

Modulo 9

I sistemi lineari

U.D. 1

La trasformata di Laplace

9.1.1 Introduzione

Lo studio del comportamento di un sistema nel dominio del tempo e nel dominio della frequenza richiede la conoscenza dei numeri complessi, delle funzioni di variabile complessa e dei metodi di soluzione delle equazioni differenziali. Per consentire al lettore di comprendere alcuni degli argomenti trattati in questo testo, si ritiene opportuno richiamare le operazioni fondamentali che possono essere eseguite con i numeri complessi, esaminare alcuni concetti elementari relativi alle funzioni di variabile complessa e formalizzare le proprietà fondamentali della trasformata di Laplace. La trattazione di tali argomenti non è certamente esaustiva, ma ha lo scopo di fornire al lettore alcune conoscenze di base perché egli possa applicare con sicurezza e padronanza i metodi di calcolo che frequentemente ricorrono nella teoria dei sistemi.

9.1.2 Proprietà e teoremi della trasformata di Laplace

- **La trasformata di Laplace della derivata prima** di una funzione $f(t)$ è uguale alla differenza tra il prodotto $s \cdot F(s)$, ottenuto moltiplicando la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$ e la variabile complessa s , e il valore $f(0)$ assunto dalla funzione $f(t)$ all'istante $t=0$:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot L[f(t)] - f(0) = s \cdot F(s) - f(0)$$

e se $f(0) = 0$ si ha:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot F(s)$$

Determinare il circuito equivalente del sistema rappresentato in figura 9.1.1 nell'ipotesi che all'istante $t=0$ sia $i(0) = I_0$.

Il modello matematico del sistema di figura 9.1.1 è:

$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

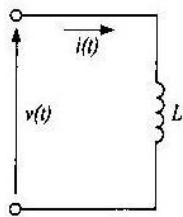


Fig. 9.1.1

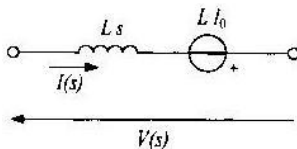


Fig. 9.1.2

Considerando la condizione iniziale e applicando la proprietà della trasformata della derivata si ha:

$$V(s) = L \cdot s \cdot I(s) - L \cdot i_0 \quad [9.1.1]$$

La [9.1.1] può essere rappresentata con il circuito di figura 9.1.2.

- **La trasformata di Laplace dell'integrale di una funzione $f(t)$** è uguale alla somma ottenuta addizionando la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$ divisa la variabile complessa s e il termine $\frac{f^{-1}(0)}{s}$:

$$L\left[\int f(t) \cdot dt\right] = \frac{1}{s} \cdot F(s) + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

dove $f^{-1}(0) = \int f(t) \cdot dt \Big|_{t=0}$ è il valore della primitiva in corrispondenza di $t = 0$.

Se $f^{-1}(0) = 0$, la trasformata di Laplace dell'integrale è uguale a $\frac{1}{s} \cdot F(s)$.



Determinare il circuito equivalente del sistema rappresentato nella figura 9.1.3 nell'ipotesi che all'istante $t = 0$ sia $v(0) = V_0$.

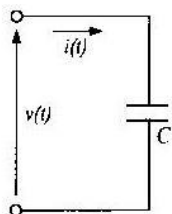


Fig. 9.1.3

Il modello matematico del circuito di figura 9.1.3 è:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt \quad [9.1.2]$$

Tenendo presente la condizione iniziale e applicando la proprietà della trasformata di Laplace dell'integrale si ha:

$$V(s) = \frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s) + \frac{V_0}{s} \quad [9.1.3]$$

La [9.1.3] è rappresentata con il circuito di figura 9.1.4.

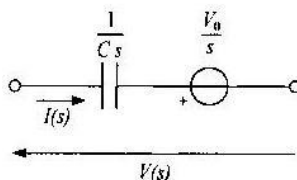


Fig. 9.1.4

La trasformata di una funzione $f(t) = \begin{cases} f(t-T) & \text{per } t > T \\ 0 & \text{per } t < T \end{cases}$ traslata di un

intervallo T (fig. 9.1.5), è uguale al prodotto della trasformata di Laplace della funzione $f(t)$ e del termine $e^{-T \cdot s}$:

$$L[f(t-T)] = L[f(t)] \cdot e^{-T \cdot s} = e^{-T \cdot s} \cdot F(s)$$

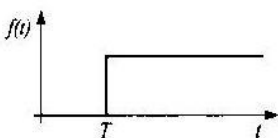


Fig. 9.1.5

Calcolare la trasformata di Laplace del segnale rappresentato in figura 9.1.6.

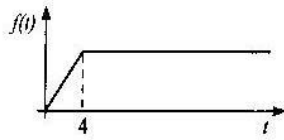


Fig. 9.1.6

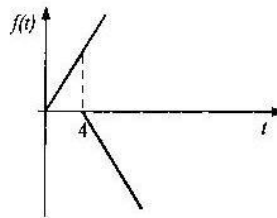


Fig. 9.1.7

Per le sue caratteristiche il segnale di figura 9.1.6 può essere rappresentato con quello di figura 9.1.7 perché è costituito:

- da una rampa $f_1(t)$ che ha origine all'istante $t=0$ s e coefficiente angolare $m_1 = 0,25$;
- da una rampa $f_2(t-4)$ che ha origine all'istante $t=4$ s e coefficiente angolare $m_2 = -0,25$.

Applicando il teorema della traslazione si ha:

$$L[f(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t-4)]$$

$$F(s) = 0,25 \cdot \frac{1}{s^2} - 0,25 \cdot \frac{e^{-4s}}{s^2}$$

$$F(s) = \frac{0,25}{s^2} \cdot (1 - e^{-4s})$$

La trasformata del prodotto ottenuto moltiplicando le funzioni $e^{+a \cdot t}$ e $f(t)$ con a costante, è uguale a

$$L[e^{+a \cdot t} \cdot f(t)] = \begin{cases} F(s-a) & \text{per } a > 0 \\ F(s+a) & \text{per } a < 0 \end{cases}$$

9.1.3 Antitrasformata di Laplace di una funzione $F(s)$ con poli reali multipli

La trasformata di Laplace, come già detto, semplifica la risoluzione di problemi reali perché riconduce le equazioni integro-differenziali a equazioni algebriche che permettono di trovare facilmente la soluzione di un problema nel dominio della variabile complessa s . Si ricorda che da tale soluzione si ottiene poi la risposta nel dominio del tempo con l'operazione di antitrasformazione:

$$L^{-1}[F(s)] = f(t)$$

dove L^{-1} è l'operatore di antitrasformazione di Laplace.

Una funzione $F(s)$ che presenta un polo di ordine r o molteplicità r rispetto al numero n di poli complessivi può essere generalizzata nella seguente forma:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1) \cdot (s-p_2) \cdot \dots \cdot (s-p_i)^r \cdot (s-p_n)} \quad [9.1.4]$$

dove p_1, p_2, \dots, p_n sono poli semplici e p_i è un polo con molteplicità r . Sviluppando la [9.1.4] nella somma di frazioni parziali si ha:

$$F(s) = \frac{a_1}{s-p_1} + \frac{a_2}{s-p_2} + \frac{a_i}{s-p_i} + \dots + \frac{c_r}{(s-p_i)^r} + \frac{c_{r-1}}{(s-p_i)^{r-1}} + \dots + \frac{c_1}{s-p_i} + \frac{a_n}{s-p_n}$$

I coefficienti a_1, a_2, \dots, a_n si calcolano applicando il procedimento esaminato precedentemente, mentre i coefficienti c_r, c_{r-1}, \dots, c_1 sono uguali a

$$c_r = \lim_{s \rightarrow p_i} (s-p_i)^r \cdot F(s)$$

$$c_{r-1} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{d}{ds} (s-p_i)^r \cdot F(s)$$

$$c_{r-2} = \frac{1}{2!} \cdot \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{d^2}{ds^2} (s-p_i)^r \cdot F(s)$$

$$c_1 = \frac{1}{(r-1)!} \cdot \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} (s-p_i)^r \cdot F(s)$$

Dopo aver calcolato tutti i coefficienti, il procedimento di antitrasformazione per ottenere la funzione $f(t)$ è analogo a quello precedentemente esaminato.

Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione:

$$F(s) = \frac{(s+4)}{(s+1)^2 \cdot (s+3)} \quad [9.1.5]$$

La funzione $F(s)$ presenta uno zero reale e negativo $z_1 = -4$, un polo doppio reale e negativo $p_1 = p_2 = -1$, un polo reale e negativo $p_3 = -3$.

Sviluppando la [9.1.5] in frazioni parziali si ha:

$$F(s) = \frac{c_2}{(s+1)^2} + \frac{c_1}{(s+1)} + \frac{a_1}{(s+3)} \quad [9.1.6]$$

I residui c_2 , c_1 e a_1 sono uguali a

$$c_2 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)^2 \cdot \frac{(s+4)}{(s+1)^2 \cdot (s+3)} = +1,5$$

$$c_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} (s+1)^2 \cdot \frac{(s+4)}{(s+1)^2 \cdot (s+3)} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \frac{(s+4)}{(s+3)}$$

$$c_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \frac{(s+4)}{(s+3)} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{(s+3) - (s+4)}{(s+3)^2} = -0,25$$

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3) \cdot \frac{(s+4)}{(s+1)^2 \cdot (s+3)} = 0,25$$

Sostituendo i residui c_2 , c_1 e a_1 nella [9.1.6] si ha:

$$F(s) = \frac{1,5}{(s+1)^2} + \frac{-0,25}{(s+1)} + \frac{0,25}{(s+3)} \quad [9.1.7]$$

L'antitrasformata di Laplace di ambo i membri della [9.1.7] è uguale a

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(s)] &= L^{-1} \left[\frac{1,5}{(s+1)^2} + \frac{-0,25}{(s+1)} + \frac{0,25}{(s+3)} \right] = \\ &= L^{-1} \left[\frac{1,5}{(s+1)^2} \right] + L^{-1} \left[\frac{-0,25}{(s+1)} \right] + L^{-1} \left[\frac{0,25}{(s+3)} \right] \end{aligned}$$

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1} \left[\frac{1,5}{(s+1)^2} \right] + L^{-1} \left[\frac{-0,25}{(s+1)} \right] + L^{-1} \left[\frac{0,25}{(s+3)} \right]$$

$$f(t) = 1,5 \cdot t \cdot e^{-t} - 0,25 \cdot e^{-t} + 0,25 \cdot e^{-3 \cdot t}$$

Tab. 9.1.1 Trasformata di Laplace delle funzioni più note.

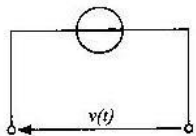
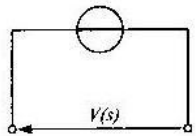
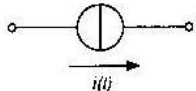
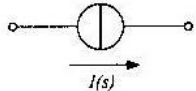
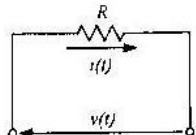
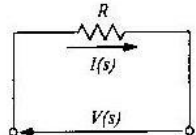
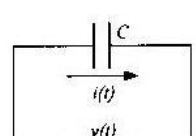
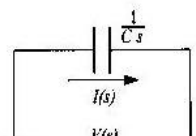
N°	Trasformata di Laplace $F(s)$	Funzione del tempo $f(t)$
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{s}$	1
3	$\frac{a}{s}$	a
4	$\frac{1}{s^2}$	t
5	$\frac{k}{s^2}$	$k \cdot t$
6	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-a \cdot t}$
7	$\frac{b}{s+a}$	$b \cdot e^{-a \cdot t}$
8	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} \cdot t^{n-1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} \cdot e^{-a \cdot t}$
10	$\frac{1}{s \cdot (s+a)}$	$\frac{1}{a} \cdot (1 - e^{-a \cdot t})$
11	$\frac{b}{s \cdot (s+a)}$	$\frac{b}{a} \cdot (1 - e^{-a \cdot t})$
12	$\frac{1}{s \cdot (1 + \tau \cdot s)}$	$\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
13	$\frac{a}{s \cdot (1 + \tau \cdot s)}$	$a \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
14	$\frac{1}{(s+a) \cdot (s+b)}$	$\frac{1}{b-a} \cdot (e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t})$
15	$\frac{c}{(s+a) \cdot (s+b)}$	$\frac{c}{b-a} \cdot (e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t})$
16	$\frac{s}{(s+a) \cdot (s+b)}$	$\frac{a}{a-b} \cdot e^{-a \cdot t} + \frac{b}{b-a} \cdot e^{-b \cdot t}$
17	$\frac{k \cdot s}{(s+a) \cdot (s+b)}$	$k \cdot \left[\frac{a}{a-b} \cdot e^{-a \cdot t} + \frac{b}{b-a} \cdot e^{-b \cdot t} \right]$
18	$\frac{(1 + \tau \cdot s)}{(1 + \tau_1 \cdot s) \cdot (1 + \tau_2 \cdot s)}$	$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \left[\left(1 - \frac{\tau}{\tau_1}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \left(1 - \frac{\tau}{\tau_2}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right]$

(segue)

(continua Tab. 9.1.1)

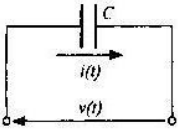
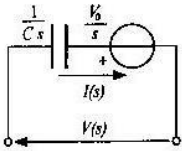
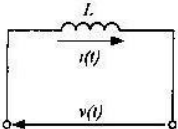
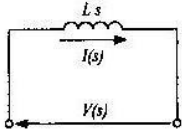
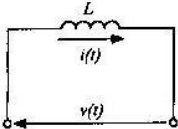
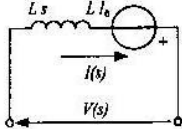
N°	Trasformata di Laplace $F(s)$	Funzione del tempo $f(t)$
19	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\text{sen } \omega \cdot t$
20	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega \cdot t$
21	$\frac{\omega^2}{s \cdot (s^2 + \omega^2)}$	$1 - \cos \omega \cdot t$
22	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$e^{-a \cdot t} \cdot \text{sen } \omega \cdot t$
23	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$e^{-a \cdot t} \cdot \cos \omega \cdot t$

Tab. 9.1.2

Componente	Modello matematico	Modello equivalente del componente	Trasformata di Laplace del modello matematico
	$v(t)$		$V(s)$
	$i(t)$		$I(s)$
	$v(t) = R \cdot i(t)$		$V(s) = R \cdot I(s)$
	$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt$ $v(0) = 0$		$V(s) = \frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s)$

(segue)

(continua Tab. 9.1.1)

Componente	Modello matematico	Modello equivalente del componente	Trasformata di Laplace del modello matematico
	$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt$ $v(0) = V_0$		$V(s) = \frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s) + \frac{V_0}{s}$
	$v(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$ $i(0) = 0$		$V(s) = L \cdot s \cdot I(s)$
	$v(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$ $i(0) = I_0$		$V(s) = L \cdot s \cdot I(s) - L \cdot I_0$

$$v(t) = V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad \Rightarrow \quad \frac{I(s)}{\frac{1}{Cs}} \leftarrow \frac{V_0}{s}$$

$\leftarrow V(s)$

$$i(t) = I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt \quad \Rightarrow \quad \frac{V(s)}{sL} \leftarrow \frac{I_0}{s}$$

$\leftarrow I(s)$

ESERCIZI SVOLTI

Esercizio 1

Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{(3 \cdot s + 5)}{(s^2 + 2 \cdot s + 5)} \quad [9.1.8]$$

La funzione $F(s)$ presenta uno zero reale e negativo $z_1 = -\frac{5}{3}$, e due poli complessi coniugati $p_1 = -1 + j \cdot 2$ e $p_2 = -1 - j \cdot 2$.

Fattorizzando il polinomio al denominatore e sviluppando la [9.1.8] in frazioni parziali si ha:

$$F(s) = \frac{a_1}{(s+1-j \cdot 2)} + \frac{a_2}{(s+1+j \cdot 2)} \quad [9.1.9]$$

I residui a_1 e a_2 sono uguali a:

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow -1+j \cdot 2} (s+1-j \cdot 2) \cdot \frac{(3 \cdot s + 5)}{(s+1-j \cdot 2) \cdot (s+1+j \cdot 2)} = +1,5 - j \cdot 0,5$$

$$a_2 = a_1^* = +1,5 + j \cdot 0,5$$

Sostituendo i residui a_1 e a_2 nella [9.1.9] si ha:

$$F(s) = \frac{1,5 - j \cdot 0,5}{(s+1-j \cdot 2)} + \frac{1,5 + j \cdot 0,5}{(s+1+j \cdot 2)} \quad [9.1.10]$$

L'antitrasformata di Laplace di ambo i membri della [9.1.10] è:

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1} \left[\frac{1,5 - j \cdot 0,5}{(s+1-j \cdot 2)} + \frac{1,5 + j \cdot 0,5}{(s+1+j \cdot 2)} \right]$$

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1} \left[\frac{1,5 - j \cdot 0,5}{(s+1-j \cdot 2)} \right] + L^{-1} \left[\frac{1,5 + j \cdot 0,5}{(s+1+j \cdot 2)} \right]$$

$$f(t) = (1,5 - j \cdot 0,5) \cdot e^{-(1-j \cdot 2) \cdot t} + (1,5 + j \cdot 0,5) \cdot e^{-(1+j \cdot 2) \cdot t}$$

$$f(t) = e^{-t} \cdot [1,5 \cdot (e^{+j \cdot 2 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot t}) - j \cdot 0,5 \cdot (e^{+j \cdot 2 \cdot t} - e^{-j \cdot 2 \cdot t})]$$

Ricordando le formule di Eulero si ha:

$$f(t) = e^{-t} \cdot [3 \cdot \cos(2 \cdot t) + \operatorname{sen}(2 \cdot t)]$$

Esercizio 2

Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{5 \cdot (s+1)}{(s+3) \cdot (s^2 + 4 \cdot s + 8)} \quad [9.1.11]$$

La funzione $F(s)$ presenta uno zero reale e negativo $z_1 = -1$, un polo reale e negativo $p_1 = -3$, e due poli complessi coniugati $p_2 = -2 + j \cdot 2$ e $p_3 = -2 - j \cdot 2$.

