

## Sommario

|  |    |
|--|----|
| ANALISI ARMONICA .....   | 2  |
| Esempio 1 .....  | 3  |
| SEGNALI PARI E DISPARI .....   | 4  |
| Osservazione .....   | 4  |
| PROPRIETÀ GENERALI DELLE FUNZIONI PARI E DISPARI.....                | 5  |
| COMPONENTI PARI E DISPARI DI UN SEGNALE PERIODICO $S(T)$ .....       | 5  |
| Osservazioni .....   | 5  |
| Esempio 2 .....  | 6  |
| Esempio 3 .....  | 6  |
| Esempio 4 .....  | 7  |
| Esempio 5 .....  | 8  |
| Esempio 6 .....  | 9  |
| CALCOLO DEI COEFFICIENTI DELLO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER.....     | 9  |
| FORMULE TRIGONOMETRICHE FONDAMENTALI .....                           | 10 |
| VALORE MEDIO DI ESPRESSIONI TRIGONOMETRICHE.....                     | 10 |
| SECONDA FORMA TRIGONOMETRICA DELLO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER..... | 11 |
| COSTRUZIONE DI FRESNEL (VETTORI ROTANTI).....                        | 12 |
| Esempio 7 .....  | 13 |
| TEOREMA DI PARSEVAL.....   | 14 |
| Osservazione .....   | 14 |
| SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER IN FORMA ESPONENZIALE.....              | 15 |
| POTENZE ELETTRICHE IN REGIME PERIODICO NON SINUSOIDALE .....         | 15 |
| DISTORSIONE ARMONICA .....   | 16 |
| APPENDICE A .....  | 17 |
| Funzioni Periodiche .....  | 17 |
| Valore medio di una funzione in un intervallo .....                  | 17 |
| BIBLIOGRAFIA.....  | 17 |
| ESERCIZI .....   | 18 |

### *Lo sviluppo in serie di Fourier*

prof. Cleto Azzani  
IPSIA Moretto Brescia

11/10/2006

## Premessa

Lo sviluppo in serie di Fourier é un argomento di carattere matematico che trova larghi riscontri nelle applicazioni tecniche elettroniche: Analisi armonica dei segnali, Studio della distorsione, Sistemi di Trasmissione dell'Informazione, Sintesi e riconoscimento vocale, Sintesi musicale, Sistemi di Telecomunicazioni etc. Ci si limiterà a trattare l'argomento, con modeste pretese di rigorosit  matematica, cercando di mettere in evidenza i concetti basilari che trovano poi applicazione concreta nello studio dei circuiti elettrici ed elettronici in regime periodico ma non sinusoidale. Nella trattazione che segue verranno riportate alcune dimostrazioni scelte fra le maggiormente significative sull'argomento per dare una base di concretezza alle conclusioni finali; volutamente non si fa uso del calcolo integrale (che forma oggetto solo delle lezioni di fine anno delle classi 5^); si preferisce utilizzare in modo sistematico il concetto pi  tecnico di valore medio. Infine si parler  di segnale  $s(t)$  senza indicarne la natura fisica (tensione, corrente, pressione etc.). Nel testo vengono riportati sette esempi nei quali vengono presentati (senza dimostrazione) gli sviluppi in serie di sette forme d'onda scelte fra le pi  comuni che si incontrano nello studio dei circuiti elettronici. Tali forme d'onda formano oggetto delle esercitazioni presentate nell'apposita sezione.

## Analisi armonica

Un segnale  $s(t)$  periodico non sinusoidale che soddisfi le tre *condizioni di Dirichlet* (generalmente soddisfatte nel caso di segnali che rappresentino grandezze fisiche) :

- 1) -  $s(t)$  deve presentare nel periodo  $T$  un numero finito di punti di discontinuit ;
- 2) -  $s(t)$  deve avere nel periodo  $T$  un numero finito di massimi e minimi;
- 3) -  $s(t)$  deve essere assolutamente integrabile nel periodo  $T$  ossia deve esistere ed assumere valore finito l'espressione:

$$\int_T |s(t)| dt$$

pu  essere espresso mediante l'espressione seguente che prende il nome di sviluppo in serie di Fourier :

$$s(t) = A_0 + A_1 \cdot \cos \omega t + A_2 \cdot \cos 2\omega t + A_3 \cdot \cos 3\omega t + \dots + A_K \cdot \cos k\omega t + \dots \\ + B_1 \cdot \sin \omega t + B_2 \cdot \sin 2\omega t + B_3 \cdot \sin 3\omega t + \dots + B_K \cdot \sin k\omega t + \dots$$

che pu  essere scritta in forma compatta :

$$s(t) = A_0 + \sum_1^{\infty} [A_k \cdot \cos k\omega t + B_k \cdot \sin k\omega t] \quad 2.1$$

I coefficienti  $A_0$ ,  $A_k$ ,  $B_k$  hanno il seguente significato:

$A_0$  rappresenta il valore medio del segnale  $s(t)$  valutato entro il periodo  $T$  (componente continua).

$A_1$  valore massimo cosinusoide fondamentale,  $B_1$  valore massimo sinusoide fondamentale o prima armonica

$A_2$  valore massimo cosinusoide seconda armonica,  $B_2$  valore massimo sinusoide seconda armonica

$A_k$  valore massimo cosinusoide  $k$ -esima armonica,  $B_k$  valore massimo sinusoide  $k$ -esima armonica

$k$  viene denominato indice armonico.

Prende il nome di Spettro la coppia di diagrammi in cui si riporta in ordinate l'ampiezza della componente armonica  $A_k$  o  $B_k$  in funzione dell'indice armonico  $k$ . Ogni funzione sviluppabile in serie di Fourier sar  quindi caratterizzata in generale da due diagrammi spettrali uno relativo ai coefficienti  $A_k$  (con  $k$  variabile fra 0 e  $\infty$ ) e uno relativo ai coefficienti  $B_k$  (con  $k$  variabile fra 1 e  $\infty$ ).

Sarà opportuno osservare che la fondamentale o prima armonica ha lo stesso periodo e la stessa frequenza del segnale  $s(t)$  di partenza e che le armoniche sono *sempre e soltanto* frequenze multiple della fondamentale.

