwt} dt$$

  - la trasformata di Fourier è in sostanza il fasore associato alla **sinusoide elementare**

$$f_w(t) = F_M(w) \cos\left[wt + j(w)\right]$$

presente nel segnale

182

Serie di Fourier 1/2

- **Se il segnale f(t) è periodico** di periodo T: f(t+T)=f(t)
  - la trasformata di Fourier è costituita da infiniti impulsi

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jwt} dt = 2p \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m d(w - m w_o)$$

$$dove: \qquad w_o = \frac{2p}{T}, \qquad F_m = \frac{1}{T} \int_o^T f(t) e^{-jmw_o t} dt$$

183

Serie di Fourier 2/2

- L'integrale di Fourier diviene una serie: **la serie di Fourier**

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{jmw_o t}$$

- Le funzioni sinusoidali elementari presenti nel segnale si chiamano armoniche e costituiscono un insieme discreto (ancorchè infinito) anzichè continuo

184

Spettri di segnali 1/2

- Si definiscono due **spettri**:
  - **spettro di ampiezza** $|F(w)|$
    - lo spettro di ampiezza molte volte si esprime in dB
    - lo spettro di ampiezza si misura con l'analizzatore di spettro (la misura è in dB)
  - **spettro di fase** $\langle F(w)$

185

Spettri di segnali 2/2

- Lo spettro (di ampiezza) può essere:
  - **continuo**:
    - nella trasformata di Fourier non esistono impulsi
  - **a righe**
    - nella trasformata di Fourier son presenti solo impulsi (esempio negli spettri delle funzioni periodiche)
  - **misto**

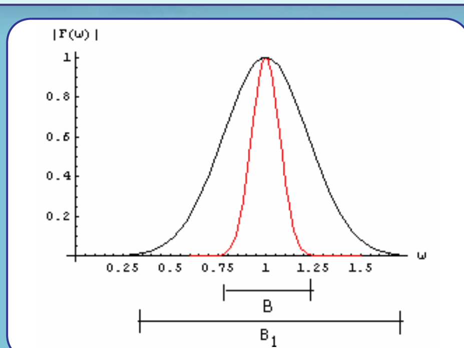
186

Banda di segnali 1/2

- Teoricamente un **segnale contiene** tutte le frequenze da zero ad infinito
  - in pratica ci si limita a considerare solo gli intervalli di frequenza dove gli spettri di ampiezza sono significativi
  - tali intervalli definiscono le bande del segnale

187

Banda di segnali 2/2



Il segnale il cui spettro è indicato in **rosso** ha una banda B più stretta di quella B_1 del segnale con spettro indicato in nero

188