

## **U.D. 6**

### ***La trasformata di Laplace***

#### **1.6.1 Introduzione**

I sistemi lineari (elettrici, meccanici, idraulici, termici, ecc) sono descritti da modelli matematici costituiti da equazioni differenziali e/o integro-differenziali, nelle quali la sollecitazione e la risposta sono **entrambe** funzioni del tempo. Poiché la soluzione di tali equazioni non è sempre agevole, si preferisce ricorrere all'uso della trasformata di Laplace che consente di trasformare le equazioni differenziali e integro-differenziali in equazioni algebriche, nelle quali la sollecitazione e la risposta sono funzioni della variabile complessa  $s$ . La soluzione delle equazioni algebriche in  $s$ , in tal modo, si ottiene applicando le regole di soluzione delle equazioni algebriche studiate nei corsi di matematica. Con tale metodo si ottiene, mediante una operazione di antitrasformazione, la soluzione dell'equazione differenziale coincidente, nel caso specifico dello studio dei sistemi, con la risposta del sistema alla sollecitazione applicata. Da quanto esposto si intuisce come la trasformata di Laplace faciliti lo studio dei sistemi lineari perché riduce le difficoltà derivanti dalla ricerca delle soluzioni delle equazioni differenziali.

Per consentire al lettore di analizzare i sistemi lineari nel dominio della variabile complessa  $s$ , si ritiene opportuno presentare alcuni concetti elementari relativi alle funzioni di variabile complessa e alle operazioni di trasformazione e di antitrasformazione. La trattazione di tali argomenti, che sarà approfondita nel secondo volume, ha lo scopo di fornire le conoscenze di base indispensabili per applicare i vari metodi di calcolo che ricorrono con maggiore frequenza nella teoria dei sistemi.

#### **1.6.2 Numeri complessi**

Un numero complesso  $z$ , costituito da una parte reale e una immaginaria, è scritto nella seguente forma:

$$z = x + j \cdot y$$

dove  $x$  e  $y$  sono numeri reali,  $j$  è l'unità immaginaria definita dalla relazione

$$j^2 = -1$$

e il segno “+” non indica l'operazione di addizione ma è parte integrante del numero complesso. La parte reale e quella immaginaria del numero

complesso  $z$ , indicate anche con  $\text{Re}\{z\}$  e  $j \cdot \text{Im}\{z\}$ , sono uguali rispettivamente a  $x$  e  $j \cdot y$  con  $x$  e  $y$  numeri reali.

Il numero complesso  $z$  è rappresentato sul piano complesso nel quale l'asse delle ordinate è l'asse immaginario e l'asse delle ascisse è quello reale (fig. 1.6.1).

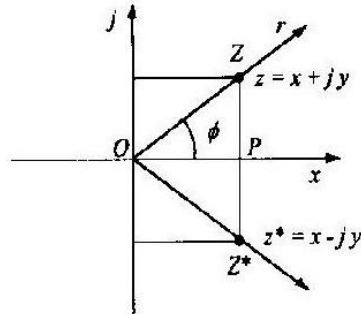


Fig. 1.6.1

- Si definisce coniugato del numero complesso  $z = x + j \cdot y$ , il numero complesso  $z^*$  che ha il coefficiente della sua parte immaginaria opposto a quello di  $z$ :

$$z^* = x - j \cdot y$$

- Si definisce modulo  $|z|$  del numero complesso  $z$  la radice quadrata del prodotto ottenuto moltiplicando  $z$  e il suo coniugato  $z^*$ :

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{(x + j \cdot y) \cdot (x - j \cdot y)}$$

$$|z| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

- Si definisce argomento di un numero complesso  $z$ , definito a meno di multipli interi di  $2 \cdot \pi$ , l'angolo la cui tangente goniometrica è uguale al rapporto tra il coefficiente  $y$  della parte immaginaria e la parte reale  $x$ :

$$\phi = \arctg \frac{y}{x}$$

e nella forma completa si ha:

$$\phi = \arctg \frac{y}{x} \pm 2 \cdot k \cdot \pi$$

con  $k$  intero positivo.

Al numero complesso  $z$  è associato un vettore  $\vec{OZ}$  che individua un punto del piano complesso avente coordinate  $(x, y)$ .

Sono considerati positivi gli angoli  $\phi$  ottenuti con  $r$ , lato libero dell'angolo, che ruota in senso antiorario. Dal triangolo rettangolo  $OPZ$  della figura 1.6.1

si ha:

$$x = |z| \cdot \cos \phi$$

$$y = |z| \cdot \sin \phi$$

e pertanto un numero complesso  $z = x + j \cdot y$  può essere scritto in forma **trigonometrica**:

$$z = x + j \cdot y$$

$$z = |z| \cdot (\cos \phi + j \cdot \sin \phi)$$

Un numero complesso può essere rappresentato nelle seguenti forme equivalenti:

- **forma cartesiana**  $z = x + j \cdot y$
- **forma trigonometrica**  $z = |z| \cdot (\cos \phi + j \cdot \sin \phi)$
- **forma esponenziale**  $z = |z| \cdot e^{j \cdot \phi}$
- **forma polare**  $z = |z| \angle \phi$

È utile ricordare le relazioni di Eulero:

$$e^{j \cdot \phi} = \cos \phi + j \cdot \sin \phi \quad [1.6.1]$$

$$e^{-j \cdot \phi} = \cos \phi - j \cdot \sin \phi \quad [1.6.2]$$

Addizionando e sottraendo la [1.6.1] e la [1.6.2] si ha:

$$\cos \phi = \frac{e^{j \cdot \phi} + e^{-j \cdot \phi}}{2}$$

$$\sin \phi = \frac{e^{j \cdot \phi} - e^{-j \cdot \phi}}{2 \cdot j}$$

### 1.6.3 Variabile complessa

Dato un insieme di numeri complessi, si definisce **variabile complessa**  $s$  un elemento qualsiasi dell'insieme tale che sia:

$$s = \sigma + j \cdot \omega$$

Dal punto di vista grafico la parte reale  $\sigma$  è rappresentata sull'asse orizzontale e quella immaginaria  $s \cdot \omega$  sull'asse verticale del piano complesso  $s$  (fig. 1.6.2).

Vi è una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano complesso  $s$  e gli elementi  $s$  dell'insieme dei numeri complessi. Ad un arbitrario punto  $P_0$  del piano complesso  $s$  si fa corrispondere la variabile complessa  $s_0 = \sigma_0 + j \cdot \omega_0$ , avente parte reale  $\sigma_0$  e parte immaginaria  $j \cdot \omega_0$ , e al numero complesso  $s_0$  si fa corrispondere il punto  $P_0$  del piano complesso.

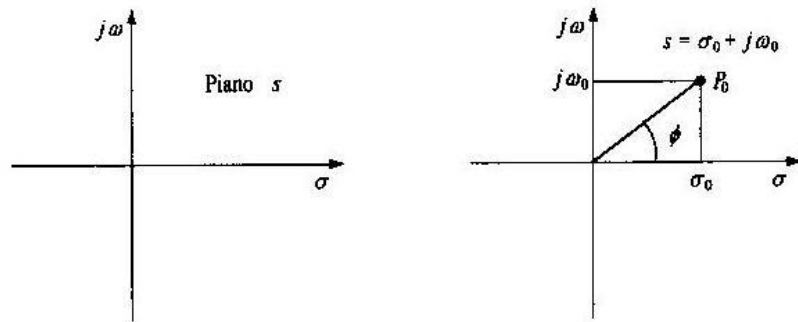


Fig. 1.6.2

Il modulo  $|s_0|$  e la fase  $\phi$  della variabile  $s_0$  sono uguali a

$$|s_0| = \sqrt{\sigma_0^2 + \omega_0^2}$$

$$\phi = \arctg \frac{\omega_0}{\sigma_0}$$

### 1.6.4 Funzione di variabile complessa

Una funzione  $F(s)$  è detta funzione della variabile complessa  $s$  quando ad ogni  $s$  corrisponde una  $F(s)$  tale che

$$F(s) = \text{Re}[F(s)] + j \cdot \text{Im}[F(s)]$$

dove  $\text{Re}[F(s)]$  e  $j \cdot \text{Im}[F(s)]$  sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria della funzione  $F(s)$ .

Il modulo  $|F(s)|$  e l'argomento  $\vartheta$  della funzione  $F(s)$  sono uguali rispettivamente a (fig. 1.6.3)

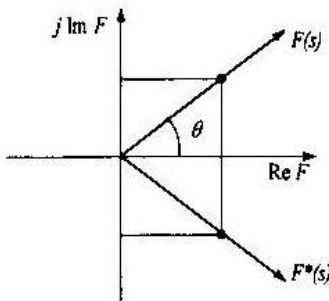


Fig. 1.6.3

$$|F(s)| = \sqrt{\{\text{Re}[F(s)]\}^2 + \{\text{Im}[F(s)]\}^2}$$

$$\vartheta = \arctg \frac{\text{Im}[F(s)]}{\text{Re}[F(s)]}$$

La funzione  $F^*(s)$ , coniugata di  $F(s) = \text{Re}[F(s)] + j \cdot \text{Im}[F(s)]$ , è così definita:

$$F^*(s) = \text{Re}[F(s)] - j \cdot \text{Im}[F(s)]$$

Per rappresentare la  $F(s)$  sono necessari due grafici bidimensionali. Il primo, rappresentato sul piano  $s$ , è un grafico che riporta la parte reale  $\sigma$  sull'asse delle ascisse e quella immaginaria  $j \cdot \omega$  su quello delle ordinate (fig. 1.6.4). Il secondo, rappresentato sul piano  $F(s)$ , si ottiene rappresentando la parte reale  $\text{Re}[F(s)]$  sull'asse delle ascisse e la parte immaginaria  $j \cdot \text{Im}[F(s)]$  su quello delle ordinate (fig. 1.6.4).



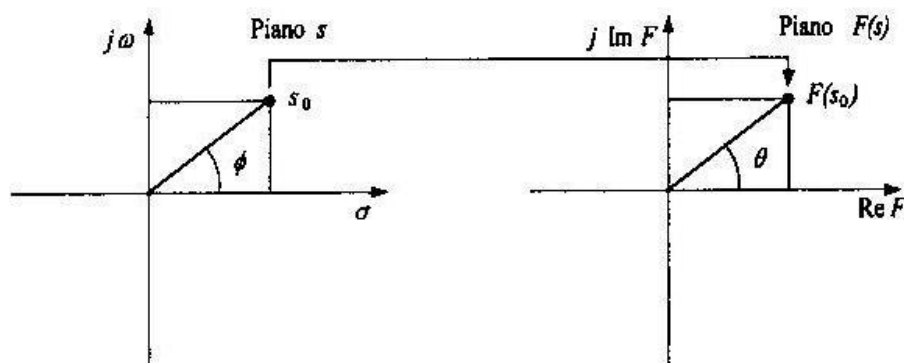


Fig. 1.6.4

Le funzioni di variabile complessa che sono oggetto di studio nella teoria dei sistemi sono quelle **"univoche"**, così dette perché ad ogni valore  $s_0$  della variabile complessa  $s$  corrisponde una ed una sola funzione  $F(s_0)$  nel piano  $F(s)$ .

### 1.6.5 La trasformata di Laplace

L'operazione di *trasformazione* (fig. 1.6.5) stabilisce una corrispondenza biunivoca<sup>(1)</sup> tra gli elementi dell'insieme di partenza definito da una funzione  $f(t)$  del tempo e quelli dell'insieme di arrivo definito da una funzione  $F(s)$  dipendente da una variabile complessa  $s = \sigma + j\omega$ , in cui  $\sigma$  è la parte reale ed  $\omega$  il coefficiente della parte immaginaria<sup>(2)</sup>.



Fig. 1.6.5

Data una funzione del tempo  $f(t)$  tale che  $f(t) = 0$  per  $t < 0$ , si definisce *trasformata unilaterale*<sup>(3)</sup> di Laplace della funzione  $f(t)$  e si indica con  $L[f(t)] = F(s)$ , la funzione  $F(s)$  della variabile complessa  $s$ :

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot f(t) \cdot dt \quad [1.6.3]$$

<sup>(1)</sup> Biunivoca significa che ad ogni elemento del primo insieme corrisponde uno ed un solo elemento del secondo insieme e viceversa.

<sup>(2)</sup> Una funzione  $F(s)$  è detta funzione di variabile complessa  $s$  se per ogni  $s$  esiste la corrispondente  $F(s)$ .

<sup>(3)</sup> Nella trasformata bilaterale la  $f(t)$  è definita per  $-\infty < t < +\infty$ .

dove  $L$  è l'operatore matematico che indica l'operazione di trasformazione sulla funzione  $f(t)$ . Non tutte le funzioni ammettono la trasformata di Laplace, ma solo quelle per le quali l'integrale di Laplace  $\int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot f(t) \cdot dt$  converge, ossia ammette un valore finito per uno o più valori della variabile complessa  $s$ .

La trasformata di Laplace di una funzione  $f(t)$ , se esiste, è unica. La *proprietà di unicità* di cui gode la trasformata di Laplace è di grande importanza dal punto di vista dello studio della soluzione di un problema reale, perché è possibile ricavare da una eventuale soluzione del problema pratico la trasformata della funzione richiesta e poi la stessa funzione  $f(t)$  con l'operazione di antitrasformazione. Conseguentemente per la proprietà di unicità si può affermare con sicurezza che la funzione  $f(t)$  è l'unica soluzione del problema. Se due funzioni  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  hanno la stessa trasformata  $F(s)$ , allora le due funzioni sono identiche.

Dalla relazione [1.6.3] risulta che l'unità di misura della variabile  $s$  deve essere il reciproco di un tempo [secondo]<sup>-1</sup> in quanto l'esponente avente come base il numero di Neper deve essere adimensionale.

La trasformata di Laplace trova larga applicazione nella soluzione di problemi meccanici, elettrici, elettronici, ecc..., perché può essere utilizzata per risolvere le equazioni integro-differenziali lineari a coefficienti costanti che costituiscono i modelli matematici di molti sistemi fisici reali.

Per meglio comprendere il significato di *trasformazione* e di *antitrasformazione*, si riporta un esempio tratto dalla matematica studiata.

Calcolare  $\frac{87654321}{12345}$ , utilizzando l'operatore logaritmico in base dieci.

Il logaritmo trasforma un numero  $x$ , appartenente all'insieme dei numeri reali positivi  $R^+$ , in un numero  $y$ , appartenente all'insieme dei numeri reali  $R$ .

Si ricorda che le proprietà dei logaritmi consentono di trasformare le operazioni di moltiplicazione, divisione e potenza in operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione. L'operazione logaritmo, inoltre, opera una *trasformazione* di scala da lineare a logaritmica.

Tali proprietà, come si vedrà in seguito, sono utili per le molteplici applicazioni nel calcolo e nella rappresentazione grafica di funzioni.



Fig. 1.6.6

Sia:

$$k = \frac{87654321}{12345} = 7100,3$$

Operando la *trasformazione* si ha:

$$\text{Log } k = \text{Log} \frac{87654321}{12345}$$

Applicando le proprietà dei logaritmi si ricava:

$$\text{Log } k = \text{Log } 87654321 - \text{Log } 12345 = 7,9442733 - 4,0914911 = 3,8512822$$

Eseguendo l' *antitrasformazione* o l'antilogaritmo del numero 3,8512822 si ha:

$$k = \text{antiLog } 3,8512822$$

$$k = 7100,3$$

## 1.6.6 Proprietà e teoremi della trasformata di Laplace

Senza entrare nel merito degli aspetti formali della [1.6.3] per i quali si rimanda a testi specializzati, di seguito sono riportate le principali proprietà della trasformata di Laplace.

- **La trasformata di Laplace del prodotto** di una costante  $k$  e di una funzione  $f(t)$  è uguale a  $k$  volte la trasformata della funzione. Se esiste  $L[f(t)] = F(s)$  allora si ha:

$$L[k \cdot f(t)] = k \cdot L[f(t)] = k \cdot F(s)$$

Si consideri il circuito di figura 1.6.7 sollecitato da un segnale  $v_i(t)$  e attraversato da una corrente  $i(t)$ . Il modello matematico del sistema è dato dalla seguente equazione:

$$v_i(t) = R \cdot i(t) \quad [1.6.4]$$

*L-trasformando* ambo i membri della [1.6.4] si ha:

$$L[v_i(t)] = L[R \cdot i(t)] \quad [1.6.5]$$

Se  $V_i(s)$  e  $I(s)$  sono rispettivamente la *L-trasformata* rispettivamente della sollecitazione  $v_i(t)$  e della risposta  $i(t)$ , entrambe funzioni del tempo, allora applicando alla [1.6.5] la prima proprietà delle trasformate si ricava:

$$V_i(s) = R \cdot I(s)$$

Il sistema di figura 1.6.7 è rappresentato dallo schema di figura 1.6.8 in cui  $V_i(s)$  è la trasformata della sollecitazione,  $I(s)$  è la trasformata della corrente e  $R$  è il parametro del sistema che rimane invariato.

- **La trasformata di Laplace di una combinazione lineare** di due o più funzioni è uguale alla combinazione lineare delle trasformate di Laplace delle singole funzioni. Se  $k_1$  e  $k_2$  sono due costanti, se  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  sono due funzioni con trasformate di Laplace  $L[f_1(t)] = F_1(s)$  e  $L[f_2(t)] = F_2(s)$ , allora risulta:

$$L[k_1 \cdot f_1(t) + k_2 \cdot f_2(t)] = k_1 \cdot L[f_1(t)] + k_2 \cdot L[f_2(t)]$$

$$L[k_1 \cdot f_1(t) + k_2 \cdot f_2(t)] = k_1 \cdot F_1(s) + k_2 \cdot F_2(s)$$

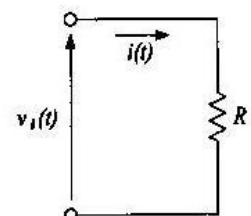


Fig. 1.6.7

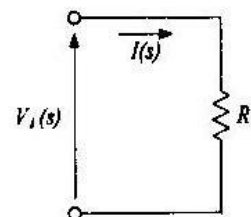


Fig. 1.6.8

Estendendo questa proprietà a  $n$  funzioni, si può affermare che la trasformata di Laplace di una combinazione lineare di  $n$  funzioni  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$  è uguale alla combinazione lineare delle trasformate di Laplace delle singole funzioni:

$$L[k_1 \cdot f_1(t) + k_2 \cdot f_2(t) + \dots + k_n \cdot f_n(t)] = k_1 \cdot F_1(s) + k_2 \cdot F_2(s) + \dots + k_n \cdot F_n(s)$$

Si consideri il sistema di figura 1.6.9 sollecitato da un segnale  $v_i(t)$  e attraversato da una corrente  $i(t)$ . Il modello matematico del sistema è dato dalla seguente equazione:

$$v_i(t) = R_1 \cdot i_1(t) + R_2 \cdot i_2(t) \quad [1.6.6]$$

*L*-trasformando ambo i membri della [1.6.6] si ha:

$$L[v_i(t)] = L[R_1 \cdot i_1(t) + R_2 \cdot i_2(t)]$$

da cui, applicando il teorema della linearità, si ricava:

$$V_i(s) = R_1 \cdot I_1(s) + R_2 \cdot I_2(s) \quad [1.6.7]$$

In base alla [1.6.7] il sistema assegnato è *L*-trasformato in quello di figura 1.6.10.

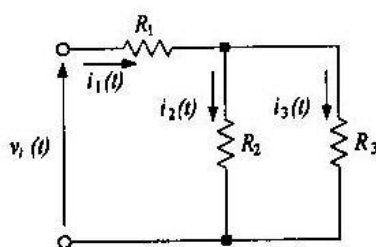


Fig. 1.6.9

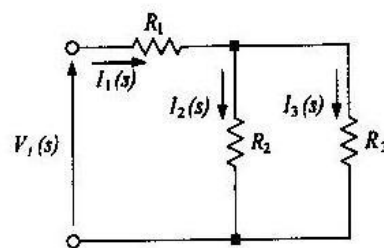


Fig. 1.6.10

- **La trasformata di Laplace della derivata prima** di una funzione  $f(t)$  è uguale alla differenza tra il prodotto  $s \cdot F(s)$ , ottenuto moltiplicando la trasformata di Laplace della funzione  $f(t)$  e la variabile complessa  $s$ , e il valore  $f(0)$  assunto dalla funzione  $f(t)$  all'istante  $t=0$ :

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot L[f(t)] - f(0) = s \cdot F(s) - f(0)$$

e se  $f(0) = 0$  si ha:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot L[f(t)]$$

Si consideri il sistema di figura 1.6.11 sollecitato da un segnale  $v_i(t)$  e attraversato da una corrente  $i(t)$ . Se le condizioni iniziali sono nulle, se cioè  $i(0) = 0$ , allora il modello matematico del sistema è dato dalla seguente equazione:

$$v_i(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad [1.6.8]$$

L-trasformando ambo i membri della [1.6.8] si ha:

$$\mathcal{L}[v_i(t)] = \mathcal{L}\left[L \cdot \frac{di(t)}{dt}\right] \quad [1.6.9]$$

(non si confonda l'operatore di Laplace  $\mathcal{L}$  con il simbolo dell'induttanza). Applicando alla [1.6.9] il primo e poi il terzo teorema delle trasformate si ricava:

$$V_i(s) = s \cdot L \cdot I(s) \quad [1.6.10]$$

In base alla [1.6.10] il sistema assegnato può essere sostituito con quello di figura 1.6.12. Si noti come l'induttanza  $L$  sia stata sostituita con il termine  $s \cdot L$ .