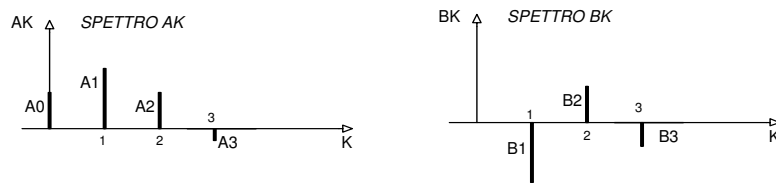


fig. 1 Esempio di rappresentazione spettrale

*Effettuare l'analisi armonica di un segnale  $s(t)$  significa partire dalla definizione di  $s(t)$  nel tempo e pervenire al valore dei coefficienti  $A_k$  e  $B_k$ ;*

*Effettuare la sintesi di un segnale  $s(t)$  significa partire dal valore dei coefficienti  $A_k$  e  $B_k$  per giungere alla rappresentazione di  $s(t)$  nel tempo.*

### Esempio 1

Il segnale a dente di sega (o rampa) di fig. 2 caratterizzato dal periodo  $T$ , frequenza  $f$  e valore massimo  $V_M$  ha il seguente sviluppo in serie :

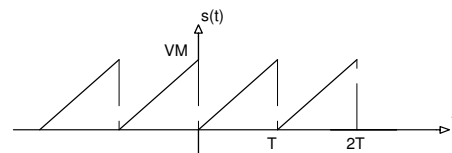


fig. 2 Segnale a dente di sega

$$s(t) = \frac{V_M}{2} - \frac{V_M}{\pi} \left[ \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{4} \sin 4\omega t \dots \right] \quad 2.2$$

il suo valore efficace inoltre é esprimibile dalla formula :

$$S_{RMS} = \frac{V_M}{\sqrt{3}} \quad 2.3$$

risulta quindi che :

$$A_0 = \frac{V_M}{2}; \quad A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_K = \dots = 0 \quad 2.4$$

$$B_1 = -\frac{V_M}{\pi}; \quad B_2 = -\frac{V_M}{2\pi}; \quad B_3 = -\frac{V_M}{3\pi}; \quad B_K = -\frac{V_M}{k\pi}; \quad 2.5$$

si osservi che i coefficienti dei termini cosinusoidali sono tutti nulli; i coefficienti dei termini sinusoidali risultano inversamente proporzionali all'ordine armonico  $k$ .

In fig. 3 a pagina seguente é presentata una sintesi al calcolatore effettuata in ambiente Lotus sulla forma d'onda di fig. 2. I numerini 1, 2, 3, 4 stanno ad indicare l'indice armonico.

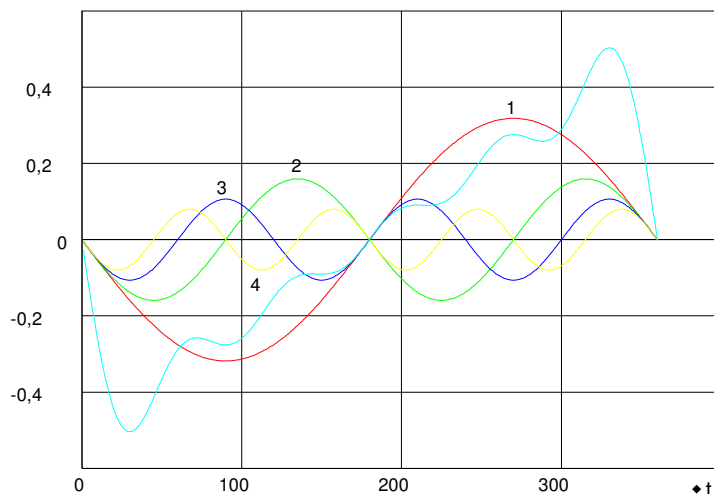


fig. 3 Sintesi di segnale a dente di sega con 4 armoniche senza componente continua

### Segnali pari e dispari

Un segnale  $s(t)$  è rappresentato da una funzione pari quando è soddisfatta la relazione:

$$s(t) = s(-t) \quad 2.6$$

in altri termini la funzione  $s(t)$  si presenta specularmente simmetrica rispetto all'asse  $y$ .

La funzione  $s(t) = A \cos \omega t$  è una funzione pari. È intuitivo convincersi che una funzione pari avrà uno sviluppo in serie di Fourier costituito da sole funzioni pari (ossia funzioni cosinusoidali) e perciò avrà sempre i coefficienti sinusoidali  $B_k$  nulli.

Un segnale  $s(t)$  è rappresentato da una funzione dispari quando è soddisfatta la relazione:

$$s(t) = -s(-t) \quad 2.7$$

La funzione  $s(t) = B \sin \omega t$  è una funzione dispari. È intuitivo convincersi che una funzione dispari avrà uno sviluppo in serie di Fourier costruito con sole funzioni dispari (ossia funzioni sinusoidali) e perciò avrà sempre il termine  $A_0$  e i coefficienti cosinusoidali  $A_k$  tutti nulli.

### Osservazione

A volte la funzione non manifesta in modo evidente la proprietà di essere funzione dispari (la proprietà è nascosta da un valore medio  $A_0 \neq 0$ ); il tal caso risulta dispari la funzione

$$y(t) = s(t) - A_0 \quad 2.8$$

è il caso appunto dell'esempio 1 dove nello sviluppo in serie mancano completamente i termini cosinusoidali ma è diverso da 0 il coefficiente  $A_0$ .

## *Proprietà generali delle funzioni pari e dispari*

Le seguenti proprietà sono di facile dimostrazione:

- 1) *Date due funzioni  $f_1$  ed  $f_2$  pari, risultano pari pure le funzioni somma  $f_1+f_2$ , la funzione differenza  $f_1-f_2$ , la funzione prodotto  $f_1 f_2$  e la funzione rapporto  $f_1/f_2$ ;*
- 2) *Date due funzioni  $f_1$  ed  $f_2$  dispari, risulta dispari la funzione somma  $f_1+f_2$  e la funzione differenza  $f_1-f_2$ ; risulta pari sia la funzione prodotto  $f_1 f_2$  che la funzione rapporto  $f_1/f_2$ .*
- 3) *Date due funzioni  $f_1$  pari ed  $f_2$  dispari, risulta dispari sia la funzione prodotto  $f_1 f_2$  che la funzione rapporto  $f_1/f_2$ .*

