Lezione 13

Elementi di controllo digitale

Realizzazione dei regolatori

Il progetto del regolatore come è stato impostato nelle precedenti lezioni si conclude con la determinazione della funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore stesso. Tuttavia la funzione di trasferimento costituisce soltanto un formalismo matematico per descrivere il comportamento dinamico di un sistema, a partire dal quale occorre **realizzare** un dispositivo avente quel comportamento dinamico, ed atto alla regolazione del processo sotto controllo.

Il modo più naturale di procedere sembra quello di realizzare, in una qualunque tecnologia (elettronica, pneumatica, fluidica) un sistema che presenti la stessa funzione di trasferimento ottenuta dal progetto, ed interfacciarlo con il trasduttore della misura della variabile controllata, da un lato, e con l'attuatore, dall'altro. Questo è il principio che sta alla base dei **sistemi di controllo analogici**.

Tuttavia, negli ultimi decenni, l'avvento ed il successivo impetuoso sviluppo delle tecnologie digitali hanno indotto i progettisti dei sistemi di controllo ad un crescente interesse verso l'utilizzo dei calcolatori, in particolare dei microprocessori, all'interno dell'anello di controllo. I **sistemi di controllo digitale**, dopo le iniziali difficoltà legate principalmente alla, giustificata, riluttanza del mondo industriale ad abbandonare soluzioni tecnologicamente assestate a favore di altre basate su tecnologie emergenti, hanno via via soppiantato i sistemi di controllo analogici, che oggi sopravvivono soprattutto in applicazioni in cui le bande richieste agli anelli di controllo renderebbero antieconomico il passaggio alla tecnologia digitale (esempi si hanno nel campo del controllo dei motori elettrici).

Inserimento del calcolatore in un anello di controllo

Un calcolatore opera, in istanti di tempo discreti, su variabili rappresentate da numeri con precisione finita (dipendente dal numero di bit), ossia su cosiddetti **segnali digitali**. Le variabili di ingresso ed uscita del sistema sotto controllo sono invece funzioni del tempo (continuo), sono cioè cosiddetti **segnali analogici**. Sono segnali analogici anche le misure delle grandezze fornite dai trasduttori, come pure i segnali di comando degli attuatori. L'inserimento del calcolatore nell'anello di controllo comporta allora l'adozione di dispositivi per la conversione dei segnali analogici in segnali digitali e viceversa.

Tali dispositivi prendono il nome, rispettivamente, di:

convertitori A/D (analogico/digitale)

convertitori D/A (digitale/analogico).

Uno schema di massima di un sistema di controllo digitale sarà quindi il seguente (dove μ*P* indica il microprocessore):

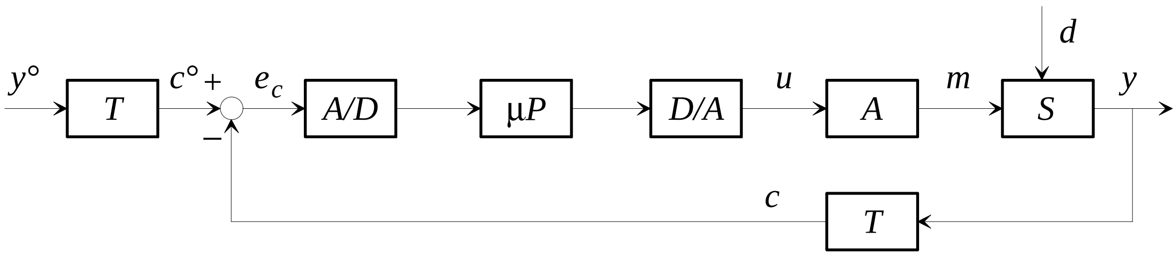

Fig. 1 : Sistema di controllo digitale

Conversione A/D: il campionamento

Si consideri un generico segnale analogico $v(t)$, $t \in \Re$. Si fissi un'origine per l'asse dei tempi e, a partire da tale istante (t=0), si considerino istanti di tempo distanti l'uno dall'altro per un intervallo T_C. Si valuti quindi il segnale $v(t)$ in corrispondenza di tutti questi istanti:

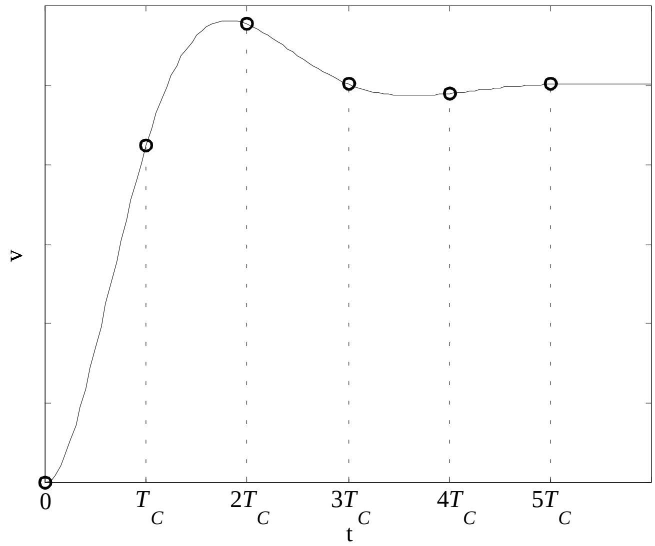

Fig. 2 : Campionamento

Si otterrà una sequenza (o successione) di numeri che indichiamo con:

$$v^*(k) = v(kT_C), \quad k = 0,1,2,\ldots$$

La sequenza di numeri $v^*(k)$ si chiama **segnale campionato**.

L'operazione compiuta prende il nome di **campionamento** del segnale continuo v.

L'intervallo di tempo T_C si dice **periodo** (o **tempo**, o **intervallo**) **di campionamento**.

L'inverso del periodo di campionamento, $f_C = 1/T_C$ si chiama **frequenza di campionamento**.

La pulsazione corrispondente $\Omega_C = 2\pi/T_C$ si chiama **pulsazione di campionamento**, mentre la pulsazione $\Omega_N = \Omega_C/2 = \pi/T_C$ prende il nome di **pulsazione di Nyquist**.

Nella conversione analogico/digitale è anche inevitabile una *quantizzazione* del segnale, cioè la suddivisione dell'insieme dei valori che può assumere il segnale in un numero finito di intervalli, ciascuno associato ad un numero espresso in bit. Nel seguito non ci occuperemo degli effetti della quantizzazione, ritenendo l'insieme in cui varia v^* identico a quello in cui prende valori v.

Si intuisce che all'operazione di campionamento è generalmente associata una perdita di informazione, rispetto al segnale originario analogico. Non sembra infatti possibile compiere l'operazione inversa, ossia risalire univocamente dal segnale campionato al segnale originario, dal momento che diversi segnali analogici, anche molto differenti tra loro, possono dar luogo allo stesso segnale campionato:

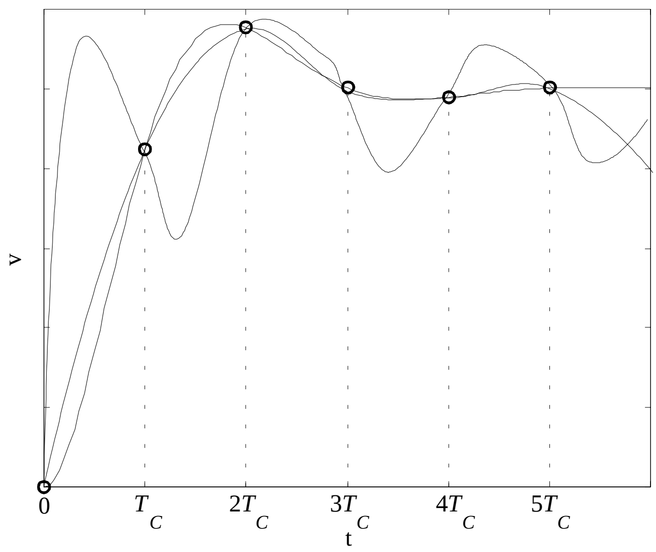

Fig. 3 : Segnali analogici che danno luogo allo stesso segnale campionato

In particolare, campionando un segnale sinusoidale con determinati periodi di campionamento, si può ottenere un segnale campionato che esibisce una oscillazione di lungo periodo, del tutto assente nel segnale originario:

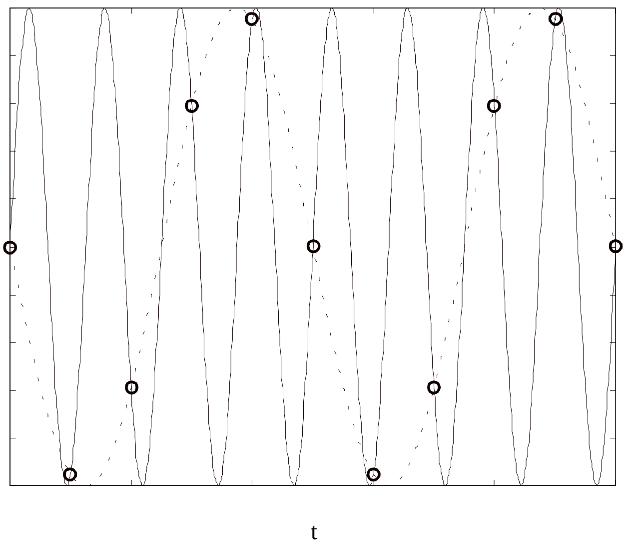

Fig. 4 : Aliasing

Questo fenomeno, detto **aliasing**, impone che il periodo di campionamento sia adeguato alle caratteristiche del segnale soggetto al campionamento. Il campionamento deve essere sufficientemente fitto (e quindi il periodo di campionamento sufficientemente piccolo) da cogliere anche le variazioni più rapide del segnale.

E' abbastanza evidente che per campionare correttamente un segnale sinusoidale occorrono almeno due campioni per periodo. Detto $\overline{T}$ il periodo della sinusoide si avrà quindi:

$$\overline{T} > 2T_C \quad \Rightarrow \quad 2\pi/\overline{T} < \pi/T_c,$$

ossia, detta $\overline{\omega} = 2\pi/\overline{T}$ la pulsazione della sinusoide:

$\overline{\omega} < \Omega_N$.

Se ora si ricorda che un generico segnale a tempo continuo si può scomporre in serie o integrale (a seconda che sia periodico o aperiodico) di infinite sinusoidi (componenti armoniche), si perviene al seguente risultato:

Teorema di Shannon (o del campionamento)

Se il segnale soggetto a campionamento $v(t)$ non ha componenti armoniche a pulsazioni superiori alla pulsazione di Nyquist $\Omega_N=\pi/T_c$ (segnale a **banda limitata**), allora la conoscenza del segnale campionato $v^*(k)$, con periodo di campionamento T_C, consente di ricostruire esattamente il segnale originario $v(t)$, ossia segnale campionato e segnale soggetto al campionamento sono informativamente equivalenti.

Se è rispettata la condizione del teorema del campionamento, deve essere possibile ricostruire, a partire dalla sequenza completa dei campioni del segnale campionato $v^*(k)$, il segnale originario $v(t)$ ad ogni istante. La formula che risolve il problema è la **formula di Shannon**:

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[v^*(k) \frac{\sin(\Omega_N t - k\pi)}{\Omega_N t - k\pi} \right].$$

Scelto il periodo di campionamento del convertitore A/D, è anche possibile forzare il segnale di ingresso al soddisfacimento della condizione del teorema del campionamento, filtrando il segnale stesso con un filtro passabasso. Tale filtro, che va sotto il nome di **filtro antialiasing**, avrà pulsazione di taglio inferiore alla pulsazione di Nyquist, in modo da tagliare le componenti ad alta frequenza del segnale.