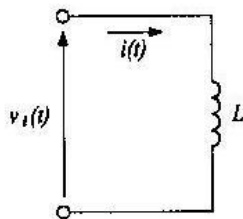


Fig. 1.6.11

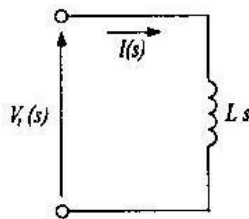


Fig. 1.6.12

- **La trasformata di Laplace dell'integrale di una funzione  $f(t)$**  è uguale alla somma ottenuta aggiungendo la trasformata di Laplace della funzione  $f(t)$  divisa la variabile complessa  $s$  e il termine  $\frac{f^{-1}(0)}{s}$ :

$$\mathcal{L}\left[\int f(t) \cdot dt\right] = \frac{1}{s} \cdot F(s) + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

dove  $f^{-1}(0) = \int f(t) \cdot dt \Big|_{t=0}$  è il valore della primitiva in corrispondenza di  $t=0$ . Se  $f^{-1}(0) = 0$ , la trasformata di Laplace dell'integrale è uguale a  $\frac{1}{s} \cdot F(s)$ .

Si consideri il sistema di figura 1.6.13 sollecitato da un segnale  $i(t)$ , si desidera calcolare la tensione agli estremi del condensatore  $v_c(t)$ . Se le condizioni iniziali sono nulle, cioè se  $v_c(0) = 0$ , allora il modello matematico del sistema è dato dalla seguente equazione:

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) \cdot dt \quad [1.6.11]$$

La trasformata di Laplace di ambo i membri della [1.6.11] è:

$$L[v_c(t)] = L\left[\frac{1}{C} \int_0^t i(t) \cdot dt\right] \quad [1.6.12]$$

Applicando alla [1.6.12] il primo e poi il quarto teorema delle trasformate si ricava:

$$V_c(s) = \frac{1}{s \cdot C} \cdot I(s) \quad [1.6.13]$$

In base alla [1.6.13] il sistema assegnato può essere sostituito con quello di figura 1.6.14. Si noti come la capacità  $C$  sia stata sostituita con il termine  $\frac{1}{s \cdot C}$ .

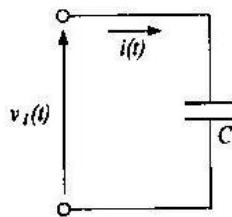


Fig. 1.6.13

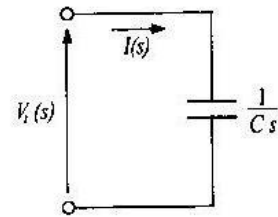


Fig. 1.6.14

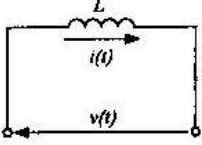
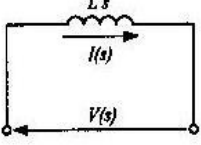
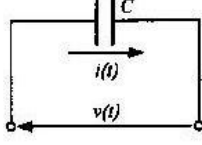
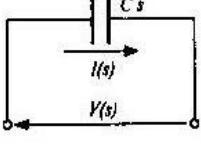
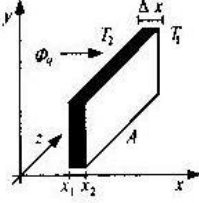
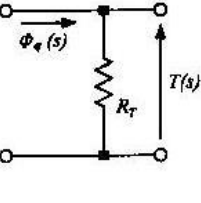
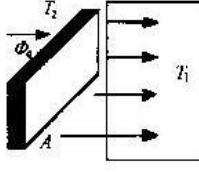
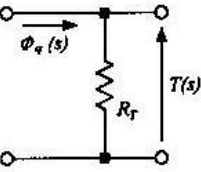
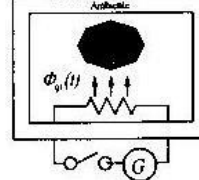
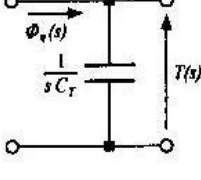
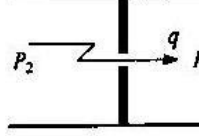
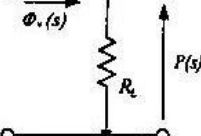
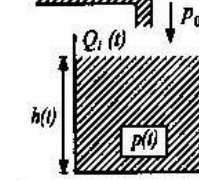
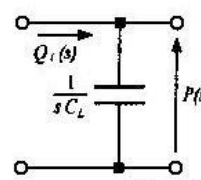
Tenendo presente i modelli matematici dei componenti elementari si può compilare la tabella 1.6.1 nella quale sono riportate le leggi fisiche che descrivono il comportamento dei componenti elettrici, termici, idraulici e meccanici elementari nel dominio del tempo e in quello della variabile complessa  $s$ .

Tab. 1.6.1

Componente	Legge fisica come funzione del tempo	Componente trasformato	Trasformata della legge fisica nel dominio di $s$
	$i(t)$		$I(s)$
	$v(t)$		$V(s)$
	$v(t) = R \cdot i(t)$		$V(s) = R \cdot I(s)$

(segue)

(continua)

Componente	Legge fisica come funzione del tempo	Componente trasformato	Trasformata della legge fisica nel dominio di s
	$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ Condizioni iniziali: $i(0) = 0$		$V(s) = L \cdot s \cdot I(s)$
	$v(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) \cdot dt$ Condizioni iniziali: $v(0) = 0$		$V(s) = \frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s)$
	$\Phi_q = \frac{T(t)}{R_T}$		$\Phi_q(s) = \frac{T(s)}{R_T}$
	$\Phi_q = \frac{T(t)}{R_T}$		$\Phi_q(s) = \frac{T(s)}{R_T}$
	$\Phi_q(t) = C_T \cdot \frac{dT(t)}{dt}$		$\Phi_q(s) = \frac{T(s)}{\frac{1}{C_T \cdot s}}$
	$Q_v(t) = \frac{p(t)}{R_L}$		$Q_v(s) = \frac{P(s)}{R_L}$
	$Q_i(t) = C_L \cdot \frac{dp(t)}{dt}$		$Q_i(s) = \frac{P(s)}{\frac{1}{C_L \cdot s}}$

## 1.6.7 Trasformata di Laplace dei segnali di prova

Senza entrare nel merito delle dimostrazioni, per le quali si rimanda a testi specializzati, nella tabella 1.6.2 sono riportate le trasformate dei segnali più frequentemente utilizzati nell'ambito dello studio dei sistemi, mentre di seguito sono illustrate le caratteristiche del segnale delta di Dirac o impulso unitario. Questi segnali, detti segnali canonici o segnali prova perché riproducibili in laboratorio, permettono, come si vedrà in seguito, di ottenere informazioni anche sulle risposte dei sistemi eccitati con segnali differenti da quelli di prova. Si tenga presente che tutti i segnali di prova indicati nella tabella 1.6.2 sono definiti per  $t \geq 0$  e nulli per  $t < 0$ .

**La trasformata di una funzione  $f(t) = \delta(t)$ , detta funzione delta di Dirac, è uguale a**

$$L[\delta(t)] = 1$$

Per comprendere il significato del segnale di prova rappresentato dalla funzione delta di Dirac, si consideri la funzione rettangolare di altezza  $\frac{1}{H}$  e base  $H$  (fig. 1.6.15).

L'area  $A$  racchiusa è per definizione unitaria per qualsiasi valore di  $H$  in quanto:

$$A = H \cdot \frac{1}{H} = 1$$

Se la base  $H$  diviene sempre più piccola, l'altezza aumenta perché l'area del rettangolo deve conservare il medesimo valore unitario (fig. 1.6.16). La funzione delta di Dirac è l'interpretazione grafica e concettuale del caso limite di  $H$  che tende a zero ( $H \rightarrow 0$ ) (fig. 1.6.17).

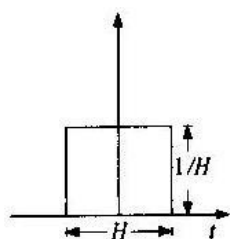


Fig. 1.6.15

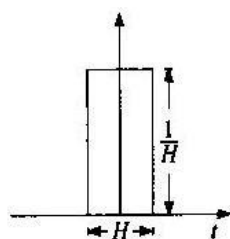


Fig. 1.6.16

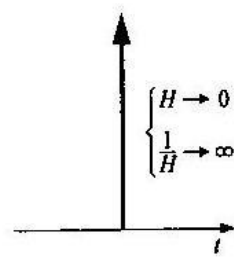
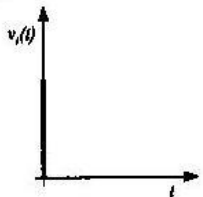


Fig. 1.6.17

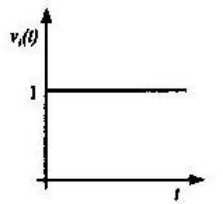
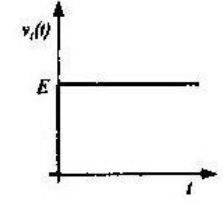
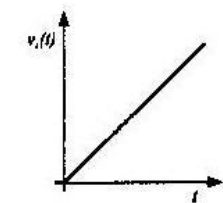
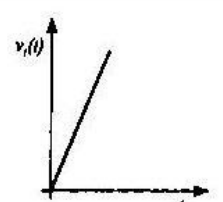
Tab. 1.6.2 - Tabella di trasformazione dei segnali canonici.

Grafici	Funzione	Trasformata	Denominazione
	$v_i(t) = \delta(t)$	$V_i(s) = 1$	Funzione di Dirac

(segue)



(continua)

Grafici	Funzione	Trasformata	Denominazione
	$v_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } \geq 0 \end{cases}$	$V_i(s) = \frac{1}{s}$	Funzione a gradino di ampiezza unitaria
	$v_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ E & \text{per } \geq 0 \end{cases}$	$V_i(s) = \frac{E}{s}$	Funzione a gradino di ampiezza E
	$v_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ t & \text{per } \geq 0 \end{cases}$	$V_i(s) = \frac{1}{s^2}$	Funzione a rampa unitaria
	$v_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ k \cdot t & \text{per } \geq 0 \end{cases}$	$V_i(s) = \frac{k}{s^2}$	Funzione a rampa con coefficiente angolare k

### 1.6.8 Teorema del valore finale e del valore iniziale

Il teorema del valore finale e quello del valore iniziale sono utili perché consentono di calcolare il valore finale e quello iniziale di una funzione  $f(t)$  conoscendo la sua trasformata di Laplace e senza dover eseguire l'operazione di antitrasformazione.

- **Teorema del valore finale:** il valore della funzione  $f(t)$  per  $t \rightarrow \infty$  (valore finale) è uguale a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

se la trasformata di Laplace di una funzione  $f(t)$  è uguale a  $F(s)$  e se  $s \cdot F(s)$  non ha poli sull'asse immaginario (escludendo l'origine) o poli con la parte reale positiva.

Il teorema del valore finale non è valido se i poli giacciono sull'asse immaginario (escludendo l'origine) o nel semipiano destro del piano complesso  $s$  perché in questi casi la funzione  $f(t)$  contiene termini sinusoidali o crescenti esponenzialmente e quindi non è possibile calcolare il suo valore finale.

- **Teorema del valore iniziale:** il valore iniziale  $f(0)$  della funzione è uguale a

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

**se la trasformata di Laplace di una funzione  $f(t)$  è uguale a  $F(s)$ .**

Il teorema del valore iniziale consente dunque di calcolare il valore della funzione  $f(t)$  all'istante  $t = 0$  senza dover eseguire operazioni di antitrasformazione.

- a) Si consideri la funzione

$$F(s) = \frac{5}{s \cdot (s^2 + 5 \cdot s + 6)} \quad [1.6.14]$$

Poiché la funzione  $s \cdot F(s)$  non ha poli a parte reale nulla (escludendo il polo nell'origine) o a parte reale positiva, è possibile applicare alla [1.6.14] il teorema del valore finale. Infatti il valore della funzione calcolato con il teorema del valore finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{5}{s \cdot (s^2 + 5 \cdot s + 6)} = \frac{5}{6}$$

coincide con quello calcolato con l'antitrasformata di Laplace della [1.6.14] e con il limite della funzione  $f(t)$  per  $t \rightarrow \infty$ .

- b) Si consideri la funzione

$$F(s) = \frac{25}{(s^2 + 25)} \quad [1.6.15]$$

la quale presenta due poli complessi coniugati a parte reale nulla,  $s_1 = -j \cdot 5$  e  $s_2 = +j \cdot 5$ . In questo esempio non è possibile applicare il teorema del valore finale perché la funzione  $s \cdot F(s)$  ha due poli che giacciono sull'asse immaginario e il teorema del valore finale dà un risultato errato

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{25}{(s^2 + 25)} = 0$$

perché è diverso da quello ottenuto con l'antitrasformata della [1.6.15] che è la funzione periodica  $f(t) = \sin(25 \cdot t)$  la quale, come è noto, non ammette limite per  $t \rightarrow \infty$ .

### 1.6.9 Antitrasformata di Laplace di funzioni razionali fratte

La trasformata di Laplace, come già detto, semplifica la risoluzione di problemi reali perché riconduce le equazioni integro-differenziali a equazioni algebriche che permettono di trovare facilmente la soluzione di un problema nel dominio della variabile complessa  $s$ . Da tale soluzione si ottiene poi la risposta nel dominio del tempo con l'operazione di antitrasformazione:

$$L^{-1}[F(s)] = f(t)$$

dove  $L^{-1}$  è l'operatore di antitrasformazione di Laplace.

L'antitrasformata di Laplace gode, al pari della trasformata di Laplace, dell'importante proprietà della linearità.

*L'antitrasformata di una combinazione lineare di due o più trasformate è uguale alla combinazione lineare delle antitrasformate:*

$$L^{-1}[K_1 \cdot F_1(s) \pm K_2 \cdot F_2(s)] = L^{-1}[K_1 \cdot F_1(s)] \pm L^{-1}[K_2 \cdot F_2(s)]$$

$$L^{-1}[K_1 \cdot F_1(s)] \pm L^{-1}[K_2 \cdot F_2(s)] = K_1 \cdot f_1(t) \pm K_2 \cdot f_2(t)$$

Poiché lo studio dei sistemi è facilitato, come si è detto, dall'utilizzazione della trasformata e dell'antitrasformata di Laplace, nel seguito viene presentato il metodo dello sviluppo di Heaviside per la determinazione dell'antitrasformata di funzioni razionali fratte.

Si consideri una funzione  $F(s)$  razionale fratta del tipo:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad [1.6.16]$$

con  $N(s)$  e  $D(s)$  polinomi in  $s$  per cui la [1.6.16] si può scrivere nella forma

$$F(s) = \frac{a_0 \cdot s^m + a_1 \cdot s^{m-1} + a_2 \cdot s^{m-2} + \dots + a_{m-1} \cdot s + a_m}{b_0 \cdot s^n + b_1 \cdot s^{n-1} + b_2 \cdot s^{n-2} + \dots + b_{n-1} \cdot s + b_n} \quad [1.6.17]$$

dove

- $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$  e  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n$  sono coefficienti reali;
- $n$  e  $m$  sono rispettivamente il grado di  $N(s)$  e  $D(s)$  con  $n \geq m$ .

I polinomi  $D(s)$  e  $N(s)$  ammettono sempre radici che possono essere tutte reali o tutte complesse coniugate, o alcune reali e le rimanenti complesse coniugate. Pertanto la [1.6.17] si può scrivere come

$$F(s) = \frac{k_1 \cdot (s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{k_2 \cdot (s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}$$

$$F(s) = k \cdot \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}$$

dove

- $p_1, p_2 \dots p_n$  sono i valori di  $s$ , non necessariamente distinti, che rendono nullo il denominatore  $D(s)$  e determinano i poli della funzione  $F(s)$ ;
- $z_1, z_2 \dots z_{m-1}, z_m$  sono i valori di  $s$ , non necessariamente distinti, che rendono nullo il numeratore  $N(s)$  e determinano gli zeri della funzione  $F(s)$ ;
- $k_1, k_2$  e  $k = \frac{k_1}{k_2}$  sono costanti reali.

Si dimostra che la funzione  $F(s)$  può essere scritta come somma di frazioni nella forma

$$F(s) = \frac{a_1}{s - p_1} + \frac{a_2}{s - p_2} + \dots + \frac{a_n}{s - p_n} \quad [1.6.18]$$

ove  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sono coefficienti o residui della funzione  $F(s)$ , i quali devono essere calcolati con un procedimento che è diverso in relazione ai poli della  $F(s)$ . Di seguito sono analizzati i procedimenti per calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione  $F(s)$  con **poli reali semplici** e con **poli complessi coniugati**.

#### Scheda di approfondimento: definizione di poli e zeri di una funzione

Molte applicazioni della teoria dei sistemi implicano lo studio di funzioni di variabile complessa espresse come rapporto di due polinomi in  $s$  del tipo

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m \cdot s^m + a_{m-1} \cdot s^{m-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0}{b_n \cdot s^n + b_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + b_1 \cdot s + b_0} \quad [1.6.19]$$

dove

$n \geq m$ ;

$a_m, a_{m-1}, \dots, a_0$  sono coefficienti reali;

$b_n, b_{n-1}, \dots, b_0$  sono coefficienti reali.

Uguagliando a zero il numeratore della [1.6.19] si ottiene l'equazione

$$a_m \cdot s^m + a_{m-1} \cdot s^{m-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0 = 0 \quad [1.6.20]$$

Risolviendo la [1.6.20] rispetto a  $s$  si ottengono  $m$  radici, indicate con  $z_m, z_{m-1}, \dots, z_1$ , o **zeri** della funzione  $F(s)$ .

Uguagliando a zero il denominatore della [1.6.17] si ottiene l'equazione

$$b_n \cdot s^n + b_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + b_1 \cdot s + b_0 = 0 \quad [1.6.21]$$

I valori di  $s$  che soddisfano la [1.6.21], indicati con  $p_n, p_{n-1}, \dots, p_1$ , sono detti **poli** della funzione  $F(s)$  o **singularità** perché per  $s \rightarrow p_i$  la funzione  $F(s)$  tende all'infinito. I poli e gli zeri possono essere rappresentati sul piano complesso  $s$  (fig. 1.6.18).

I poli e gli zeri, in quanto radici delle equazioni ottenute uguagliando a zero polinomi con coefficienti reali, possono essere reali semplici, reali con molteplicità  $r$ , complessi coniugati, complessi coniugati con molteplicità  $r$ .

Applicando alla [1.6.19] le regole dell'algebra si ottiene la [1.6.22]:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k_0 \cdot \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)} \quad [1.6.22]$$

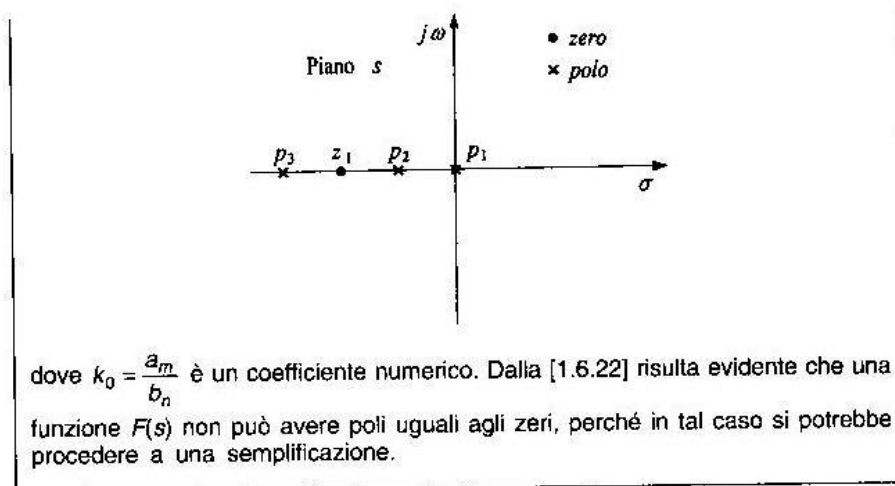


Fig. 1.6.18 - Rappresentazione di poli e zeri nel piano complesso.

Si consideri la funzione

$$F(s) = \frac{5 \cdot (s+3)}{s \cdot (s+2) \cdot (s+4)^2}$$

Uguagliando a zero il suo denominatore si ottengono, come si è visto, i poli:  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -2$  e  $p_3 = -4$ ; infatti assegnando a  $s$  tali valori la funzione  $F(s)$  tende all'infinito [ $F(s) \rightarrow \infty$ ]. Il polo  $p_3 = -4$  ha una molteplicità  $r=2$  perché il fattore  $(s+4)$  è elevato al quadrato.