### *Componenti pari e dispari di un segnale periodico $s(t)$*

Un segnale  $s(t)$  periodico ma non sinusoidale può essere sempre scomposto nella somma fra una funzione pari  $s_p(t)$  e una funzione dispari  $s_d(t)$ .

$$s(t) = s_p(t) + s_d(t) \quad 2.9$$

Con riferimento alla espressione 2.1 è facile convincersi che risulta:

$$s_p(t) = A_0 + \sum_1^{\infty} A_K \cdot \cos k\omega t \quad 2.10$$

$$s_d(t) = \sum_1^{\infty} B_K \cdot \sin k\omega t \quad 2.11$$

Tenendo presenti le proprietà delle componenti pari e dispari di seguito riportate

$$s_p(t) = s_p(-t) \quad 2.12$$

$$s_d(t) = -s_d(-t) \quad 2.13$$

si ottiene:

$$s(t) = s_p(t) + s_d(t) \quad 2.14$$

$$s(-t) = s_p(-t) + s_d(-t) = s_p(t) - s_d(t) \quad 2.15$$

da cui per somma e per sottrazione delle due espressioni si ottiene:

$$s_p(t) = \frac{s(t) + s(-t)}{2} \quad 2.16$$

$$s_d(t) = \frac{s(t) - s(-t)}{2} \quad 2.17$$

### *Osservazioni*

- 1) - *Nella rappresentazione spettrale il grafico  $A_K$  rappresenta lo spettro della componente pari  $s_p(t)$ ; il grafico  $B_K$  rappresenta lo spettro della componente dispari  $s_d(t)$ .*
- 2) - *Un segnale  $s(t)$  pari ha componente dispari  $s_d(t)$  nulla e un segnale  $s(t)$  dispari ha componente  $s_p(t)$  nulla.*

## Esempio 2

Onda quadra pari di periodo T, frequenza f e valore massimo positivo  $V_M$  e negativo  $-V_M$

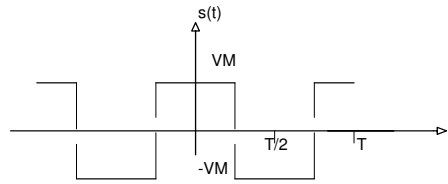


fig. 4 Esempio di onda quadra pari

ha il seguente sviluppo in serie :

$$s(t) = \frac{4V_M}{\pi} \left[ \cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \dots \right] \quad 2.18$$

il suo valore efficace inoltre é esprimibile dalla formula :

$$S_{RMS} = V_M \quad 2.19$$

il valore dei coefficienti risulta :

$$A_0 = 0; \quad A_1 = \frac{4V_M}{\pi}; \quad A_2 = 0; \quad A_3 = -\frac{4V_M}{3\pi}; \quad A_4 = 0; \quad 2.20$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = \dots = B_K = \dots = 0 \quad 2.21$$

si osservi che i coefficienti dei termini sinusoidali sono tutti nulli; i coefficienti dei termini cosinusoidali sono diversi da zero solo nel caso di armoniche dispari.

## Esempio 3

Onda quadra dispari di periodo T, frequenza f e valore massimo positivo  $V_M$  e negativo  $-V_M$

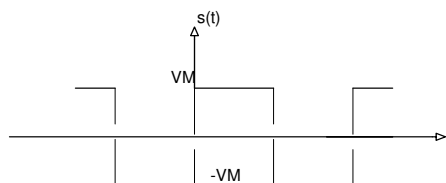


fig. 5 Esempio di onda quadra dispari

$$s(t) = \frac{4V_M}{\pi} \left[ \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right] \quad 2.22$$

il suo valore efficace inoltre é esprimibile dalla formula :

$$S_{RMS} = V_M \quad 2.23$$

il valore dei coefficienti risulta :

$$A_0 = 0; \quad B_1 = \frac{4V_M}{\pi}; \quad B_2 = 0; \quad B_3 = \frac{4V_M}{3\pi}; \quad B_4 = 0; \quad 2.24$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_K = \dots = 0 \quad 2.25$$

si osservi che i coefficienti dei termini cosinusoidali sono tutti nulli; i coefficienti dei termini sinusoidali sono diversi da zero solo nel caso di armoniche dispari.

In fig. 6 é presentata una sintesi al calcolatore effettuata in ambiente Lotus sulla forma d'onda di fig. 5. I numerini 1, 3, 5, 7 stanno ad indicare l'indice armonico.

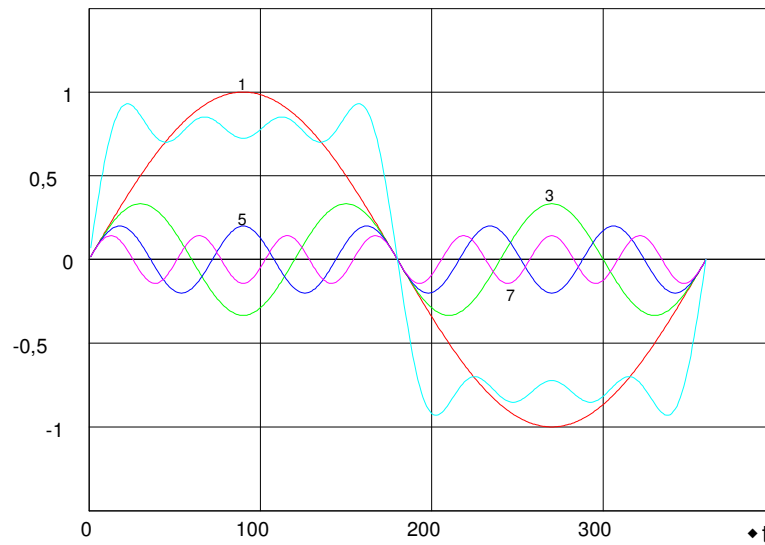


fig. 6 Esempio di sintesi di onda quadra dispari con 7 armoniche

### Esempio 4

Onda triangolare pari di periodo  $T$ , frequenza  $f$  e valore massimo positivo  $V_M$  e negativo  $-V_M$

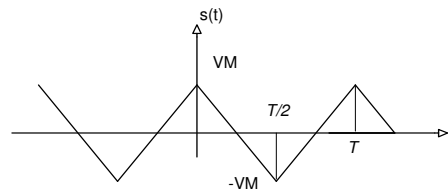


fig. 7 Esempio di onda triangolare pari

$$s(t) = \frac{8V_M}{\pi^2} \left[ \cos \omega t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega t + \frac{1}{7^2} \cos 7\omega t + \dots \right] \quad 2.26$$

il suo valore efficace inoltre é esprimibile dalla formula :

$$S_{RMS} = \frac{V_M}{\sqrt{3}} \quad 2.27$$

il valore dei coefficienti risulta :

$$A_0 = 0; \quad A_1 = \frac{8V_M}{\pi^2}; \quad A_2 = 0; \quad A_3 = \frac{8V_M}{(3\pi)^2}; \quad A_4 = 0; \quad 2.28$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = \dots = B_K = \dots = 0 \quad 2.29$$

In fig. 8 a pagina seguente é presentata una sintesi al calcolatore effettuata in ambiente Lotus sulla forma d'onda di fig. 7. I numerini 1, 3, 5, 7 stanno ad indicare l'indice armonico.