Fattorizzando il polinomio al denominatore e sviluppando la [9.1.11] in frazioni parziali si ha:

$$F(s) = \frac{a_1}{s+3} + \frac{a_2}{(s+2-j \cdot 2)} + \frac{a_3}{(s+2+j \cdot 2)} \quad [9.1.12]$$

I residui a_1 , a_2 , a_3 sono uguali a

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3) \cdot \frac{5 \cdot (s+1)}{(s+3) \cdot (s+2-j \cdot 2) \cdot (s+2+j \cdot 2)} = -2$$

$$a_2 = \lim_{s \rightarrow 2+j \cdot 2} (s+2-j \cdot 2) \cdot \frac{5 \cdot (s+1)}{(s+3) \cdot (s+2-j \cdot 2) \cdot (s+2+j \cdot 2)} = 1-j \cdot 0,75$$

$$a_3 = a_2^* = 1+j \cdot 0,75$$

Sostituendo i residui a_1 , a_2 , a_3 nella [9.1.12] si ha:

$$F(s) = \frac{-2}{s+3} + \frac{1-j \cdot 0,75}{(s+2-j \cdot 2)} + \frac{1+j \cdot 0,75}{(s+2+j \cdot 2)} \quad [9.1.13]$$

L'antitrasformata di Laplace di ambo i membri della [9.1.13] è uguale a

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1} \left[\frac{-2}{s+3} + \frac{1-j \cdot 0,75}{(s+2-j \cdot 2)} + \frac{1+j \cdot 0,75}{(s+2+j \cdot 2)} \right] \quad [9.1.14]$$

Tenendo presente che è

$$\underline{\hat{A}} = 1 - j \cdot 0,75 = 1,25 \cdot e^{-j \cdot 36,87^\circ}$$

$$\underline{\hat{A}} = 1 + j \cdot 0,75 = 1,25 \cdot e^{j \cdot 36,87^\circ}$$

dalla [9.1.14] si ricava

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{-2}{s+3} + \frac{1,25 \cdot e^{-j \cdot 36,87^\circ}}{(s+2-j \cdot 2)} + \frac{1,25 \cdot e^{j \cdot 36,87^\circ}}{(s+2+j \cdot 2)}\right]$$

$$f(t) = -2 \cdot e^{-3 \cdot t} + 1,25 \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot [e^{j \cdot (2 \cdot t - 36,87^\circ)} + e^{-j \cdot (2 \cdot t - 36,87^\circ)}]$$

$$f(t) = -2 \cdot e^{-3 \cdot t} + 2,5 \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot \cos(2 \cdot t - 36,87^\circ)$$

$$F(s) = \frac{1}{s \cdot (s+3) \cdot (s+2-j \cdot 2) \cdot (s+2+j \cdot 2)}$$

$$F(s) = \frac{1}{s \cdot (s+3) \cdot (s^2+4)}$$

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s-j \cdot 2} + \frac{D}{s+j \cdot 2}$$

$$f(t) = 2 \cdot A \cdot e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Esercizio 3

Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{1}{s \cdot (s+3) \cdot (s+1)^3}$$

La funzione $F(s)$, già data in forma fattorizzata, presenta due poli reali semplici $p_1 = 0$ $p_2 = -3$, e un polo $p_3 = -1$ reale con molteplicità $r=3$ (polo triplo).

Sviluppando la funzione $F(s)$ nella somma di frazioni si ha:

$$F(s) = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s+3} + \frac{c_3}{(s+1)^3} + \frac{c_2}{(s+1)^2} + \frac{c_1}{s+1} \quad [9.1.15]$$

I coefficienti sono uguali a

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s \cdot (s+3) \cdot (s+1)^3} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3) \cdot \frac{1}{s \cdot (s+3) \cdot (s+1)^3} = \frac{1}{24}$$

$$c_3 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)^3 \cdot \frac{1}{s \cdot (s+3) \cdot (s+1)^3} = -\frac{1}{2}$$

$$c_2 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left[(s+1)^3 \cdot \frac{1}{s \cdot (s+3) \cdot (s+1)^3} \right] = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{-(2 \cdot s+3)}{s^2 \cdot (s+3)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$c_1 = \frac{1}{2!} \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d^2}{ds^2} \left[(s+1)^3 \cdot \frac{1}{s \cdot (s+3) \cdot (s+1)^3} \right] =$$

$$= \frac{1}{2!} \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{-2 \cdot s \cdot (s+3) + 2 \cdot (2 \cdot s+3)^2}{s^3 \cdot (s+3)^3} \right]$$

$$c_1 = \frac{1}{2!} \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{-2 \cdot s \cdot (s+3) + 2 \cdot (2 \cdot s+3)^2}{s^3 \cdot (s+3)^3} \right] = \frac{1}{2!} \lim_{s \rightarrow -1} \frac{6 \cdot (s^2 + 3 \cdot s + 3)}{s^3 \cdot (s+3)^3} = -\frac{3}{8}$$

Sostituendo i coefficienti a_1, a_2, c_3, c_2, c_1 nella [9.1.15], si ottiene:

$$F(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{s+3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{s+1} \quad [9.1.16]$$

L'antitrasformata di Laplace di ambo i membri della [9.1.16] è:

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1} \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{s+3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{s+1} \right]$$

$$L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{3} \cdot L^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] + \frac{1}{24} \cdot L^{-1} \left[\frac{1}{s+3} \right] - \frac{1}{2} \cdot L^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)^3} \right] - \frac{1}{4} \cdot L^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)^2} \right] - \frac{3}{8} \cdot L^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \right]$$

$$f(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{24} \cdot e^{-3t} - \frac{1}{4} \cdot t^2 \cdot e^{-t} - \frac{1}{4} \cdot t \cdot e^{-t} - \frac{3}{8} \cdot e^{-t}$$

Esercizio 4

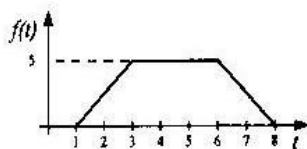


Fig. 9.1.8

Calcolare la trasformata di Laplace del segnale rappresentato in figura 9.1.8.

Per le sue caratteristiche il segnale di figura 9.1.8 è costituito da:

- una rampa $f_1(t)$ che ha origine all'istante $t=1s$ e coefficiente angolare $m_1=2,5$;
- una rampa $f_2(t-3)$ che ha origine all'istante $t=4s$ e coefficiente angolare $m_2=-2,5$;
- una rampa $f_3(t-6)$ che ha origine all'istante $t=6s$ e coefficiente angolare $m_3=-2,5$;
- una rampa $f_4(t-8)$ che ha origine all'istante $t=8s$ e coefficiente angolare $m_4=2,5$;

Applicando il teorema della traslazione si ha:

$$L[f(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t-3)] + L[f_3(t-6)] + L[f_4(t-8)]$$

$$F(s) = \frac{2,5}{s^2} \cdot e^{-s} - \frac{2,5}{s^2} \cdot e^{-3s} - \frac{2,5}{s^2} \cdot e^{-6s} + \frac{2,5}{s^2} \cdot e^{-8s}$$

$$F(s) = \frac{2,5}{s^2} \cdot (e^{-s} - e^{-3s} - e^{-6s} + e^{-8s})$$

Esercizio 5

Calcolare la trasformata di Laplace del segnale rappresentato in figura 9.1.9.

Per le sue caratteristiche il segnale di figura 9.1.10 è costituito:

- da una rampa $f_1(t)$ che ha origine all'istante $t=1$ s e coefficiente angolare $m_1 = \frac{3}{2}$;
- da una rampa $f_2(t-3)$ che ha origine all'istante $t=3$ s e coefficiente angolare $m_2 = -3$.
- da una rampa $f_3(t-5)$ che ha origine all'istante $t=5$ s e coefficiente angolare $m_3 = \frac{3}{2}$.

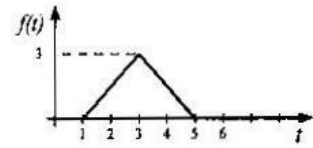


Fig. 9.1.9

Applicando il teorema della traslazione si ha:

$$L[f(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t-3)] + L[f_3(t-5)]$$

$$F(s) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot e^{-s} - 3 \cdot \frac{1}{s^2} \cdot e^{-3s} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot e^{-5s}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot e^{-s} - 3 \cdot e^{-3s} + \frac{3}{2} \cdot e^{-5s} \right)$$

Esercizio 6

Calcolare la trasformata di Laplace del segnale rappresentato in figura 9.1.10.

Per le sue caratteristiche il segnale di figura 9.1.10 è costituito da:

- un gradino $f_1(t)$ che ha origine all'istante $t=2$ s e ampiezza 5;
- un gradino $f_2(t-4)$ che ha origine all'istante $t=4$ s e ampiezza 5.
- un gradino $f_3(t-6)$ che ha origine all'istante $t=6$ s e ampiezza 5.
- un gradino $f_4(t-8)$ che ha origine all'istante $t=8$ s e ampiezza -15.

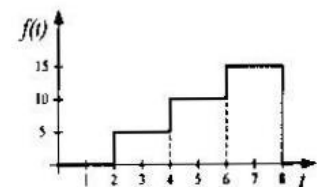


Fig. 9.1.10

Applicando il teorema della traslazione si ha:

$$L[f(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t-4)] + L[f_3(t-6)] + L[f_4(t-8)]$$

$$F(s) = \frac{5}{s} \cdot e^{-2s} + \frac{5}{s} \cdot e^{-4s} + \frac{5}{s} \cdot e^{-6s} - \frac{15}{s} \cdot e^{-8s}$$

$$F(s) = \frac{5}{s} \cdot (e^{-2s} + e^{-4s} + e^{-6s} - 3 \cdot e^{-8s})$$

U.D. 2

La risposta dei sistemi lineari nel dominio del tempo

9.2.1 Introduzione

Nel primo volume sono stati esaminati semplici sistemi lineari del primo e del secondo ordine con l'intento di fornire le conoscenze di base necessarie ad affrontare le prime problematiche relative alla teoria dei sistemi.

Per poter valutare le caratteristiche di un sistema è importante, però, conoscere la sua evoluzione quando esso è sottoposto alla variazione della grandezza d'ingresso o ad una perturbazione dovuta a segnali di disturbo. In tali condizioni il sistema subisce una evoluzione di durata limitata nel tempo, o *fase transitoria*, al termine della quale esso deve raggiungere uno stato di regime perché la sua struttura non subisca danneggiamenti. Sebbene nella pratica i sistemi fisici reali sono sottoposti a segnali d'ingresso in parte non prevedibili e non esprimibili mediante funzioni matematiche ben definite, per valutare le caratteristiche della risposta di un sistema sono utilizzati oltre al segnale a gradino anche il segnale a rampa, l'impulso e la sinusoide.

In questa unità didattica saranno ripresi e formalizzati alcuni degli argomenti trattati nel primo volume: in particolare saranno studiati i sistemi lineari e invarianti nel tempo del secondo ordine e quelli con «condizioni iniziali non nulle».

9.2.2 Sistemi del 2° ordine

I sistemi del secondo ordine, come si ricorderà dagli esempi riportati nel primo volume, sono riconoscibili perché il loro modello matematico è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine o un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine. In questo paragrafo sarà studiata

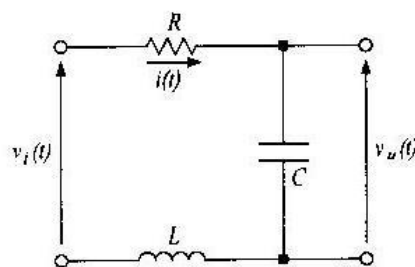


Fig. 9.2.1

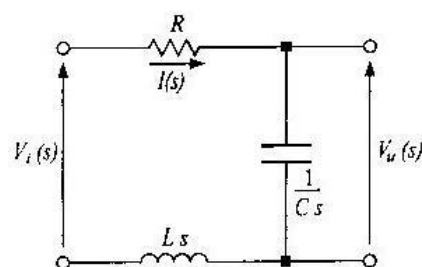


Fig. 9.2.2

la risposta completa di un sistema elettrico del secondo ordine sollecitato da un segnale a gradino. Si tenga presente che i risultati dell'analisi possono essere estesi a qualsiasi sistema lineare del secondo ordine il quale sia invariante nel tempo (meccanico, idraulico, termico, ecc...).

Si consideri il sistema di figura 9.2.1, già esaminato nel primo volume, e siano nulle le condizioni iniziali, sia cioè $v_c(0) = 0$ e $i(0) = 0$. Applicando la legge di Ohm al circuito trasformato di figura 9.2.2 si ricava:

$$V_i(s) = s^2 \cdot L \cdot C \cdot V_u(s) + s \cdot R \cdot C \cdot V_u(s) + V_u(s)$$

La funzione di trasferimento del sistema è:

$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s^2 \cdot L \cdot C + s \cdot R \cdot C + 1} \quad [9.2.1]$$

Raccogliendo $L \cdot C$ e ordinando si ottiene:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s \cdot \frac{R}{L} + \frac{1}{L \cdot C}} \quad [9.2.2]$$

Posto $\frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \omega_n$ e $\frac{R}{L} = 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n$ la [9.2.2] diviene:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot s \cdot \zeta \cdot \omega_n + \omega_n^2} \quad [9.2.3]$$

- Il denominatore della funzione di trasferimento di un sistema del secondo ordine è un polinomio in s di secondo grado;
- $\zeta = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$ è il fattore di smorzamento e il suo valore dipende, in questo esempio, dalla resistenza R , ma più in generale dall'elemento dissipativo presente nel sistema;
- ω_n è la pulsazione naturale del sistema in assenza di elementi dissipativi. I poli della funzione di trasferimento del sistema sono le radici dell'equazione ottenuta uguagliando a zero il denominatore della [9.2.3]:

$$s^2 + 2 \cdot s \cdot \zeta \cdot \omega_n + \omega_n^2 = 0$$

$$s_{1/2} = p_{1/2} = \frac{-2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \pm \sqrt{4 \cdot \zeta^2 \cdot \omega_n^2 - 4 \cdot \omega_n^2}}{2} \quad [9.2.4]$$

$$s_1 = p_1 = -\omega_n \cdot \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

$$s_2 = p_2 = -\omega_n \cdot \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

Poiché dall'esame della [9.2.4] si ricava che l'andamento della risposta di un sistema del secondo ordine è funzione del coefficiente di smorzamento ζ , di seguito sarà eseguita l'analisi della risposta dei sistemi del secondo ordine sollecitati da un segnale a gradino per $\zeta > 1$, $\zeta = 1$ e $0 < \zeta < 1$.

9.2.3 Sistemi del 2° ordine con poli reali e distinti: $\zeta > 1$

Se è $\zeta > 1$ i poli della funzione di trasferimento sono reali e negativi e giacciono nel semipiano sinistro del piano complesso s (fig. 9.2.3):

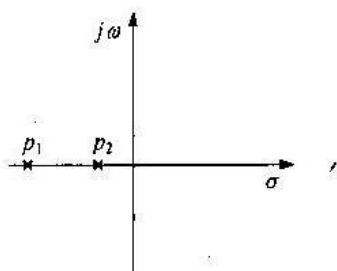


Fig. 9.2.3

$$s_1 = p_1 = -\omega_n \cdot \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad \text{e} \quad s_2 = p_2 = -\omega_n \cdot \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

Si dimostra che la risposta $u(t)$, rappresentata nella figura 9.2.4, è:

$$u(t) = \frac{E \cdot \omega_n^2}{p_1 \cdot p_2} + \frac{E \cdot \omega_n^2}{p_1 \cdot (p_1 - p_2)} \cdot e^{p_1 \cdot t} + \frac{E \cdot \omega_n^2}{p_2 \cdot (p_2 - p_1)} \cdot e^{p_2 \cdot t} \quad [9.2.5]$$

- $E \cdot \frac{\omega_n^2}{p_1 \cdot p_2}$ è la risposta a regime;
- i termini $\frac{E \cdot \omega_n^2}{p_1 \cdot (p_1 - p_2)} \cdot e^{p_1 \cdot t}$ e $\frac{E \cdot \omega_n^2}{p_2 \cdot (p_2 - p_1)} \cdot e^{p_2 \cdot t}$ sono la risposta in transitorio e tendono entrambi a zero per $t \rightarrow \infty$ perché i poli della funzione di trasferimento sono entrambi reali e negativi. Il primo termine $\frac{E \cdot \omega_n^2}{p_1 \cdot (p_1 - p_2)} \cdot e^{p_1 \cdot t}$ tende a zero più rapidamente del secondo perché $\tau_1 < \tau_2$.

La risposta completa del sistema, a parità di ω_n , è aperiodica e varia al variare del fattore di smorzamento ζ . Infatti all'aumentare di ζ , a parità di ω_n , i poli della funzione di trasferimento si discostano sempre di più l'uno dall'altro, nel senso che $|p_1|$ aumenta e $|p_2|$ diminuisce come si rileva dall'esame della tabella 9.2.1.

Tab. 9.2.1

ω_n rad/s	ζ	$p_1 = -\omega_n \cdot \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$ $\tau_1 = -\frac{1}{p_1}$	$p_2 = -\omega_n \cdot \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$ $\tau_2 = -\frac{1}{p_2}$
100	2	$p_1 = -100 \cdot (2 + \sqrt{4 - 1}) = -373,2$ $\tau_1 = -\frac{1}{373,2} = 0,00268$	$p_2 = -100 \cdot (2 - \sqrt{4 - 1}) = -26,8$ $\tau_2 = -\frac{1}{26,8} = 0,0373$
100	3	$p_1 = -100 \cdot (3 + \sqrt{9 - 1}) = -582,8$ $\tau_1 = -\frac{1}{582,8} = 0,00171$	$p_2 = -100 \cdot (3 - \sqrt{9 - 1}) = -17,1$ $\tau_2 = -\frac{1}{17,1} = 0,0584$

Il polo p_1 , inoltre, si può trascurare quando ζ aumenta perché ad esso corrisponde una costante di tempo sempre più piccola e la risposta del sistema dipende quasi unicamente dal polo p_2 più vicino all'origine degli assi; quest'ultimo viene detto *polo dominante*. Osservando la figura 9.2.4 si rileva che il tempo impiegato dal sistema per portarsi a regime aumenta all'aumentare del fattore di smorzamento perché la costante di tempo relativa al polo dominante è funzione di ζ .

