Analisi Matematica 3
per Ingegneria dell'Automazione (2007/08)

Trasformata di Laplace

Esercizio 1. Determinare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni:

(1.1) $t(\sin(t))^2$ $\left[\dfrac{6s^2+8}{s^2(s^2+4)^2}\right]$

(1.2) $t^2\cos(2t)$ $\left[\dfrac{2s(s^2-12)}{(s^2+4)^3}\right]$

(1.3) $\sin(2t)u(t-\dfrac{\pi}{2})$ $\left[-\dfrac{2e^{-\pi s/2}}{s^2+4}\right]$

(1.4) $2(\cosh(2t))^2-\sinh(4t)$ $\left[\dfrac{2s+4}{s(s+4)}\right]$

(1.5) $(t+2)e^t$ $\left[\dfrac{2s-1}{(s-1)^2}\right]$

(1.6) $te^{2t}\cos(t)$ $\left[\dfrac{s^2-4s+3}{(s^2-4s+5)^2}\right]$

(1.7) $(\cos(t))^3$ $\left[\dfrac{s(s^2+7)}{(s^2+1)(s^2+9)}\right]$

(1.8) $(2t-3)u(t-2)-(t-2)u(t-3)$ $\left[\dfrac{e^{-2s}-e^{-3s}}{s}+\dfrac{2e^{-2s}-e^{-3s}}{s^2}\right]$

(1.9) $f(t)=\begin{cases} 2+t & \text{per } 0\le t<2 \\ 6-t & \text{per } t\ge 2\end{cases}$ $\left[\dfrac{2}{s}+\dfrac{1-2e^{-2s}}{s^2}\right]$

(1.10) $f(t)=\begin{cases} t+1 & \text{per } t<3 \\ 4 & \text{per } 3\le t<4 \\ t & \text{per } t\ge 4\end{cases}$ $\left[\dfrac{1}{s}+\dfrac{1-e^{-3s}+e^{-4s}}{s^2}\right]$

(1.11) $f(t)=\begin{cases} 1-t^2 & \text{per } 0\le t<1 \\ 0 & \text{per } 1\le t<3 \\ 2(t-3) & \text{per } t\ge 3\end{cases}$ $\left[\dfrac{1}{s}+2\dfrac{e^{-s}+e^{-3s}}{s^2}-2\dfrac{1-e^{-s}}{s^3}\right]$

Esercizio 2. Determinare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni:

(2.1) $f_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \le t < 2 \\ -1 & \text{per } 2 \le t < 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

e l'estensione periodica di f_0 ristretta a $[0, 4)$ $\left[\dfrac{\tanh(s)}{s}\right]$

(2.2) $f_0(t) = \begin{cases} t & \text{per } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

e l'estensione periodica di f_0 ristretta a $[0, 1)$ $\left[\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s(e^s - 1)}\right]$

(2.3) $f_0(t) = \begin{cases} t & \text{per } 0 \le t < 1 \\ 2 - t & \text{per } 1 \le t < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

e l'estensione periodica di f_0 ristretta a $[0, 2)$ $\left[\dfrac{\tanh(s/2)}{s^2}\right]$

(2.4) $f_0(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{per } 0 \le t < \pi \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

e l'estensione periodica di f_0 ristretta a $[0, 2\pi)$ $\left[\dfrac{1}{(s^2+1)(1 - e^{-\pi s})}\right]$

(2.5) $f(t) = |\sin(t)|$ $\left[\dfrac{1}{(s^2+1)\tanh(\pi s/2)}\right]$

(2.6) $f(t) = |\cos(t)|$ $\left[\dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{1}{(s^2+1)\sinh(\pi s/2)}\right]$

Esercizio 3. Determinare la trasformata inversa di Laplace delle seguenti funzioni:

(3.1) $\dfrac{3}{s^2+4}$ $\left[\dfrac{3}{2}\sin(2t)\right]$

(3.2) $\dfrac{4}{(s-1)^3}$ $\left[2t^2 e^t\right]$

(3.3) $\dfrac{2e^{-5s}}{(s+2)^2}$ $\left[2(t-5)e^{-2(t-5)}u(t-5)\right]$

(3.4) $\dfrac{2s+1}{s^2-2s+2}$ $\left[e^t(2\cos t + 3\sin t)\right]$

(3.5) $\dfrac{2s+2}{s^2+2s+5}$ $\left[2e^{-t}\cos(2t)\right]$

(3.6) $\dfrac{s^2+2s}{s^2+4s+5}$ $\left[\delta(t) - 2e^{-2t}(2\cos t + \sin t)\right]$

(3.7) $\dfrac{8s^2-4s+12}{s(s^2+4)}$ $[3 + 5\cos(2t) - 2\sin(2t)]$

(3.8) $\dfrac{10s}{(s-1)(s^2+4s+5)}$ $\left[e^t + e^{-2t}(7\sin t - \cos t)\right]$

(3.9) $\dfrac{2e^{-s}}{s^3+3s^2+2s}$ $\left[u(t-1)(1-e^{-(t-1)})^2\right]$

(3.10) $\dfrac{1}{((s+1)^2+4)^2}$ $\left[\dfrac{e^{-t}}{16}(\sin(2t) - 2t\cos(2t))\right]$

(3.11) $\dfrac{4s}{(s^2-4)^2}$ $[t\sinh(2t)]$

Esercizio 4. Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

(4.1) $\ddot{x}(t) + 9x(t) = 5\cos(2t)$ con $x(0) = 5$ e $\dot{x}(0) = 0$ $[x(t) = 4\cos(3t) + \cos(2t)]$