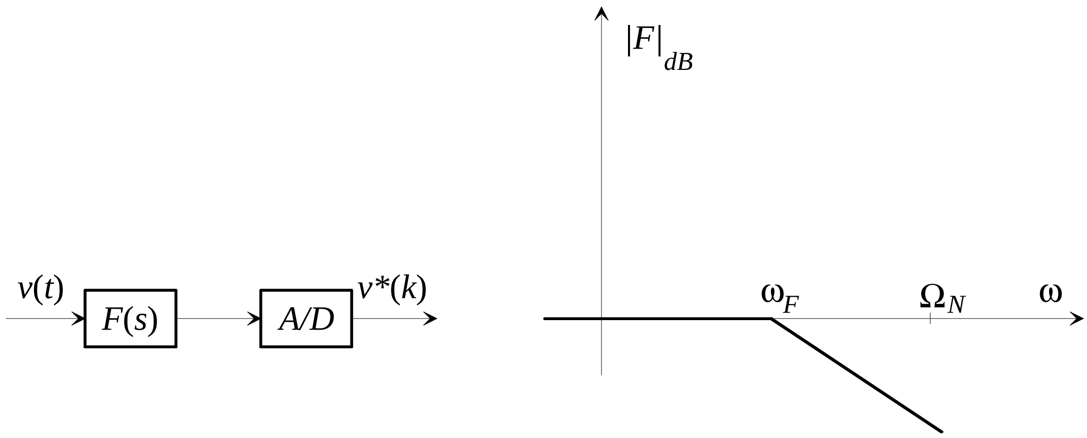

Fig. 5 : Filtro anti-aliasing

Conversione D/A

La conversione digitale/analogico consiste nel ricavare da una sequenza di valori $v^*(k)$ cui è associata una base dei tempi, un segnale a tempo continuo, che negli istanti associati ai valori $v^*(k)$, assuma gli stessi valori della sequenza data.

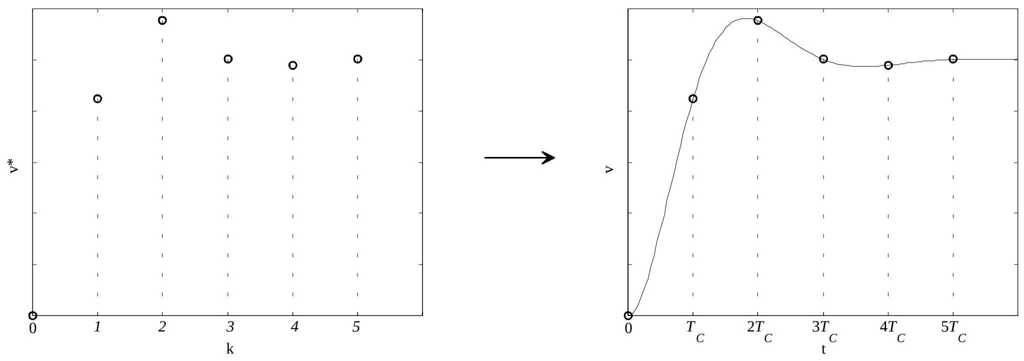

Fig. 6 : Conversione D/A

La formula di Shannon risolverebbe il problema generando un segnale a banda limitata: tuttavia non è utilizzabile negli schemi di controllo digitale in quanto **non causale**. Il valore di $v(t)$, a ciascun istante di tempo, dipende infatti da tutti i valori di $v^*(k)$, in particolare anche da quelli associati ad istanti successivi a t. Il calcolatore impiegato nel controllo digitale, operando in tempo reale, non può disporre che dei valori passati della variabile di controllo da convertire. Per risolvere il problema si usano allora degli **estrapolatori**, ossia dei dispositivi che sulla base di un certo numero di campioni (i più recenti elaborati dal dispositivo di controllo digitale), determinano il valore che dovrà assumere l'uscita del convertitore fino al successivo campione.