La funzione ha inoltre uno zero  $z_1 = -3$  perché  $F(s) = 0$  per  $s = -3$ .

### 1.6.10 Antitrasformata di Laplace di una funzione $F(s)$ con poli reali semplici

Si consideri la funzione razionale fratta

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1) \cdot (s-p_2) \cdot \dots \cdot (s-p_n)} \quad [1.6.23]$$

dove  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sono per ipotesi poli reali e semplici.

La  $F(s)$  può essere sviluppata nella seguente somma di frazioni parziali:

$$F(s) = \frac{a_1}{s-p_1} + \frac{a_2}{s-p_2} + \dots + \frac{a_i}{s-p_i} + \dots + \frac{a_n}{s-p_n} \quad [1.6.24]$$

I coefficienti  $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$  sono costanti reali o residui della funzione  $F(s)$  e possono essere ricavati rapidamente utilizzando il calcolo infinitesimale. Uguagliando la [1.6.23] e la [1.6.24] si ha:

$$\frac{N(s)}{(s-p_1) \cdot (s-p_2) \cdot \dots \cdot (s-p_n)} = \frac{a_1}{s-p_1} + \frac{a_2}{s-p_2} + \dots + \frac{a_i}{s-p_i} + \dots + \frac{a_n}{s-p_n} \quad [1.6.25]$$

Moltiplicando ambo i membri della [1.6.25] per  $(s - p_i)$  e calcolando il limite per  $s \rightarrow p_i$  si ha:

$$\begin{aligned} \frac{N(s) \cdot (s - p_i)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)} &= \\ &= \frac{a_1 \cdot (s - p_i)}{s - p_1} + \frac{a_2 \cdot (s - p_i)}{s - p_2} + \dots + \frac{a_i \cdot (s - p_i)}{s - p_i} + \dots + \frac{a_n \cdot (s - p_i)}{s - p_n} \\ \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) F(s) &= \lim_{s \rightarrow p_i} \left[ \frac{a_1(s - p_i)}{s - p_1} + \frac{a_2(s - p_i)}{s - p_2} + \dots + \frac{a_i(s - p_i)}{s - p_i} + \dots + \frac{a_n(s - p_i)}{s - p_n} \right] \end{aligned} \quad [1.6.26]$$

Per  $s \rightarrow p_i$  tutti i termini al secondo membro della [1.6.26] si annullano ad eccezione del termine  $a_i \cdot \frac{s - p_i}{s - p_i}$  e pertanto il coefficiente generico  $a_i$  è uguale a

$$\lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) \cdot F(s) = a_i$$

Con il medesimo procedimento si calcolano i coefficienti  $a_1, a_2, \dots, a_n$ :

$$\lim_{s \rightarrow p_1} (s - p_1) \cdot F(s) = a_1$$

$$\lim_{s \rightarrow p_2} (s - p_2) \cdot F(s) = a_2$$

$$\lim_{s \rightarrow p_n} (s - p_n) \cdot F(s) = a_n$$

Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{(s+1)}{(s+2) \cdot (s+4)}$$

La funzione  $F(s)$ , già fattorizzata sia al denominatore che al numeratore, presenta uno zero  $z_1 = -1$  e due poli reali e semplici,  $p_1 = -2$  e  $p_2 = -4$ . Sviluppando la funzione  $F(s)$  in frazioni parziali si ha:

$$F(s) = \frac{a_1}{s+2} + \frac{a_2}{s+4} \quad [1.6.27]$$

I coefficienti  $a_1$  e  $a_2$  sono uguali a

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \cdot \frac{(s+1)}{(s+2) \cdot (s+4)} = -\frac{1}{2}$$

$$a_2 = \lim_{s \rightarrow -4} (s+4) \cdot \frac{(s+1)}{(s+2) \cdot (s+4)} = +\frac{3}{2}$$

Sostituendo  $a_1$  e  $a_2$  così calcolati nella [1.6.27] si ha:

$$F(s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+4} \quad [1.6.28]$$

Ricordando la proprietà della linearità

$$L^{-1}[k_1 \cdot F_1(s) + k_2 \cdot F_2(s)] = k_1 \cdot L^{-1}[F_1(s)] + k_2 \cdot L^{-1}[F_2(s)]$$

l'antitrasformata di Laplace di ambo i membri della [1.6.28] è uguale a

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+4}\right] = -\frac{1}{2} \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] + \frac{3}{2} \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right]$$

$$f(t) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2t} + \frac{3}{2} \cdot e^{-4t}$$

### 1.6.11 Antitrasformata di Laplace di una funzione $F(s)$ con poli complessi coniugati

La funzione

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1) \cdot (s-p_2) \dots (s-p_l) \cdot (s-p_l^*) \cdot (s-p_n)} \quad [1.6.29]$$

presenta i poli semplici indicati con  $p_1, p_2 \dots p_n$  e poli complessi coniugati indicati genericamente con  $p_l$  e  $p_l^*$ .

Posto  $p_l = a - j \cdot \omega$  e  $p_l^* = a + j \cdot \omega$  e scrivendo la [1.6.29] come somma di frazioni parziali si ottiene:

$$F(s) = \frac{a_1}{s-p_1} + \frac{a_2}{s-p_2} + \dots + \frac{a_3}{s-(a-j \cdot \omega)} + \frac{a_4}{s-(a+j \cdot \omega)} + \dots + \frac{a_n}{s-p_n} \quad [1.6.30]$$

I residui  $a_1, a_2, \dots, a_3, a_4 \dots a_n$  si calcolano applicando il procedimento noto

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow p_1} (s-p_1) \cdot F(s)$$

$$a_2 = \lim_{s \rightarrow p_2} (s-p_2) \cdot F(s)$$

$$a_3 = \lim_{s \rightarrow a-j \cdot \omega} [s-(a-j \cdot \omega)] \cdot F(s)$$

$$a_4 = \lim_{s \rightarrow a+j \cdot \omega} [s-(a+j \cdot \omega)] \cdot F(s)$$

$$a_n = \lim_{s \rightarrow p_n} (s-p_n) \cdot F(s)$$

Quando i poli  $p_i$  e  $p_i^*$  sono complessi coniugati anche i coefficienti ad essi corrispondenti, come si dimostrerà nell'esempio, sono sempre complessi coniugati. Pertanto l'antitrasformata di Laplace di una funzione  $F(s)$  con poli complessi coniugati è uguale a

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{a_1}{s-p_1} + \frac{a_2}{s-p_2} + \frac{a_3}{s-(a-j\omega)} + \frac{a_4}{s-(a+j\omega)} + \dots + \frac{a_n}{s-p_n}\right]$$

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{a_1}{s-p_1}\right] + L^{-1}\left[\frac{a_2}{s-p_2}\right] + L^{-1}\left[\frac{a_3}{s-(a-j\omega)}\right] + \\ L^{-1}\left[\frac{a_4}{s-(a+j\omega)}\right] + \dots + L^{-1}\left[\frac{a_n}{s-p_n}\right]$$

$$f(t) = a_1 \cdot e^{p_1 t} + a_2 \cdot e^{p_2 t} + a_3 \cdot e^{(a-j\omega)t} + a_4 \cdot e^{(a+j\omega)t} + \dots + a_n \cdot e^{p_n t} \quad [1.6.31]$$

La [1.6.29] può essere semplificata applicando le relazioni di Eulero.

Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{2 \cdot s + 12}{s^2 + 2 \cdot s + 5}$$

Poiché i poli  $p_1 = -1 + j \cdot 2$  e  $p_2 = -1 - j \cdot 2$  della funzione assegnata sono complessi coniugati, fattorizzando il denominatore della funzione  $F(s)$  e sviluppando in frazioni parziali si ottiene:

$$F(s) = \frac{2 \cdot s + 12}{(s+1-j \cdot 2) \cdot (s+1+j \cdot 2)}$$

$$F(s) = \frac{a_1}{(s+1-j \cdot 2)} + \frac{a_2}{(s+1+j \cdot 2)} \quad [1.6.32]$$

I coefficienti  $a_1$  e  $a_2$  sono uguali a

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow -1+j \cdot 2} (s+1-j \cdot 2) \cdot \frac{2 \cdot s + 12}{(s+1-j \cdot 2) \cdot (s+1+j \cdot 2)} = 1 - j \cdot 2,5$$

$$a_2 = \lim_{s \rightarrow -1-j \cdot 2} (s+1+j \cdot 2) \cdot \frac{2 \cdot s + 12}{(s+1-j \cdot 2) \cdot (s+1+j \cdot 2)} = 1 + j \cdot 2,5$$

**N.B.** Quando i poli sono complessi coniugati anche i residui ad essi corrispondenti sono complessi coniugati: pertanto non è necessario ripetere il calcolo per ricercare il secondo coefficiente.



Sostituendo  $a_1$  e  $a_2$  nella [1.6.32] si ha:

$$F(s) = \frac{1-j \cdot 2,5}{(s+1-j \cdot 2)} + \frac{1+j \cdot 2,5}{(s+1+j \cdot 2)} \quad [1.6.33]$$

L'antitrasformata di ambo i membri della [1.6.33] è uguale a

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(s)] &= L^{-1} \left[ \frac{1-j \cdot 2,5}{(s+1-j \cdot 2)} + \frac{1+j \cdot 2,5}{(s+1+j \cdot 2)} \right] \\ L^{-1}[F(s)] &= L^{-1} \left[ \frac{1-j \cdot 2,5}{(s+1-j \cdot 2)} \right] + L^{-1} \left[ \frac{1+j \cdot 2,5}{(s+1+j \cdot 2)} \right] \\ f(t) &= (1-j \cdot 2,5) \cdot e^{-(1-j \cdot 2)t} + (1+j \cdot 2,5) \cdot e^{-(1+j \cdot 2)t} \\ f(t) &= (1-j \cdot 2,5) \cdot e^{-t} \cdot e^{j \cdot 2t} + (1+j \cdot 2,5) \cdot e^{-t} \cdot e^{-j \cdot 2t} \\ f(t) &= e^{-t} \cdot (e^{j \cdot 2t} - j \cdot 2,5 \cdot e^{j \cdot 2t} + e^{-j \cdot 2t} + j \cdot 2,5 \cdot e^{-j \cdot 2t}) \end{aligned} \quad [1.6.34]$$

Sviluppando il secondo membro della [1.6.34] si ottiene:

$$f(t) = e^{-t} \cdot \{ [e^{j \cdot 2t} + e^{-j \cdot 2t}] - j \cdot 2,5 \cdot [e^{j \cdot 2t} - e^{-j \cdot 2t}] \} \quad [1.6.35]$$

Tenendo presente che

$$\cos \alpha = \frac{e^{j \cdot \alpha} + e^{-j \cdot \alpha}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \alpha = \frac{e^{j \cdot \alpha} - e^{-j \cdot \alpha}}{2 \cdot j}$$

la [1.6.35] si può scrivere come:

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-t} \cdot \left[ \left( 2 \cdot \frac{e^{j \cdot 2t} + e^{-j \cdot 2t}}{2} \right) - j \cdot 2,5 \cdot (2 \cdot j) \cdot \left( \frac{e^{j \cdot 2t} - e^{-j \cdot 2t}}{2 \cdot j} \right) \right] \\ f(t) &= e^{-t} \cdot [2 \cdot \cos(2 \cdot t) + 5 \cdot \sin(2 \cdot t)] \end{aligned}$$

Tab. 1.6.3 - Trasformata di Laplace delle funzioni più note.

N°	Trasformata di Laplace $F(s)$	Funzione del tempo $f(t)$
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{s}$	1
3	$\frac{a}{s}$	$a$
4	$\frac{1}{s^2}$	$t$
5	$\frac{k}{s^2}$	$k \cdot t$
6	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-a \cdot t}$
7	$\frac{b}{s+a}$	$b \cdot e^{-a \cdot t}$
8	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} \cdot t^{n-1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} \cdot e^{-a \cdot t}$
10	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\text{sen} \omega \cdot t$
11	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\text{cos} \omega \cdot t$
12	$\frac{\omega^2}{s \cdot (s^2 + \omega^2)}$	$1 - \text{cos} \omega \cdot t$
13	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-a \cdot t} \cdot \text{sen} \omega \cdot t$
14	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-a \cdot t} \cdot \text{cos} \omega \cdot t$

## ESERCIZI SVOLTI

---

### Esercizio 1

---

Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{5}{(s+2) \cdot (s+3)} \quad [1.6.36]$$

La funzione  $F(s)$  presenta due poli reali e negativi,  $p_1 = -2$  e  $p_2 = -3$ .

Sviluppando la [1.6.36] in frazioni parziali si ha:

$$F(s) = \frac{a_1}{(s+2)} + \frac{a_2}{(s+3)} \quad [1.6.37]$$

I residui  $a_1$  e  $a_2$  sono uguali a

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \cdot \frac{5}{(s+2) \cdot (s+3)} = 5$$

$$a_2 = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3) \cdot \frac{5}{(s+2) \cdot (s+3)} = -5$$

Sostituendo i valori di  $a_1$  e  $a_2$  nella [1.6.37] si ottiene:

$$F(s) = \frac{5}{(s+2)} + \frac{-5}{(s+3)} \quad [1.6.38]$$

L'antitrasformata di Laplace di ambo i membri della [1.6.38] è:

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{5}{(s+2)} + \frac{-5}{(s+3)}\right] = L^{-1}\left[\frac{5}{(s+2)}\right] + L^{-1}\left[\frac{-5}{(s+3)}\right]$$

Dalle tabelle di trasformazione si ricava

$$f(t) = 5 \cdot e^{-2 \cdot t} - 5 \cdot e^{-3 \cdot t}$$

## Esercizio 2

---

Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{(s+5)}{(s+2) \cdot (s+4)} \quad [1.6.39]$$

La funzione  $F(s)$  presenta uno zero reale e negativo  $z_1 = -5$ , due poli reali e negativi  $p_1 = -2$  e  $p_2 = -4$ .

Sviluppando la [1.6.39] in frazioni parziali si ha:

$$F(s) = \frac{a_1}{(s+2)} + \frac{a_2}{(s+4)} \quad [1.6.40]$$

I residui  $a_1$  e  $a_2$  sono uguali a

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \cdot \frac{(s+5)}{(s+2) \cdot (s+4)} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$a_2 = \lim_{s \rightarrow -4} (s+4) \cdot \frac{(s+5)}{(s+2) \cdot (s+4)} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Sostituendo  $a_1$  e  $a_2$  nella [1.6.40] si ottiene:

$$F(s) = \frac{1,5}{(s+2)} + \frac{-0,5}{(s+4)} \quad [1.6.41]$$

L'antitrasformata di Laplace di ambo i membri della [1.6.41] è uguale a

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{1,5}{(s+2)} + \frac{-0,5}{(s+4)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1,5}{(s+2)}\right] + L^{-1}\left[\frac{-0,5}{(s+4)}\right]$$

Dalle tabelle di trasformazione si ricava:

$$f(t) = 1,5 e^{-2 \cdot t} - 0,5 e^{-4 \cdot t}$$

## Esercizio 3

---

Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{(15 \cdot s + 27)}{s \cdot (s+2)(s+5)} \quad [1.6.42]$$

La funzione  $F(s)$  presenta uno zero reale e negativo  $z_1 = -\frac{27}{15}$ , un polo nullo  $p_1 = 0$  e due poli reali e negativi,  $p_2 = -2$  e  $p_3 = -5$ .

Sviluppando la [1.6.42] in frazioni parziali si ha:

$$F(s) = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{(s+2)} + \frac{a_3}{(s+5)} \quad [1.6.43]$$

I residui  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  sono uguali a

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{(15 \cdot s + 27)}{s \cdot (s+2) \cdot (s+5)} = 2,7$$

$$a_2 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \cdot \frac{(15 \cdot s + 27)}{s \cdot (s+2) \cdot (s+5)} = 0,5$$

$$a_3 = \lim_{s \rightarrow -5} (s+5) \cdot \frac{(15 \cdot s + 27)}{s \cdot (s+2) \cdot (s+5)} = -3,2$$

Sostituendo i residui  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  nella [1.6.43] si ottiene:

$$F(s) = \frac{2,7}{s} + \frac{0,5}{(s+2)} + \frac{-3,2}{(s+5)} \quad [1.6.44]$$

L'antitrasformata di Laplace di ambo i membri della [1.6.44] è uguale a

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{2,7}{s} + \frac{0,5}{(s+2)} + \frac{-3,2}{(s+5)}\right] = L^{-1}\left[\frac{2,7}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{0,5}{(s+2)}\right] + L^{-1}\left[\frac{-3,2}{(s+5)}\right]$$

$$f(t) = 2,7 + 0,5 e^{-2 \cdot t} - 3,2 e^{-5 \cdot t}$$

#### Esercizio 4

Un generatore di corrente, collegato a un condensatore inizialmente scarico e avente la capacità di  $0,22 \mu\text{F}$ , eroga una corrente continua di intensità costante  $0,1 \text{ mA}$ . Studiare l'andamento della tensione sulle armature del condensatore nell'intervallo  $0 \leq t \leq 0,1 \text{ s}$ .

Poiché il circuito è alimentato da un generatore di corrente continua di intensità costante, la tensione e la carica localizzata sulle armature del condensatore aumentano nel tempo.

Applicando la legge di Ohm al circuito trasformato di figura 1.6.19 si ricava la trasformata della risposta:

$$V_c(s) = \frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s)$$

Considerato che la sollecitazione applicata al sistema è un gradino di

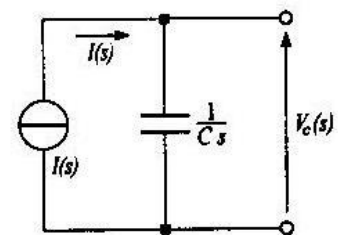


Fig. 1.6.19

ampiezza costante  $I(s) = \frac{0,1 \cdot 10^{-3}}{s}$ , la trasformata della risposta è uguale a

$$V_c(s) = \frac{0,1 \cdot 10^{-3}}{C} \cdot \frac{1}{s^2} \quad [1.6.45]$$

Considerato che  $L^{-1}[k \cdot F(s)] = k \cdot L^{-1}[F(s)]$ , dalla tabella delle trasformate (riga 5 della tabella 1.6.3) si esegue l'antitrasformata della [1.6.45] e si ricava la risposta nel dominio del tempo:

$$v_c(t) = \frac{0,1 \cdot 10^{-3}}{0,22 \cdot 10^{-6}} \cdot t$$

Per rappresentare l'andamento della risposta in funzione del tempo si può utilizzare anche il foglio elettronico.

### Il foglio elettronico Excel:

dopo aver fissato un intervallo  $\Delta t = 0,01$  s sufficientemente piccolo, almeno dieci volte minore dell'intervallo considerato  $0 \text{ s} \div 0,1 \text{ s}$ , si prepara il foglio elettronico osservando la procedura di seguito descritta:

- nella cella A1 si scriva 0,01 corrispondente al passo  $\Delta t = 0,01$  s;
- nella cella A3 si scriva 0 corrispondente all'istante  $t = 0$ ;
- nella cella A4 si scriva la formula:

$$= A3 + \$A\$1$$

che calcola il tempo  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ ;

- nel blocco di celle A5 ÷ A10 è copiata la formula scritta in A4;
- nella cella B3 si scriva 0 corrispondente al valore della tensione agli estremi del condensatore all'istante  $t = 0$ ;
- nella cella B4 si scriva la formula

$$= A4 * (\$C\$1)$$

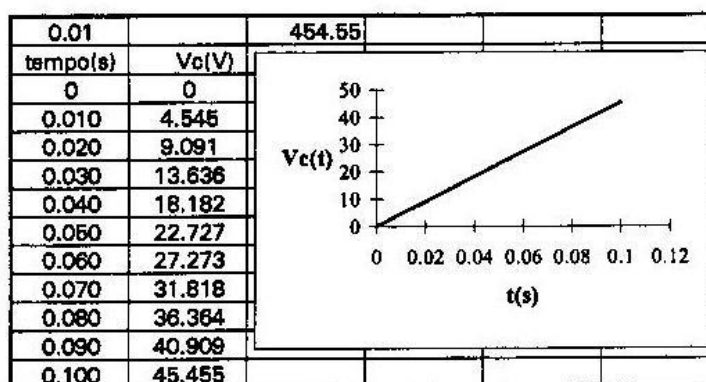


Fig. 1.6.20

che calcola la tensione agli estremi del condensatore  $v_c(t) = \frac{0,1 \cdot 10^{-3}}{0,22 \cdot 10^{-6}} \cdot t$ ;

- nel blocco di celle B5 ÷ B13 è copiata la formula scritta in B4;
- nella cella C1 si scriva 454,55 corrispondente alla costante

$$\frac{I_0}{C} = \frac{0,1 \cdot 10^{-3}}{0,22 \cdot 10^{-6}}.$$

## Esercizio 5

Studiare nell'intervallo di tempo  $0 \text{ s} \div 0,01 \text{ s}$  l'intensità della corrente che deve erogare il generatore che alimenta il circuito di figura 1.6.21 affinché la tensione ai capi dell'induttore, avente l'induttanza  $L = 10 \text{ mH}$ , sia costante ed uguale a 5 V. All'istante iniziale  $t = 0$  l'intensità della corrente è  $i(0) = 0$ .