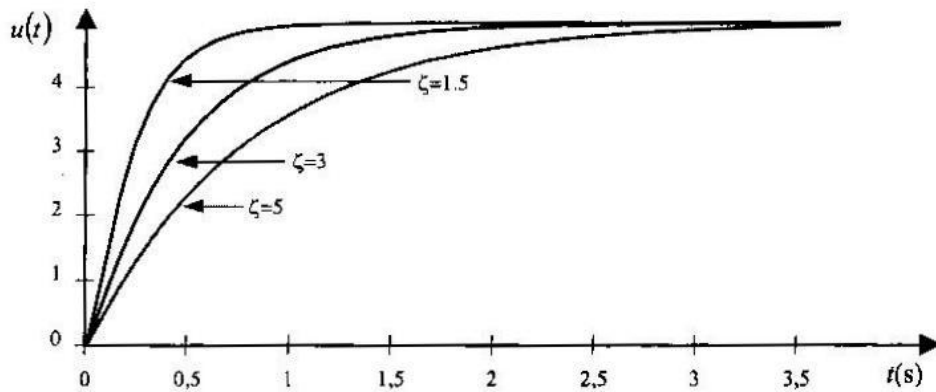


Fig. 9.2.4

9.2.4 Sistemi del 2° ordine con poli reali e coincidenti: $\zeta = 1$

Se è $\zeta = 1$, i poli p_1 e p_2 della $G(s)$ sono reali e coincidenti e giacciono ancora sul semiasse negativo dell'asse reale (fig. 9.2.5):

$$s_1 = s_2 = p_1 = p_2 = -\omega_n$$

Si dimostra che la risposta di un sistema con fattore di smorzamento $\zeta = 1$ e sollecitato da un segnale a gradino è (fig. 9.2.6):

$$u(t) = E \cdot [1 - (1 + \omega_n \cdot t) \cdot e^{-\omega_n \cdot t}] \quad [9.2.6]$$

- E è la risposta a regime;
- $-E \cdot [(1 + \omega_n \cdot t) \cdot e^{-\omega_n \cdot t}]$ è la risposta in transitorio e tende a zero per $t \rightarrow \infty$.

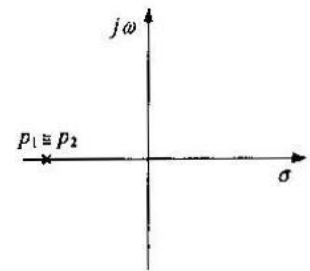


Fig. 9.2.5

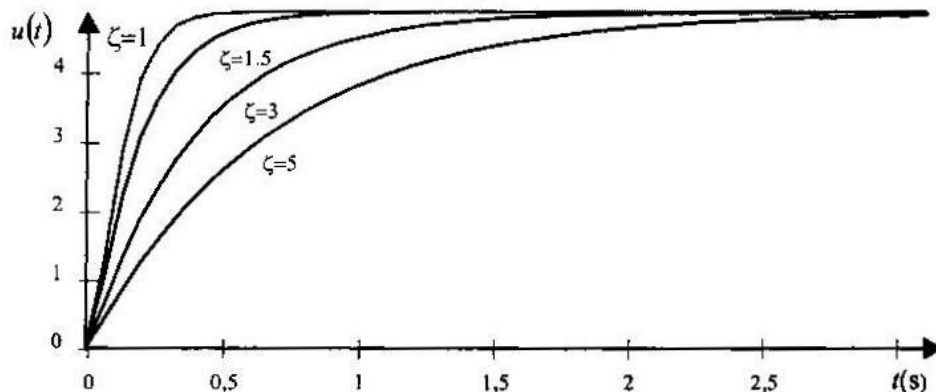


Fig. 9.2.6

L'andamento della risposta è ancora aperiodico ma il sistema si porta a regime in un tempo minore rispetto ai sistemi con fattore di smorzamento $\zeta > 1$ (fig. 9.2.6).

Per le sue caratteristiche un fattore di smorzamento $\zeta = 1$ è detto *smorzamento critico* perché è il valore che separa la risposta di un sistema con poli reali e distinti da quella, come si vedrà, di un sistema con poli complessi coniugati.

Studiare l'andamento della tensione agli estremi del condensatore del circuito *RLC* rappresentato in figura 9.2.7 quando esso è sollecitato da un segnale a gradino così definito:

$$v_i(t) = \begin{cases} 0 \text{ V per } t < 0 \\ 10 \text{ V per } t \geq 0 \end{cases}$$

Siano $i(0) = 0$ e $v_c(0) = 0$ le condizioni iniziali del sistema. I parametri sono $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$ e $R = 2 \text{ } \Omega$.

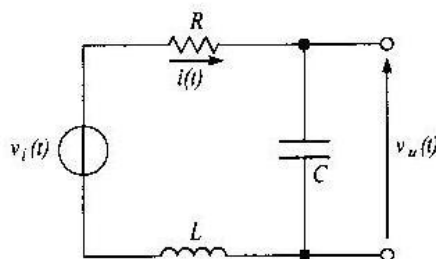


Fig. 9.2.7

Le costanti di tempo sono:

$$\tau_1 = \frac{L}{R} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ s}$$

$$\tau_2 = R \cdot C = 2 \cdot 1 = 2 \text{ s}$$

Posto $\frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \omega_n$ e $\frac{R}{L} = 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n$, si verifica facilmente che $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$ e $\zeta = 1$.

La funzione di trasferimento e la trasformata della risposta sono rispettivamente uguali a

$$V_c(s) = \frac{V_i(s)}{L \cdot C \cdot s^2 + R \cdot C \cdot s + 1} \quad [9.2.7]$$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot s \cdot \zeta \cdot \omega_n + \omega_n^2} \quad [9.2.8]$$

Considerato che $V_i(s) = \frac{10}{s}$, $L \cdot C = 1$ e $2 \cdot \zeta \cdot \omega_n = 2$, dalla [9.2.7] e dalla [9.2.8] si ha:

$$V_c(s) = \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + 2 \cdot s + 1} \quad [9.2.9]$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

I poli della funzione di trasferimento sono reali e coincidenti:

$$\begin{aligned}s_1 = p_1 &= -1 \\ s_2 = p_2 &= -1\end{aligned}$$

Scomposta la [9.2.9] in frazioni parziali e calcolati i coefficienti A , B e C , si ha:

$$V_c(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} = 10$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)^2 \cdot \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} = -10$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} (s+1)^2 \cdot \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} = -10$$

$$V_c(s) = \frac{10}{s} + \frac{-10}{(s+1)^2} + \frac{-10}{(s+1)} \quad [9.2.10]$$

L'antitrasformata della [9.2.10] è la risposta del sistema:

$$\mathcal{L}^{-1}[V_c(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{s} + \frac{-10}{(s+1)^2} + \frac{-10}{(s+1)}\right]$$

$$v_c(t) = 10 - 10 \cdot t \cdot e^{-t} - 10 \cdot e^{-t}$$

$$v_c(t) = 10 \cdot [1 - e^{-t} \cdot (1+t)]$$

MATLAB

% Si scrivano i coefficienti del numeratore e del denominatore della trasformata della risposta.

n1 = [10]; d1 = [1 2 1 0]

% Calcolo dei residui e dei poli della trasformata della risposta.

[r,p,k] = residue(n1,d1)

% Rappresentazione grafica della risposta alla sollecitazione a gradino di ampiezza 10.

n2 = [10]; d2 = [1 2 1]

step(n2,d2)

% Antitrasformata di Laplace della risposta.

y = invlaplace('10/(s*(s+1)*(s+1))')

PSPICE

Dopo aver realizzato lo schema di figura 9.2.8 nel quale è stato inserito un differential marker perché è necessario calcolare la tensione ai capi del condensatore, si apra il menu Analysis, si selezioni Transient e si fissino i seguenti parametri

della simulazione:

Print Step 0.5 s
Final Time 20 s
Step Ceiling 0.01

L'analisi dei risultati ottenuti con MATLAB e con PSPICE (fig. 9.2.9) conferma che la risposta del sistema è aperiodica e tende al valore della sollecitazione applicata.

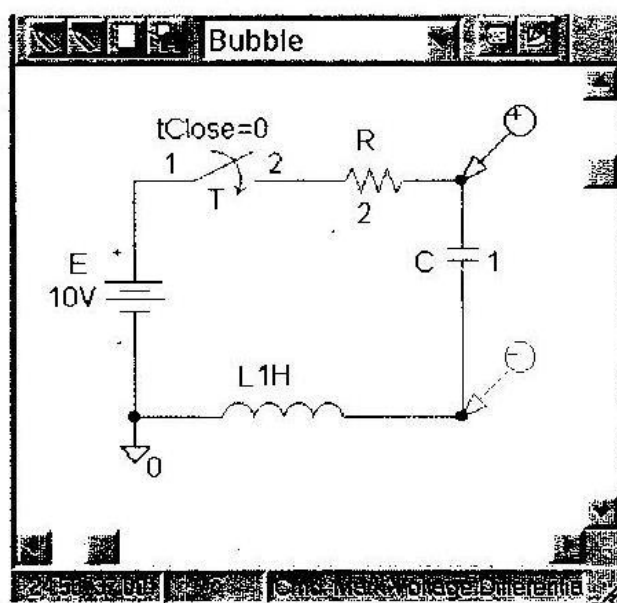


Fig. 9.2.8

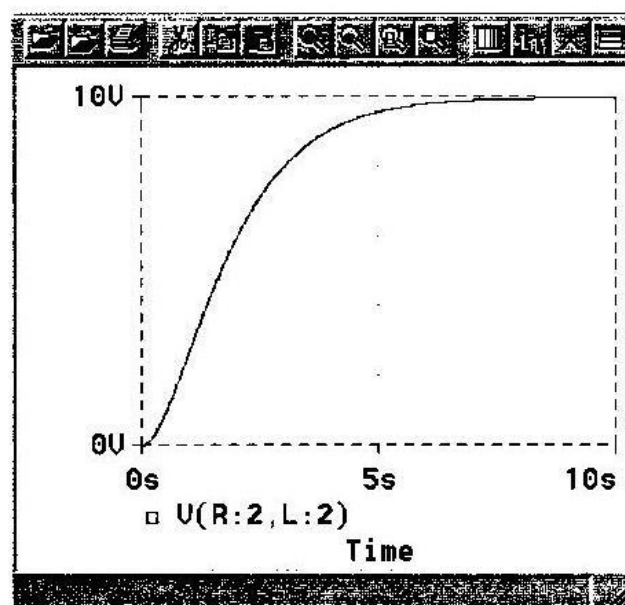


Fig. 9.2.9

9.2.5 Sistemi del 2° ordine con poli complessi coniugati: $0 < \zeta < 1$

Se è $0 < \zeta < 1$ il sistema del 2° ordine è detto sottosmorzato e i poli p_1 e p_2 della $G(s)$ sono complessi coniugati a parte reale negativa (fig. 9.2.10):

$$s_1 = p_1 = -\omega_n \cdot \left(\zeta + j \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \quad ; \quad s_2 = p_2 = -\omega_n \cdot \left(\zeta - j \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \right)$$

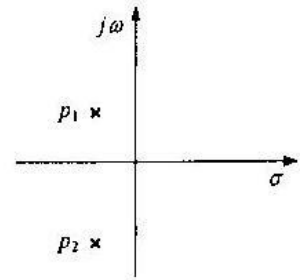


Fig. 9.2.10

Si dimostra che la risposta del sistema, rappresentata in figura 9.2.11, è

$$u(t) = E - \frac{E}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot e^{-\omega_n \zeta t} \cdot [\sin(\omega_n \cdot \beta \cdot t + \phi)] \quad [9.2.11]$$

dove

$$\phi = \arctg \left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right)$$

- E è la risposta a regime;
- $\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}$;
- $-\frac{E}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot e^{-\omega_n \zeta t} \cdot [\sin(\omega_n \cdot \beta \cdot t + \phi)]$ è la risposta in transitorio e tende a zero per $t \rightarrow \infty$ con una rapidità determinata dal fattore $e^{-\omega_n \cdot \zeta \cdot t}$

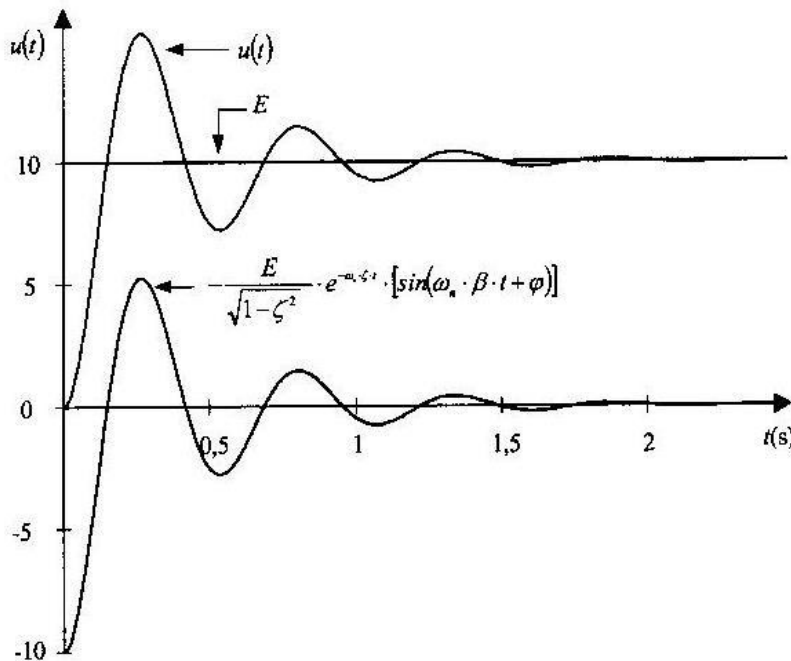


Fig. 9.2.11

Se si esaminano le curve di risposte riportate in figura 9.2.12, si rileva che l'ampiezza dell'oscillazione aumenta quando diminuisce il valore del fattore di smorzamento ζ .

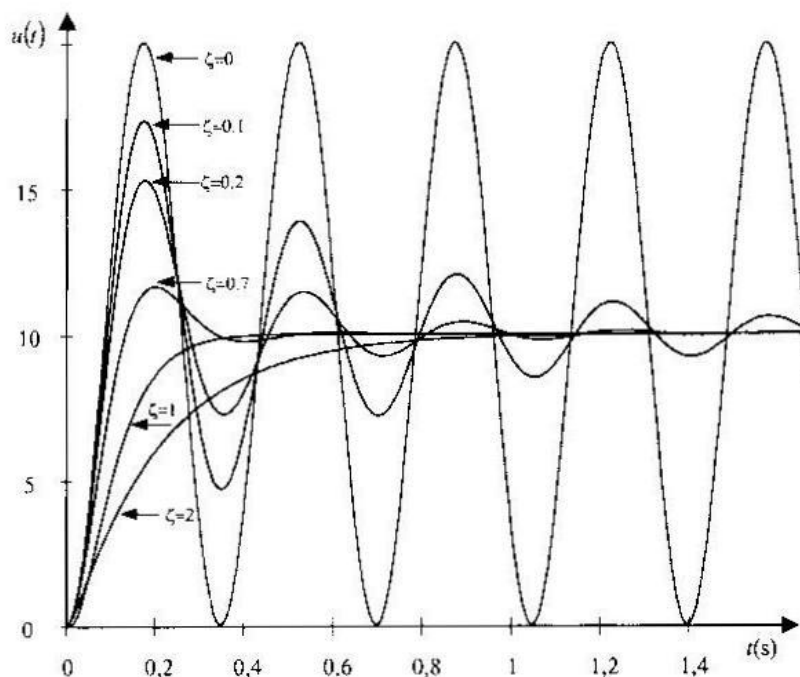


Fig. 9.2.12

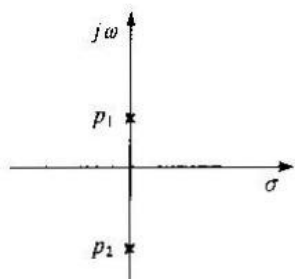


Fig. 9.2.13

Per $\zeta = 0$ i poli della funzione di trasferimento p_1 e p_2 sono complessi coniugati a parte reale nulla e giacciono entrambi sull'asse immaginario (fig. 9.2.13).

In quest'ultimo caso la risposta è costituita da un'oscillazione permanente di ampiezza costante come si ricava dalla [9.2.11] ponendo $\zeta = 0$:

$$V_u(t) = E - E \cdot [\sin(\omega_n \cdot t + \phi)] \quad [9.2.12]$$

dove $\phi = 90^\circ$ e deve essere espresso in radianti per mantenere l'omogeneità delle unità di misura perché la pulsazione è espressa in rad/s.

Con riferimento al sistema di figura 9.2.7 sollecitato da un segnale a gradino di ampiezza 10 V, studiare l'andamento della risposta nell'ipotesi che siano $i(0) = 0$ e $v_c(0) = 0$ le condizioni iniziali. I parametri del sistema sono $L = 1\text{H}$, $C = 1\text{F}$ e $R = 1\ \Omega$.

Considerato che è $\zeta = 0.5$ e $V_A(s) = \frac{10}{s}$, la funzione di trasferimento e la trasformata della risposta sono:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$V_c(s) = \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad [9.2.13]$$

I poli della funzione di trasferimento sono complessi e coniugati:

$$s_1 = p_1 = -0,5 + j \cdot 0,866$$

$$s_2 = p_2 = -0,5 - j \cdot 0,866$$

Scomposta la [9.2.13] in frazioni parziali e calcolati i coefficienti A , B e C , si ha:

$$V_c(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+0,5-j \cdot 0,866)} + \frac{C}{(s+0,5+j \cdot 0,866)}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + s + 1} = 10$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -0,5-j \cdot 0,866} (s+0,5-j \cdot 0,866) \cdot \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{(s+0,5-j \cdot 0,866) \cdot (s+0,5+j \cdot 0,866)} = -5 + j \cdot 2,886$$

$$C = -5 - j \cdot 2,886$$

$$V_c(s) = \frac{10}{s} + \frac{-5 + j \cdot 2,886}{(s+0,5-j \cdot 0,866)} + \frac{-5 - j \cdot 2,886}{(s+0,5+j \cdot 0,866)} \quad [9.2.14]$$

L'antitrasformata della [9.2.14] è la risposta del sistema:

$$v_c(t) = 10 + e^{-0,5 \cdot t} \cdot [-5,732 \cdot \sin(0,866 \cdot t) - 10 \cdot \cos(0,866 \cdot t)]$$

I risultati della simulazione confermano che la risposta del sistema è oscillatoria smorzata e tende al valore della sollecitazione applicata (fig. 9.2.14).