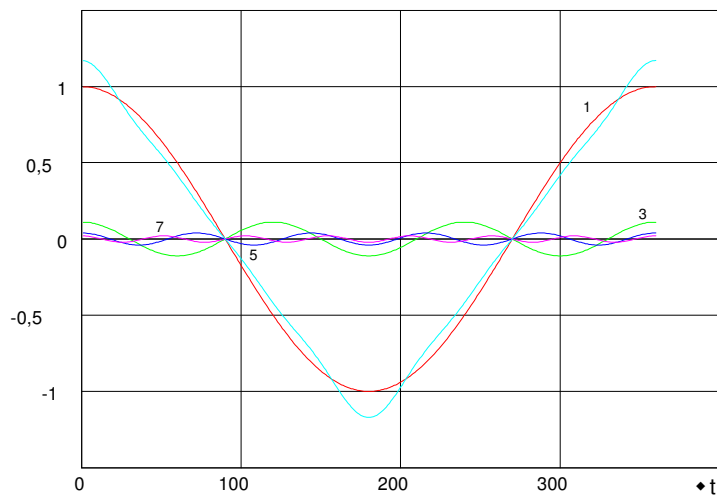


fig. 8 Esempio di sintesi di onda triangolare pari con 7 armoniche

### Esempio 5

Onda pulsante sinusoidale (uscita raddrizzatore ad una semionda) di periodo  $T$ , frequenza  $f$  e valore massimo positivo  $V_M$  (fig. 8)

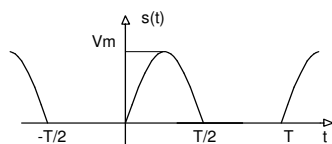


fig. 8 Esempio di onda pulsante sinusoidale

$$s(t) = \frac{V_M}{\pi} + \frac{V_M}{2} \sin \omega t - \frac{2V_M}{\pi} \left[ \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t + \dots \right] \quad 2.30$$

il suo valore efficace inoltre è esprimibile dalla formula :

$$S_{RMS} = \frac{V_M}{2} \quad 2.31$$

il valore dei coefficienti risulta :

$$A_0 = \frac{V_M}{\pi}; \quad A_1 = 0; \quad A_2 = -\frac{2V_M}{3\pi}; \quad A_3 = 0; \quad A_4 = -\frac{2V_M}{15\pi}; \quad 2.32$$

$$B_1 = \frac{V_M}{2}; \quad B_2 = B_3 = \dots = B_K = \dots = 0 \quad 2.33$$

### Esempio 6

Onda pulsante sinusoidale (uscita raddrizzatore a due semionde) di periodo T, frequenza f e valore massimo positivo  $V_M$  ( fig. 10)

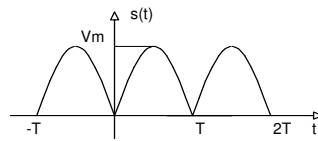


fig. 10 Esempio di onda pulsante sinusoidale

$$s(t) = \frac{2V_M}{\pi} - \frac{4V_M}{\pi} \left[ \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t + \dots \right] \quad 2.34$$

il suo valore efficace inoltre é esprimibile dalla formula :

$$S_{RMS} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} \quad 2.35$$

il valore dei coefficienti risulta :

$$A_0 = \frac{2V_M}{\pi}; \quad A_1 = 0; \quad A_2 = -\frac{4V_M}{3\pi}; \quad A_3 = 0; \quad A_4 = -\frac{4V_M}{15\pi}; \quad 2.36$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = \dots = B_K = \dots = 0 \quad 2.37$$

### Calcolo dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier

É possibile dimostrare che i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier si calcolano mediante le seguenti espressioni:

$$A_0 = [s(t)]_m \quad 2.38$$

ove con la notazione  $[s(t)]_m$  si intende "calcolo del valore medio" della espressione contenuta entro parentesi quadre  $[\ ]$ .

$$A_K = 2[s(t) \cos k\omega t]_m \quad 2.39$$

$$B_K = 2[s(t) \sin k\omega t]_m \quad 2.40$$

o più rigorosamente :

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt \quad 2.41$$

$$A_K = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos k\omega t \cdot dt \quad 2.42$$

$$B_K = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin k\omega t \cdot dt \quad 2.43$$

per il valore efficace vale la relazione

$$S_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt} \quad 2.44$$

### Formule trigonometriche fondamentali

Si danno per scontate le 2.45, 2.46, 2.47, 2.48 e si ricavano le formule successive.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha \quad 2.45$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha \quad 2.46$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \quad 2.47$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \quad 2.48$$

sottraendo la 2.47 alla 2.48 si ottiene:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad 2.49$$

sommando la 2.47 alla 2.48 si ottiene:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \quad 2.50$$

sommando la 2.45 alla 2.46 si ottiene:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \quad 2.51$$

ponendo nella 2.47  $\alpha = \beta$  si ha :

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad 2.52$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad 2.53$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \quad 2.54$$

ricavando dalla 2.53  $\sin^2 \alpha$  si ottiene:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad 2.55$$

ricavando dalla 2.54  $\cos^2 \alpha$  si ottiene:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad 2.56$$

### Valore medio di espressioni trigonometriche

È immediato verificare quanto segue:

$$[\sin k\omega t]_m = 0 \quad 2.57$$

ciò è una conseguenza del fatto che, in un periodo T l'area compresa fra la curva  $y = \sin x$ , l'asse x è uguale a zero (area positiva nel 1° quadrante è esattamente uguale all'area negativa nel 4° quadrante).