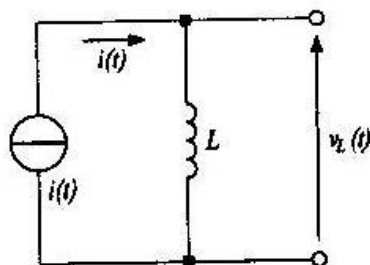


Fig. 1.6.21

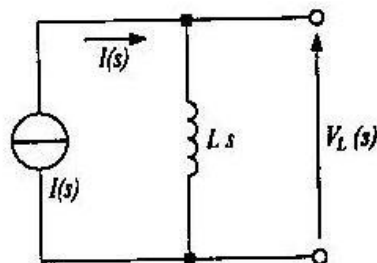


Fig. 1.6.22

Dal circuito trasformato di figura 1.6.22 si ha:

$$V_L(s) = L \cdot s \cdot I(s) \quad [1.6.46]$$

Ricordando che la tensione  $V_L$  è costante e che  $V_L(s) = \frac{5}{s}$ , dalla [1.6.46] si ricava:

$$I(s) = \frac{5}{L} \cdot \frac{1}{s^2}$$

L'antitrasformata di Laplace di ambo i membri della [1.6.46] è la sollecitazione  $i(t)$  che deve essere applicata al sistema affinché la tensione ai capi dell'induttore sia uguale a 5 V (fig. 1.6.23):

$$i(t) = 500 \cdot t$$

### Il foglio elettronico Excel:

- nella cella A1 si scriva 0,001 corrispondente al passo  $\Delta t = 0,001 \text{ s}$ ;
- nella cella A3 si scriva 0 corrispondente all'istante  $t = 0$ ;
- nella cella A4 si scriva la formula:

$$= A3 + \$A\$1$$

che calcola il tempo  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ ,

- nel blocco di celle A5 ÷ A13 è copiata la formula scritta in A4;
- nella cella B3 si scriva 0 corrispondente all'intensità della corrente all'istante  $t = 0$ ;
- nella cella B4 si scriva la formula

$$= A4 * (\$C\$1)$$

che calcola l'intensità della corrente  $i(t) = 500 \cdot t$ ;

- nel blocco di celle B5 ÷ B13 è copiata la formula scritta in B4;
- nella cella C1 si scriva 500 che corrisponde al valore della costante

$$\frac{V_L}{L} = \frac{5}{0,01}.$$

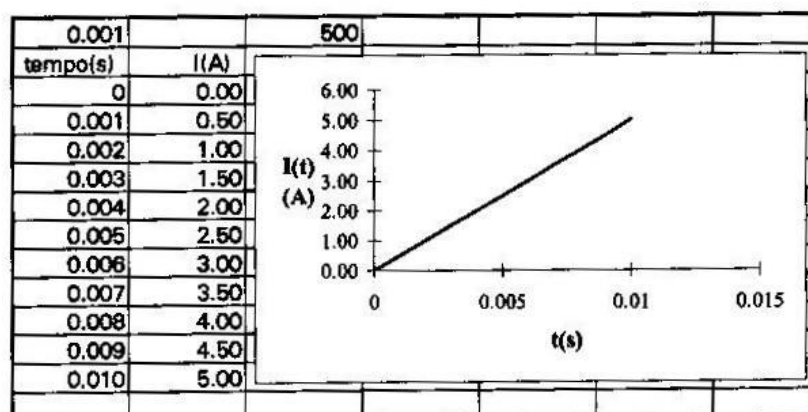


Fig. 1.6.23

## Esercizio 6

Una quantità d'olio, contenuta in un recipiente termicamente isolato e avente una capacità termica  $C_T$  uguale a  $2000 \text{ J/}^\circ\text{C}$ , è riscaldata fornendo una potenza costante di  $\Phi_i = 2500 \text{ W}$ . Studiare l'andamento della temperatura dell'olio nell'intervallo di tempo  $0 \text{ s} \div 20 \text{ s}$  assumendo la temperatura iniziale uguale a  $0^\circ\text{C}$ . Si tenga presente che in questo esempio i valori di temperatura sono espressi in gradi centigradi.

Considerato che le condizioni iniziali sono nulle (all'istante  $t=0$  la temperatura è  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ ), il modello matematico nel dominio di  $s$  è:

$$\Phi_i(s) = C_T \cdot s \cdot T(s)$$

Tenendo presente che la trasformata della sollecitazione è  $\Phi_i(s) = \frac{2500}{s}$ , la trasformata della risposta è:

$$T(s) = \frac{1}{C_T \cdot s} \cdot \frac{2500}{s} \quad [1.6.47]$$

Considerato che  $L^{-1}[k \cdot F(s)] = k \cdot L^{-1}[F(s)]$ , l'antitrasformata di ambo i



membri della [1.6.47] è la risposta del sistema:

$$L^{-1}[T(s)] = \frac{2500}{C_T} \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]$$

$$T(t) = 1,25 \cdot t$$

Fissato un  $\Delta t = 1$  s, il lettore verifichi i dati riportati in figura 1.6.24.

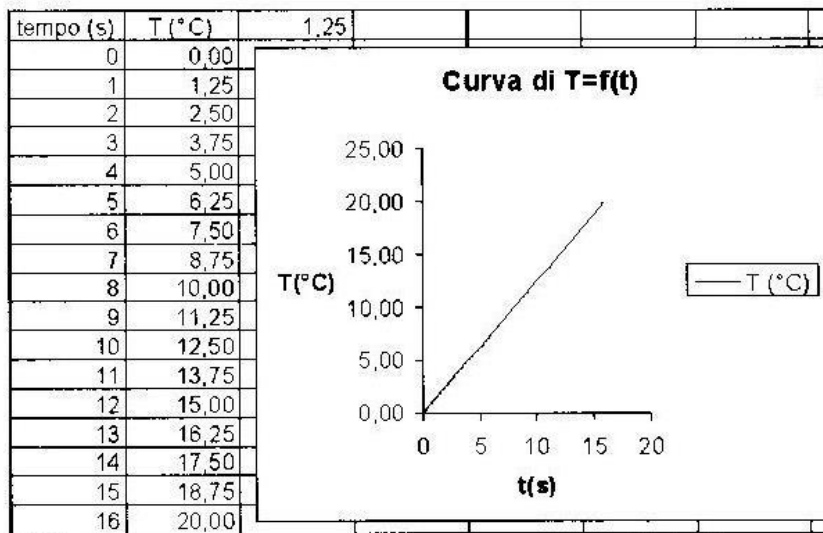


Fig. 1.6.24

### Esercizio 7

Una serbatoio di forma cilindrica, inizialmente vuoto e avente un diametro di 1 m e un'altezza di 3 m, riceve una quantità d'acqua al ritmo costante di  $Q_i = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$ . Studiare l'andamento della pressione esercitata dalla sola colonna d'acqua sul fondo del serbatoio nell'intervallo di tempo  $0 \text{ s} + 60 \text{ s}$  sapendo che la densità dell'acqua è uguale a  $1000 \text{ kg/m}^3$ . Si trascuri la pressione atmosferica e siano nulle le condizioni iniziali  $p(0) = 0$ .

Dal circuito equivalente di figura 1.6.25, si ricava:

$$Q_i(s) = C_L \cdot s \cdot P(s)$$

$$P(s) = \frac{1}{C_L \cdot s} \cdot Q_i(s) \quad [1.6.48]$$

Considerato che la trasformata della sollecitazione è  $Q_i(s) = \frac{0,5 \cdot 10^{-2}}{s}$ , dalla [1.6.48] si ricava:

$$P(s) = \frac{1}{C_L \cdot s} \cdot \frac{0,5 \cdot 10^{-2}}{s} \quad [1.6.49]$$

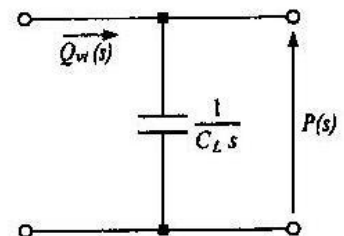


Fig. 1.6.25

Posto  $\frac{Q_i}{C_L} = \frac{Q_i \cdot \rho \cdot g}{A} = \frac{0,5 \cdot 10^{-2} \cdot 1000 \cdot 9,8}{\pi \cdot 0,5^2} = 62,5$ , l'antitrasformata di ambo i membri della [1.6.49] è la risposta del sistema rappresentata in figura 1.6.26:

$$p(t) = 62,5 \cdot t$$

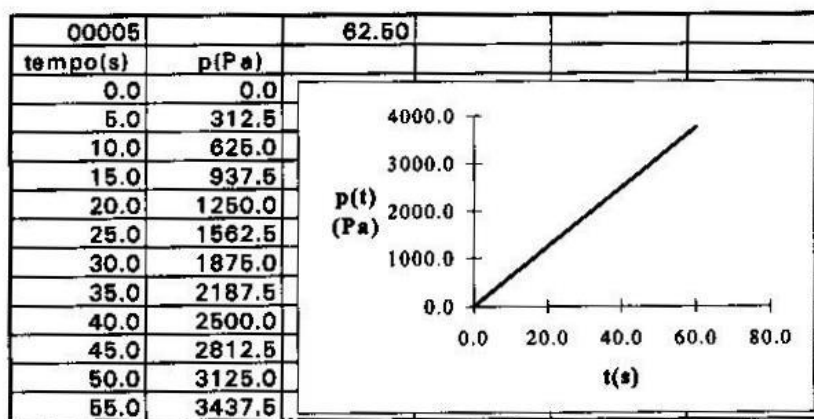


Fig. 1.6.26

## ESERCIZI PROPOSTI

---

$$1) F(s) = \frac{s+4}{(s+2) \cdot (s+3)}$$

$$R[f(t)] = 2 \cdot e^{-2t} - 1 \cdot e^{-3t}$$

$$2) F(s) = \frac{s+5}{(s+2) \cdot (s+8)}$$

$$R[f(t)] = \frac{1}{2} \cdot e^{-2t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-8t}$$

$$3) F(s) = \frac{s+7}{(s+2) \cdot (s+5)}$$

$$R[f(t)] = \frac{5}{3} \cdot e^{-2t} - \frac{2}{3} \cdot e^{-5t}$$

$$4) F(s) = \frac{3 \cdot s + 8}{(s+1) \cdot (s+2) \cdot (s+3)}$$

$$R[f(t)] = \frac{5}{2} \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-2t} - \frac{1}{2} \cdot e^{-3t}$$

$$5) F(s) = \frac{s+3}{(s+1) \cdot (s+2) \cdot (3 \cdot s+7)}$$

$$R[f(t)] = 0,5 \cdot e^{-t} - 1 \cdot e^{-2t} + 0,5 \cdot e^{-\frac{7}{3}t}$$

$$6) F(s) = \frac{4}{s^2 + 7 \cdot s + 10}$$

$$R[f(t)] = \frac{4}{3} \cdot e^{-2t} - \frac{4}{3} \cdot e^{-5t}$$

$$7) F(s) = \frac{s^2 + 5 \cdot s + 9}{s \cdot (s+1) \cdot (s+3)}$$

$$R[f(t)] = 3 - \frac{5}{2} \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-3t}$$

$$\frac{s^2 + 5s + 9}{s(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3}$$

$$3$$

## U.D. 7

### Analisi dei sistemi lineari con la trasformata di Laplace

#### 1.7.1 Introduzione

Per ricercare la soluzione dell'equazione o delle equazioni differenziali costituenti il modello matematico del sistema, sono stati sviluppati procedimenti che, come si è visto, portano alla soluzione utilizzando la trasformata di Laplace (fig. 1.7.1). Mediante la trasformata di Laplace il modello matematico del sistema e la sollecitazione ad esso applicata, funzione della variabile tempo, sono *trasformati* in funzioni della variabile complessa  $s$ . In questo modo dopo aver definito una funzione caratteristica del sistema, detta funzione di trasferimento, e le relazioni algebriche che legano la trasformata della risposta e la trasformata della sollecitazione nel *dominio* della variabile  $s$ , con un'operazione di *antitrasformazione* si ottiene la risposta cercata  $u(t)$  la quale è funzione del tempo. In tal modo lo studio di sistemi formati da molti componenti risulta facilitato perché la risoluzione delle equazioni integro-differenziali si riconduce alla risoluzione di equazioni algebriche.

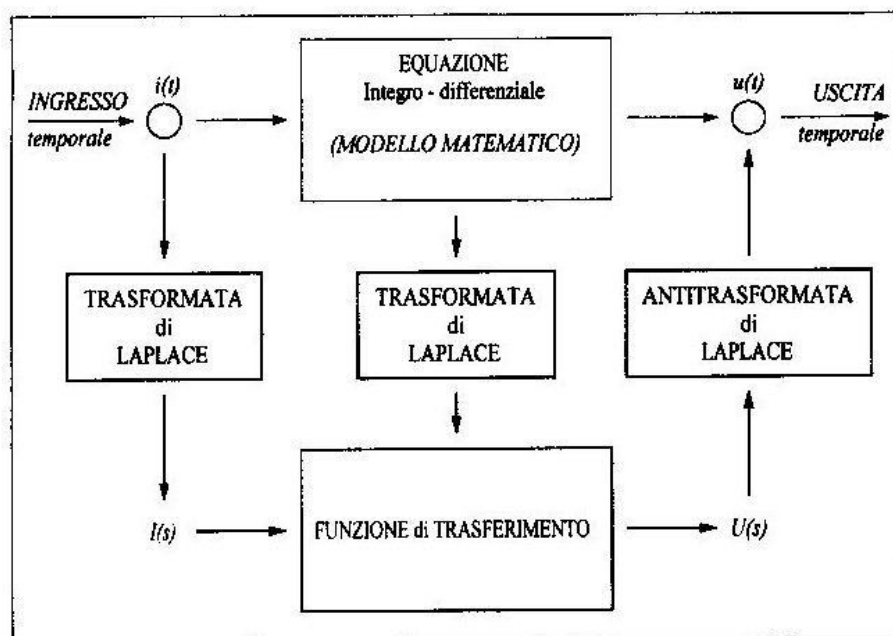


Fig. 1.7.1

## 1.7.2 Sistema elettrico del 1° ordine

Si consideri il circuito di figura 1.7.2 e sia nulla la tensione ai capi del condensatore all'istante  $t = 0$ . Si desidera studiare l'andamento della risposta quando il sistema è sottoposto alla sollecitazione a gradino così definita:

$$v_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ E & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

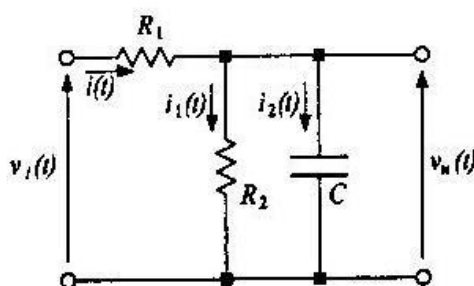


Fig. 1.7.2

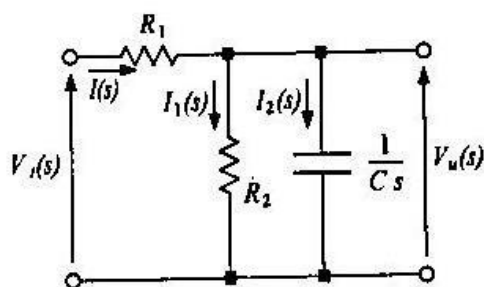


Fig. 1.7.3

All'istante iniziale  $t_0 = 0$ , per le ipotesi fatte, la d.d.p. di potenziale ai capi del condensatore è uguale a zero ( $v_c = 0$ ) e nel resistore  $R_2$  non circola corrente perché il condensatore si comporta come un corto circuito. Negli istanti successivi all'istante iniziale la corrente comincia a caricare il condensatore e di conseguenza ai suoi estremi si manifesta una d.d.p. proporzionale alla sua carica  $Q$ . Questo fenomeno comporta una diminuzione della intensità della corrente nel ramo capacitivo e, quindi, un aumento di quella che attraversa il resistore  $R_2$  perché in ogni istante deve essere verificata la relazione:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

Il processo di carica continua fino a quando  $i_1(t) = i(t)$ . Al termine del processo si ha  $v_u(t) = k \cdot E$  con  $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ .

Applicando la legge di Ohm al circuito "trasformato" di figura 1.7.3 si ha:

$$V_u(s) = I(s) \cdot \frac{R_2}{1 + s \cdot R_2 \cdot C}$$

La *funzione di trasferimento* e la trasformata della risposta sono rispettivamente uguali a

$$\frac{V_u(s)}{V_i(s)} = G(s) = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot C \cdot s}$$

$$V_u(s) = V_i(s) \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 + \tau \cdot s} \quad [1.7.1]$$

dove si è posto  $\tau = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot C$ .

La funzione di trasferimento  $G(s)$ , definita come il rapporto tra la trasformata di Laplace della risposta e la trasformata di Laplace della sollecitazione, dipende solo dai parametri caratteristici del sistema ed ha, come si vedrà meglio in seguito, un'importanza rilevante nello studio dei sistemi. Nel caso specifico del sistema considerato la funzione di trasferimento  $G(s)$  è il rapporto tra la trasformata di Laplace della tensione d'uscita  $V_u(s)$  e la trasformata di Laplace della sollecitazione  $V_i(s)$  applicata all'ingresso (fig. 1.7.4).

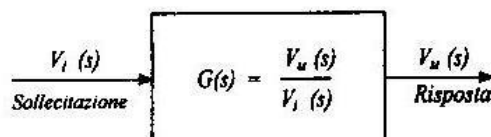


Fig. 1.7.4

Considerato che la sollecitazione applicata è un gradino di ampiezza  $E$  e che la sua trasformata è  $V_i(s) = \frac{E}{s}$ , si dimostra che la risposta del sistema è:

$$v_u(t) = k \cdot E \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad [1.7.2]$$

La [1.7.2] descrive l'andamento in funzione del tempo della tensione ai capi del condensatore. Riportando su un piano cartesiano la d.d.p.  $v_u$  in funzione del tempo si ottiene la curva rappresentata in figura 1.7.5, dalla quale si rileva che la tensione tra le armature del condensatore cresce con legge esponenziale fino ad eguagliare, trascorso un intervallo di tempo illimitato, il valore  $k \cdot E$ . In modo analogo si costruisce la curva rappresentativa della intensità della corrente  $i_2$  in funzione del tempo (fig. 1.7.6), la

quale mostra che per  $t = 0$  è  $i_2 = \frac{E}{R_1}$  e per  $t \rightarrow \infty$  è  $i_2 \rightarrow 0$ . Dall'esame delle

curve si rileva altresì che il tempo impiegato dal condensatore per portarsi a regime è uguale a 4 ÷ 5 volte la costante di tempo  $\tau$ , definita come il tempo necessario affinché la tensione  $v_u$  raggiunga il 63% del valore finale  $k \cdot E$ .

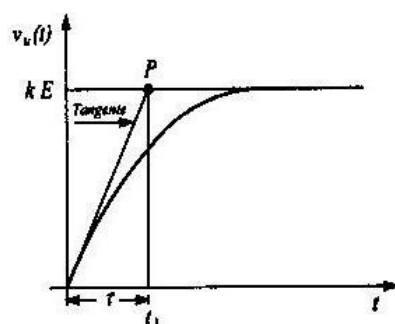


Fig. 1.7.5

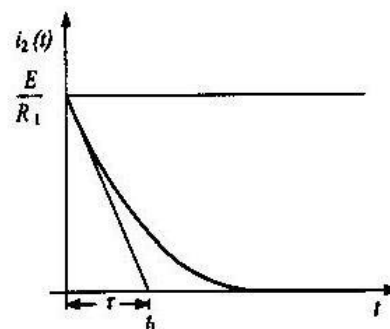


Fig. 1.7.6

**Scheda di approfondimento: la risposta del circuito RC parallelo.**

Per ricavare la risposta del sistema RC si consideri la [1.7.1]:

$$V_u(s) = V_i(s) \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 + \tau \cdot s} \quad [1.7.3]$$

Posto  $V_i(s) = \frac{E}{s}$ , si riscriva la [1.7.3] nella seguente forma:

$$V_u(s) = \frac{E}{s} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot C \cdot \left( s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot C} \right)} \quad [1.7.4]$$

Sviluppando la [1.7.4] in frazioni parziali e applicando i procedimenti noti si ha:

$$V_u(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{\left( s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot C} \right)} \quad [1.7.5]$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{E}{s} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot C \cdot \left( s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot C} \right)} = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot C}} \left( s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot C} \right) \cdot \frac{E}{s} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot C \cdot \left( s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot C} \right)} = -E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Sostituiti i coefficienti A e B nella [1.7.5] ed eseguita l'antitrasformata di Laplace di ambo i membri della [1.7.6] si ottiene la risposta  $v_u(t)$  del sistema:

$$V_u(s) = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{s} - E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot C}} \quad [1.7.6]$$

$$v_u(t) = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Con riferimento al circuito di figura 1.7.7 calcolare la tensione ai capi del condensatore nell'ipotesi che all'istante  $t = 0$  il condensatore sia scarico,  $v_u(0) = 0$  V, ed il sistema sia sollecitato da un segnale a gradino così definito:

$$v_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 10 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

Siano  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$  e  $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$ .