Il lettore verifichi che la risposta del medesimo sistema è una oscillazione di pulsazione ω_n quando è $R = 0 \, \Omega$ (fig. 9.2.15).

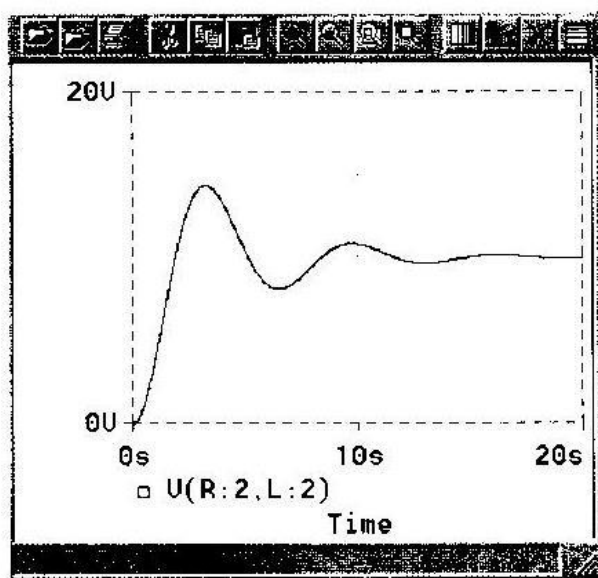


Fig. 9.2.14

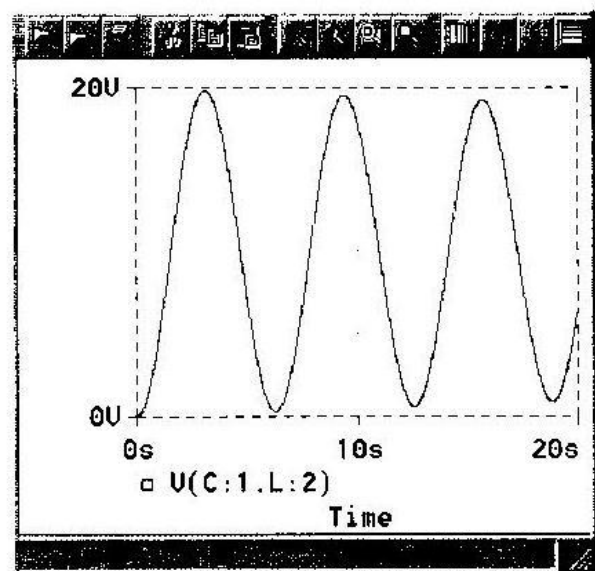


Fig. 9.2.15

9.2.6 Parametri della risposta di un sistema alla sollecitazione a gradino

La risposta completa di un sistema nel dominio del tempo si ottiene sommando, istante per istante, la risposta a «regime» e la risposta in «transitorio».

Osservando il grafico di figura 9.2.16 si ricava che la risposta complessiva raggiunge il valore di regime in un tempo che nella pratica si assume uguale a 4 ÷ 5 volte la costante di tempo. La fase transitoria o transitorio della risposta di un sistema è l'intervallo di tempo che inizia all'istante $t = 0$, in corrispondenza del quale è applicata la sollecitazione, e ha termine nell'istante in cui la risposta differisce dell'1% o al massimo del 5% dal valore di regime. I parametri della fase transitoria sono stati ottenuti dall'analisi della risposta di un sistema con condizioni iniziali nulle e sollecitato da un segnale a gradino. Le specifiche sono:

- **tempo di ritardo T_d (delay time)**: è l'intervallo di tempo richiesto perché il valore della risposta sia uguale al 50% del suo valore finale [$T_d \approx 0,7 \cdot \tau$];
- **tempo di salita T_r (rise time)**: è l'intervallo di tempo necessario perché il valore della risposta aumenti dal 10% al 90% del valore finale [$T_r \approx 2,2 \cdot \tau$];
- **tempo di assestamento T_s (settling time)**: è l'intervallo di tempo richiesto perché il valore della risposta sia compreso entro una fascia di valori prestabiliti che si discostano dell'1% ÷ 5% dal valore finale [$T_s \approx 3 \cdot \tau$].

Nei sistemi del secondo ordine con fattore di smorzamento $0 < \zeta < 1$ si prende in considerazione, oltre ai parametri già esaminati (tempo di salita, tempo di ritardo, tempo di assestamento), anche quello riferito alla ampiezza massima dell'oscillazione.

Si definisce *sovraelongazione massima* (Maximum overshoot) la differenza tra il valore massimo della risposta e il valore finale della stessa.

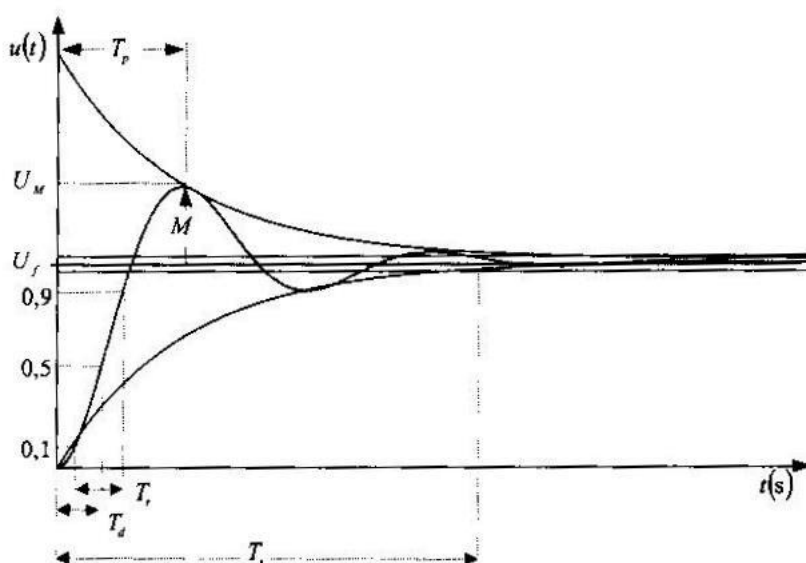


Fig. 9.2.16

Generalmente la sovraelongazione massima è espressa in percentuale in rapporto al valore finale:

$$M\% = \frac{U_M - U_f}{U_f} \cdot 100$$

- U_M e U_f sono rispettivamente il valore massimo e il valore finale della risposta;
- $M\%$ è la sovraelongazione massima percentuale.

Si dimostra che la percentuale di sovraelongazione (overshoot) è funzione del fattore di smorzamento:

$$M_{\max}\% = 100e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Per $\zeta = 0$, ossia in assenza di elementi dissipativi, l'overshoot è uguale al 100% del valore finale e la risposta è costituita da oscillazioni persistenti come è stato detto precedentemente. Si dimostra che il massimo valore dell'overshoot è raggiunto dopo un intervallo di tempo T_p uguale a

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}}$$

dove $\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}$ è la pulsazione smorzata, così chiamata per distinguerla dalla pulsazione naturale ω_n la quale è caratteristica di un sistema che non contiene elementi dissipativi. Una sovraelongazione pronunciata con successive oscillazioni quasi persistenti corrisponde, come si vedrà in seguito, ad un sistema che tende ad oscillare e, pertanto, non stabile. Generalmente il comportamento di un sistema è ritenuto soddisfacente quando il coefficiente di smorzamento è maggiore di 0,707 perché in tal caso la percentuale di sovraelongazione è minore del 5% del valore finale e può essere considerata trascurabile (fig. 9.2.17).

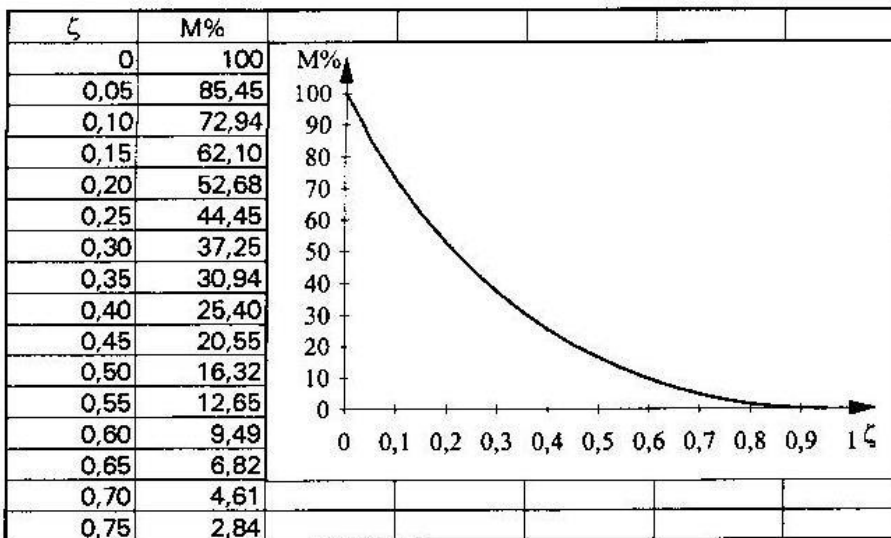


Fig. 9.2.17

Il tempo di assestamento di un sistema del secondo ordine con $0 < \zeta < 1$ è uguale a $T_s \approx \frac{3}{\omega_n \cdot \zeta}$ quando è misurato all'istante in cui il valore della risposta è prossimo al 95% del valore finale.

Il tempo di assestamento cresce, a parità di ω_n , in modo inversamente proporzionale al fattore di smorzamento: T_s tende all'infinito quando è $\zeta = 0$, infatti la risposta è costituita da un'oscillazione di ampiezza costante che non raggiunge mai il valore di regime.

Si dimostra inoltre che il tempo di ritardo T_d e quello di salita T_r assumono rispettivamente i valori:

$$T_d \approx \frac{1 + 0,7 \cdot \zeta}{\omega_n} \quad 0 < \zeta < 1$$

$$T_r \approx \frac{1 + 1,1 \cdot \zeta + 1,4 \cdot \zeta^2}{\omega_n} \quad 0 < \zeta < 1$$

Sia il tempo di ritardo che quello di salita aumentano quando aumenta il valore del fattore di smorzamento ζ .

La funzione **ltview** di **MATLAB** consente di esaminare la risposta di un sistema nel dominio del tempo ed in quello della frequenza. La medesima funzione, inoltre, fornisce i valori dei parametri della risposta temporale e di quella in frequenza.

```
% Esempio 3: risposta nel dominio del tempo del sistema dell'esempio 2 con
ltview
% Si utilizza la funzione tf per definire la funzione di trasferimento
f=tf(1,[1 1 1])
ltview
```

Dopo aver lanciato il programma, **MATLAB** apre la finestra di figura 9.2.18. Per poter esaminare la risposta nel dominio del tempo o in quello della frequenza si deve:

- trascinare il puntatore del mouse nella finestra «**Workspace**» e fare due volte clic sul nome della funzione;
- trascinare il puntatore del mouse sulla finestra «**Plot Type**» e selezionare una delle opzioni (Step, Impulse, Bode, Nyquist, ecc);

Per visualizzare i valori dei parametri si deve:

- trascinare il puntatore del mouse sulla finestra «**Plot Options**» e selezionare i parametri della risposta temporale o quelli della risposta nel dominio della frequenza compatibilmente con il tipo di curva precedentemente selezionata (fig. 9.2.19).
- trascinare il puntatore del mouse su uno degli indicatori (puntini rossi) che **MATLAB** pone sulle curve;
- tenere premuto il pulsante sinistro del mouse.

Nella figura 9.2.19 è riportata la curva di risposta alla sollecitazione a gradino e si possono osservare gli indicatori sui quali si deve tenere premuto il pulsante sinistro del mouse per ottenere i valori dei parametri.

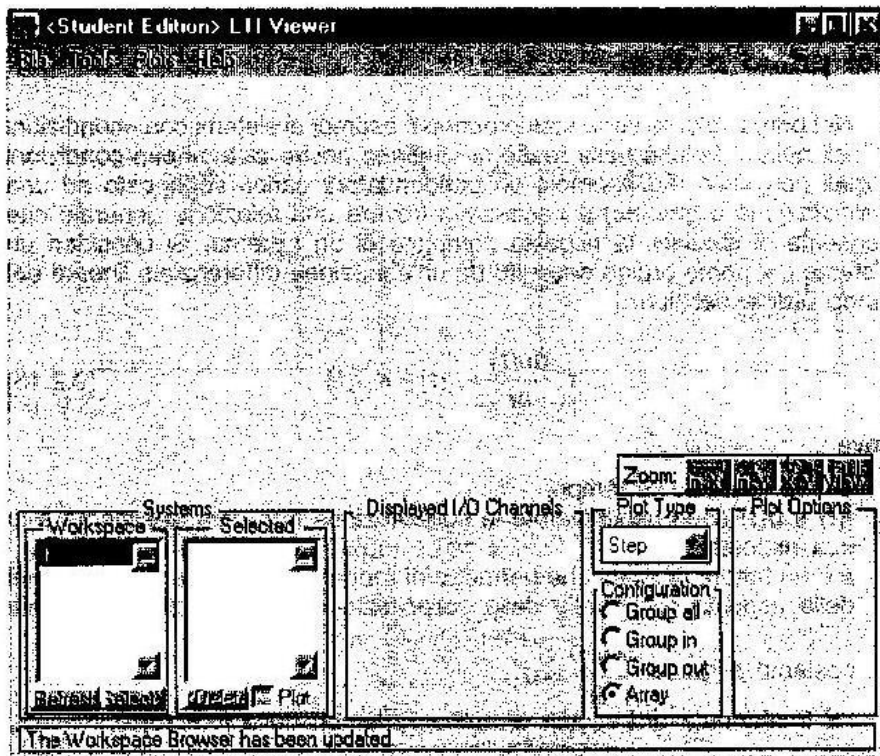


Fig. 9.2.18

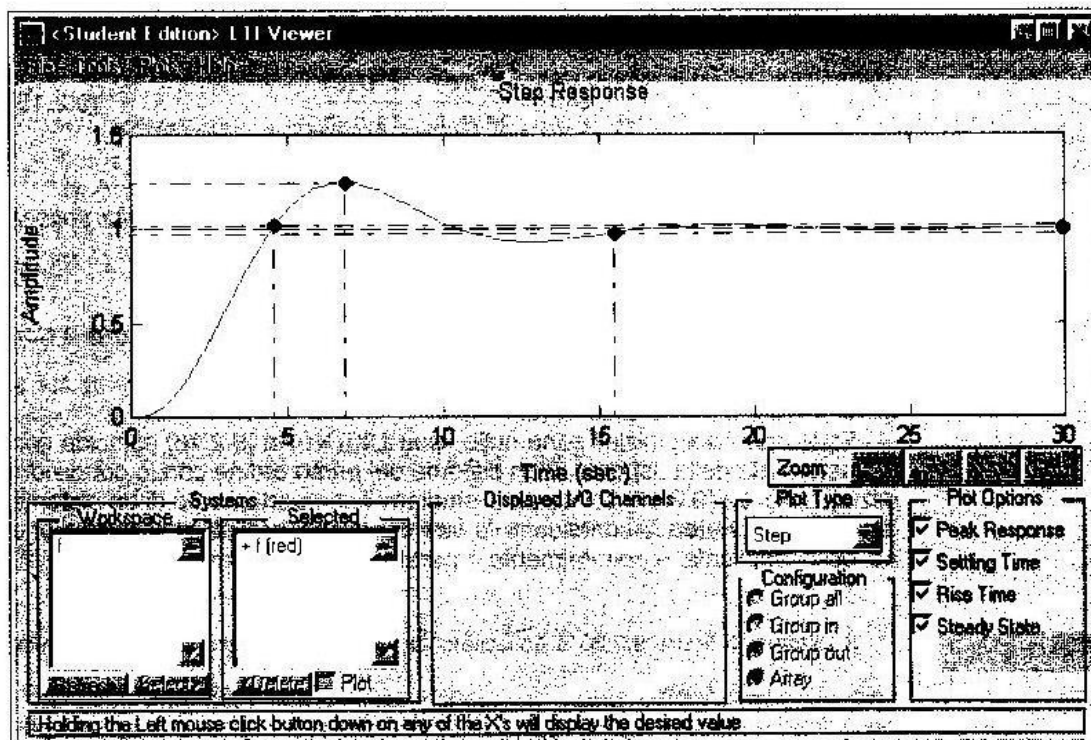


Fig. 9.2.19

9.2.7 Risposta forzata e risposta libera di un sistema del primo ordine

Nel primo volume sono stati presentati esempi di sistemi con «condizioni iniziali nulle». Poiché nella realtà si studiano anche sistemi con condizioni iniziali non nulle (ad esempio un condensatore carico sottoposto ad una sollecitazione a gradino) è necessario trovare una relazione generale che consenta di studiare la risposta completa di un sistema. Si consideri un sistema del primo ordine descritto da un'equazione differenziale lineare del primo ordine del tipo:

$$\tau \cdot \frac{du(t)}{dt} + u(t) = k \cdot i(t) \quad [9.2.15]$$

dove

- τ è la costante di tempo;
- $i(t)$ e $u(t)$ sono rispettivamente la sollecitazione applicata al sistema e la sua risposta;
- k è un fattore di scala che permette di rendere omogenee le dimensioni della risposta con quelle della sollecitazione nel caso in cui $u(t)$ sia

costante e quindi $\frac{du(t)}{dt} = 0$.