In particolare la soluzione più comunemente utilizzata consiste semplicemente nel mantenere costante l'ultimo campione in tutto l'intervallo di campionamento:

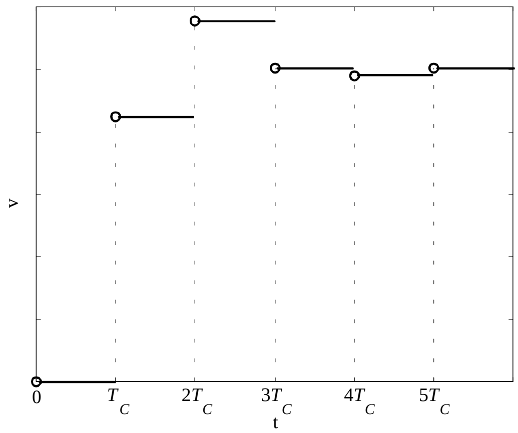

Fig. 7 : Mantenitore di ordine zero

Il dispositivo che realizza questa operazione si chiama **Mantenitore di ordine zero** o **ZOH** (**Z**ero **O**rder **H**old). Si osservi che l'operazione introduce un certo ritardo del segnale a tempo continuo ottenuto, rispetto a quello ottenibile via decampionatore di Shannon. Tale ritardo è quantificabile in circa metà del periodo di campionamento.

Scelta del periodo di campionamento

Per quanto detto finora, un sistema di controllo digitale può essere schematizzato come segue:

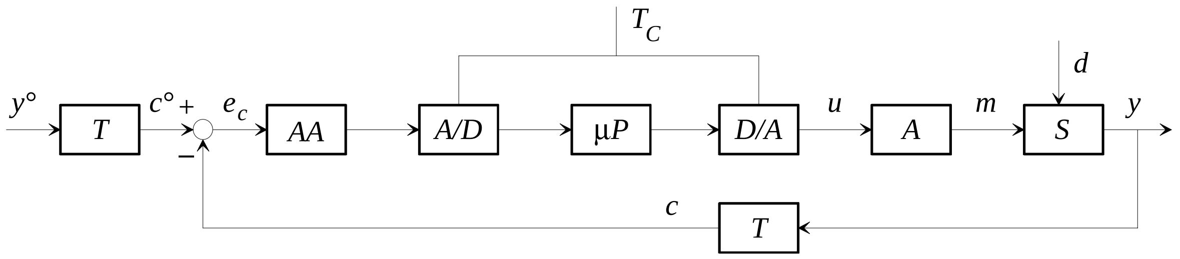

Fig. 8 : Sistema di controllo digitale

Nello schema si è evidenziato che i convertitori A/D e D/A operano con lo stesso passo di campionamento e in modo sincrono (con la stessa origine dell'asse dei tempi). Inoltre si è messo in evidenza un eventuale filtro antialiasing (*AA*) da porre a monte del convertitore A/D.

Ci si pone ora il problema della **scelta** del **periodo di campionamento**. E' noto che in un sistema di controllo le componenti armoniche significative dei segnali risiedono nella banda passante del sistema di controllo, il cui estremo superiore è di norma ben approssimato dalla pulsazione critica ω_c . Per rispettare la condizione del teorema di Shannon occorrerà allora che la pulsazione critica sia decisamente inferiore alla pulsazione di Nyquist:

$\omega_c << \Omega_N$.

Un buon criterio è che le due pulsazioni siano separate da una decade ($\Omega_N / \omega_c = 10$).