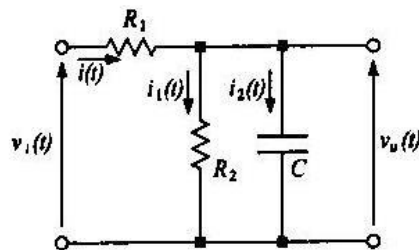


Fig. 1.7.7

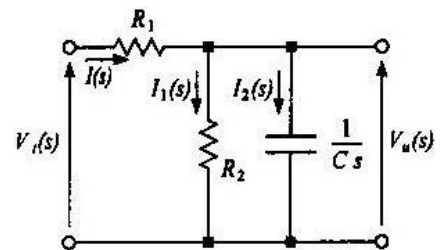


Fig. 1.7.8

La costante di tempo del circuito è uguale a

$$\tau = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot C = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^3} \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 0,05 \text{ s}$$

Considerato che è  $V_i(s) = \frac{10}{s}$ , si ha

$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{0,5}{1 + 0,05 \cdot s}$$

$$V_u(s) = \frac{10}{s} \cdot \frac{0,5}{1 + 0,05 \cdot s}$$

La trasformata della risposta presenta un polo nullo,  $p_1 = 0$ , e un polo reale negativo,  $p_2 = -\frac{1}{0,05} = -20$ . La risposta del sistema è:

$$v_u(t) = 5 \cdot (1 - e^{-20 \cdot t})$$

#### Il foglio elettronico Excel:

- nella cella A1 si scriva 0,01 corrispondente al passo  $\Delta t = 0,005 \text{ s}$ ;
- nella cella A3 si scriva 0 corrispondente all'istante  $t = 0$ ;
- nella cella A4 si scriva la formula:

$$= 0,005 + \$A\$1$$

che calcola il tempo  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ ;

- nel blocco di celle A5÷A66 è copiata la formula scritta in A4;
- nella cella B3 si scriva 0 corrispondente alla tensione agli estremi del condensatore all'istante  $t = 0$ ;
- nella cella B4 si scriva la formula:

$$= 5 \cdot (1 - \text{EXP}(-20 \cdot A4))$$

che calcola la risposta  $v_u(t) = 5 \cdot (1 - e^{-20 \cdot t})$ ;

- nel blocco di celle B5 ÷ B66 è copiata la formula scritta in B4;
- nella cella C3 si scriva la formula:

$$B3/1E3$$



che calcola l'intensità  $i_1(t)$  della corrente che attraversa la resistenza  $R_2$ ;

- nel blocco di celle C4 + C66 è copiata la formula scritta in C3;  
Il grafico di  $v_u(t)$  è riportato in figura 1.7.9. L'analisi dei dati e delle curve di risposta confermano che la tensione tra le armature del condensatore raggiunge il 98% ÷ 99% del valore finale dopo un tempo uguale a 4 ÷ 5 volte il valore di  $\tau$ . In particolare per  $t = 0,2$  s si ha  $v_u = 4,98$  V.

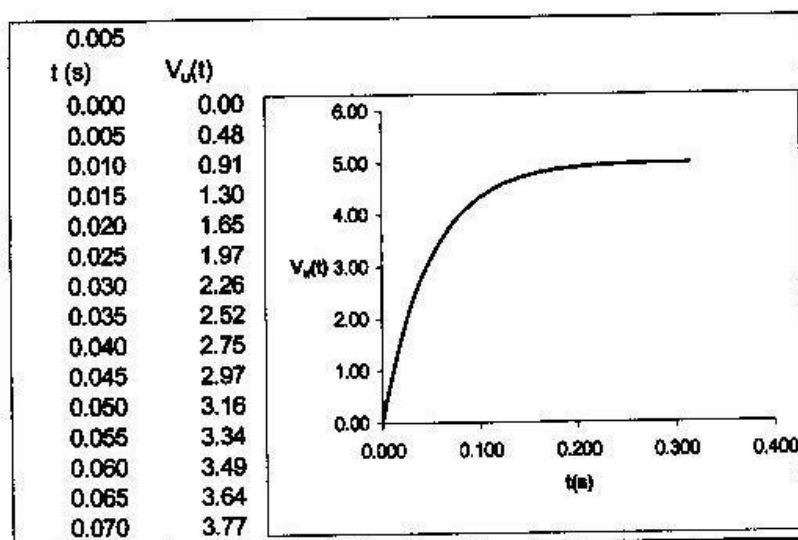


Fig. 1.7.9

## PSPICE

Dopo aver realizzato lo schema di figura 1.7.10 nel quale sono stati inseriti i marker di tensione e di corrente, si apra il menu Analysis, si selezioni Transient e si fissino i seguenti parametri della simulazione:

**Print Step 0,01 s**  
**Final Time 0,6 s**  
**Step Ceiling 0,001**

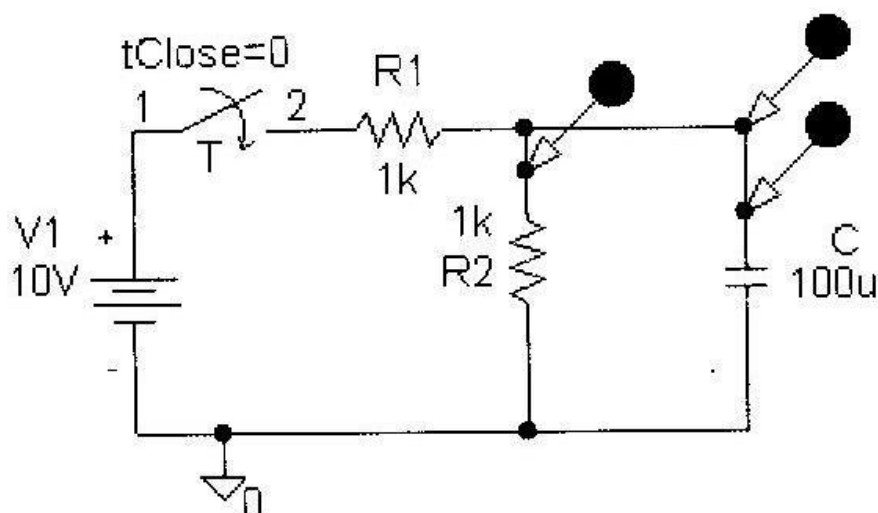


Fig. 1.7.10

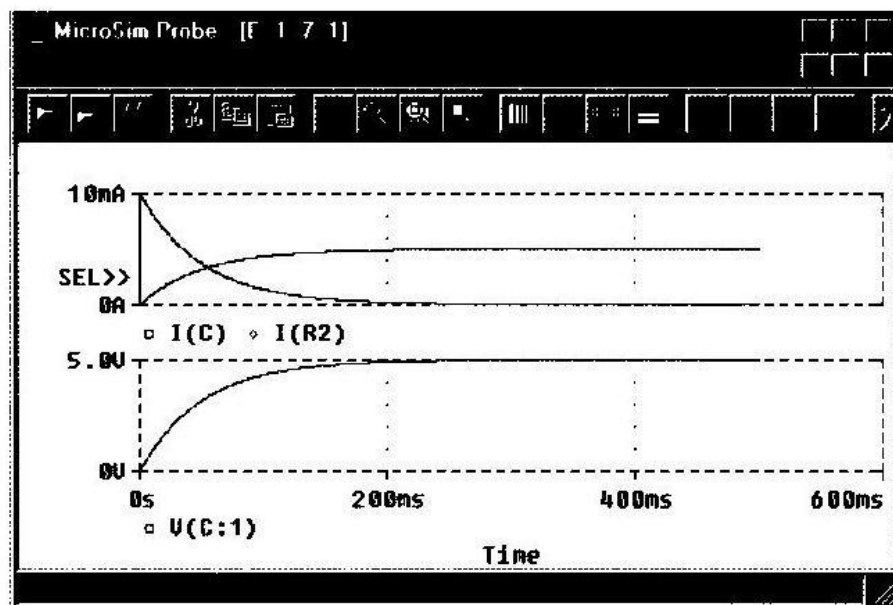


Fig. 1.7.11

### 1.7.3 La funzione di trasferimento

L'applicazione della trasformata di Laplace consente di analizzare non solo sistemi semplici come il circuito *RC*, ma anche quelli complessi senza dover ricercare, e quindi risolvere, l'equazione o le equazioni integro-differenziali che sono il modello matematico dei sistemi nel dominio del tempo. Con questa metodologia si individua, come si è visto, *una funzione caratteristica del sistema, detta funzione di trasferimento* (abbreviato *F.d.T.*), la quale esprime il legame esistente tra la trasformata di Laplace della sollecitazione applicata e la trasformata di Laplace della risposta ad essa corrispondente (fig. 1.7.12).

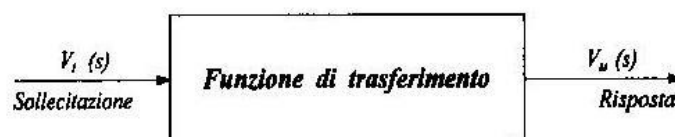


Fig. 1.7.12

La ricerca di una funzione di trasferimento è valida non solo per i sistemi elettrici, ma anche per qualsiasi sistema (meccanico, termico, idraulico, ecc...).

**La funzione di trasferimento  $G(s)$  di un sistema è il rapporto tra la trasformata di Laplace della risposta  $U(s)$  e la trasformata di Laplace della sollecitazione  $I(s)$  ad esso applicata** (fig. 1.7.13).

$$G(s) = \frac{U(s)}{I(s)}$$

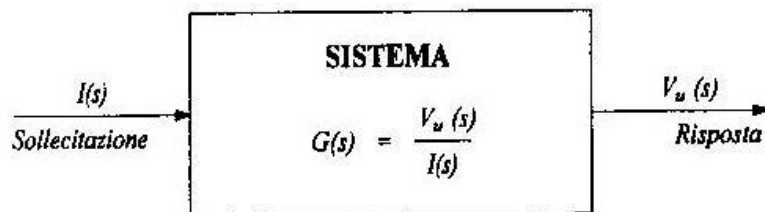


Fig. 1.7.13

La funzione di trasferimento contiene tutte le informazioni necessarie per individuare le caratteristiche del sistema: essa non dipende dal tipo di sollecitazione applicata (a gradino, a rampa, sinusoidale, ecc.), ma solo dai parametri del sistema. La conoscenza della funzione di trasferimento consente di ricavare, come si è visto, la risposta del sistema se è nota la sollecitazione (fig. 1.7.14). Quest'ultima peculiarità è molto importante perché nella pratica si ha interesse a conoscere l'evoluzione di un sistema quando esso è sottoposto a sollecitazioni diverse.

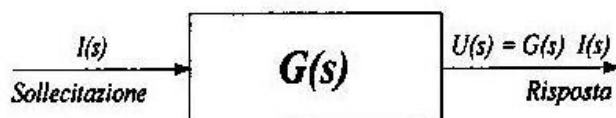


Fig. 1.7.14

In definitiva per studiare l'andamento della risposta  $u(t)$  di un sistema alla sollecitazione applicata è necessario:

- disegnare il circuito analogo del sistema assegnato utilizzando la tabella 1.6.1;
- ricavare la funzione di trasferimento del sistema nel dominio della variabile complessa  $s$  applicando le leggi della fisica;
- calcolare la trasformata della sollecitazione;
- ricavare la trasformata  $U(s)$  della risposta moltiplicando la trasformata della sollecitazione e la funzione di trasferimento;
- eseguire l'antitrasformata di  $U(s)$  e ricavare la risposta  $u(t)$ ;
- rappresentare l'andamento della risposta in funzione del tempo.

#### 1.7.4 Sistema termico del 1° ordine

Il sistema termico di figura 1.7.15 è costituito da un recipiente nel quale è contenuto un liquido riscaldato da una corrente di aria calda. Il recipiente è termicamente isolato dall'ambiente esterno ed il liquido contenuto nel recipiente è mescolato in modo che la sua temperatura sia uniforme. Si vuole studiare l'andamento della temperatura del liquido nell'ipotesi che la temperatura dell'aria calda sia costante:

$$T_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ T_a & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

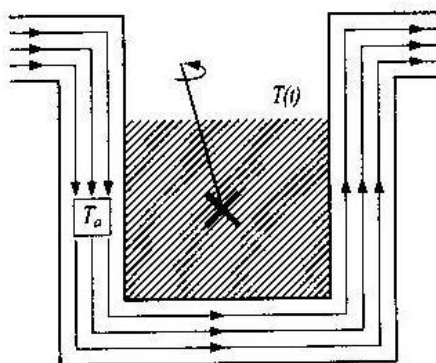


Fig. 1.7.15

La quantità di calore trasferita dall'aria calda al liquido dipende dalla resistenza termica delle pareti del recipiente e dalla differenza tra la temperatura dell'aria immessa nell'intercapedine e quella del liquido:

$$\Phi_u(t) = \frac{T_a(t) - T(t)}{R_T}$$

La quantità di calore assorbita dal liquido provoca una variazione della temperatura del liquido proporzionale alla sua capacità termica:

$$\Phi(t) = C_T \cdot \frac{dT}{dt}$$

La temperatura del liquido aumenta se è  $T_a(t) > T(t)$ , diminuisce se è  $T_a(t) < T(t)$  e rimane invariata se è  $T_a(t) = T(t)$ .

Nell'ipotesi che non vi siano dispersioni di calore verso l'ambiente esterno e che la quantità di calore assorbita dalle pareti del recipiente sia trascurabile, per il principio di conservazione dell'energia si ha:

$$\Phi_u(t) = \Phi(t)$$

$$\frac{T_a(t) - T(t)}{R_T} = C_T \cdot \frac{dT}{dt} \quad [1.7.7]$$

Se all'istante  $t = 0$  è  $T(0) = 0$  (condizioni iniziali nulle), la trasformata di Laplace di ambo i membri della [1.7.7] è:

$$\frac{T_a(s) - T(s)}{R_T} = C_T \cdot s \cdot T(s)$$

La funzione di trasferimento e la trasformata della risposta sono rispettivamente uguali a

$$G(s) = \frac{T(s)}{T_a(s)} = \frac{1}{(1 + R_T \cdot C_T \cdot s)}$$

$$T(s) = \frac{T_a(s)}{(1 + R_T \cdot C_T \cdot s)}$$

dove  $\tau = C_T \cdot R_T$  è la costante di tempo del sistema. Il sistema può essere rappresentato dallo schema di figura 1.7.16 e dallo schema a blocchi di figura 1.7.17:

- $T_a(s)$  è la trasformata della sollecitazione;
- $T(s)$  è la trasformata della risposta;
- la capacità termica  $C_T$  e la resistenza idraulica  $R_T$  sono i parametri.

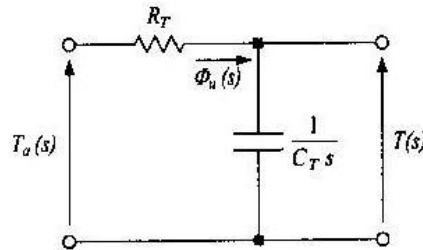


Fig. 1.7.16

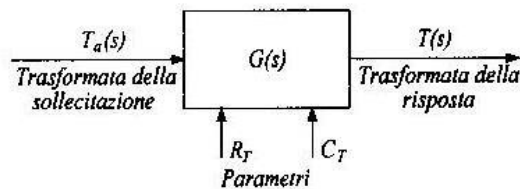


Fig. 1.7.17

Il sistema è del primo ordine perché il denominatore della funzione di trasferimento è un polinomio di primo grado.

Si dimostra che la risposta del sistema è uguale a

$$T(t) = T_a \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{R_T \cdot C_T}} \right)$$

La temperatura del liquido aumenta gradualmente e raggiunge la temperatura di regime dopo un tempo uguale a  $4 \div 5$  volte la costante di tempo del sistema quando la temperatura dell'aria è maggiore di quella del liquido (fig. 1.7.18).

Studiare la risposta del sistema termico rappresentato in figura 1.7.15 sollecitato

da un segnale a gradino così definito:  $T_a(t) = \begin{cases} 0^\circ\text{C} & \text{pe } t < 0 \\ 80^\circ\text{C} & \text{pe } t \geq 0 \end{cases}$

Si assumano i seguenti valori:

$$R_T = 1,3 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

$$C_T = 3,5 \cdot 10^7 \left[ \frac{\text{J}}{\text{K}} \right]$$

$$T(0) = 0^\circ\text{C}$$

Per  $R_T = 1,3 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$  e  $C_T = 3,5 \cdot 10^7 \left[ \frac{\text{J}}{\text{K}} \right]$ , la costante di tempo  $\tau$  del sistema è uguale a

$$\tau = R_T \cdot C_T = 1,3 \cdot 10^{-3} \cdot 3,5 \cdot 10^7 = 4,55 \cdot 10^4 \text{ s}$$

#### Il foglio elettronico Excel:

- nella cella A1 si scriva 5000 corrispondente al valore del passo  $\Delta t = 5000$  s prescelto, che risulta essere circa 10 volte minore della costante di tempo;
- nella cella A3 si scriva 0 corrispondente all'istante  $t = 0$ ;
- nella cella A4 si scriva la formula:

$$= A3 + \$A\$1$$

che calcola il tempo  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$

- nel blocco di celle A5 ÷ A66 è copiata la formula scritta in A4;
- nella cella B1 si scriva 80 corrispondente alla temperatura del flusso di aria calda  $T_a = 80$  °C;
- nella cella B3 si scriva 0 corrispondente alla temperatura del liquido all'istante  $t = 0$ ;
- nella cella B4 si scriva la formula:

$$= \$B\$1 * (1 - \text{EXP}(-A4/4,55E4))$$

che calcola la temperatura del liquido contenuto nella caldaia  $T(t) = T_a \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{4,55 \cdot 10^4}} \right)$

- nel blocco di celle B5 ÷ B66 è copiata la formula scritta in B4.

I valori della temperatura del liquido sono riportati in figura 1.7.18 unitamente alla loro rappresentazione grafica in funzione del tempo.

L'analisi dei dati e del grafico confermano che il valore della temperatura della stanza raggiunge il 98% ÷ 99% del valore finale di regime dopo un tempo uguale a 4 ÷ 5 volte la costante di tempo  $\tau$ .

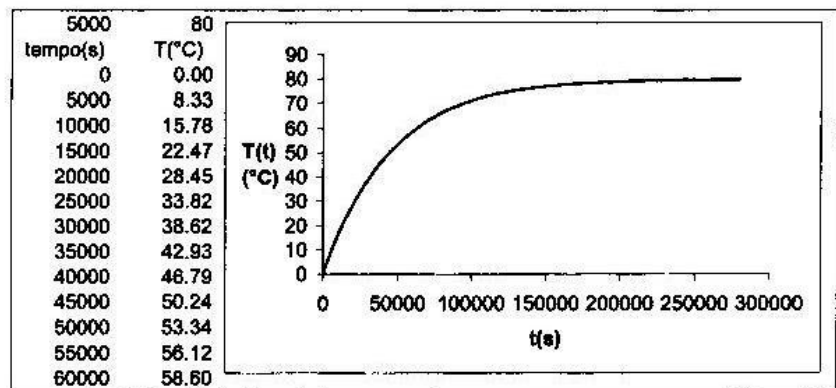


Fig.1.7.18

### 1.7.5 Sistema idraulico del 1° ordine

Il sistema di figura 1.7.19 è costituito da un serbatoio idraulico alimentato da una condotta con portata  $Q_i(t)$ . Dal condotto situato sul fondo e avente

una resistenza idraulica  $R_L$  defluisce una quantità di liquido con portata uguale a  $Q_u(t)$ . Si vuole studiare come varia la pressione esercitata dal liquido sul fondo del serbatoio nell'ipotesi che a partire dall'istante  $t=0$  il serbatoio sia sollecitato da un segnale a gradino così definito:

$$Q_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ Q_i & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

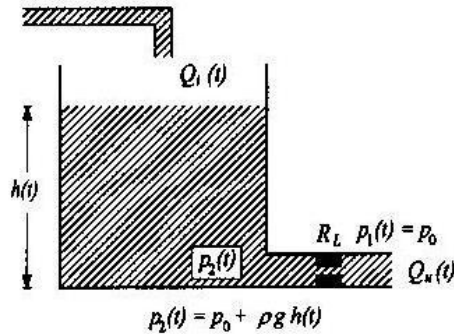


Fig. 1.7.19

Tenendo presente la tabella 1.6.1, il sistema può essere schematizzato con il circuito di figura 1.7.20. Per il principio di conservazione della massa deve risultare:

$$Q_i(s) - Q_u(s) = \frac{P(s)}{\frac{1}{C_L \cdot s}}$$

$$Q_i(s) - Q_u(s) = C_L \cdot s \cdot P(s) \quad [1.7.8]$$

$$Q_u(s) = \frac{P(s)}{R_L} \quad [1.7.9]$$

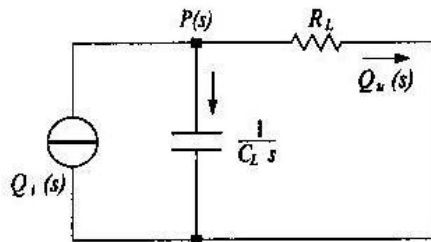


Fig. 1.7.20

Sostituendo  $Q_u(s)$  con  $\frac{P(s)}{R_L}$  nella [1.7.8], si ricavano la funzione di trasferimento e la trasformata della risposta:

$$P(s) \cdot (1 + R_L \cdot C_L \cdot s) = R_L \cdot Q_i(s)$$

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q_i(s)} = \frac{R_L}{(1 + R_L \cdot C_L \cdot s)}$$

$$P(s) = \frac{R_L \cdot Q_i(s)}{(1 + R_L \cdot C_L \cdot s)} \quad [1.7.10]$$

Si ricorda che  $C_L = \frac{A}{\rho \cdot g}$  è la capacità idraulica e  $\tau = R_L \cdot C_L$  è la costante

di tempo del sistema. Il sistema idraulico può essere rappresentato dallo schema a blocchi di figura 1.7.21:

- $Q_i(s)$  è la trasformata della sollecitazione;
- $P(s)$  è la trasformata della risposta;
- la capacità idraulica  $C_L$  e la resistenza idraulica  $R_L$  sono i parametri del sistema.