La trasformata di Laplace di ambo i membri della [9.2.15] è:

$$s \cdot \tau \cdot U(s) - \tau \cdot U(0) + U(s) = k \cdot I(s)$$

$$U(s) \cdot (1 + s \cdot \tau) = k \cdot I(s) + \tau \cdot U(0)$$

$$U(s) = \frac{k \cdot I(s)}{1 + s \cdot \tau} + \frac{\tau \cdot U(0)}{1 + s \cdot \tau} \quad [9.2.16]$$

- $\frac{k \cdot I(s)}{1 + s \cdot \tau}$ è la trasformata della risposta forzata e dipende dalla sollecitazione applicata al sistema;
- $\frac{\tau \cdot U(0)}{1 + s \cdot \tau}$ è la trasformata della risposta naturale o risposta libera e non dipende dalla sollecitazione applicata, ma dalle condizioni iniziali in cui si trova il sistema all'istante $t = 0$.

Se le condizioni iniziali sono nulle, cioè $U(0) = 0$, la [9.2.16] coincide con la trasformata della risposta di un sistema del primo ordine con le condizioni iniziali nulle. La [9.2.16] consente di studiare il comportamento di un sistema del primo ordine se si conoscono le sue condizioni iniziali, la sollecitazione ad esso applicata e naturalmente i parametri del sistema.

Il sistema di figura 9.2.20 è sollecitato da un segnale a gradino così definito:

$$v_i(t) = \begin{cases} 0 \text{ V per } t < 0 \\ 10 \text{ V per } t \geq 0 \end{cases}$$

Studiare l'andamento della tensione agli estremi del condensatore nell'ipotesi che all'istante $t=0$ sia $v_c(0) = 2\text{ V}$. I parametri del sistema sono $C = 1\text{ F}$ e $R = 1\Omega$.

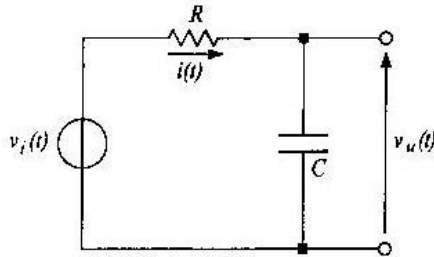


Fig. 9.2.20

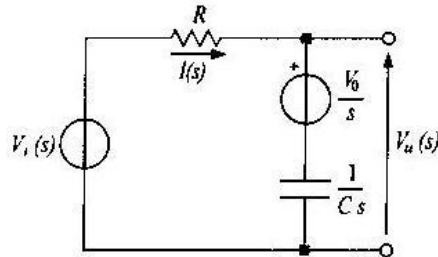


Fig. 9.2.21

Dal circuito trasformato di figura 9.2.21 si ha:

$$V_i(s) - \frac{V_0}{s} = I(s) \cdot \left(R + \frac{1}{C \cdot s} \right)$$

$$V_u(s) = \frac{V_i(s)}{1 + R \cdot C \cdot s} + \frac{V_0 \cdot R \cdot C}{1 + R \cdot C \cdot s} \quad [9.2.17]$$

Confrontando la [9.2.16] e la [9.2.17] si può affermare che:

- $\frac{V_i(s)}{1 + R \cdot C \cdot s}$ è la *trasformata della risposta forzata* perché $V_i(s)$ è la trasformata della sollecitazione applicata al sistema dall'istante $t \geq 0$;
- $R \cdot C = \tau$ è la costante di tempo;
- $\frac{R \cdot C \cdot V_0}{1 + R \cdot C \cdot s}$ è la *trasformata della risposta libera* la quale dipende dalle condizioni del sistema all'istante $t = 0^-$.

Tenendo presente che è $V_i(s) = \frac{10}{s}$ dalla [9.2.17] si ricava:

$$V_u(s) = \frac{10}{s \cdot (s + 1)} + \frac{2}{s + 1} \quad [9.2.18]$$

L'antitrasformata di Laplace di ambo i membri della [9.2.18] è la risposta del sistema:

$$V_u(t) = 10 \cdot (1 - e^{-t}) + 2 \cdot e^{-t} \quad [9.2.19]$$

Il valore finale della risposta forzata $10 \cdot (1 - e^{-t})$ tende a 10 V perché a regime il condensatore è carico e la tensione d'uscita è uguale al valore della sollecitazione applicata. Il valore della risposta libera, invece, tende a zero per $t \rightarrow \infty$.

PSPICE

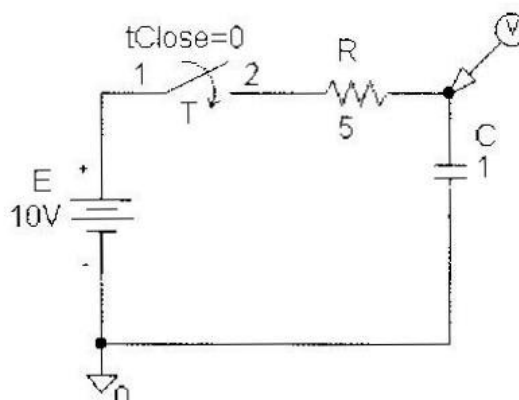


Fig. 9.2.22

PSPICE consente di simulare il comportamento di circuiti in cui siano presenti componenti accumulatori di energia aventi condizioni iniziali non nulle. A tal fine è necessario:

- disegnare lo schema elettrico (fig 9.2.22);
- fare due volte clic sul componente accumulatore di energia. PSPICE apre la finestra di dialogo di figura 9.2.23;
- selezionare IC e scrivere nella finestra di editing il valore della tensione presente all'istante $t = 0$ agli estremi del condensatore (fig. 9.2.23);
- fare click su Save Attr;



Fig. 9.2.23

- fare clic su Change Display. PSPICE apre la finestra di figura 9.2.24. Selezionare «Both name and value» affinché sullo schema elettrico compaia la scritta IC=2V (fig. 9.2.25) e poi fare clic su OK per tornare alla figura 9.2.23;
- fare clic su OK della figura 9.2.23.

Al termine della procedura descritta si selezioni Transient e si fissino i seguenti parametri:

Print Step 0.2 s

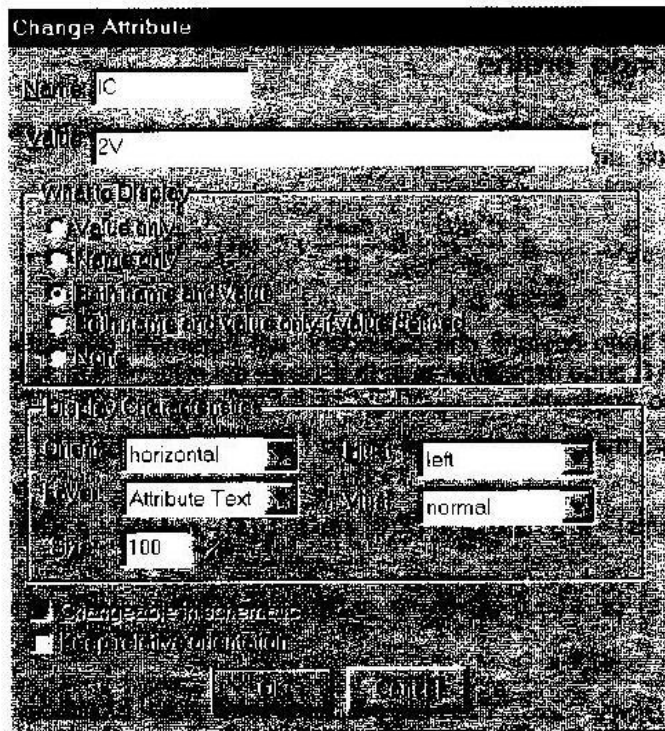


Fig. 9.2.24

Final Time 10 s
Step Ceiling 0.01

I risultati della simulazione, rappresentati nella figura 9.2.26, mostrano che il valore iniziale e quello finale della risposta del sistema sono rispettivamente 2 V e 10 V in accordo con la [9.2.19].

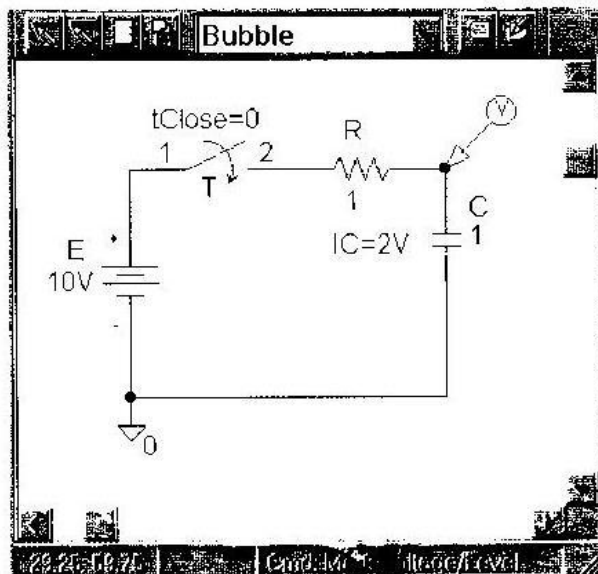


Fig. 9.2.25

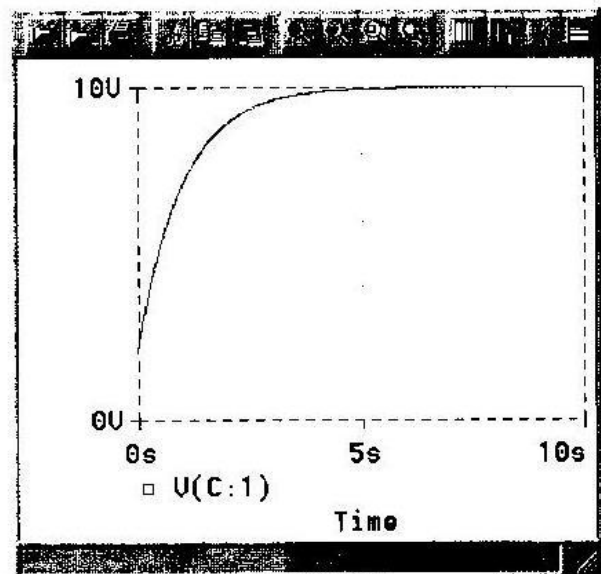


Fig. 9.2.26

9.2.8 Risposta forzata e risposta libera di un sistema del secondo ordine

Il modello matematico di un sistema del secondo ordine può essere espresso da un'equazione differenziale del tipo:

$$a \cdot \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{du(t)}{dt} + c \cdot u(t) = i(t) \quad [9.2.20]$$

dove

- a, b, c sono costanti che dipendono dai parametri del sistema;
- $u(t)$ e $i(t)$ sono rispettivamente la risposta del sistema e la sollecitazione ad esso applicata.

La trasformata di Laplace di ambo i membri della [9.2.20] è

$$a \cdot s^2 \cdot U(s) - a \cdot s \cdot U(0) - a \cdot U'(0) + b \cdot s \cdot U(s) - b \cdot U(0) + c \cdot U(s) = I(s)$$

$$U(s) \cdot (a \cdot s^2 + b \cdot s + c) = a \cdot s \cdot U(0) + a \cdot U'(0) + b \cdot U(0) + I(s)$$

$$U(s) = \frac{I(s)}{(a \cdot s^2 + b \cdot s + c)} + \frac{a \cdot s \cdot U(0) + a \cdot U'(0) + b \cdot U(0)}{(a \cdot s^2 + b \cdot s + c)} \quad [9.2.21]$$

dove:

- $U'(0)$ è il valore della derivata prima della funzione $u(t)$ calcolato per $t = 0$;
- $\frac{I(s)}{(a \cdot s^2 + b \cdot s + c)}$ è la trasformata di Laplace della risposta forzata di un sistema del secondo ordine e dipende dalla sollecitazione ad esso applicata;
- $\frac{a \cdot s \cdot U(0) + a \cdot U'(0) + b \cdot U(0)}{(a \cdot s^2 + b \cdot s + c)}$ è la trasformata di Laplace della risposta naturale di un sistema del secondo ordine e dipende dalle condizioni in cui si trova il sistema all'istante $t = 0$ quando viene applicata la sollecitazione.

Dalla [9.2.20] si ricava la funzione di trasferimento di un sistema del secondo ordine con le condizioni iniziali nulle, $U(0) = 0$:

$$\frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1}{(a \cdot s^2 + b \cdot s + c)}$$

Negli istanti $t < 0$ il sistema rappresentato in figura 9.2.27 è sollecitato da un generatore di tensione e all'istante $t = 0^+$ è $i(0) = 0,5$ A. Studiare l'andamento in funzione del tempo dell'intensità della corrente $i(t)$ per $t \geq 0$.

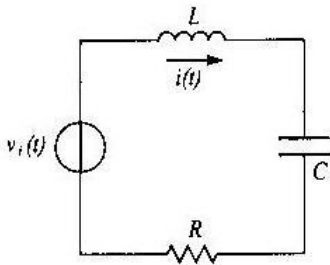


Fig. 9.2.27

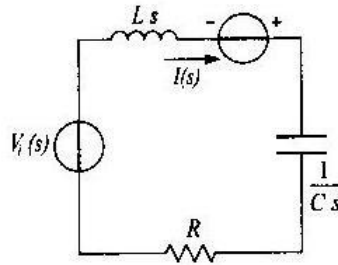


Fig. 9.2.28

Dal circuito trasformato di figura 9.2.28 si ha:

$$V_i(s) + L \cdot I_0 = I(s) \cdot \left(R + L \cdot s + \frac{1}{C \cdot s} \right)$$

$$I(s) = \frac{C \cdot s \cdot V_i(s)}{L \cdot C \cdot s^2 + R \cdot C \cdot s + 1} + \frac{L \cdot C \cdot s \cdot I_0}{L \cdot C \cdot s^2 + R \cdot C \cdot s + 1} \quad [9.2.22]$$

Dalla [9.2.22] si ricava che:

- la trasformata di Laplace della risposta forzata $\frac{C \cdot s \cdot V_i(s)}{L \cdot C \cdot s^2 + R \cdot C \cdot s + 1}$ dipende dalla sollecitazione applicata;
- la trasformata di Laplace della risposta libera $\frac{L \cdot C \cdot s \cdot I_0}{L \cdot C \cdot s^2 + R \cdot C \cdot s + 1}$ dipende dalle condizioni iniziali del sistema: nel caso specifico dalla intensità della corrente I_0 all'istante $t = 0^-$.

Poiché è $V_i(s) = \frac{10}{s}$, $R = 5 \, \Omega$, $L = 4 \, \text{H}$ e $C = 1 \, \text{F}$, la [9.2.22] si scrive come

$$I(s) = \frac{10}{s} \cdot \frac{1 \cdot s}{4 \cdot s^2 + 5 \cdot s + 1} + \frac{4 \cdot s \cdot 0,5}{4 \cdot s^2 + 5 \cdot s + 1} \quad [9.2.23]$$

e fattorizzando il denominatore della [9.2.23] si ha:

$$I(s) = \frac{10}{4 \cdot (s+1) \cdot (s+0,25)} + \frac{2 \cdot s}{4 \cdot (s+1) \cdot (s+0,25)}$$

Per calcolare la risposta si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti:

per $I_0 = 0$ è

$$I_1(s) = \frac{10}{4 \cdot (s+1) \cdot (s+0,25)} \quad [9.2.24]$$

e per $v_i(t) = 0$ si ha:

$$I_2(s) = \frac{2 \cdot s}{4 \cdot (s+1) \cdot (s+0,25)} \quad [9.2.25]$$

Le antitrasformate di Laplace della [9.2.24] e della [9.2.25] sono rispettivamente le risposte $i_1(t)$ e $i_2(t)$ dovute alle singole sollecitazioni. La risposta totale del sistema è:

$$i(t) = 3,33 \cdot e^{-0,25t} - 3,33 \cdot e^{-t} - 0,166 \cdot e^{-0,25t} + 0,66 \cdot e^{-t} \quad [9.2.26]$$

Si osserva che per $t = 0$ è $i(t) = 0,5$ A e per $t \rightarrow \infty$ si ha $i(t) \rightarrow 0$. A regime, infatti, il condensatore è completamente carico e si comporta come un circuito aperto.

PSPICE

Dopo aver disegnato lo schema di figura 9.2.29 ed inserito il marker di corrente, si ripete la procedura sopra descritta per definire le condizioni iniziali dell'induttore all'istante $t = 0$.

I parametri della simulazione sono:

Print Step 0.2 s

Final Time 20 s

Step Ceiling 0.01

I risultati della simulazione, rappresentati nella figura 9.2.30, mostrano che il valore iniziale e quello finale della risposta del sistema sono rispettivamente 0,5 A e 0 A in accordo con la [9.2.26].

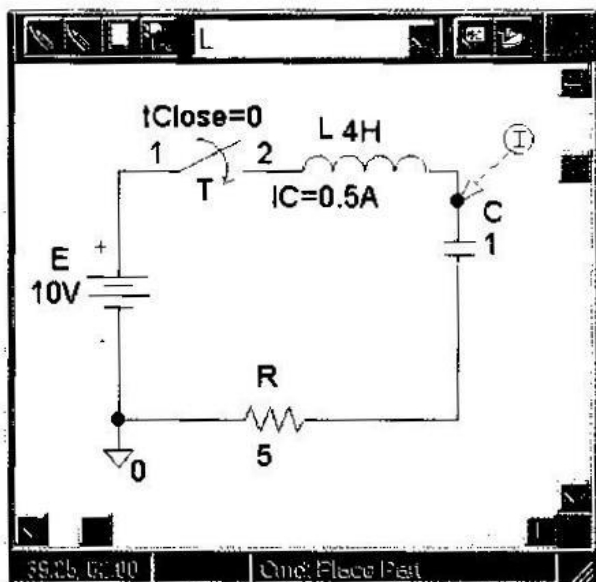


Fig. 9.2.29

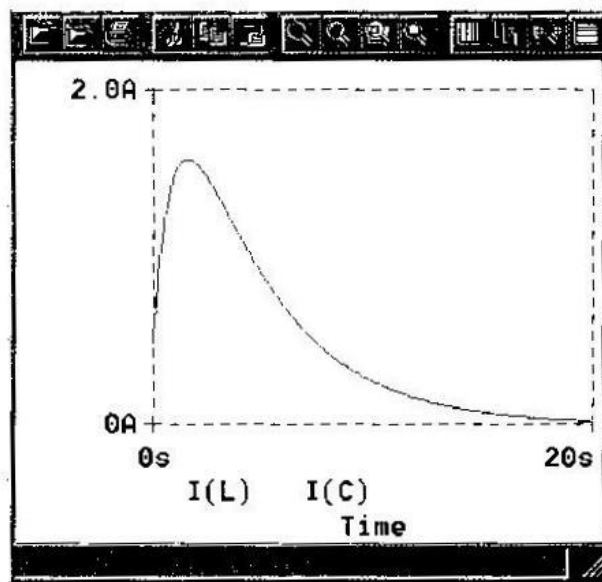


Fig. 9.2.30

ESERCIZI SVOLTI

Esercizio 1

Un motore in c.c. è un attuatore che converte l'energia elettrica in energia meccanica. I motori in c.c. sono classificati sulla base del modo con il quale viene generato il campo magnetico: nei motori a campo magnetico costante o *PM*, quest'ultimo è generato da un magnete permanente. Nei motori a controllo di campo il campo magnetico è generato dalla corrente che attraversa un avvolgimento connesso ad una sorgente di f.e.m. esterna. Si consideri un motore in corrente continua a controllo di campo figura 9.2.31.