In presenza di disturbi con componenti armoniche di alta frequenza o di componenti in alta frequenza del segnale di riferimento (che non interessa riprodurre in uscita) è opportuno anteporre al convertitore A/D un **filtro antialiasing**. La pulsazione di taglio del filtro dovrà essere superiore a ω_c (per non tagliare componenti armoniche significative del segnale da campionare) ma inferiore a Ω_N (per rispettare la condizione del teorema del campionamento):

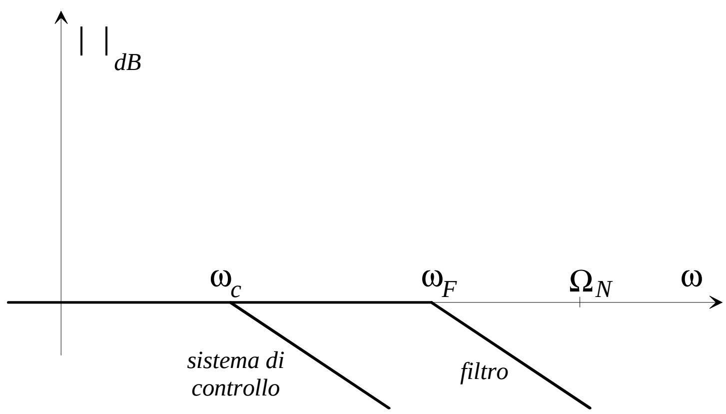

Fig. 9 : Filtro antialiasing

Si osservi che in fase di progetto del regolatore $R(s)$ occorrerà prevedere un'eccedenza di margine di fase necessaria a coprire lo sfasamento indotto dall'eventuale filtro antialiasing e dal ritardo introdotto dall'operazione di mantenimento (ZOH).

Discretizzazione della legge di controllo

Il calcolatore nel sistema di controllo digitale riceve i campioni dell'errore tra riferimento e variabile controllata e deve produrre i campioni della variabile di controllo, da passare al convertitore D/A (ZOH). Nel compiere questa operazione, il calcolatore deve fare in modo che il legame dinamico esistente tra il segnale errore e la variabile di controllo sia quanto più possibile simile a quello determinato dalla funzione di trasferimento $R(s)$ a tempo continuo progettata per il regolatore:

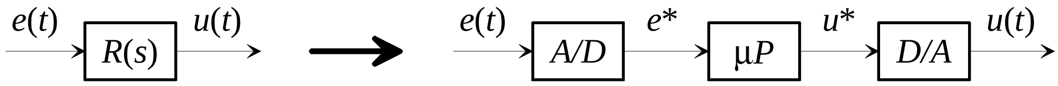

Fig. 10 : Discretizzazione della legge di controllo

Si risolve il problema ricordando che la funzione di trasferimento non è altro che un formalismo comodo per rappresentare un sistema di equazioni differenziali lineari:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + b_1 e(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + b_2 e(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + b_n e(t) \end{cases}$$

$$u(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \ldots + c_n x_n(t) + d e(t)$$

A questo punto, il sistema viene discretizzato con una delle formule note dal calcolo numerico. Le equazioni risultanti sono immediatamante traducibili in un programma di calcolo, codificabile in un qualunque linguaggio di programmazione. Si osservi la flessibilità dell'operazione: cambiamenti nei parametri del regolatore si traducono in cambiamenti di dati del programma (inseribili anche da tastiera), mentre cambiamenti nella legge di controllo si operano semplicemente modificando (e ricompilando) il programma.

Consideriamo per esempio un regolatore PI:

$$R(s) = K_P + \frac{K_I}{s}.$$

Una realizzazione in variabili di stato del regolatore è la seguente:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= e(t) \\ u(t) &= K_I x(t) + K_P e(t) \end{aligned}.$$

Adottando la formula di discretizzazione dei trapezi (nota come formula di **Tustin** nell'ambito dei controlli automatici), otteniamo:

$$\begin{aligned} x^*(k) &= x^*(k-1) + \frac{T_C}{2}\left(e^*(k) + e^*(k-1)\right) \\ u^*(k) &= K_I x^*(k) + K_P e^*(k) \end{aligned}$$

dove $e^*(k) = e(kT_C)$, $u^*(k) = u(kT_C)$.

Le equazioni discretizzate sono traducibili nel seguente programma, da eseguire ad ogni

istante di campionamento:

```
input yref, y
e := yref-y
state := state + Tc/2*(e+eold)
u := KI*state + KP*e
eold := e
```