Il sistema è del primo ordine perché il denominatore della funzione di trasferimento è un polinomio di primo grado.

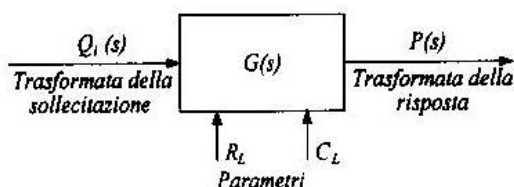


Fig. 1.7.21

Si dimostra che l'andamento della pressione esercitata dal liquido sul fondo del serbatoio è uguale a

$$p(t) = Q_i \cdot R_L \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{R_L \cdot C_L}} \right)$$

Il sistema si porta a regime dopo un intervallo di tempo uguale a 4 ÷ 5 volte la costante di tempo (fig. 1.7.22).

**Scheda di approfondimento: la risposta di un sistema idraulico del primo ordine.**

Considerato che  $Q_i(s) = \frac{Q_i}{s}$ , la [1.7.10] può essere scritta nella seguente forma:

$$P(s) = \frac{Q_i}{s} \cdot \frac{R_L}{R_L \cdot C_L \cdot \left( s + \frac{1}{R_L \cdot C_L} \right)}$$



Scomponendo in frazioni parziali e applicando i procedimenti noti si ricava la risposta:

$$P(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{\left(s + \frac{1}{R_L \cdot C_L}\right)}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{Q_i}{s} \cdot \frac{R_L}{R_L \cdot C_L \cdot \left(s + \frac{1}{R_L \cdot C_L}\right)} = Q_i \cdot R_L$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{R_L \cdot C_L}} \left(s + \frac{1}{R_L \cdot C_L}\right) \cdot \frac{Q_i}{s} \cdot \frac{R_L}{R_L \cdot C_L \cdot \left(s + \frac{1}{R_L \cdot C_L}\right)} = -Q_i \cdot R_L$$

$$p(t) = Q_i \cdot R_L \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R_L \cdot C_L}}\right)$$

Con riferimento al sistema rappresentato in figura 1.7.19 si desidera studiare l'andamento della pressione esercitata dal liquido sul fondo del serbatoio nell'ipotesi che il sistema sia sollecitato da un segnale a gradino così definito:

$$Q_i(t) = \begin{cases} 0 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} & \text{per } t < 0 \\ 4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

I dati del problema siano:

sezione del serbatoio  $A = 1,2 \text{ m}^2$ ;

densità del liquido  $\rho = 880 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ;

resistenza idraulica laminare  $R_L = 4,94 \cdot 10^7 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^3}$ ;

altezza del serbatoio  $h_{\text{max}} = 3 \text{ m}$

La costante di tempo del sistema è:

$$\tau = C_L \cdot R_L = \frac{A}{\rho \cdot g} \cdot R_L = \frac{1,2}{880 \cdot 9,81} \cdot 4,94 \cdot 10^7 = 6867 \text{ s}$$

La condizione iniziale per  $t = 0$  è  $p = 0$ .

#### Il foglio elettronico Excel:

- nella cella A1 si scriva 660 corrispondente al passo  $\Delta t$  circa 10 volte minore della costante di tempo;
- nella cella A3 si scriva 0 corrispondente all'istante  $t = 0$ ;

- nella cella A4 si scriva la formula:

$$= A3 + \$A\$1$$

che calcola il tempo  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ ;

- nel blocco di celle A5 ÷ A66 è copiata la formula scritta in A4;
- nella cella B3 si scriva 0 corrispondente al valore della pressione esercitata dal liquido sul fondo del serbatoio all'istante iniziale  $t = 0$ ;
- nella cella B4 si scriva la formula:

$$= (4E - 3 \cdot 4,94E7) \cdot (1 - \text{EXP}(-A4/6867))$$

che calcola la pressione  $p(t) = Q_L R_L \left( 1 - e^{-\frac{t}{R_L C_L}} \right)$ .

- nel blocco di celle B5 ÷ B66 è copiata la formula scritta in B4.

L'analisi dei risultati, riportati in figura 1.7.22, conferma che il valore finale di equilibrio, uguale a 19683 Pa, è raggiunto dopo un tempo uguale a 4 ÷ 5 volte la costante di tempo.

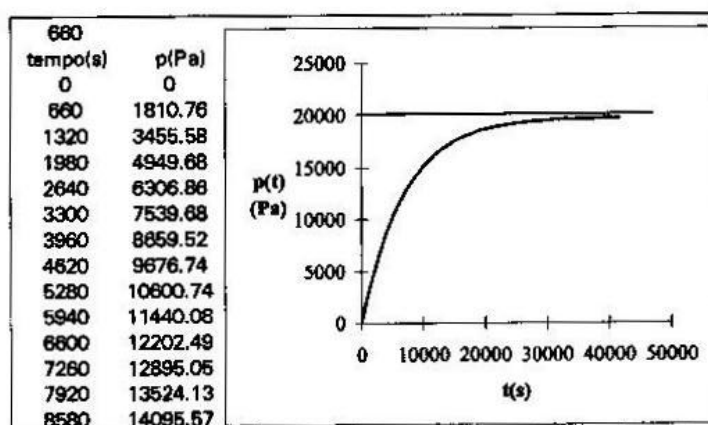


Fig. 1.7.22

### 1.7.6 Sistema elettrico del 2° ordine

Si consideri il sistema costituito da un circuito *RLC* (fig. 1.7.23). Si vuole studiare l'andamento della tensione agli estremi del condensatore quando il sistema è sollecitato da un segnale a gradino così definito:

$$v_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ E & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

Si supponga che le condizioni iniziali del sistema all'istante  $t = 0$  siano  $i(0) = 0$  e  $v_c(0) = 0$  (condizioni iniziali nulle).

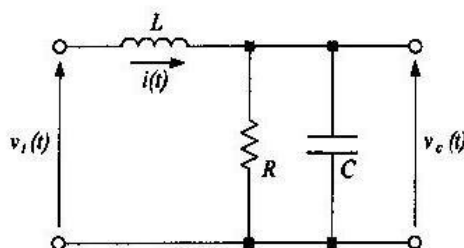


Fig. 1.7.23

Per studiare l'evoluzione del sistema si applichi la legge di Ohm al circuito trasformato di figura 1.7.24:

$$V_i(s) = L \cdot s \cdot I(s) + \frac{R}{1 + R \cdot C \cdot s} \cdot I(s) \quad [1.7.11]$$

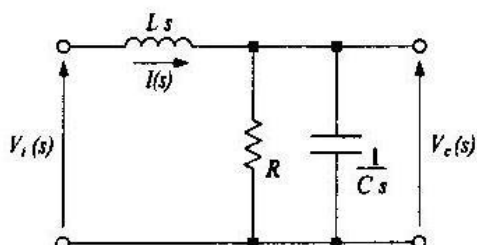


Fig. 1.7.24

Ricavato  $I(s)$  dalla [1.7.11]

$$I(s) = \frac{V_i(s)}{L \cdot s + \frac{R}{1 + R \cdot C \cdot s}}$$

e ricordato che  $V_c(s) = \frac{R}{1 + R \cdot C \cdot s} \cdot I(s)$ , si ricavano la funzione di trasferimento e la trasformata della risposta:

$$G(s) = \frac{V_c(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{L \cdot C \cdot s^2 + \frac{L}{R} \cdot s + 1} \quad [1.7.12]$$

$$V_c(s) = \frac{V_i(s)}{L \cdot C \cdot s^2 + \frac{L}{R} \cdot s + 1} \quad [1.7.13]$$

Il sistema è rappresentato dallo schema a blocchi di figura 1.7.25:

- $V_c(s)$  è la trasformata della risposta;
- $V_i(s)$  è la trasformata della sollecitazione applicata;

- la resistenza  $R$ , la capacità  $C$  e l'induttanza  $L$  sono i parametri del sistema.

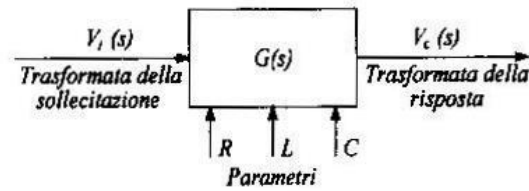


Fig. 1.7.25

Il sistema è del secondo ordine perché il denominatore della sua funzione di trasferimento è un polinomio di secondo grado.

Studiare l'andamento della tensione agli estremi del condensatore del circuito  $RLC$  rappresentato in figura 1.7.26 quando esso è sollecitato da un segnale a gradino così definito:

$$v_i(t) = \begin{cases} 0 \text{ V per } t < 0 \\ 10 \text{ V per } t \geq 0 \end{cases}$$

Siano  $i(0) = 0$  e  $v_c(0) = 0$  le condizioni iniziali del sistema,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 0,5 \text{ } \mu\text{F}$  e  $R = 100 \text{ } \Omega$  i parametri del sistema.

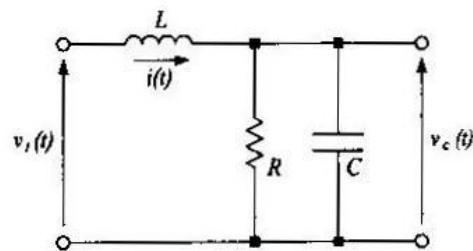


Fig. 1.7.26

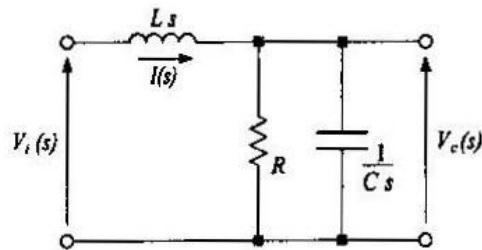


Fig. 1.7.27

Posto  $V_i(s) = \frac{10}{s}$ ,  $L \cdot C = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  e  $\frac{L}{R} = 0,01 \text{ s}$ , si ricavano la funzione di trasferimento e la trasformata della risposta:

$$G(s) = \frac{V_c(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{0,5 \cdot 10^{-6} \cdot s^2 + 0,01 \cdot s + 1}$$

$$V_c(s) = \frac{10}{s} = \frac{1}{0,5 \cdot 10^{-6} \cdot s^2 + 0,01 \cdot s + 1} \quad [1.7.14]$$

I poli della funzione di trasferimento sono:

$$s_1 = p_1 = -1,99 \cdot 10^4$$

$$s_2 = p_2 = -1,005 \cdot 10^2$$

Ricordato che un trinomio di secondo grado del tipo  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  si scompone come  $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ , dove  $x_1$  e  $x_2$  sono le radici dell'equazione ottenuta eguagliando a zero il trinomio, si scriva la [1.7.14] nella seguente forma:

$$V_c(s) = \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{0,5 \cdot 10^{-6} \cdot (s + 1,99 \cdot 10^4) \cdot (s + 1,005 \cdot 10^2)} \quad [1.7.15]$$

Scomposta la [1.7.15] in frazioni parziali e calcolati i coefficienti  $A$ ,  $B$  e  $C$ , si ha:

$$V_c(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + 1,99 \cdot 10^4)} + \frac{C}{(s + 1,005 \cdot 10^2)}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{0,5 \cdot 10^{-6} \cdot s^2 + 0,01 \cdot s + 1} = 10$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -1,99 \cdot 10^4} (s + 1,99 \cdot 10^4) \cdot \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{0,5 \cdot 10^{-6} \cdot (s + 1,99 \cdot 10^4) \cdot (s + 1,005 \cdot 10^2)} = 5,076 \cdot 10^{-2}$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -1,005 \cdot 10^2} (s + 1,005 \cdot 10^2) \cdot \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{0,5 \cdot 10^{-6} \cdot (s + 1,99 \cdot 10^4) \cdot (s + 1,005 \cdot 10^2)} = -1,005 \cdot 10^1$$

$$V_c(s) = \frac{10}{s} + \frac{5,076 \cdot 10^{-2}}{(s + 1,99 \cdot 10^4)} + \frac{-1,005 \cdot 10^1}{(s + 1,005 \cdot 10^2)} \quad [1.7.16]$$

L'antitrasformata della [1.7.16] è la risposta del sistema:

$$L^{-1}[V_c(s)] = L^{-1} \left[ \frac{10}{s} + \frac{5,076 \cdot 10^{-2}}{(s + 1,99 \cdot 10^4)} + \frac{-1,005 \cdot 10^1}{(s + 1,005 \cdot 10^2)} \right]$$

$$v_c(t) = 10 + 5,076 \cdot 10^{-2} \cdot e^{-1,99 \cdot 10^4 \cdot t} - 1,005 \cdot 10^1 \cdot e^{-1,005 \cdot 10^2 \cdot t}$$

#### Il foglio elettronico Excel:

- Nella cella A1 si scriva 0,001 che corrisponde a un decimo della costante di tempo maggiore;
- nella cella A3 si scriva 0 corrispondente all'istante iniziale  $t = 0^+$
- nella cella A4 si scriva la formula:

$$= A3 + \$A\$1$$

che calcola il tempo  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ ;

- nel blocco di celle A5 ÷ A66 è ricopiata la formula scritta in A4;
- nella cella B3 si scriva 0 corrispondente alla tensione ai capi del condensatore all'istante  $t = 0^+$ ;
- nella cella B4 si scriva la formula:

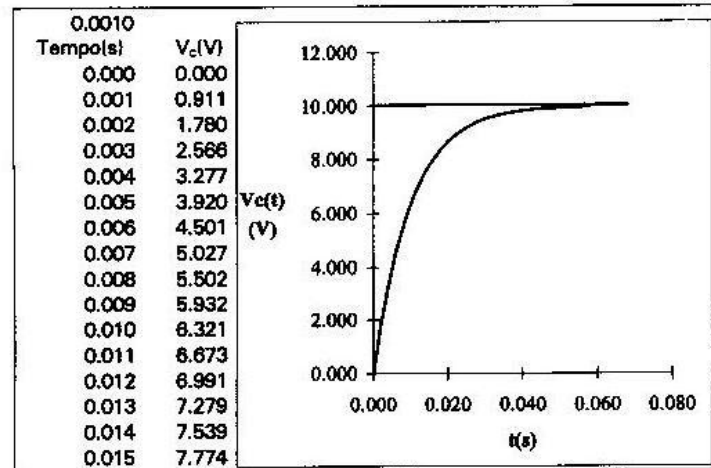
$$= 10 + 5,076E2 \cdot \text{EXP}(-1,99E4 \cdot A4) - 1,005E1 \cdot \text{EXP}(-1,005E2 \cdot A4)$$

che calcola la tensione ai capi del condensatore

$$v_c(t) = 10 + 5,076 \cdot 10^{-2} \cdot e^{-1,99 \cdot 10^4 \cdot t} - 1,005 \cdot 10^1 \cdot e^{-1,005 \cdot 10^2 \cdot t};$$

- nel blocco di celle B5 ÷ B66 è copiata la formula scritta in B4

Fig. 1.7.28



### PSPICE

Dopo aver realizzato lo schema di figura 1.7.29 nel quale sono stati inseriti i marker di tensione e di corrente, si apra il menu Analysis, si selezioni Transient e si fissino i seguenti parametri della simulazione:

**Print Step 0,001 s**

**Final Time 0,06 s**

**Step Ceiling 0,001**

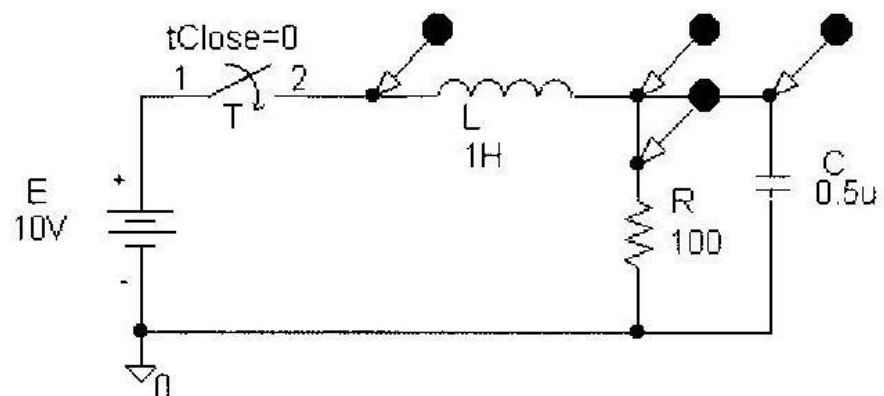


Fig. 1.7.29

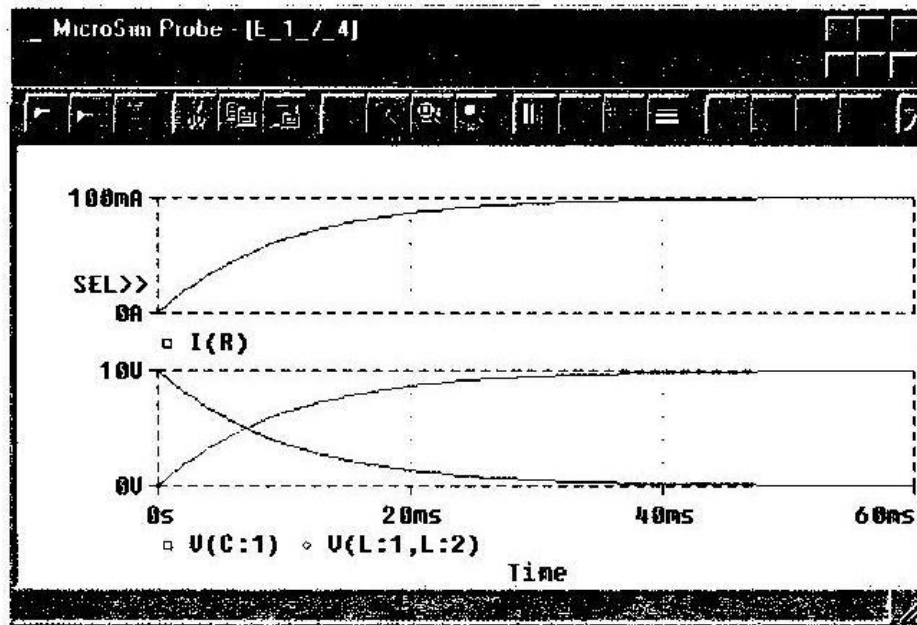


Fig. 1.7.30

### 1.7.7 Sistema termico del 2° ordine

Si consideri un sistema termico costituito da un termometro immerso in un liquido e si supponga che le dispersioni di calore verso l'esterno siano trascurabili (fig. 1.7.31). Sia  $T(t)$  la temperatura del mercurio e  $T_a$  quella del liquido, considerata quest'ultima costante per lunghi intervalli di tempo.