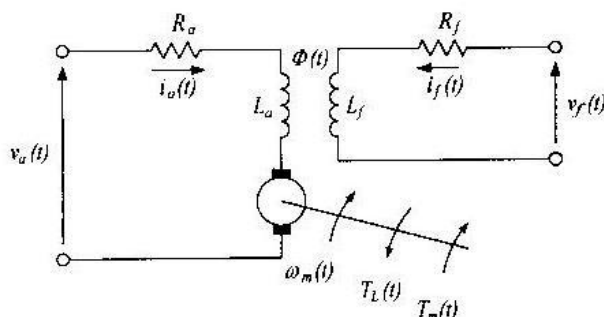


Fig. 9.2.31

La tensione di eccitazione $v_f(t)$ genera una corrente di campo $i_f(t)$ e il flusso $\Phi(t)$ è proporzionale a quest'ultima:

$$\Phi(t) = k_f \cdot i_f(t)$$

dove k_f è una costante caratteristica del motore $\left[\frac{\text{Wb}}{\text{A}} \right]$.

Si ricorda che le caratteristiche meccaniche di un motore in c.c. sono:

- la coppia motrice $T_m(t)$ [$\text{N} \cdot \text{m}$];
- la coppia resistente $T_l(t)$ che agisce come un disturbo e che si oppone alla coppia motrice;
- il momento d'inerzia J delle parti rotanti proprie del motore e del carico ad esso eventualmente collegato [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$];

La coppia motrice sviluppata dal motore è proporzionale al flusso

generato dalla corrente di campo e all'intensità della corrente di armatura $i_a(t)$:

$$T_m(t) = k_f \cdot k_a \cdot i_f(t) \cdot i_a(t) \quad [9.2.27]$$

La [9.2.27] non è lineare perché la coppia motrice $T_m(t)$ è funzione del prodotto delle variabili $i_f(t)$ e $i_a(t)$. Per rendere lineare la [9.2.27] si considera costante l'intensità della corrente di armatura:

$$T_m(t) = (k_f \cdot k_a \cdot I_a) \cdot i_f(t) \quad [9.2.28]$$

La trasformata di Laplace di ambo i membri della [9.2.28] è

$$T_m(s) = k_m \cdot I_f(s) \quad [9.2.29]$$

dove $k_m = k_f \cdot k_a \cdot I_a$ è una costante caratteristica del motore.

La coppia motrice del motore deve vincere la coppia resistente del carico e quella dovuta ad eventuali disturbi:

$$T_m(t) = J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} + B \cdot \omega(t) + T_d(t) \quad [9.2.30]$$

dove:

- B è il coefficiente di attrito viscoso $\left[\frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}} \right]$;
 - $T_d(t)$ è la coppia resistente dovuta ai disturbi esterni.
- Trascurando $T_d(t)$ e facendo la trasformata di Laplace di ambo i membri della [9.2.30] si ricava:

$$T_m(s) = J \cdot s \cdot \omega(s) + B \cdot \omega(s) \quad [9.2.31]$$

La tensione di eccitazione è uguale a

$$v_f(t) = R_f \cdot i_f(t) + L_f \cdot \frac{di_f(t)}{dt} \quad [9.2.33]$$

La trasformata di Laplace della [9.2.33] è:

$$V_f(s) = (R_f + L_f \cdot s) \cdot I_f(s)$$

con

$$I_f(s) = \frac{V_f(s)}{(R_f + L_f \cdot s)} \quad [9.2.34]$$

Considerando la [9.2.29], la [9.2.31] e la [9.2.34] si ricava la funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{V_f(s)} = \frac{k_m}{(R_f + L_f \cdot s) \cdot (B + J \cdot s)} \quad [9.2.35]$$

Il sistema è del secondo ordine perché il denominatore della funzione di trasferimento è un polinomio di secondo grado e può essere rappresentato dal diagramma a blocchi riportato in figura 9.2.32. La funzione di trasferimento espressa in termini delle costanti di tempo è:

$$\frac{\omega(s)}{V_f(s)} = \frac{k_m}{R_f \cdot B} \cdot \frac{1}{(1 + \tau_e \cdot s) \cdot (1 + \tau_m \cdot s)} \quad [9.2.36]$$

dove

- $\tau_e = \frac{L_f}{R_f}$ è la costante di tempo elettrica;
- $\tau_m = \frac{J}{B}$ è la costante di tempo meccanica.

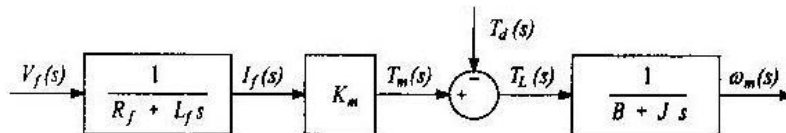


Fig. 9.2.32

Esercizio 2

Il sistema di figura 9.2.33 è sollecitato da un segnale $v_i(t)$ così definito:

$$v_i(t) = \begin{cases} 0 \text{ V per } t < 0 \\ 5 \cdot e^{-2 \cdot t} \text{ V per } t \geq 0 \end{cases}$$

Calcolare la risposta $v_c(t)$ nell'ipotesi che all'istante $t=0$ sia $V_c(0) = 0 \text{ V}$.
I valori dei parametri del circuito sono $R = 10 \, \Omega$, $L = 8 \text{ H}$ e $C = 1 \text{ F}$.

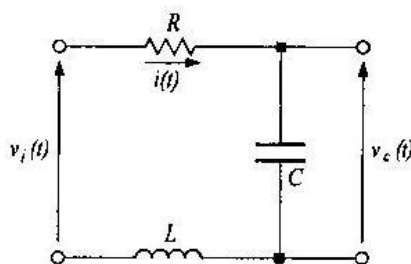


Fig. 9.2.33

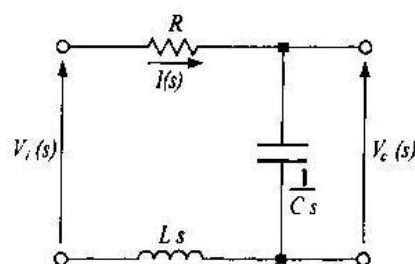


Fig. 9.2.34

Applicando la legge di Ohm al circuito equivalente di figura 9.2.34 si ricava la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{V_c(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{L \cdot C \cdot s^2 + R \cdot C \cdot s + 1}$$

Il sistema è del secondo ordine perché il denominatore della sua funzione di trasferimento è un polinomio in s di secondo grado.

Per $L \cdot C = 8$ ed $R \cdot C = 10$, la trasformata di Laplace della risposta è uguale a

$$V_c(s) = \frac{1}{8 \cdot s^2 + 10 \cdot s + 1} \cdot \frac{5}{s+2} \quad [9.2.37]$$

Poiché i poli della trasformata di Laplace della risposta sono $p_1 = -0,11$, $p_2 = -1,1$ e $p_3 = -2$, la [9.2.37] si scrive come:

$$V_c(s) = \frac{1}{8 \cdot (s+0,11) \cdot (s+1,1)} \cdot \frac{5}{(s+2)} \quad [9.2.38]$$

dove $\frac{5}{s+2}$ è la trasformata di Laplace della sollecitazione $v_A(t)$.

Scomponendo la [9.2.38] nella somma di frazioni parziali si ottiene:

$$V_c(s) = \frac{A}{s+0,11} + \frac{B}{s+1,1} + \frac{C}{s+2} \quad [9.2.39]$$

I coefficienti A , B , C sono uguali a

$$A = \lim_{s \rightarrow -0,11} (s+0,11) \cdot \frac{1}{8 \cdot (s+0,11) \cdot (s+1,1)} \cdot \frac{5}{(s+2)} \approx 0,35$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -1,1} (s+1,1) \cdot \frac{1}{8 \cdot (s+0,11) \cdot (s+1,1)} \cdot \frac{5}{(s+2)} \approx -0,73$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \cdot \frac{1}{8 \cdot (s+0,11) \cdot (s+1,1)} \cdot \frac{5}{(s+2)} \approx 0,38$$

Sostituendo A , B e C nella [9.2.39] si ha:

$$V_c(s) = \frac{0,35}{s+0,11} + \frac{-0,73}{s+1,1} + \frac{0,38}{s+2} \quad [9.2.40]$$

L'antitrasformata di Laplace di ambo i membri della [9.2.40] è la risposta del sistema:

$$v_c(t) = 0,35 \cdot e^{-0,11t} - 0,73 \cdot e^{-1,1t} + 0,38 \cdot e^{-2t}$$

Esercizio 3

Calcolare la tensione $v(t)$ del sistema di figura 9.2.35 sapendo che l'intensità della corrente che attraversa l'induttore all'istante $t = 0$ è $i_L(0) = 2$ A.

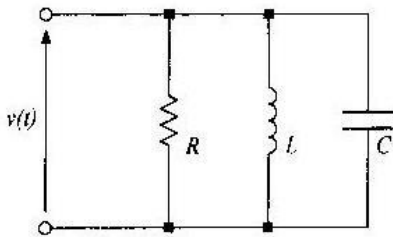


Fig. 9.2.35

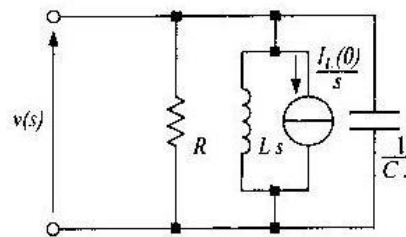


Fig. 9.2.36

Dal circuito di figura 9.2.36 si ricava:

$$Z(s) = \frac{R \cdot L \cdot s}{R \cdot L \cdot C \cdot s^2 + L \cdot s + R}$$

La trasformata di Laplace della risposta libera è:

$$V(s) = Z(s) \cdot \frac{I_L(0)}{s}$$

$$V(s) = \frac{L \cdot I_L(0)}{L \cdot C \cdot s^2 + \frac{L}{R} \cdot s + 1}$$

Per $R = 1 \, \Omega$; $C = 0,25 \, \text{F}$; $L = 4 \, \text{H}$, la trasformata di Laplace della risposta è uguale a

$$V(s) = \frac{-8}{s^2 + 4 \cdot s + 1} \quad [9.2.41]$$

I poli della [9.2.41] sono:

$$p_1 = -0,26;$$

$$p_2 = -3,7;$$

Sviluppando la [9.2.41] nella somma di frazioni parziali si ha:

$$V(s) = \frac{A}{(s+0,26)} + \frac{B}{(s+3,7)}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -0,26} (s+0,26) \cdot \frac{-8}{(s+0,26) \cdot (s+3,7)} = -2,3$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -3,7} (s+3,7) \cdot \frac{-8}{(s+0,26) \cdot (s+3,7)} = 2,3$$

La trasformata di Laplace della risposta libera è uguale a

$$V(s) = \frac{-2,3}{(s+0,26)} + \frac{2,3}{(s+3,7)} \quad [9.2.42]$$

L'antitrasformata di Laplace di ambo i membri della [9.2.42] è la risposta libera del sistema:

$$v(t) = -2,3 \cdot e^{-0,26 \cdot t} + 2,3 \cdot e^{-3,7 \cdot t} = -2,3 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + 2,3 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

dove $\tau_1 = \frac{1}{0,26}$ e $\tau_2 = \frac{1}{3,7}$ sono le costanti di tempo del sistema.

Esercizio 4

Calcolare la risposta $i_2(t)$ del sistema di figura 9.2.37 sollecitato da un segnale a gradino così definito:

$$v_i(t) = \begin{cases} 0 \text{ V per } t < 0 \\ 2 \text{ V per } t \geq 0 \end{cases}$$

All'istante $t = 0$ siano $V_C(0) = 0 \text{ V}$ e $I_L(0) = 0 \text{ A}$. I parametri del circuito sono $R_1 = 4 \, \Omega$, $R_2 = 1 \, \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ e $C = 0,25 \text{ F}$.

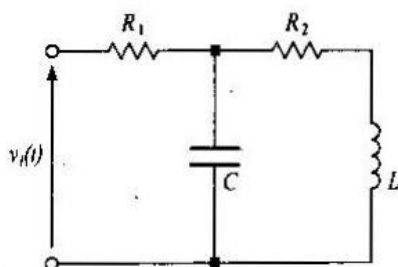


Fig. 9.2.37

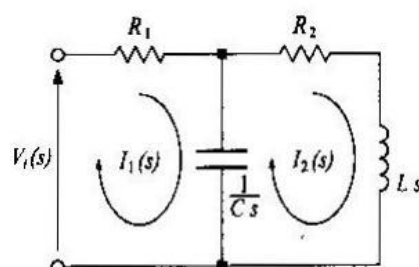


Fig. 9.2.38

Applicando al circuito equivalente di figura 9.2.38 il metodo delle correnti circolari di maglia si ricava:

$$\left(R_1 + \frac{1}{C \cdot s}\right) \cdot I_1(s) - \frac{1}{C \cdot s} \cdot I_2(s) = V_i(s) \quad [9.2.43]$$

$$-\frac{1}{C \cdot s} \cdot I_1(s) + \left(R_2 + L \cdot s + \frac{1}{C \cdot s}\right) \cdot I_2(s) = 0 \quad [9.2.44]$$

Risolvendo, rispetto a $I_2(s)$, il sistema formato dalla [9.2.43] e dalla [9.2.44] si ottiene:

$$I_2(s) = \frac{\frac{1}{C \cdot s} \cdot V_i(s)}{\left(R_1 + \frac{1}{C \cdot s}\right) \cdot \left(R_2 + L \cdot s + \frac{1}{C \cdot s}\right) - \frac{1}{C^2 \cdot s^2}} \quad [9.2.45]$$

Sviluppando e semplificando la [9.2.45] si ottiene la trasformata di Laplace della corrente $I_2(s)$:

$$I_2(s) = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{V_i(s)}{\left[C \cdot L \cdot s^2 + \left(R_2 \cdot C + \frac{L}{R_1}\right) \cdot s + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\right]} \quad [9.2.46]$$

Sostituendo nella [9.2.46] i valori dei parametri del circuito si ha:

$$I_2(s) = \frac{1}{s^2 + 2 \cdot s + 5} \cdot \frac{2}{s} \quad [9.2.47]$$

dove $\frac{2}{s}$ è la trasformata di Laplace della sollecitazione applicata $v_i(t)$.

Poiché i poli della risposta sono $p_1 = -1 - j \cdot 2$, $p_2 = -1 + j \cdot 2$ e $p_3 = 0$, la [9.2.46] diviene:

$$I_2(s) = \frac{2}{(s+1+j \cdot 2) \cdot (s+1-j \cdot 2) \cdot s} \quad [9.2.48]$$

Sviluppando la [9.2.48] nella somma di frazioni parziali si ha:

$$I_2(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1+j \cdot 2} + \frac{C}{s+1-j \cdot 2}$$

I coefficienti A , B e C valgono:

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s \cdot (s^2 + 2 \cdot s + 5)} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -1-j \cdot 2} (s+1+j \cdot 2) \cdot \frac{2}{s \cdot (s+1+j \cdot 2) \cdot (s+1-j \cdot 2)} = -0,2 - j \cdot 0,1$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -1+j \cdot 2} (s+1-j \cdot 2) \cdot \frac{2}{s \cdot (s+1+j \cdot 2) \cdot (s+1-j \cdot 2)} = -0,2 + j \cdot 0,1$$

La trasformata di Laplace della risposta $i_2(s)$ è:

$$i_2(s) = \frac{0,4}{s} + \frac{-0,2 - j \cdot 0,1}{s + 1 + j \cdot 2} + \frac{-0,2 + j \cdot 0,1}{s + 1 - j \cdot 2} \quad [9.2.49]$$

L'antitrasformata di Laplace della [9.2.49] è la risposta $i_2(t)$ del sistema:

$$i_2(t) = 0,4 + (-0,2 - j \cdot 0,1) \cdot e^{(-1-j \cdot 2) \cdot t} + (-0,2 + j \cdot 0,1) \cdot e^{(-1+j \cdot 2) \cdot t} \quad [9.2.50]$$

Ricordando le formule di Eulero la [9.2.50] diviene:

$$i_2(t) = 0,4 - [0,4 \cdot \cos(2 \cdot t) + 0,2 \cdot \sin(2 \cdot t)] \cdot e^{-t} \quad [9.2.51]$$

Per $t \rightarrow \infty$ il valore finale della risposta tende a 0,4 A: *al termine del transitorio l'intensità della corrente è limitata unicamente dalle due resistenze.*

Esercizio 5

Calcolare la risposta $v_c(t)$ del circuito di figura 9.2.39. All'istante $t=0$ la tensione agli estremi del condensatore è $v_c(0) = 12$ V. Siano $R = 2$ k Ω e $C = 1$ mF.