Analogamente risulta :

$$[\cos k\omega t]_m = 0 \quad \text{con } k \neq 0 \quad 2.58$$

$$[\cos^2 k\omega t]_m = \frac{1}{2} \quad 2.59$$

$$\left[ \sin^2 k\omega t \right]_m = \frac{1}{2} \quad 2.60$$

le 2.59 e 2.60 sono una conseguenza delle 2.55, 2.56 e 2.58.

Inoltre si ha, per le 2.49, 2.50, 2.51 :

$$\begin{aligned} \left[ \sin k\omega t \cdot \sin j\omega t \right]_m &= 0 & \text{con } k \neq j & \quad 2.61 \\ \left[ \cos k\omega t \cdot \cos j\omega t \right]_m &= 0 & \text{con } k \neq j & \quad 2.62 \\ \left[ \sin k\omega t \cdot \cos j\omega t \right]_m &= 0 & & \quad 2.63 \end{aligned}$$

La formula 2.38 può essere dimostrata prendendo la espressione 2.1 e calcolando a primo e secondo membro il valore medio.

La formula 2.39 può essere dimostrata moltiplicando la espressione 2.1 per  $\cos k\omega t$  e calcolando a primo e secondo membro il valore medio.

La formula 2.40 può essere dimostrata moltiplicando la espressione 2.1 per  $\sin k\omega t$  e calcolando a primo e secondo membro il valore medio.

Elaborando i prodotti ed eseguendo il valore medio sui vari termini si dovrà tenere conto dei risultati delle formule 2.58, 2.59, 2.60, 2.61, 2.62 e 2.63.

Esempio :

$$\left[ s(t) \right]_m = \left[ A_0 \right]_m + \sum_1^{\infty} \left[ A_K \cdot \cos k\omega t \right]_m + \sum_1^{\infty} \left[ B_K \cdot \sin k\omega t \right]_m = A_0 \quad 2.64$$

### *Seconda forma trigonometrica dello sviluppo in serie di Fourier*

L'espressione 2.1 dello sviluppo in serie di Fourier:

$$s(t) = A_0 + \sum_1^{\infty} \left[ A_K \cdot \cos k\omega t + B_K \cdot \sin k\omega t \right] \quad 2.65$$

può essere scritta anche nella forma :

$$s(t) = A_0 + \sum_1^{\infty} C_K \cdot \sin(k\omega t + \varphi_K) \quad 2.66$$

Infatti é possibile porre (costruzione di Fresnel sui vettori rotanti):

$$A_K \cos k\omega t + B_K \sin k\omega t = C_K \sin(k\omega t + \varphi_K) \quad 2.67$$

ove :

$$C_K^2 = A_K^2 + B_K^2 \quad 2.68$$

$$\varphi_K = \arctg\left(\frac{A_K}{B_K}\right) \quad \text{se } B_K \geq 0 \quad 2.69$$

$$\varphi_K = \arctg\left(\frac{A_K}{B_K}\right) + \pi \quad \text{se } B_K < 0$$

da cui discende immediatamente la 2.66.

$C_K$  valore massimo k-esima armonica ,  $\varphi_K$  fase della k-esima armonica

É quindi possibile, anche nel caso dello sviluppo in serie 2.66, definire una rappresentazione spettrale del segnale  $s(t)$  periodico ma non sinusoidale. Tale spettro si concretizza in due diagrammi: il diagramma delle ampiezze delle componenti armoniche  $C_k$  e quello delle fasi  $\phi_k$  in funzione dell'indice armonico  $k$ . Le espressioni 2.68 e 2.69 permettono di passare dalla rappresentazione spettrale  $A_k, B_k$  alla rappresentazione spettrale equivalente  $C_k, \phi_k$ .

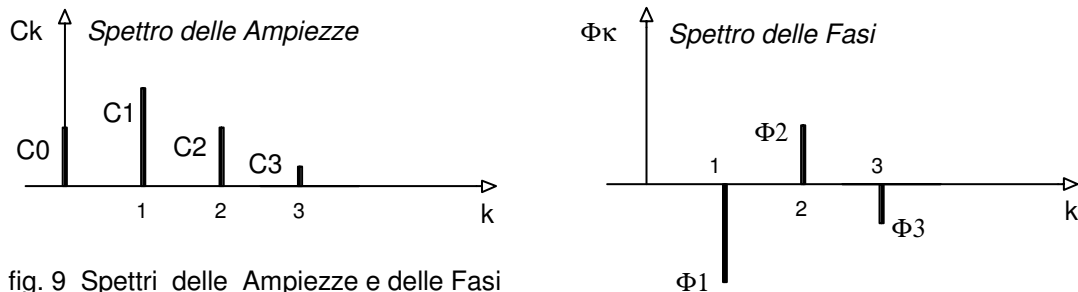


fig. 9 Spettri delle Ampiezze e delle Fasi

Si osservi come le ampiezze delle componenti armoniche di un segnale decrescono al crescere dell'indice armonico  $K$ . In altri termini risulta :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = 0$$

É essenziale che ciò avvenga per assicurare al segnale una energia finita (valore efficace finito). Si veda in proposito quanto riportato nel paragrafo relativo al teorema di Parseval.

### Costruzione di Fresnel (vettori rotanti)

Una grandezza alternata sinusoidale

$$v_1(t) = B \cdot \sin \omega t$$

2.70

può essere sempre pensata come la proiezione sull'asse  $y$  di un vettore di modulo  $B$ , applicato nell'origine, rotante con velocità angolare  $\omega$  in verso anti-orario e che all'istante  $t=0$  si trova ad essere sovrapposto all'asse  $x$ . Analogamente una grandezza alternata cosinusoidale del tipo

$$v_2(t) = A \cdot \cos \omega t$$

2.71

può essere sempre pensata come la proiezione sull'asse  $y$  di un vettore di modulo  $A$ , applicato nell'origine, rotante con velocità angolare  $\omega$  in verso anti-orario e che all'istante  $t=0$  si trova ad essere sovrapposto all'asse  $y$ . Poiché i due vettori di cui si é detto ruotano entrambi con velocità angolare  $\omega$  in verso anti-orario, ne consegue che la loro posizione reciproca non muta nel tempo per cui nel caso in cui si debba calcolare la grandezza  $v_1 + v_2$ , é legittimo considerarli fermi, calcolarne la risultante  $v_3$  così caratterizzata:

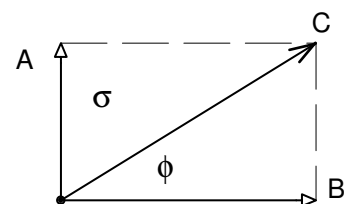


fig. 10 Costruzione di Fresnel  
(istante  $t=0$ )

$$C^2 = A^2 + B^2$$

2.72

$$\varphi = \arctg\left(\frac{A}{B}\right) \quad \text{se } B \geq 0$$

2.73

$$\varphi = \arctg\left(\frac{A}{B}\right) + \pi \quad \text{se } B < 0$$

e concludere con le seguenti formule:

$$v_3(t) = C \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

2.74

oppure

$$v_3(t) = C \cdot \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

2.75

$$v_3(t) = C \cdot \cos(\omega t - \sigma)$$

### Esempio 7

Onda quadra a valori solo positivi duty-cycle  $d$  compreso fra 0 e 1, di periodo  $T$ , frequenza  $f$  e valore massimo  $V_M$

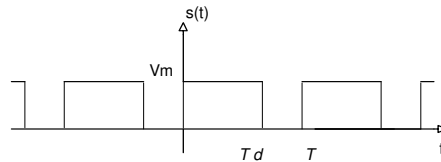


fig.11 Esempio di onda quadra con  $0 < d < 1$

il valore dei coefficienti risulta :

$$A_0 = V_M d \quad A_K = \frac{V_M}{k\pi} \sin 2k\pi d \quad B_K = \frac{V_M}{k\pi} (1 - \cos 2k\pi d) \quad 2.76$$

$$C_K = \frac{V_M \sqrt{2}}{k\pi} \sqrt{1 - \cos 2k\pi d} = \frac{2V_M}{k\pi} |\sin k\pi d| \quad 2.77$$

il valore efficace è dato dall'espressione :

$$S_{RMS} = V_M \sqrt{d} \quad 2.78$$

Se consideriamo un'onda quadra con duty-cycle pari al 50% ( $d=0,5$ ) si ottiene :

$$A_K = 0 \quad B_K = \frac{2V_M}{k\pi} \quad k \text{ dispari} \quad 2.79$$

Se consideriamo un'onda quadra con duty-cycle pari al 25% ( $d=0,25$ ) si ottengono i risultati riportati nella tabella seguente :

Tabella dei coefficienti in caso di duty-cycle pari al 25% ( $d=0,25$ )

| k | $A_K$         | $B_K$         | $C_K$                | $\Phi_K$    |
|---|---------------|---------------|----------------------|-------------|
| 1 | $V_M/\pi$     | $V_M/\pi$     | $\sqrt{2}V_M/\pi$    | $45^\circ$  |
| 2 | 0             | $V_M/\pi$     | $V_M/\pi$            | 0           |
| 3 | $-V_M/(3\pi)$ | $-V_M/(3\pi)$ | $\sqrt{2}V_M/(3\pi)$ | $-45^\circ$ |
| 4 | 0             | 0             | 0                    | --          |
| 5 | $V_M/(5\pi)$  | $V_M/(5\pi)$  | $\sqrt{2}V_M/(5\pi)$ | $45^\circ$  |

### Teorema di Parseval

Si consideri un generico segnale periodico non sinusoidale sviluppabile in serie di Fourier

$$s(t) = A_0 + \sum_1^{\infty} [A_K \cdot \cos k\omega t + B_K \cdot \sin k\omega t] \quad 2.80$$

$$s(t) = C_0 + \sum_1^{\infty} C_K \cdot \sin(k\omega t + \varphi_K) \quad 2.81$$

si definisce valore quadratico medio o valore efficace quel valore S che soddisfa all'equazione:

$$S^2 = [s^2(t)]_m = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt \quad 2.82$$

Elevando al quadrato le espressioni 2.80 e 2.81 e tenendo conto delle proprietà indicate nelle formule 2.58, 2.59, 2.60, 2.61, 2.62 e 2.63 si ottiene:

$$S^2 = A_0^2 + \sum_1^{\infty} \frac{A_K^2 + B_K^2}{2} \quad 2.83$$

$$S^2 = C_0^2 + \sum_1^{\infty} \frac{C_K^2}{2} \quad 2.84$$

ma essendo

$$E_K = \frac{C_K}{\sqrt{2}} \quad 2.85$$

ne consegue che :

$$S^2 = A_0^2 + \sum_1^{\infty} E_K^2 \quad 2.86$$

***Il quadrato del valore efficace di una forma d'onda periodica ma non sinusoidale é uguale alla somma dei quadrati dei valori efficaci di tutte le componenti armoniche (compresa la componente continua).***

### Osservazione

Nella espressione 2.84  $A_0^2$  rappresenta il contributo al valore efficace della forma d'onda fornito dalla componente continua mentre il termine :

$$\sum_1^{\infty} \frac{C_K^2}{2}$$

rappresenta il contributo delle componenti armoniche presenti nel segnale. Si osservi che la sommatoria comprende infiniti termini tutti positivi: in matematica tale espressione viene definita serie numerica. La somma di infiniti termini tutti positivi non é detto che dia un risultato finito; ciò avviene soltanto se la serie é convergente (proprietà che é possibile verificare effettuando i cosiddetti test di convergenza). Nel caso di segnali fisici a "energia finita", condizione sempre soddisfatta dalle grandezze fisiche, la convergenza della serie é assicurata dal teorema di Parseval infatti risulta :

$$\sum_1^{\infty} \frac{C_K^2}{2} = S^2 - A_0^2$$

### *Sviluppo in serie di Fourier in forma esponenziale*

Ricordando la formula di Eulero :

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi \quad 2.87$$

e che la funzione  $\cos\varphi$  é pari mentre  $\sin\varphi$  é dispari si ottiene :

$$e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\sin\varphi \quad 2.88$$

sommando la 2.87 con la 2.88 e ricavando  $\cos\varphi$  si ha:

$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \quad 2.89$$

sottraendo alla 2.87 la 2.88 e ricavando  $\sin\varphi$  si ha:

$$\sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} \quad 2.90$$

sostituendo nella 2.1 le espressioni appena ricavate 2.89, 2.90 si ha:

$$s(t) = A_0 + \sum_1^{\infty} \left[ A_K \frac{e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}}{2} + B_K \frac{e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}}{2j} \right] \quad 2.91$$

che riordinata diventa :

$$s(t) = A_0 + \sum_1^{\infty} \left( \frac{A_K}{2} + \frac{B_K}{2j} \right) \cdot e^{jk\omega t} + \sum_1^{\infty} \left( \frac{A_K}{2} - \frac{B_K}{2j} \right) \cdot e^{-jk\omega t} \quad 2.92$$

posto nella 2.92 :

$$\overline{S_K} = \frac{A_K}{2} + \frac{B_K}{2j} \quad \overline{S_{-K}} = \frac{A_K}{2} - \frac{B_K}{2j} \quad 2.93$$

si ottiene :

$$s(t) = A_0 + \sum_1^{\infty} \overline{S_K} e^{jk\omega t} + \sum_1^{\infty} \overline{S_{-K}} e^{-jk\omega t} \quad 2.94$$

posto inoltre nella 2.94 :

$$\overline{S_0} = A_0 \quad \text{risulta :} \quad s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \overline{S_K} e^{jk\omega t} \quad 2.95$$

I coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier esponenziale sono numeri complessi in generale che, in caso di segnale  $s(t)$  reale divengono complessi coniugati. Nel caso di segnali  $s(t)$  pari i coefficienti sono puramente reali, in caso di segnali  $s(t)$  dispari i coefficienti sono puramente immaginari. Essi possono essere desunti dalla conoscenza dei coefficienti dello sviluppo in serie trigonometrica (vedi formule 2.93) oppure ricavati direttamente dalla relazione matematica:

$$\overline{S_K} = \frac{1}{T} \int_T s(t) \cdot e^{-jk\omega t} dt \quad 2.96$$

### *Potenze elettriche in regime periodico non sinusoidale*

Si consideri un generico circuito elettrico alimentato da una tensione  $v(t)$  periodica non sinusoidale :

$$v(t) = V_0 + \sum_1^{\infty} V_K \cdot \sin(k\omega t + \varphi_K) \quad 2.97$$

e percorso da una intensità di corrente  $i(t)$  periodica non sinusoidale :

$$i(t) = I_0 + \sum_1^{\infty} I_K \cdot \sin(k\omega t + \sigma_K) \quad 2.98$$

È possibile, applicando il Principio di Sovrapposizione degli effetti, definire una potenza attiva complessiva P

$$P = V_0 I_0 + \sum_1^{\infty} \frac{V_K I_K}{2} \cos(\varphi_K - \sigma_K) \quad 2.99$$

una potenza reattiva complessiva Q data da :

$$Q = \sum_1^{\infty} \frac{V_K \cdot I_K}{2} \sin(\varphi_K - \sigma_K) \quad 2.100$$

una potenza apparente complessiva A data da :

$$A = V \cdot I \quad 2.101$$

ove V ed I sono ottenute applicando il teorema di Parseval alle 2.97 e 2.98 :

$$V^2 = V_0^2 + \sum_1^{\infty} \frac{V_K^2}{2} \quad 2.102$$

$$I^2 = I_0^2 + \sum_1^{\infty} \frac{I_K^2}{2} \quad 2.103$$

in regime periodico non sinusoidale non vale più l'equazione :

$$A^2 = P^2 + Q^2 \quad 2.104$$

che diventa :

$$A^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \quad 2.105$$

il termine D viene denominato potenza deformante ed è presente solo in quei circuiti ove esiste diversità fra forma d'onda della tensione v(t) e forma d'onda della intensità di corrente i(t).

### *Distorsione Armonica*

Si consideri un circuito amplificatore alimentato in ingresso da una segnale alternato sinusoidale di frequenza f (tensione o corrente); per la presenza di inevitabili non linearità, la forma d'onda di uscita u(t) pur risultando periodica, non sarà perfettamente sinusoidale e, per il teorema di Fourier, sarà tuttavia esprimibile nella forma:

$$u(t) = U_0 + \sum_1^{\infty} U_K \sin(k\omega t + \varphi_K) \quad 2.106$$

prescindendo dalla eventuale presenza della componente continua  $U_0$  del segnale d'uscita componente che è facilmente eliminabile attraverso un circuito passa alto o attraverso un accoppiamento a trasformatore, è evidente che:

$$u_1(t) = U_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) \quad 2.107$$

rappresenta la componente fondamentale del segnale d'uscita mentre il termine:

$$f(t) = u(t) - u_1(t) - U_0 = \sum_2^{\infty} U_K \cdot \sin(k\omega t + \varphi_K) \quad 2.108$$

rappresenta la componente distorcente ossia la componente responsabile della deformazione della forma d'onda dell'uscita. È possibile definire i coefficienti di distorsione armonica :

$$D_2 = \frac{U_2}{U_1} \quad D_3 = \frac{U_3}{U_1} \quad D_K = \frac{U_K}{U_1} \quad 2.109$$

D<sub>2</sub> Coefficiente di distorsione di 2<sup>a</sup> armonica

D<sub>3</sub> Coefficiente di distorsione di 3<sup>a</sup> armonica

D<sub>k</sub> Coefficiente di distorsione di k-esima armonica

Il coefficiente di distorsione  $D_k$  (armonica  $k$ ) è definito come il rapporto fra il valore massimo  $U_k$  della  $k$ -esima armonica ed il valore massimo  $U_1$  della 1^a armonica;  $D_k$  rappresenta anche il rapporto fra i valori efficaci della  $k$ -esima e della prima armonica.

Applicando il teorema di Parseval alla 2.108 risulta :

$$F_{RMS}^2 = \sum_2^{\infty} U_{Krms}^2 \quad 2.110$$

dividendo ambo i membri per  $U_{1rms}$  si ha :

$$D_T^2 = \frac{F_{RMS}^2}{U_{1RMS}^2} = \sum_2^{\infty} D_K^2 \quad 2.111$$

$D_T$  Coefficiente di distorsione totale.

Il coefficiente di distorsione totale è dato dalla radice quadrata della somma dei quadrati dei singoli coefficienti di distorsione.