Si vuole studiare l'andamento della temperatura  $T(t)$  del mercurio in funzione del tempo nell'ipotesi che dall'istante  $t=0$  il termometro sia sottoposto a una sollecitazione a gradino così definita:

$$T_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ T_a & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

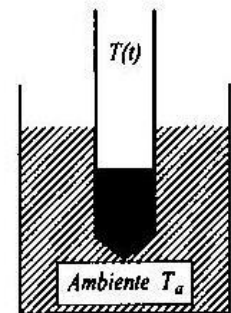


Fig. 1.7.31

Nell'ipotesi che il trasferimento di calore avvenga solo per conduzione, il sistema può essere rappresentato con il circuito di figura 1.7.32:

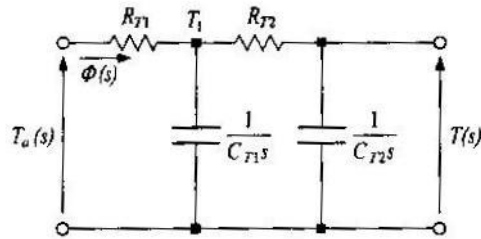
- $C_{T1}$  e  $R_{T1}$  sono rispettivamente la capacità e la resistenza termica del bulbo di vetro;
- $C_{T2}$  e  $R_{T2}$  sono rispettivamente la capacità e la resistenza termica del mercurio,  $T_1$  è la temperatura della superficie che separa il bulbo di vetro dal mercurio.

Applicando il teorema di Thevenin al circuito di figura 1.7.32 si ricavano la funzione di trasferimento del sistema e la trasformata della risposta:

$$G(s) = \frac{1}{R_{T1} \cdot C_{T1} \cdot R_{T2} \cdot C_{T2} \cdot s^2 + (R_{T1} \cdot C_{T1} + R_{T2} \cdot C_{T2} + R_{T1} \cdot C_{T2}) \cdot s + 1}$$

$$T(s) = \frac{T_a(s)}{R_{T1} \cdot C_{T1} \cdot R_{T2} \cdot C_{T2} \cdot s^2 + (R_{T1} \cdot C_{T1} + R_{T2} \cdot C_{T2} + R_{T1} \cdot C_{T2}) \cdot s + 1}$$

Fig.1.7.32



Il sistema termico può essere rappresentato dallo schema a blocchi di figura 1.7.33. Il sistema è del secondo ordine perché il denominatore della funzione di trasferimento è un polinomio di secondo grado:

- $T_a(s)$  è la trasformata della sollecitazione applicata;
- $T(s)$  è la trasformata della risposta;
- le capacità termiche  $C_{T1}$  e  $C_{T2}$  e le resistenze  $R_{T1}$  e  $R_{T2}$  sono i parametri del sistema.

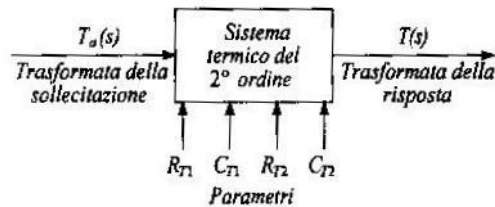


Fig. 1.7.33

Con riferimento al sistema di figura 1.7.31 studiare l'andamento della temperatura del mercurio nell'ipotesi che all'istante  $t=0$  sia  $T(0)=0$  °C e che il sistema sia sollecitato da un segnale a gradino così definito:

$$T_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 70 \text{ °C} & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

Siano  $R_{T1} = 8 \frac{\text{s} \cdot \text{K}}{\text{J}}$ ,  $C_{T1} = 3,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ ,  $R_{T2} = 1,8 \frac{\text{s} \cdot \text{K}}{\text{J}}$  e  $C_{T2} = 11 \frac{\text{J}}{\text{K}}$  i parametri del sistema.

Posto  $T_a(s) = \frac{70}{s}$ , dal circuito analogo di figura 1.7.32 si ricavano la funzione di trasferimento e la trasformata della risposta:

$$G(s) = \frac{T(s)}{T_a(s)} = \frac{1}{0,55 \cdot s^2 + 108 \cdot s + 1}$$

$$T(s) = \frac{70}{s} \cdot \frac{1}{0,55 \cdot s^2 + 108 \cdot s + 1} \quad [1.7.17]$$

I poli della funzione di trasferimento sono:

$$s_1 = p_1 \approx -0,0093$$

$$s_2 = p_2 \approx -196,35$$



Ricordato che un trinomio di secondo grado del tipo  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  si scompone come  $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ , dove  $x_1$  e  $x_2$  sono le radici dell'equazione ottenuta eguagliando a zero il trinomio, si scriva la [1.7.17] nella seguente forma:

$$V_c(s) = \frac{70}{s} \cdot \frac{1}{0,55 \cdot (s + 0,0093) \cdot (s + 196,35)} \quad [1.7.18]$$

Scomposta la [1.7.18] in frazioni parziali e calcolati i coefficienti  $A$ ,  $B$  e  $C$ , si ha:

$$V_c(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + 0,0093)} + \frac{C}{(s + 196,35)}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{70}{s} \cdot \frac{1}{0,55 \cdot s^2 + 108 \cdot s + 1} = 70$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -0,0093} (s + 0,0093) \cdot \frac{70}{s} \cdot \frac{1}{0,55 \cdot (s + 0,0093) \cdot (s + 196,35)} \cong -69,7$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -196,35} (s + 196,35) \cdot \frac{70}{s} \cdot \frac{1}{0,55 \cdot (s + 0,0093) \cdot (s + 196,35)} \cong 0,0033$$

$$V_c(s) = \frac{70}{s} + \frac{-69,7}{(s + 0,0093)} + \frac{0,0033}{(s + 196,35)} \quad [1.7.19]$$

L'antitrasformata della [1.7.19] è la risposta del sistema:

$$L^{-1}[V_c(s)] = L^{-1}\left[\frac{70}{s} + \frac{-69,7}{(s + 0,0093)} + \frac{0,0033}{(s + 196,35)}\right]$$

$$v_c(t) = 70 - 69,7 \cdot e^{-0,0093 \cdot t} + 0,0033 \cdot e^{-196,35 \cdot t}$$

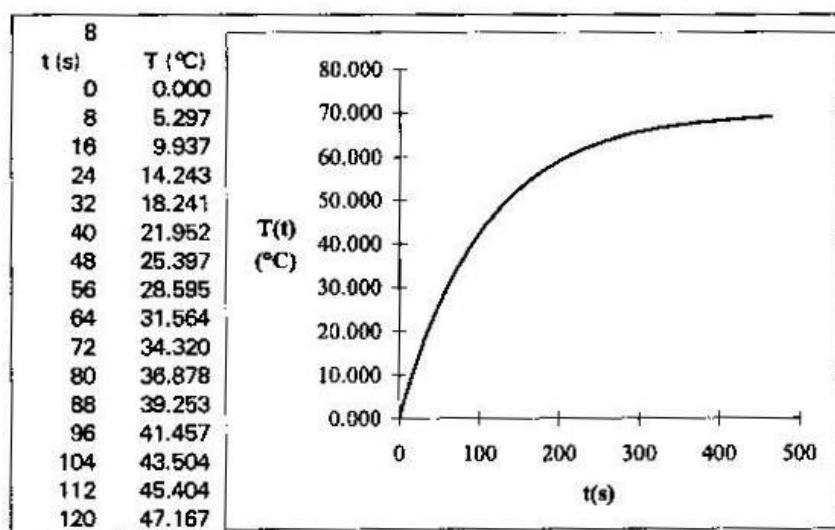


Fig. 1.7.34

### PSPICE

Dopo aver realizzato lo schema di figura 1.7.35, si apra il menu Analysis, si selezioni Transient e si fissino i seguenti parametri della simulazione:

**Print Step 1 s**  
**Final Time 600 s**  
**Step Ceiling 0,1**

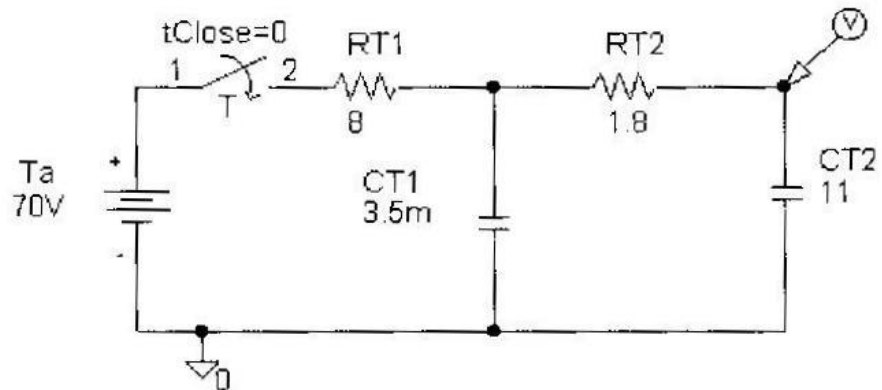


Fig. 1.7.35

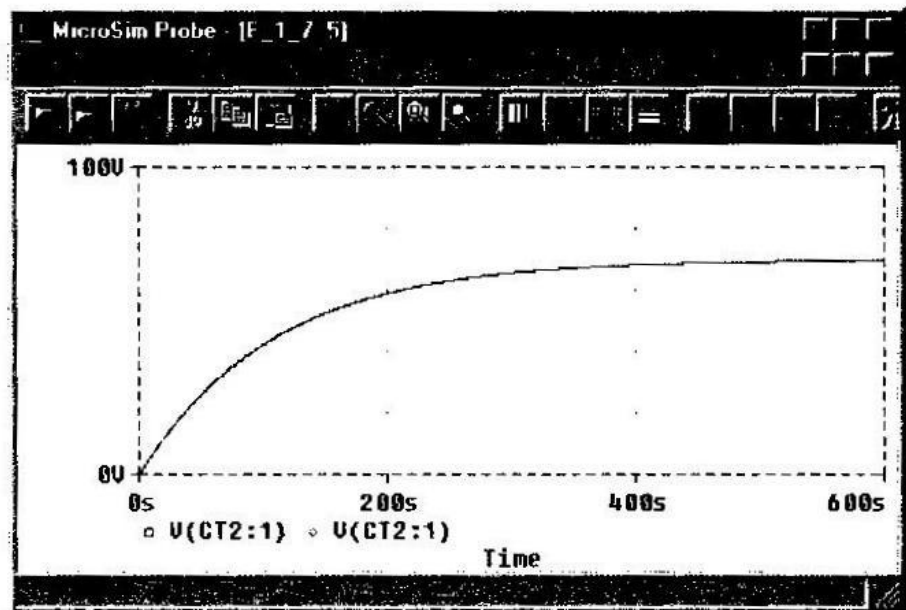


Fig. 1.7.36

### 1.7.8 Sistema Idraulico del 2° ordine

Il sistema di figura 1.7.37 è costituito da due serbatoi cilindrici aventi sezioni  $A_1$  e  $A_2$ . I due serbatoi sono indipendenti l'uno dall'altro perché il livello del liquido del serbatoio di sezione  $A_2$  non dipende da quello del

serbatoio di sezione  $A_1$ . La portata  $Q_1(t)$  uscente dalla valvola posta sul fondo del serbatoio di sezione  $A_1$  è la sollecitazione applicata al serbatoio di sezione  $A_2$ . Sia  $\rho \cdot Q_1(t)$  la massa di liquido che nell'unità di tempo è immesso nel serbatoio di sezione  $A_1$  e  $\rho \cdot Q_1(t)$  quella che defluisce attraverso la valvola di resistenza  $R_{L1}$ . Sia poi  $\rho \cdot Q_2(t)$  la massa di liquido che nell'unità di tempo defluisce dal serbatoio di sezione  $A_2$  attraverso la valvola di resistenza idraulica  $R_{L2}$ . Dall'istante  $t = 0^+$  il sistema sia sollecitato da un segnale a gradino così definito:

$$Q_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ Q_i & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

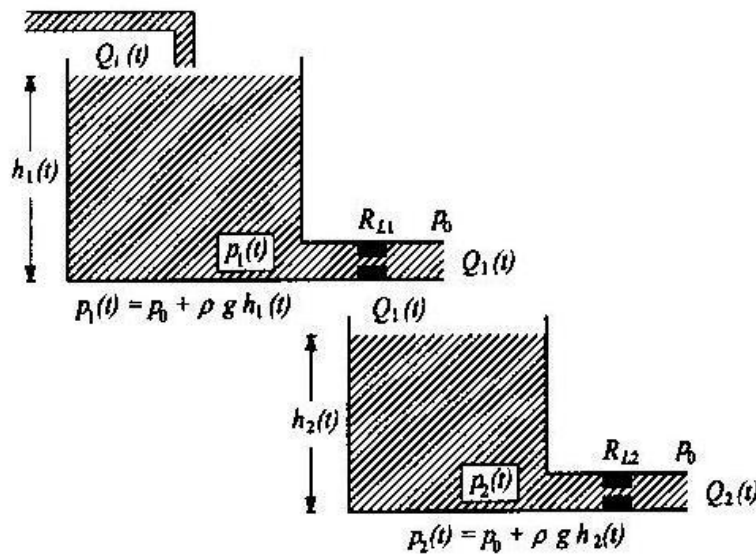


Fig. 1.7.37

Si desidera studiare l'andamento della pressione esercitata dal liquido sul fondo del serbatoio avente sezione  $A_2$ .

Nel ricavare il modello matematico del sistema si assume

$$p_1(t) = p_0 + \rho \cdot g \cdot h_1(t) \text{ e } p_2(t) = p_0 + \rho \cdot g \cdot h_2(t).$$

Nell'ipotesi che all'istante  $t = 0$  siano nulle le condizioni iniziali,  $p_1(0) = 0$  e  $p_2(0) = 0$ , è possibile rappresentare il sistema con lo schema di figura 1.7.38.

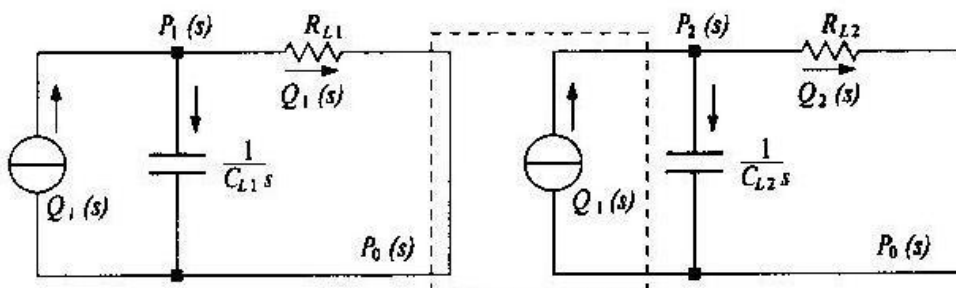


Fig. 1.7.38

Applicando il teorema di Norton, trasformato il generatore di corrente in un un generatore di tensione (fig. 1.7.39), si ha:

$$Q_1(s) = \frac{Q_i(s)}{1 + R_{L1} \cdot C_{L1} \cdot s}$$

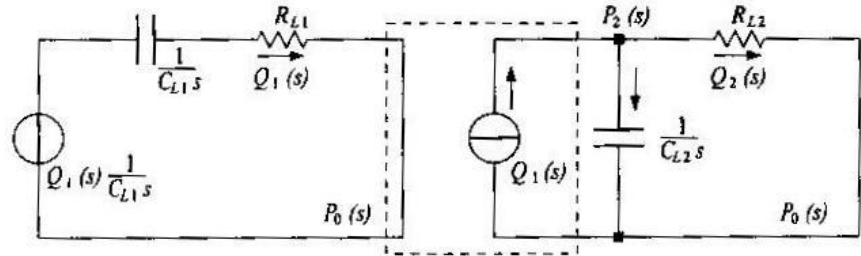


Fig. 1.7.39

Si dimostra che la funzione di trasferimento del sistema e la trasformata della risposta sono rispettivamente uguali a

$$G(s) = \frac{P_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{R_{L2}}{R_{L1} \cdot R_{L2} \cdot C_{L1} \cdot C_{L2} \cdot s^2 + (R_{L1} \cdot C_{L1} + R_{L2} \cdot C_{L2}) \cdot s + 1}$$

$$P_2(s) = \frac{Q_i(s) \cdot R_{L2}}{R_{L1} \cdot R_{L2} \cdot C_{L1} \cdot C_{L2} \cdot s^2 + (R_{L1} \cdot C_{L1} + R_{L2} \cdot C_{L2}) \cdot s + 1}$$

Il sistema è del secondo ordine perché il denominatore della funzione di trasferimento è un polinomio di secondo grado:

- $Q_i(s)$  è la trasformata della sollecitazione applicata;
- $P_2(s)$  è la trasformata della risposta;
- la resistenza idraulica  $R_{L1}$  e  $R_{L2}$  unitamente alla capacità idraulica dei due serbatoi  $C_{L1}$  e  $C_{L2}$  sono i parametri del sistema (fig. 1.7.40).

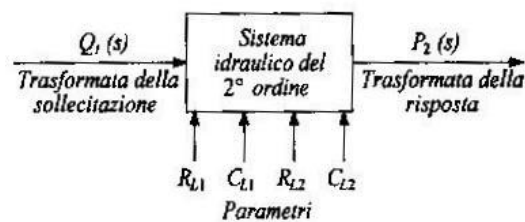


Fig. 1.7.40

# ESERCIZI PROPOSTI

## Esercizio 1

Con riferimento al circuito di figura 1.7.41 studiare l'intensità della corrente e la d.d.p. misurata agli estremi dell'induttore in funzione del tempo. La sollecitazione applicata al sistema è così definita:

$$v_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ E & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

Siano  $E = 5 \text{ V}$ ,  $R = 100 \text{ } \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $i(0) = 0$ .

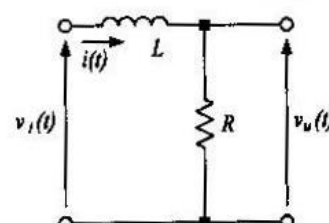


Fig. 1.7.41

## Esercizio 2

Studiare la risposta del sistema termico, rappresentato in figura 1.7.42, sollecitato da un segnale a gradino così definito:  $\Phi_i(t) = \begin{cases} 0 \text{ W} & \text{per } t < 0 \\ 4000 \text{ W} & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$

Si assumano i seguenti valori:

$$R_T = 4,3 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{^\circ\text{C}}{\text{W}} \right]$$

$$C_T = 1,8 \cdot 10^6 \left[ \frac{\text{J}}{^\circ\text{C}} \right]$$

$$T_A = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Siano nulle le condizioni iniziali,  $T(0) = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

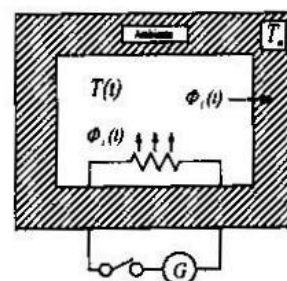


Fig. 1.7.42

## Esercizio 3

Con riferimento al circuito di figura 1.7.43, studiare la d.d.p. tra le armature del condensatore in funzione del tempo nell'ipotesi che la resistenza sia  $1 \text{ k}\Omega$ , la capacità  $100 \text{ } \mu\text{F}$  e  $V_C(0) = 0 \text{ V}$ . La sollecitazione applicata

sia  $v_i(t) = \begin{cases} 0 \text{ V} & \text{per } t < 0 \\ 5 \text{ V} & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$

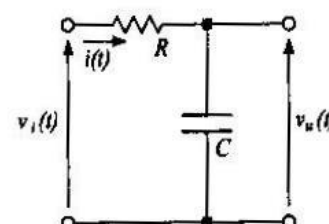


Fig. 1.7.43

#### Esercizio 4

Con riferimento al circuito di figura 1.7.44, calcolare la funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{I_2(s)}{V_i(s)}$  e la risposta  $i_2(t)$ . Siano  $V_{c1}(0) = 0$  V,  $V_{c2}(0) = 0$  V,  $R_1 = 1$  k $\Omega$ ,  $R_2 = 4$  k $\Omega$ ,  $R_3 = 4$  k $\Omega$ ,  $C_1 = 1$   $\mu$ F e  $C_2 = 1$   $\mu$ F. La sollecitazione applicata sia  $v_i(t) = \begin{cases} 0 \text{ V} & \text{per } t < 0 \\ 5 \text{ V} & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$

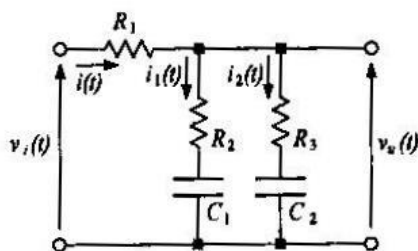


Fig. 1.7.44

#### Esercizio 5

Con riferimento al circuito di figura 1.7.45, calcolare la funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)}$  e la risposta  $v_u(t)$ . Siano  $v_c(0) = 0$  V,  $i_1(0) = 0$  A,  $R_1 = 1$  k $\Omega$ ,  $R_2 = 3$  k $\Omega$ ,  $L = 1$  mH e  $C = 1$   $\mu$ F. La sollecitazione applicata sia  $v_i(t) = \begin{cases} 0 \text{ V} & \text{per } t < 0 \\ 5 \text{ V} & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$

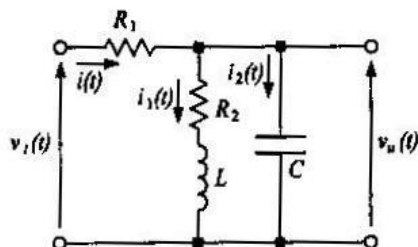


Fig. 1.7.45

#### Esercizio 6

Il sistema di figura 1.7.46 è sollecitato da un segnale a gradino di ampiezza 10 V. Calcolare le intensità delle correnti  $i(t)$ ,  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  nell'ipotesi che all'istante  $t = 0$  sia  $i_2(0) = 0$  A e  $V_c(0) = 0$  V. Siano  $R_1 = 1$   $\Omega$ ,  $R_2 = 4$   $\Omega$ ,  $C = 1$  F ed  $L = 1$  H.