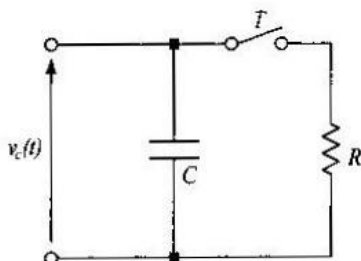


Fig. 9.2.39

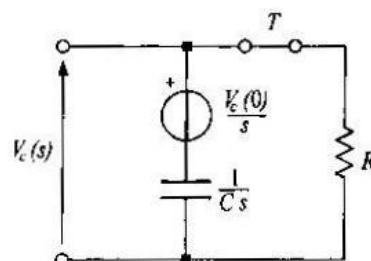


Fig. 9.2.40

Applicando la legge di Kirchhoff al circuito equivalente di figura 9.2.40, la trasformata di Laplace della corrente $I(s)$ è:

$$I(s) = \frac{V_c(0)}{R + \frac{1}{C \cdot s}} = \frac{C \cdot V_c(0)}{R \cdot C \cdot s + 1} \quad [9.2.52]$$

La trasformata di Laplace della risposta è:

$$V_c(s) = R \cdot I(s) = \frac{V_c(0)}{s + \frac{1}{R \cdot C}} \quad [9.2.53]$$

L'antitrasformata di Laplace della [9.2.53] è la risposta del sistema:

$$V_c(t) = V_c(0) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = 12 \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$

Esercizio 6

Il sistema di figura 9.2.41 è sollecitato da un segnale a gradino così definito:

$$v_i(t) = \begin{cases} 10 \text{ V per } t < 0 \\ 2 \text{ V per } t \geq 0 \end{cases}$$

All'istante $t = 0$ l'interruttore T è aperto. Calcolare l'intensità della corrente $i_c(t)$.

I parametri sono $R_1 = R_2 = 2 \, \Omega$, $C = 1 \, \text{F}$ e $L = 1 \, \text{H}$.

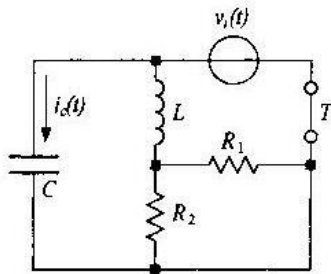


Fig. 9.2.41

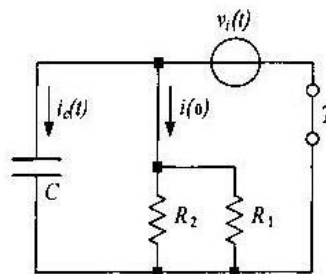


Fig. 9.2.42

Prima che venga aperto l'interruttore T , il sistema si trova nello stato di regime e pertanto può essere rappresentato con lo schema di figura 9.2.42. Poiché a regime l'induttore può essere considerato un corto circuito, le condizioni del sistema all'istante $t = 0$ sono:

$$I(0^-) = \frac{v_i(t)}{R} = \frac{10}{1} = 10 \, \text{A} \quad ; \quad V_c(0) = 10 \, \text{V}$$

dove $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.

All'istante $t=0^+$, quando l'interruttore è aperto, il sistema può essere rappresentato con lo schema di figura 9.2.43

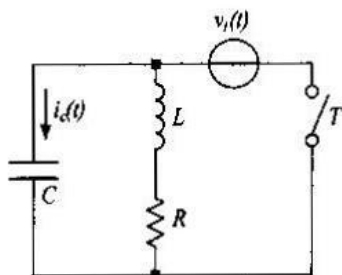


Fig. 9.2.43

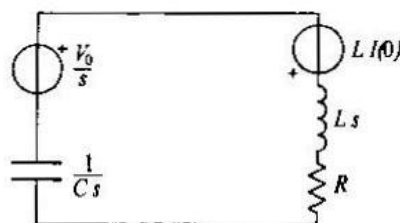


Fig. 9.2.44

Considerando le condizioni iniziali del condensatore e dell'induttore e applicando le leggi di Ohm al circuito equivalente di figura 9.2.44, la trasformata di Laplace della corrente è:

$$I(s) = \frac{\frac{V_c(0^-)}{s} + L \cdot I(0^-)}{R + L \cdot s + \frac{1}{C \cdot s}} = \frac{C \cdot V_c(0^-) + L \cdot C \cdot s \cdot I(0^-)}{L \cdot C \cdot s + R \cdot C \cdot s + 1} \quad [9.2.54]$$

Sostituendo nella [9.2.54] i valori dei parametri del circuito, la trasformata di Laplace della corrente è uguale a

$$I(s) = 10 \cdot \frac{s+1}{s^2 + s + 1} \quad [9.2.55]$$

Sviluppando la [9.2.55] nella somma di frazioni parziali si ha:

$$I(s) = \frac{5 + j \cdot 2,89}{s + 0,5 + j \cdot 0,866} + \frac{5 - j \cdot 2,89}{s + 0,5 - j \cdot 0,866} \quad [9.2.56]$$

L'antitrasformata di Laplace della [9.2.56] è la risposta $i(t)$:

$$i(t) = [10 \cdot \cos(0,866 \cdot t) + 5,70 \cdot \sin(0,866 \cdot t)] \cdot e^{-0,5 \cdot t}$$

Esercizio 7

Il sistema di figura 9.2.45 è sollecitato da un segnale a gradino così definito:

$$v_i(t) = \begin{cases} 0 \text{ V per } t < 0 \\ 5 \text{ V per } t \geq 0 \end{cases}$$

Studiare l'andamento della risposta $V_c(t)$ nell'ipotesi che all'istante $t=0$ siano $V_c(0) = 0$ V e $I_L(0) = 0$ A. I parametri sono $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $C = 1$ F e $L = 1$ H.

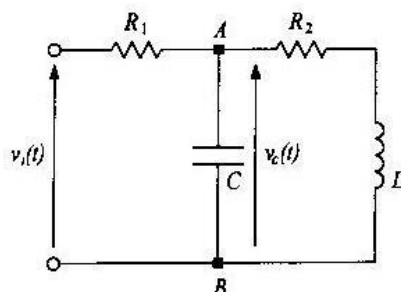


Fig. 9.2.45

La tensione esistente tra i punti A e B, estremi del condensatore, coincide con la d.d.p. ai capi dell'impedenza $Z(s)$.

Considerando che

$$Z(s) = \frac{L \cdot s + R_2}{L \cdot C \cdot s^2 + R_2 \cdot C \cdot s + 1}$$

la trasformata di Laplace della risposta è:

$$V_c(s) = Z(s) \cdot \frac{V_i(s)}{R_1 + Z(s)} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{\frac{L}{R_2} \cdot s + 1}{L \cdot C \cdot s^2 + \left(R_2 \cdot C + \frac{L}{R_1}\right) \cdot s + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)} \quad [9.2.57]$$

Sostituendo nella [9.2.57] i valori dei parametri del circuito, la trasformata di Laplace della tensione ai capi del condensatore risulta:

$$V_c(s) = \frac{s+4}{s^2+5 \cdot s+5} \cdot \frac{5}{s} \quad [9.2.58]$$

dove $\frac{5}{s}$ è la trasformata di Laplace della sollecitazione. Sviluppando la [9.2.58] nella somma di frazioni parziali si ha:

$$v_c(s) = \frac{4}{s} - \frac{4,23}{s+1,382} + \frac{0,23}{s+3,618} \quad [9.2.59]$$

L'antitrasformata di Laplace della [9.2.59] è la risposta $v_c(t)$:

$$v_c(t) = 4 - 4,23 \cdot e^{-1,382 \cdot t} + 0,23 \cdot e^{-3,618 \cdot t}$$

Esercizio 8

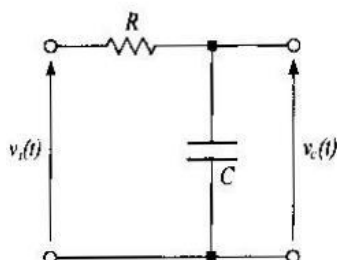


Fig. 9.2.46

Il sistema di figura 9.2.46 è sollecitato da un segnale a rampa così definito:

$$v_i(t) = \begin{cases} 0 \text{ V per } t < 0 \\ 2 \cdot t \text{ V per } t \geq 0 \end{cases}$$

Calcolare la tensione ai capi del condensatore $v_c(t)$. All'istante $t = 0$ sia $V_c(0) = 0$ V.

I valori dei parametri del circuito sono $R = 2 \, \Omega$ e $C = 0,5$ F.

La trasformata di Laplace del segnale di uscita è:

$$v_c(s) = \frac{V_i(s)}{R \cdot C \cdot \left(s + \frac{1}{R \cdot C}\right)} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{2}{s^2} = \frac{2}{s^2 \cdot (s+1)} \quad [9.2.60]$$

I poli sono $p_1 = p_2 = 0$ e $p_3 = -1$.

Sviluppando la [9.2.60] nella somma di frazioni parziali si ha:

$$v_c(s) = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+1} \quad [9.2.61]$$

I residui A , B e C valgono:

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{2}{s^2 \cdot (s+1)} = 2$$

$$B = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} s^2 \cdot \left(\frac{2}{s^2 \cdot (s+1)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{2}{(s+1) \cdot (s+1)} = -2$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \cdot \frac{2}{s^2 \cdot (s+1)} = 2$$

Sostituendo nella [9.2.61] i valori di A , B e C si ha:

$$V_c(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{2}{s+1} \quad [9.2.62]$$

L'antitrasformata di Laplace di ambo i membri della [9.2.62] è la risposta $v_c(t)$:

$$v_c(t) = 2 \cdot t - 2 + 2 \cdot e^{-t}$$

Esercizio 9

Il sistema di figura 9.2.47 è sollecitato da un impulso così definito:

$$v_i(t) = \begin{cases} 0 \text{ V per } t < 0 \\ 2 \text{ V per } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 \text{ V per } t > 2 \end{cases}$$

Calcolare la tensione $v_c(t)$ nell'ipotesi che all'istante $t = 0$ sia $v_c(0) = 0$ V.

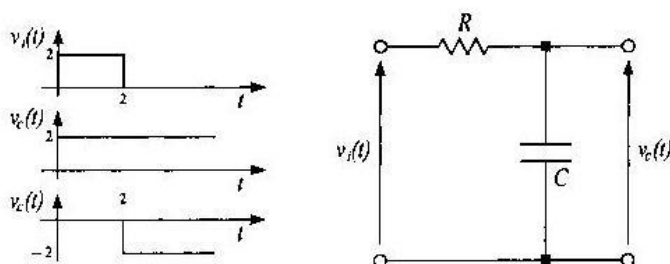


Fig. 9.2.47

La tensione $v_i(t)$ può essere considerata come la somma di due gradini:

$$v_i(t) = v_1(t) + v_2(t-2)$$

dove $v_1(t)$ e $(t-2)$ sono rispettivamente così definiti:

$$v_1(t) = \begin{cases} 0 \text{ V per } t < 0 \\ 2 \text{ V per } t \geq 0 \end{cases} \quad v_2(t-2) = \begin{cases} 0 \text{ V per } t < 2 \\ -2 \text{ V per } t \geq 2 \end{cases}$$

La trasformata di Laplace della risposta è:

$$v_c(s) = \frac{V_i(s)}{R \cdot C \cdot \left(s + \frac{1}{R \cdot C}\right)} \quad [9.2.63]$$

Poiché $v_i(s) = \frac{2 \cdot (1 - e^{-2s})}{s}$, la [9.2.63] diviene:

$$v_c(s) = \frac{2 \cdot [1 - e^{-2s}]}{R \cdot C \cdot \left(s + \frac{1}{R \cdot C}\right)} = \frac{2}{R \cdot C \cdot \left(s + \frac{1}{R \cdot C}\right)} - \frac{2 \cdot e^{-2s}}{R \cdot C \cdot \left(s + \frac{1}{R \cdot C}\right)} \quad [9.2.64]$$

Sviluppando la [9.2.64] nella somma di frazioni parziali si ottiene:

$$V_c(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s + \frac{1}{R \cdot C}} - \frac{2 \cdot e^{-2s}}{s} + \frac{2 \cdot e^{-2s} \cdot \frac{1}{R \cdot C}}{s + \frac{1}{R \cdot C}} \quad [9.2.65]$$

L'antitrasformata di Laplace della [9.2.65] è la risposta $V_c(t)$:

$$V_c(t) = 2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) - 2 \cdot \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{RC} - \frac{2}{RC}\right)}\right] \cdot u(t-2) \quad [9.2.66]$$

dove $u(t-2)$ è la funzione unitaria ritardata.

Per $R = 2 \Omega$ e $C = 0,5 \text{ F}$ si ha:

$$v_c(t) = 2 \cdot (1 - e^{-t}) - 2 \cdot [1 - e^{-(t-2)}] \cdot u(t-2)$$

Esercizio 10

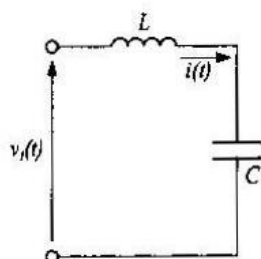


Fig. 9.2.48

Il sistema di figura 9.2.48 è sollecitato da un segnale cosinusoidale $v_i(t) = 5 \cdot \cos 1 \cdot t$. Calcolare la corrente $i(t)$ nell'ipotesi che all'istante $t = 0$ siano $V_c(0) = 0 \text{ V}$ e $I_L(0) = 0 \text{ A}$.

I parametri del circuito sono $L = 1 \text{ H}$ e $C = 1 \text{ F}$.

La trasformata di Laplace della corrente è:

$$I(s) = \frac{V(s)}{L \cdot s + \frac{1}{C \cdot s}} = \frac{C \cdot s}{L \cdot C \cdot s^2 + 1} \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad [9.2.67]$$

dove $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ è la trasformata di Laplace della sollecitazione.

Sostituendo nella [9.2.67] i valori dei parametri del circuito si ha:

$$I(s) = \frac{s}{s^2 + 1} \cdot \frac{5 \cdot s}{s^2 + 1} \quad [9.2.68]$$

Sviluppando la [9.2.68] nella somma di frazioni parziali si ha:

$$I(s) = \frac{1,25}{(s+j) \cdot (s-j)} + \frac{1,25 \cdot j}{s+j} + \frac{1,25}{(s-j) \cdot (s-j)} - \frac{1,25 \cdot j}{s-j} \quad [9.2.69]$$

L'antitrasformata di Laplace della [9.2.69] è la risposta:

$$i(t) = 2,5 \cdot (t \cdot \cos t + \sin t)$$

Esercizio 11

Il sistema di figura 9.2.49 è sollecitato da un segnale a gradino così definito:

$$i(t) = \begin{cases} 0 \text{ A} & t < 0 \\ I_0 \text{ A} & t \geq 0 \end{cases}$$

Studiare l'andamento dell'intensità della corrente che attraversa il condensatore nell'ipotesi che all'istante $t = 0$ siano $V_c(0) = 0 \text{ V}$ e $I_L(0) = 0 \text{ A}$.

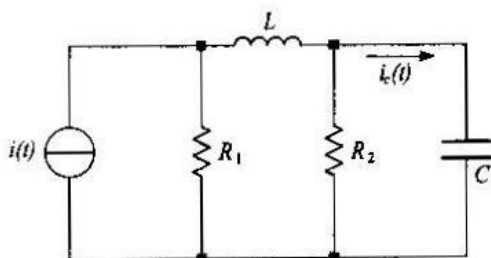


Fig. 9.2.49

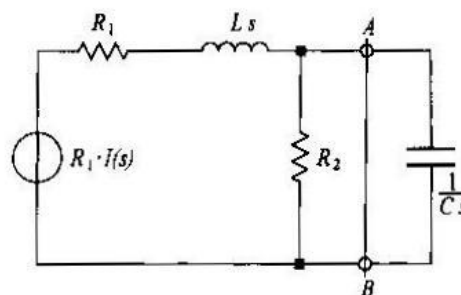


Fig. 9.2.50

Trasformando il generatore di corrente in un generatore di tensione si ottiene il circuito equivalente nel dominio di s (fig. 9.2.50). Applicando il teorema di Thevenin tra i punti A e B si calcola la trasformata di Laplace della risposta $i_c(s)$:

$$i_c(s) = \frac{R_1 \cdot C \cdot s \cdot I(s)}{L \cdot C \cdot s^2 + \left(R_1 \cdot C + \frac{L}{R_2}\right) \cdot s + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)} \quad [9.2.70]$$

Per $R_1 = R_2 = 0,5 \, \Omega$, $L = 10 \, \text{H}$ e $C = 1 \, \text{F}$, la [9.2.70] diviene:

$$i_c(s) = \frac{0,5 \cdot I_0}{10 \cdot s^2 + 20,5 \cdot s + 2} \quad [9.2.71]$$

La risposta $i_c(t)$ è uguale a

$$i_c(t) = 0,027 \cdot I_0 \cdot (e^{-0,1 \cdot t} - e^{-1,95 \cdot t})$$

ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1

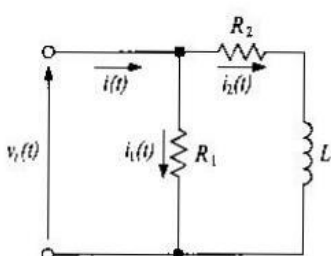


Fig. 9.2.51

Il sistema di figura 9.2.51 è sollecitato da un segnale a gradino di ampiezza 10 V. Calcolare le intensità delle correnti $i(t)$, $i_1(t)$ e $i_2(t)$ nell'ipotesi che all'istante $t = 0$ sia $i_2(0) = 0$ A.

I parametri sono $L = 2$ H, $R_1 = 5 \Omega$ e $R_2 = 10 \Omega$.

R. $i_1(t) = 2$ A

R. $i_2(t) = (1 - e^{-5 \cdot t})$

R. $i(t) = 2 + (1 - e^{-5 \cdot t})$

Esercizio 2

Il sistema di figura 9.2.52 è sollecitato da un segnale a gradino di ampiezza 3 V. Calcolare la tensione agli estremi del condensatore. All'istante $t = 0$ sia $V_c(0) = 0$ V.

I parametri sono $L = 1$ H, $R_1 = 3 \Omega$ e $R_2 = 3 \Omega$ e $C = 1$ F.