## APPENDICE A

### Funzioni Periodiche

Un segnale  $s(t)$  si dice periodico se esiste un valore  $T$  per cui risulti soddisfatta la seguente relazione:

$$s(t) = s(t + kT) \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad A.1$$

sono esempi di funzione periodica le funzioni trigonometriche  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\tan(x)$ , l'esponenziale complesso, il logaritmo in campo complesso. Nel caso delle funzioni  $\sin(x)$  e  $\cos(x)$  il periodo vale  $2\pi$  radianti; nel caso della funzione  $\tan(x)$  il periodo vale  $\pi$  radianti.

### Valore medio di una funzione in un intervallo

Sia data una funzione  $s(t)$  periodica di periodo  $T$  come rappresentato in fig. 12. Si definisce valore medio della funzione  $s(t)$  nel periodo  $T$  l'altezza del rettangolo di base  $T$  che ha area pari a quella compresa fra la curva  $y=s(t)$ , l'asse delle ascisse e le rette verticali di equazione  $t=0$  e  $t=T$ . Risulta perciò :

$$S_m = \frac{\text{Area } s(t)}{T} = \frac{1}{T} \int_T s(t) dt \quad A.2$$

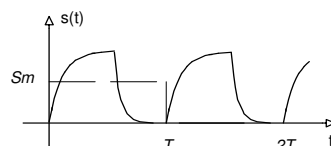


fig. 12 Rappresentazione grafica valore medio

In proposito sarà opportuno osservare che nel primo quadrante l'area assume valore positivo (in quanto risultano positive sia l'ascissa  $x$  che l'ordinata  $y$ ) nel quarto quadrante l'area assume valore negativo (l'ascissa è positiva ma l'ordinata è negativa). Un segnale sinusoidale o cosinusoidale presenta in un periodo valore medio nullo in quanto l'area complessiva in un periodo vale 0.

## BIBLIOGRAFIA

-G. Cariolaro      *Teoria dei Segnali*  
 -A. Papoulis      *The Fourier Integral*  
 -R. Spiegel      *Analisi di Fourier*  
 -Hwei P. Hsu      *Fourier Analysis*  
 -Frank Ayres Jr.      *Differential and Integral Calculus*

*CLEUP Padova 1970 Cap. 3*  
*Mc Graw Hill 1962 Cap. 3*  
*Etas Libri 1976 Cap. 2-3*  
*Unitech Division 1967*  
*Schaums cap. 48*

## ESERCIZI

E1

Date le forma d'onda riportate negli esempi n. 1 e n. 2 si ricavino le espressioni analitiche dei coefficienti dello sviluppo in serie trigonometrico (seconda forma).

E2

Date le forma d'onda riportate negli esempi n. 3 e n. 4 si ricavino le espressioni analitiche dei coefficienti dello sviluppo in serie trigonometrico (seconda forma).

E3

Scrivere il teorema di Parseval per le forma d'onda riportate negli esempi n. 1 e n. 2 .

E4

Scrivere il teorema di Parseval per le forma d'onda riportate negli esempi n. 3 e n. 4 .

E5

Un generatore di onde quadre (esempio 2) con  $V_M=10V$ ,  $f=5KHz$  è posto all'ingresso di un filtro Passa Basso ideale con  $f_T=20KHz$ . Disegnare lo spettro del segnale in uscita al filtro e calcolarne il valore efficace. Calcolare il valore efficace della componente eliminata dal filtro.

E6

Un raddrizzatore ad una semionda alimenta un carico resistivo con una forma d'onda che ha le seguenti caratteristiche:  $V_M=100V$ ,  $f=50Hz$  (esempio 5). Calcolare il valore efficace della componente distorcente tenendo conto che la grandezza desiderata in uscita è unicamente la componente continua.

E7

Individuare la componente pari del segnale riportato nell'esempio n. 5 e calcolarne il valore efficace.

E8

Da un'onda triangolare (esempio n. 4) vengono estratte tramite un filtro le prime tre componenti armoniche. Calcolare il valore efficace del segnale risultante.

E9

Per il segnale presentato nell'esempio n. 7 ricavare gli spettri  $A_k$  e  $B_k$  nell'ipotesi che si abbia:  $V_M=10V$ ,  $f=10KHz$ ,  $d=20\%$

E10

Un circuito RL con  $R=5\ \Omega$  e  $L=20mH$  connesse in serie è alimentato da un generatore  $v$  dato dall'espressione:  $v = 100 + 50 \sin \omega t + 25 \sin 3\omega t$  con  $\omega = 500\ rad/sec$ . ricavare l'espressione della corrente circolante; tracciare gli spettri di  $v$  e di  $i$ ; calcolare le potenze  $P$ ,  $Q$ ,  $A$ ,  $D$ .

E11

Determinare le espressioni analitiche dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier esponenziale delle forme d'onda degli esempi 1, 2, 3, 4, 5.

E12

Al segnale dell'esempio 4 viene aggiunta una componente continua pari a  $V_M$ ; scrivere la nuova espressione del suo sviluppo in serie e calcolare la nuova espressione del valore efficace.

E13

Un segnale triangolare (esempio n. 4) con  $V_M=10V$   $f=4KHz$  alimenta un filtro Passa Banda con  $f_{ti}=10KHz$  e  $f_{ts}=18KHz$ . Il guadagno del filtro è pari ad 1 nella banda di trasparenza. Calcolare il valore efficace del segnale in uscita al filtro.

E14

Un bipolo non lineare quadratico il cui funzionamento è completamente descritto dalla relazione:  
 $i(t)=k v(t)^2$  con  $k=0,2$  è alimentato da una tensione del tipo :  $v(t) = 100 \sin \omega t + 10 \sin 2 \omega t$   
con  $\omega=2\pi f$   $f=1KHz$  ricavare lo spettro della corrente  $i(t)$ .

E15

In un circuito ohmico induttivo se la tensione di alimentazione è data dall'espressione  $v=V_M \sin \omega t$  la corrente è espressa dalla formula  $i=I_M \sin(\omega t - \phi)$ . Calcolare l'espressione analitica del valore medio del prodotto  $v \cdot i$  (valori istantanei). Disegnare un semplice schema a blocchi di un wattmetro elettronico.

E16

In un circuito ohmico induttivo se la tensione di alimentazione è data dall'espressione  $v=V_M \sin \omega t$  la corrente è espressa dalla formula  $i=I_M \sin(\omega t - \phi)$ . Calcolare l'espressione analitica del valore medio del prodotto  $v \cdot i$  (valori istantanei). La tensione  $v_2$  è sfasata in ritardo rispetto a  $v$  di 90 gradi.

-----