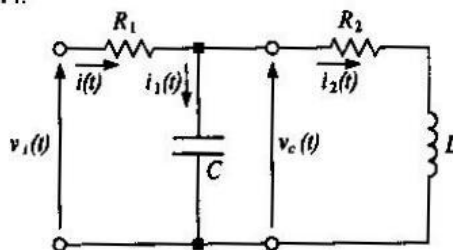


Fig. 1.7.46

### Esercizio 7

Il sistema di figura 1.7.47 è sollecitato da un segnale a gradino di ampiezza 3 V. Calcolare la tensione agli estremi del condensatore. All'istante  $t = 0$  sia  $V_c(0) = 0$  V e  $I_L(0) = 0$  A. Siano  $R_1 = 3 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$ ,  $C = 1$  F ed  $L = 1$  H.

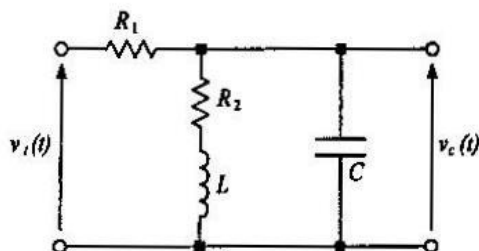


Fig. 1.7.47

### Esercizio 8

Il sistema di figura 1.7.48 è sollecitato da un segnale a gradino di ampiezza 10 V. Calcolare la tensione agli estremi del condensatore nell'ipotesi che all'istante  $t = 0$  sia  $V_c(0) = 0$  V. Siano  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $R_3 = 30 \Omega$  e  $C = 1$  F.

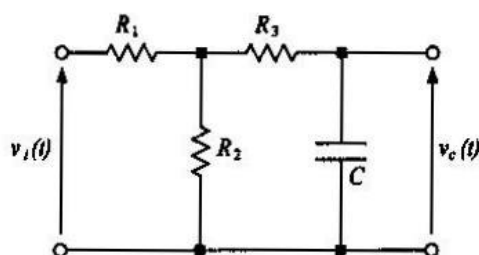


Fig. 1.7.48

## U.D. 8

### Analisi delle risposte dei sistemi lineari

#### 1.8.1 Introduzione

La conoscenza del comportamento dei sistemi del primo e del secondo ordine è fondamentale per la comprensione e per la progettazione dei sistemi di controllo.

I sistemi del primo ordine costituiti, come si è visto, da un solo elemento indipendente accumulatore di energia (condensatore, induttore, massa, molla, serbatoio idrico di accumulo, ecc.) e da elementi dissipatori (resistore, smorzatore, ecc.), hanno lo stesso comportamento quando sono sottoposti alla medesima sollecitazione. Considerazioni analoghe possono essere estese ai sistemi del secondo ordine nei quali sono presenti due elementi indipendenti in grado di immagazzinare energia: una massa e una molla con un eventuale smorzatore, un induttore e un condensatore con un resistore, ecc. Il fatto che sistemi di natura diversa (meccanici, elettrici, termici, idraulici, ecc.) presentino comportamenti analoghi, consente di impostare in modo unitario la descrizione matematica di fenomeni diversi e di trasferire conoscenze apprese in un dato campo della fisica ad altri campi apparentemente diversi. In tal modo è possibile sintetizzare in un unico quadro concettuale tutti gli aspetti relativi al comportamento dei sistemi lineari del primo e del secondo ordine presentati in questo modulo.

#### 1.8.2 Analisi della risposta dei sistemi del 1° ordine

I sistemi lineari del primo ordine sono caratterizzati, come si rileva dalla tabella 1.8.1, da una sola costante di tempo e sono descritti da equazioni differenziali o da funzioni di trasferimento che hanno **la medesima forma** anche se sono diversi i fenomeni fisici, i parametri (resistenza elettrica, resistenza termica, capacità elettrica, capacità idraulica, ecc.) le sollecitazioni e le risposte (tensione, corrente, portata, flusso termico, temperatura, pressione, ecc.).

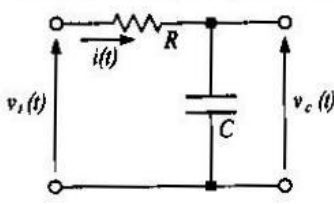
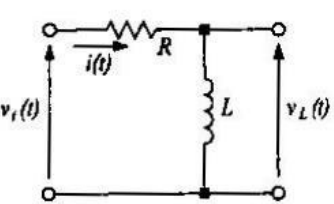
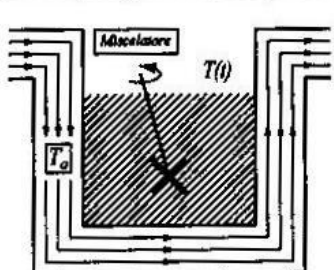
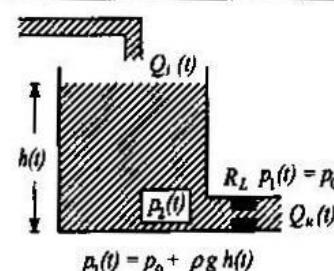
Considerato che la risposta di un sistema dipende dal suo modello matematico e dal tipo di sollecitazione ad esso applicata, si conclude che la risposta di un sistema lineare del primo ordine sollecitato da un segnale a **gradino** è del tipo:

$$u(t) = U_0 \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad [1.8.1]$$

dove  $U_0$  è il valore della risposta per  $t \rightarrow \infty$  (valore finale o di regime).



Tab. 1.8.1

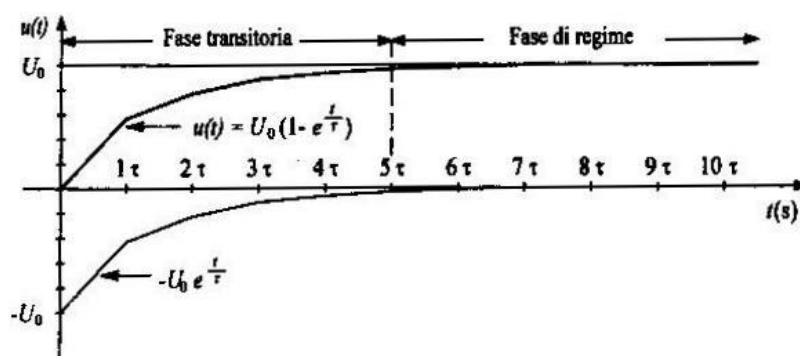
Sistema	Modello matematico	$G(s)$
	$R \cdot C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_i(t)$ $\tau \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_i(t)$	$\frac{V_c(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + \tau \cdot s}$
	$\frac{L}{R} \cdot \frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{v_i(t)}{R}$ $\tau \cdot \frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{v_i(t)}{R}$	$\frac{I(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1 + \tau \cdot s}$
	$R_T \cdot C_T \cdot \frac{dT(t)}{dt} + T(t) = T_a(t)$	$\frac{T(s)}{T_a(s)} = \frac{1}{1 + \tau \cdot s}$
	$\tau \cdot \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = \frac{\tau}{A} \cdot Q_i(t)$	$\frac{h(s)}{Q_i(s)} = \frac{\tau}{A} \cdot \frac{1}{1 + \tau \cdot s}$

La [1.8.1] è valida se all'istante  $t = 0$  il valore della risposta è uguale a zero, ossia se è  $u(0) = 0$ .

La risposta  $u(t)$ , secondo la [1.8.1], è uguale alla somma algebrica di

un termine costante  $U_0$  e di un termine esponenziale  $-U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$  tendente a zero per  $t$  tendente all'infinito (fig. 1.8.1). Dall'analisi della [1.8.1] e della figura 1.8.1 si può dedurre che la risposta complessiva può essere suddivisa

Fig. 1.8.1 - Risposta di un sistema del primo ordine sollecitato da un segnale a gradino



in una fase transitoria, rappresentata da una curva esponenziale crescente che tende a  $U_0$  per  $t \rightarrow \infty$ , e in una fase di regime rappresentata da una retta parallela all'asse delle ascisse avente equazione  $u(t) = U_0$ . La fase transitoria, la cui durata dipende solamente dal valore della costante di tempo, nella pratica si considera esaurita dopo un tempo uguale a  $4 \div 5$  volte  $\tau$ . La fase di regime coincide, invece, con il comportamento del sistema a partire dalla fine del transitorio iniziale, quando la risposta assume valori che differiscono di circa il  $\pm 2\%$  dal valore finale  $U_0$ .

Assegnando a  $t$  valori multipli interi positivi di  $\tau$  si osserva che la risposta dopo un tempo  $t = \tau$ , ha il suo valore uguale al 63,2% del valore finale, dopo  $t = 4 \cdot \tau$  è il 98,2% del valore finale e, per  $t = 5 \cdot \tau$ , ha il suo valore uguale al 99,3% del valore finale (fig. 1.8.2). La costante di tempo  $\tau$  è il tempo necessario perché l'esponente del numero "e" sia uguale a  $-1$ . Dalla [1.8.2] si ricava che per  $t = \tau$  il valore della risposta è uguale a

$$u(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-1}) = U_0 \cdot 0,63$$

Pertanto si può affermare che il valore della risposta, per i sistemi descritti dalla [1.8.1], raggiunge il 63% del valore finale dopo un tempo uguale alla costante di tempo.

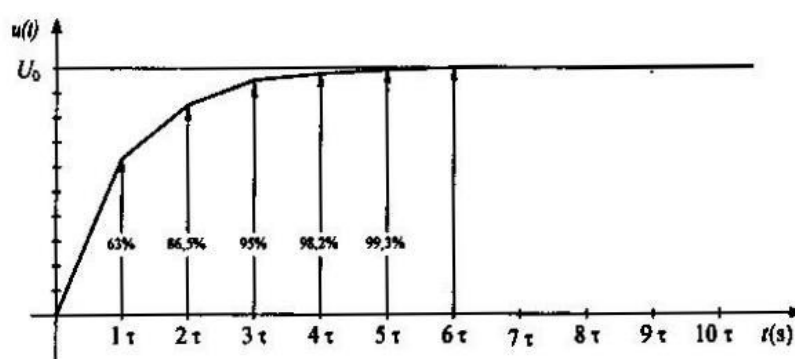


Fig. 1.8.2

### 1.8.3 La risposta dei sistemi del 2° ordine

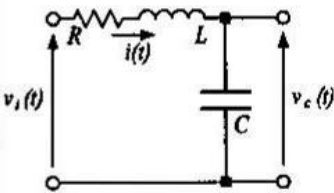
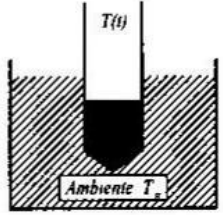
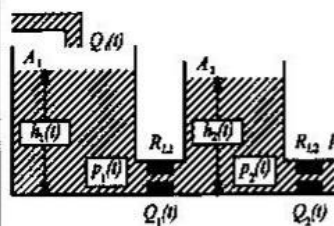
Il comportamento di un sistema del secondo ordine sollecitato da un segnale a gradino è generalmente più complesso di quello di un sistema

del primo ordine sottoposto alla medesima sollecitazione. L'attenzione per ora è rivolta all'analisi di alcuni aspetti qualitativi della risposta, la quale sarà studiata in modo approfondito in altre parti del corso.

I sistemi del secondo ordine studiati sono descritti da modelli matematici costituiti da equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del secondo ordine o da funzioni di trasferimento i cui denominatori sono polinomi di secondo grado in  $s$  (tab. 1.8.2). Si dimostra che i sistemi del secondo ordine presentano quattro diversi tipi di risposte che si possono così riassumere:

- la risposta è costituita da una funzione esponenziale crescente e asintotica avente l'andamento della curva riportata in figura 1.8.3,

Tab. 1.8.2

Sistema	Modello matematico	$G(s)$
	$v_i(t) = L \cdot C \cdot \frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + R \cdot C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t)$ $v_i(t) = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + \tau_2 \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t)$	$\frac{V_c(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot s^2 + \tau_2 \cdot s + 1}$ $\tau_1 = \frac{L}{R}$ $\tau_2 = R \cdot C$ $\tau_2 = \tau_c$
	$\frac{T_a(t)}{R_{T1}} = \frac{T_1(t)}{R_{T1}} + \frac{T_2(t)}{R_{T2}} + C_{T1} \cdot \frac{dT_1(t)}{dt} - \frac{T(t)}{R_{T2}}$ $0 = C_{T2} \cdot \frac{dT(t)}{dt} + \frac{T(t)}{R_{T2}} - \frac{T_1(t)}{R_{T2}}$	$\frac{T(s)}{T_a(s)} = \frac{1}{\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}) \cdot s + 1}$ $\tau_1 = R_{T1} \cdot C_{T1}$ $\tau_2 = R_{T2} \cdot C_{T2}$ $\tau_{12} = R_{T1} \cdot C_{T2}$ $\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12} = \tau_c$
	$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{Q_1(t)}{A_1} - \frac{1}{\tau_1} [h_1(t) - h_2(t)]$ $\frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{1}{R_{L1} \cdot C_{L2}} [h_1(t) - h_2(t)] - \frac{1}{\tau_2} h_2(t)$	$\frac{P_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{R_{L2}}{\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_{21}) \cdot s + 1}$ $\tau_1 = R_{L1} \cdot C_{L1}$ $\tau_2 = R_{L2} \cdot C_{L2}$ $\tau_{21} = R_{L2} \cdot C_{L1}$ $\tau_1 + \tau_2 + \tau_{21} = \tau_c$

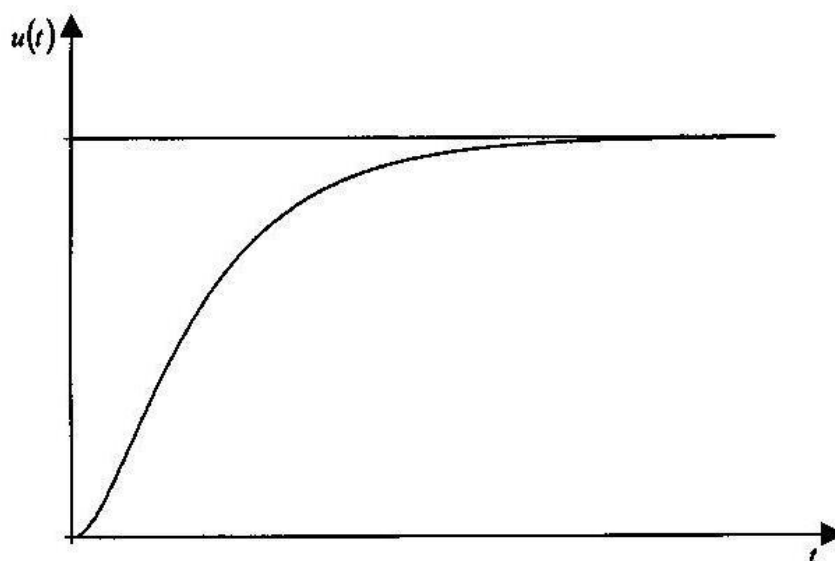


Fig. 1.8.3 - Risposta di un sistema del secondo ordine con  $\tau_C^2 = 4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2$ .

quando è  $\tau_C^2 > 4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2$  (i poli della funzione di trasferimento sono reali, distinti e negativi). Il sistema si porta a regime in un intervallo di tempo tanto minore quanto minori sono i valori delle costanti di tempo;

- la risposta è rappresentata dalla curva di figura 1.8.4 ed è costituita ancora da una funzione esponenziale crescente e asintotica quando è  $\tau_C^2 = 4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2$  (i poli della funzione di trasferimento sono reali e coincidenti). In tal caso il sistema si porta a regime in un intervallo di tempo minore rispetto al caso precedentemente esaminato;

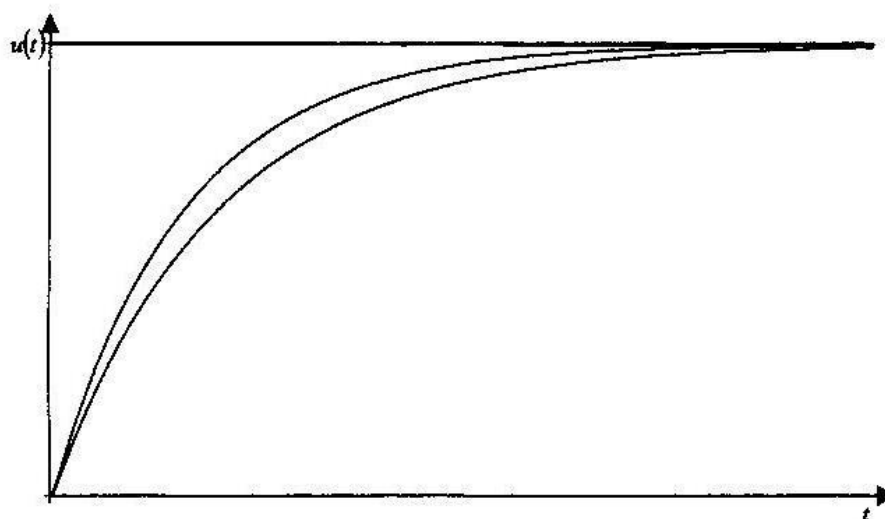


Fig. 1.8.4 - Risposta di un sistema del secondo ordine con  $\tau_C^2 = 4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2$ .

- la risposta è costituita da una funzione periodica smorzata simile a quella riportata in figura 1.8.5 quando è  $\tau_C^2 < 4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2$  (i poli della funzione di trasferimento sono complessi e coniugati a parte reale negativa). Il sistema si porta a regime dopo un intervallo di tempo che dipende dai valori delle costanti di tempo;

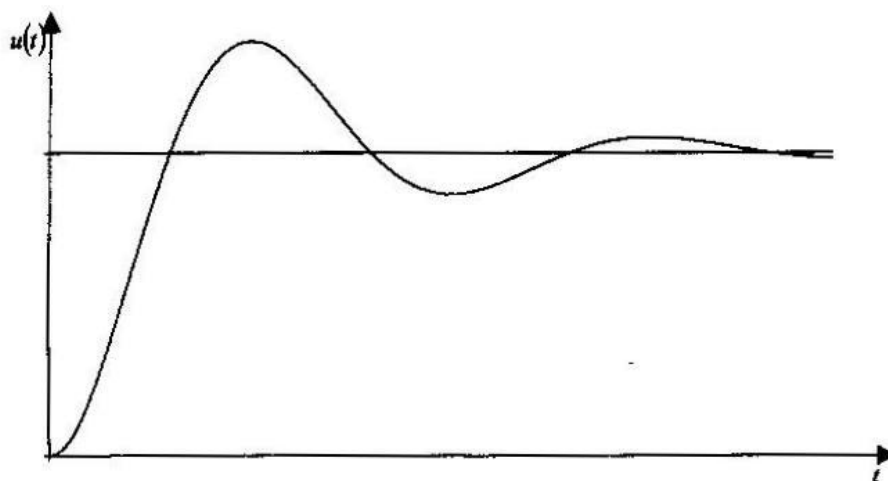


Fig. 1.8.5 - Risposta di un sistema del secondo ordine con  $\tau_0^2 < 4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2$ .

- la risposta è costituita da una oscillazione persistente di ampiezza costante e pulsazione  $\omega_n$  (fig. 1.8.6) quando il sistema non presenta elementi dissipativi (i poli della funzione di trasferimento sono complessi e coniugati con parte reale nulla).

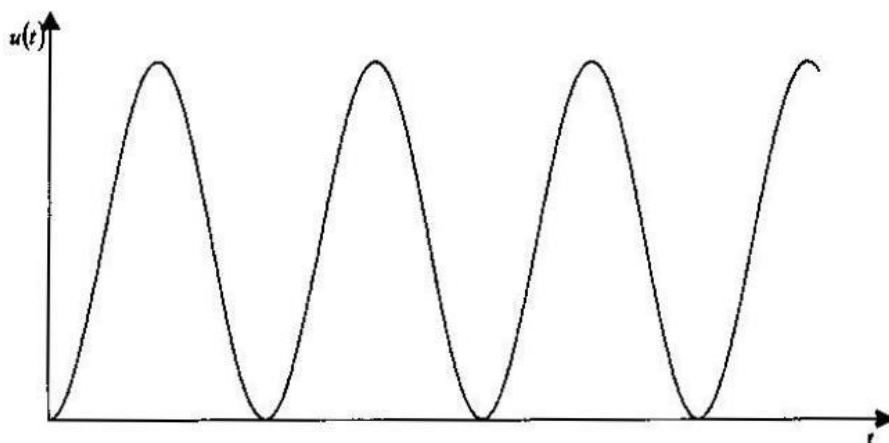


Fig. 1.8.6 - Risposta di un sistema del secondo ordine senza elementi dissipativi.