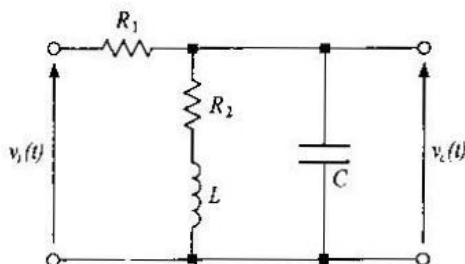


Fig. 9.2.52

R. $v_c(t) = 1,5 - 1,6 \cdot e^{-0,78 \cdot t} + 0,1 \cdot e^{-2,55 \cdot t}$

Esercizio 3

Il sistema di figura 9.2.53 è sollecitato da un segnale a gradino di ampiezza 10 V. Calcolare la tensione agli estremi del condensatore nell'ipotesi che all'istante $t = 0$ sia $V_c(0) = 0$ V.

I parametri sono $R_1 = 10 \, \Omega$, $R_2 = 20 \, \Omega$, $R_3 = 30 \, \Omega$ e $C = 1 \text{ F}$.

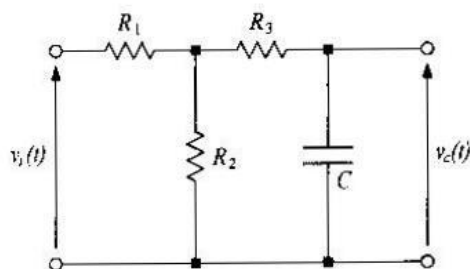


Fig. 9.2.53

R. $v_o(t) = 6,66 \cdot (1 - e^{-0,375 \cdot t})$

Esercizio 4

Il sistema di figura 9.2.54 è sollecitato un segnale a gradino di ampiezza 3 V. Calcolare la risposta $i(t)$ nell'ipotesi che all'istante $t = 0$ siano $V_C(0) = 0 \text{ V}$ e $i_L(0) = 0 \text{ A}$. I parametri sono $R = 1 \, \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ e $C = 1 \text{ F}$.

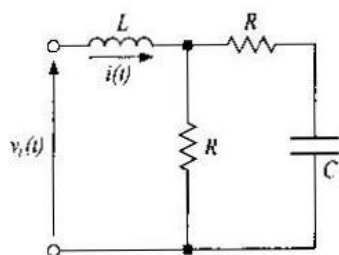


Fig. 9.2.54

R. $i(t) = 3 \cdot \{1 - e^{-0,5 \cdot t} \cdot [\cos(0,5 \cdot t) + \sin(0,5 \cdot t)]\}$

Esercizio 5

Il sistema di figura 9.2.55 è sollecitato da un segnale a gradino di ampiezza 10 V. Calcolare le intensità delle correnti $i(t)$, $i_1(t)$ e $i_2(t)$ nell'ipotesi che all'istante $t = 0$ siano $i_1(0) = 0 \text{ A}$ e $i_2(0) = 0 \text{ A}$. I parametri sono $R_1 = 1 \, \Omega$, $R_2 = 2 \, \Omega$, $L_1 = 2 \text{ H}$ e $L_2 = 4 \text{ H}$.

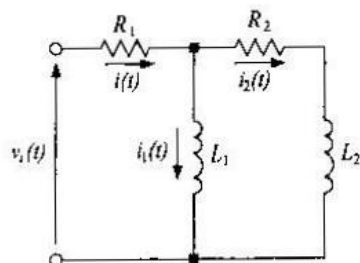


Fig. 9.2.55

R. $i(t) = 10 - 3,33 \cdot e^{-0,25t} - 6,66 \cdot e^{-t}$
 R. $i_1(t) = 10 - 3,33 \cdot e^{-t} - 6,66 \cdot e^{-0,25t}$
 R. $i_2(t) = 3,33 \cdot (e^{-0,25t} - e^{-t})$

Esercizio 6

Il sistema di figura 9.2.56 è sollecitato da un segnale a gradino di ampiezza 5 V. Calcolare l'intensità della corrente $i(t)$. All'istante $t=0$ i condensatori sono scarichi. I parametri sono $R=1\ \Omega$, $R_2=20\ \Omega$ e $C=1\text{F}$.

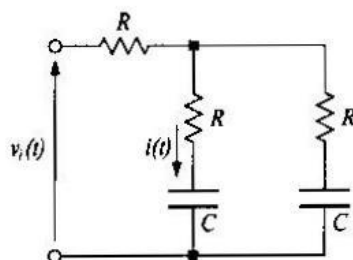


Fig. 9.2.56

$$\text{R. } i(t) = \frac{5}{3} \cdot e^{-0,33 \cdot t}$$

Esercizio 7

Il circuito figura 9.2.57 è un integratore ideale invertente sollecitato da un gradino di ampiezza 5 V. Calcolare la risposta $v_u(t)$ nell'ipotesi che all'istante $t=0$ sia $V_c(0)=0\text{V}$.

I parametri sono $R=10\text{ k}\Omega$ e $C=1\text{ nF}$.

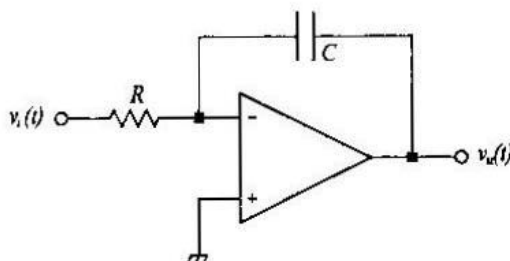


Fig. 9.2.57

$$\text{R. } v_u(t) = -5 \cdot 10^5 \cdot t \cdot u(t)$$

Esercizio 8

Il circuito figura 9.2.58 è un derivatore ideale invertente sollecitato da un segnale a rampa così definito:

$$v_i(t) = \begin{cases} 0\text{V} & \text{per } t < 0 \\ t\text{V} & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

Calcolare la risposta $v_u(t)$ nell'ipotesi che all'istante $t=0$ sia $V_c(0)=0\text{V}$. I parametri sono $R=100\text{ k}\Omega$ e $C=1\text{ nF}$.

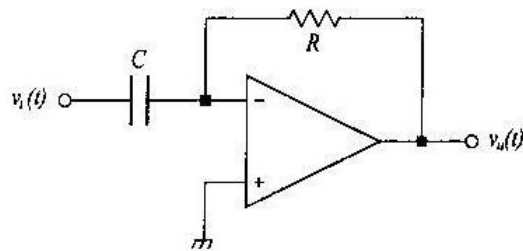


Fig. 9.2.58

R. $v_u(t) = -10^{-4}$

Esercizio 9

Un sistema elettrico è caratterizzato dalla funzione di trasferimento $W(s)$ riportata in figura 9.2.59. Calcolare le risposte quando esso è sollecitato da un segnale delta di Dirac e quando è sollecitato da un gradino di tensione

così definito $v_i(t) = \begin{cases} 0 \text{ V per } t < 0 \\ 1 \text{ V per } t \geq 0 \end{cases}$

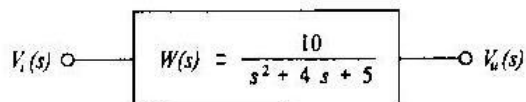


Fig. 9.2.59

R. $v_i(t) = \delta(t) \Rightarrow v_u(t) = 10 \cdot e^{-2t} \sin t$

R. $v_i(t) = \begin{cases} 0 \text{ V per } t < 0 \\ 1 \text{ V per } t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow v_u(t) = 2 - 4,4 \cdot e^{-2t} \cdot \sin(t + 26^\circ)$

Esercizio 10

- Calcolare la risposta $\omega(t)$ di un motore in c.c. a magnete permanente

sollecitato da un segnale a gradino $v_a(t) = \begin{cases} 0 \text{ V per } t < 0 \\ 32 \text{ V per } t \geq 0 \end{cases}$

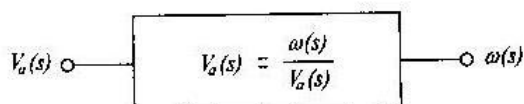


Fig. 9.2.60

La funzione di trasferimento del motore (fig. 9.2.60), definita come il rapporto delle trasformate di Laplace della velocità angolare e della tensione

di armatura è:

$$W(s) = \frac{\frac{K_T}{L_a} \cdot J}{\left(s + \frac{1}{\tau_a}\right) \cdot \left(s + \frac{1}{\tau_m}\right)}$$

dove:

- $K_T = 0,1194 \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A}} \right]$
- $J = 0,473 \cdot 10^{-4} [\text{Kg} \cdot \text{m}^2]$
- $\tau_a = 1,72 \text{ ms}$
- $\tau_m = 10,6 \text{ ms}$

$$\text{R. } \omega(t) = 270 + 52,2 \cdot e^{-\frac{t}{1,72 \cdot 10^{-2}}} - 322,2 \cdot e^{-\frac{t}{10,6 \cdot 10^{-2}}}$$

U.D. 3

La risposta in frequenza dei sistemi lineari

9.3.1 Introduzione

Si dimostra che un sistema sollecitato da un segnale sinusoidale fornisce a regime una risposta sinusoidale con un'ampiezza e con una fase generalmente diverse da quelle della sollecitazione applicata. Sulla base di queste considerazioni è stato sviluppato un metodo di analisi e di progettazione dei sistemi basato sulla risposta in frequenza. Per risposta in frequenza si deve intendere la risposta a regime di un sistema sollecitato da un segnale sinusoidale. Nell'analisi di un sistema per mezzo della risposta in frequenza la variabile complessa s è costituita dalla sola parte immaginaria $j \cdot \omega$ e la funzione di trasferimento, a regime, è funzione della sola variabile $j \cdot \omega$ ed è caratterizzata da un modulo e da una fase che possono essere facilmente rappresentati in modo grafico. L'analisi di un sistema nel dominio della frequenza risulta particolarmente agevole perché in laboratorio si possono utilizzare generatori di segnali sinusoidali con range di frequenza e di ampiezza variabili. Un secondo vantaggio offerto da questa metodologia di studio consiste nella possibilità di ricavare la funzione di trasferimento di un sistema dall'analisi della sua risposta in frequenza effettuata sperimentalmente. L'analisi in frequenza offre però scarse possibilità, fatta eccezione per i sistemi del secondo ordine, di correlare i risultati della risposta in frequenza con quelli della risposta temporale. In questa unità didattica saranno introdotti i concetti principali dell'analisi in frequenza di semplici sistemi con particolare riferimento ai diagrammi di Bode.

9.3.2 Analisi della risposta in frequenza

L'analisi della risposta in frequenza di un sistema, sollecitato da un segnale sinusoidale di ampiezza costante, può essere eseguita sperimentalmente rilevando per ogni valore di ω il modulo e la fase della $G(j \cdot \omega)$. Una seconda metodologia di analisi consiste nel ricavare analiticamente i valori del modulo e della fase della $G(j \cdot \omega)$ per ω che varia da zero a più infinito. I risultati in ambedue i procedimenti, quello analitico e quello sperimentale, possono essere rappresentati graficamente ed il grafico assume una forma che varia con il sistema di coordinate utilizzato (cartesiano, polare, ecc...): il diagramma di Bode o logaritmico e il diagramma di Nyquist o polare sono le rappresentazioni maggiormente utilizzate.

L'analisi della risposta in frequenza si fonda sulla relazione tra la trasformata di Laplace della sollecitazione e quella della risposta. Si

consideri, dunque, un sistema il quale abbia la funzione di trasferimento $G(s)$ uguale al rapporto di due polinomi in s :

$$G(s) = k \cdot \frac{N(s)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot (s - p_3) \dots (s - p_n)}$$

- k è un numero reale;
- $n \geq m$, essendo m il grado del polinomio $N(s)$;
- p_1, p_2, \dots, p_n sono i poli a *parte reale negativa* della funzione di trasferimento. I poli sono considerati semplici per semplificare il calcolo ma nella realtà ciascuno può avere una sua molteplicità.

Se $I(s)$ è la trasformata di Laplace del segnale d'ingresso e $U(s)$ è la trasformata del segnale di uscita si ha:

$$U(s) = I(s) \cdot G(s) \quad [9.3.1]$$

Se la sollecitazione $i(t)$ applicata è sinusoidale del tipo

$$i(t) = E_M \sin \omega \cdot t$$

e $I(s) = \frac{E_M \cdot \omega}{s^2 + \omega^2}$ è la sua trasformata, si dimostra che la risposta a regime $u_{ss}(t)$ è uguale a

$$u_{ss}(t) = E_M \cdot |G(j \cdot \omega)| \cdot \sin(\omega \cdot t + \Phi) \quad [9.3.2]$$

$$u_{ss}(t) = U_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \Phi) \quad [9.3.3]$$

Dall'analisi della [9.3.3] si ricava che la risposta a regime di un sistema, sollecitato da un segnale sinusoidale e definito da una funzione di trasferimento avente i poli con la *parte reale negativa*, ha le seguenti caratteristiche:

- la *frequenza della risposta* è uguale a quella del segnale applicato;
- l'*ampiezza massima* U_M della risposta è uguale al prodotto ottenuto moltiplicando l'*ampiezza massima* E_M della sollecitazione e il modulo $|G(j \cdot \omega)|$ della funzione di trasferimento $G(j \cdot \omega)$ la quale è detta anche *funzione di trasferimento armonica*:

$$U_M = E_M \cdot |G(j \cdot \omega)|$$

- la *fase* Φ della risposta è uguale alla fase della funzione di trasferimento armonica $G(j \cdot \omega)$.

Si dimostra che la funzione di trasferimento armonica $G(j \cdot \omega)$ può essere ricavata direttamente dalla [9.3.1] ponendo $s = j \cdot \omega$

$$G(j \cdot \omega) = \frac{U(j \cdot \omega)}{I(j \cdot \omega)} \quad [9.3.4]$$

Poiché $G(j \cdot \omega)$ è una funzione di variabile complessa, la [9.3.4] può essere scritta nella seguente forma:

$$G(j \cdot \omega) = \text{Re}[G(j \cdot \omega)] + j \cdot \text{Im}[G(j \cdot \omega)]$$

con modulo e fase uguali a

$$|G(j \cdot \omega)| = \sqrt{\{\text{Re}[G(j \cdot \omega)]\}^2 + \{\text{Im}[G(j \cdot \omega)]\}^2}$$

$$\Phi = \arctg \frac{\text{Im}[G(j \cdot \omega)]}{\text{Re}[G(j \cdot \omega)]}$$

Scheda di approfondimento.

La funzione di trasferimento armonica.

Per dimostrare la [9.3.3] si sviluppa la [9.3.1] in somma di frazioni parziali:

$$U(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \dots + \frac{A_n}{s - p_n} + \frac{B}{s + j \cdot \omega} + \frac{B^*}{s - j \cdot \omega} \quad [9.3.5]$$

- A_1, A_2, \dots, A_n sono costanti reali;
- B e B^* sono costanti complesse e coniugate.

L'antitrasformata di Laplace di ambo i membri della [9.3.5] è:

$$L^{-1}[U(s)] = L^{-1} \left[\frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \dots + \frac{A_n}{s - p_n} + \frac{B}{s + j \cdot \omega} + \frac{B^*}{s - j \cdot \omega} \right]$$

La risposta temporale $u(t)$ del sistema è uguale a

$$u(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t} + A_n \cdot e^{p_n t} + B \cdot e^{-j \cdot \omega t} + B^* \cdot e^{+j \cdot \omega t} \quad [9.3.6]$$

Se i poli p_1, p_2, \dots, p_n sono reali e negativi, i termini $A_1 \cdot e^{p_1 t}, A_2 \cdot e^{p_2 t}, \dots, A_n \cdot e^{p_n t}$ tendono a zero per $t \rightarrow +\infty$ e pertanto, a regime, la risposta $u_{ss}(t)$ è uguale a

$$u_{ss}(t) = B \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} + B^* \cdot e^{+j \cdot \omega \cdot t} \quad [9.3.7]$$

Le costanti B e B^* calcolate con il metodo dei residui sono:

$$B = \lim_{s \rightarrow -j \cdot \omega} (s + j \cdot \omega) \cdot G(s) \cdot \frac{E_M \cdot \omega}{(s + j \cdot \omega) \cdot (s - j \cdot \omega)} = -\frac{E_M}{2 \cdot j} \cdot G(-j \cdot \omega)$$

$$B^* = \lim_{s \rightarrow +j \cdot \omega} (s - j \cdot \omega) \cdot G(s) \cdot \frac{E_M \cdot \omega}{(s + j \cdot \omega) \cdot (s - j \cdot \omega)} = -\frac{E_M}{2 \cdot j} \cdot G(j \cdot \omega)$$

Sostituendo B e B^* nella [9.3.7] si ha:

$$u_{ss}(t) = -\frac{E_M}{2 \cdot j} \cdot G(-j \cdot \omega) \cdot e^{-j \omega t} + \frac{E_M}{2 \cdot j} \cdot G(+j \cdot \omega) \cdot e^{+j \omega t} \quad [9.3.8]$$

Esprimendo $G(j \cdot \omega)$ e $G(-j \cdot \omega)$ in forma polare

$$G(j \cdot \omega) = |G(j \cdot \omega)| \cdot e^{j \cdot \Phi}$$

$$G(-j \cdot \omega) = |G(j \cdot \omega)| \cdot e^{-j \cdot \Phi}$$

e sostituendo nella [9.3.8] si ha:

$$u_{ss}(t) = -\frac{E_M}{2 \cdot j} \cdot [|G(j \cdot \omega)| \cdot e^{-j(\omega t + \Phi)}] + \frac{E_M}{2 \cdot j} \cdot [|G(j \cdot \omega)| \cdot e^{j(\omega t + \Phi)}]$$

Ricordando le relazioni di Eulero, la risposta a regime $u_{ss}(t)$ assume la seguente forma:

$$u_{ss}(t) = E_M \cdot |G(j \cdot \omega)| \cdot \left[\frac{e^{j(\omega t + \Phi)} - e^{-j(\omega t + \Phi)}}{2 \cdot j} \right]$$

$$u_{ss}(t) = E_M \cdot |G(j \cdot \omega)| \cdot \sin(\omega \cdot t + \Phi)$$

$$u_{ss}(t) = U_M \cdot \sin(\omega \cdot t + \Phi)$$