(4.2) $\ddot{x}(t) + x(t) = \delta(t-1)$ con $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$ $[x(t) = \sin(t-1)u(t-1)]$

(4.3) $\ddot{x}(t) + x(t) = u(t-2)$ con $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$ $[x(t) = (1-\cos(t-2))u(t-2)]$

(4.4) $\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + 2x(t) = 5\cos(t)$ con $x(0) = 5$ e $\dot{x}(0) = 0$

$\left[x(t) = e^t(4\cos t - 2\sin t) + \cos t - 2\sin t\right]$

(4.5) $\ddot{x}(t) + x(t) = 2e^{-t} - 4\delta(t-1)$ con $x(0) = -2$ e $\dot{x}(0) = 0$

$\left[x(t) = \sin t - 3\cos t + e^{-t} - 4\sin(t-1)u(t-1)\right]$

(4.6) $\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + 2x(t) = 5e^{-t}$ con $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 5$

$\left[x(t) = e^t(7\sin t - \cos t) + e^{-t}\right]$

(4.7) $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 4e^{-t}$ con $x(0) = 2$ e $\dot{x}(0) = -1$ $\left[x(t) = e^{-t}(2t^2 + t + 2)\right]$

(4.8) $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 2u(t-2)$ con $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 2$

$\left[x(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} + (1-e^{-(t-2)})^2\, u(t-2)\right]$

(4.9) $\ddot{x}(t) + x(t) = t(u(t) - u(t-1)) + u(t-1)$ con $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$

$[x(t) = t + (\sin(t-1) - (t-1))u(t-1)]$

(4.10) $\ddot{x}(t) - x(t) = 2\delta(t-1)$ con $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$

$[x(t) = \cosh t + 2\sinh(t-1)u(t-1)]$

(4.11) $\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + x(t) = 2u(t-1) + 2\delta(t-1)$ con $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$

$$\left[x(t) = e^t(1-t) + 2(1 + (2t-3)e^{t-1})u(t-1)\right]$$

(4.12) $x^{(4)}(t) - x(t) = 8e^{-t}$ con $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 8$, $\ddot{x}(0) = 0$ e $x^{(3)}(0) = 0$

$$\left[x(t) = 3e^t + 2\sin t + 2\cos t - e^{-t}(2t+5)\right]$$

(4.13) $x^{(4)}(t) + 5\ddot{x}(t) + 4x(t) = 12(1 - u(t-\pi))$ con $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = x^{(3)}(0) = 0$

$$[x(t) = 3 - 4\cos t + \cos(2t) - (3 + 4\cos t + \cos(2t))u(t-\pi)]$$

Esercizio 5. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni differenziali:

(5.1) $\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) \end{cases}$ con $x(0) = 0$ e $y(0) = 1$ $\quad [x(t) = \sin t,\ y(t) = \cos t]$

(5.2) $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$ con $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$ $\quad \left[x(t) = e^t\cos t,\ y(t) = e^t\sin t\right]$

(5.3) $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - y(t) \\ \dot{y}(t) = 9x(t) + y(t) \end{cases}$ con $x(0) = 3$ e $y(0) = 3$

$$\left[x(t) = e^t(3\cos(3t) - \sin(3t)),\ y(t) = e^t(3\cos(3t) + 9\sin(3t))\right]$$

(5.4) $\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$ con $x(0) = 2$ e $y(0) = 0$

$$\left[x(t) = e^{3t} + e^t,\ y(t) = e^{3t} - e^t\right]$$

(5.5) $\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) + y(t) + 9t \\ \dot{y}(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$ con $x(0) = 0$ e $y(0) = 9$

$$\left[x(t) = 5e^{3t} - 5 - 6t,\ y(t) = 5e^{3t} + 4 + 3t\right]$$

(5.6) $\begin{cases} \ddot{x}(t) + \dot{y}(t) = -e^{-t} \\ \dot{x}(t) - y(t) = 1 - e^{-t} \end{cases}$ con $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$ e $y(0) = 1$

$$\left[x(t) = t + 1,\ y(t) = e^{-t}\right]$$

(5.7) $\begin{cases} \ddot{x}(t) = -2x(t) + y(t) \\ \ddot{y}(t) = x(t) - 2y(t) \end{cases}$ con $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 3$, $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = -3$

$$\left[x(t) = \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t),\ y(t) = -\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)\right]$$

(5.8) $\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) + 2\sin(t) \end{cases}$ con $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$

$$[x(t) = \sin t - t\cos t,\ y(t) = t\sin t]$$

Esercizio 6. Calcolare la convoluzione $h(t) = (f \star g)(t)$ per le seguenti coppie di funzioni:

(6.1) $f(t) = tu(t)$ e $g(t) = tu(t)$ $\quad \left[h(t) = \dfrac{t^3}{6}\right]$

(6.2) $f(t) = tu(t)$ e $g(t) = t^2u(t)$ $\quad \left[h(t) = \dfrac{t^4}{12}\right]$

(6.3) $f(t) = u(t) - u(t-1)$ e $g(t) = u(t) - u(t-1)$
$\quad [h(t) = t - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)]$

(6.4) $f(t) = e^{3t}u(t)$ e $g(t) = e^{4t}u(t)$ $\quad \left[h(t) = e^{4t} - e^{3t}\right]$

(6.5) $f(t) = e^{2t}u(t)$ e $g(t) = e^{2t}u(t)$ $\quad \left[h(t) = te^{2t}\right]$

(6.6) $f(t) = \sin(t)u(t)$ e $g(t) = \cos(t)u(t)$ $\quad \left[h(t) = \dfrac{1}{2}t\sin(t)\right]$