

19

La funzione di trasferimento

19.1 Definizione

Nello studio dei sistemi fisici, e particolarmente di quelli elettrici, risulta molto efficace da un punto di vista concettuale, riferirsi al legame che un elemento del sistema stabilisce fra la grandezza di ingresso e quella di uscita.

Si definisce:

funzione di trasferimento, G

il rapporto fra la grandezza di uscita X_u e quella applicata all'ingresso X_i (fig. 19.1):

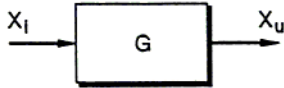


Fig. 19.1 Schema della funzione di trasferimento.

$$G = \frac{X_u}{X_i} \quad [19.1]$$

La definizione è del tutto generale e può essere applicata per grandezze omogenee o non omogenee. Nel primo caso G sarà un numero puro, altrimenti assumerà un'unità di misura dipendente da quelle del rapporto.

In modo più generale ancora, G può essere una grandezza complessa, comprendente nella sua sintesi simbolica il modulo e la fase di un vettore.

L'aspetto di G può essere molto vario, ed è comunque riconducibile al rapporto fra due polinomi di una variabile complessa: $s = \alpha + j\omega$.

Possiamo quindi porre, come già visto in precedenza:

$$G(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0} \quad [19.2]$$

Per quanto di nostro interesse, la funzione di trasferimento presenta il polinomio a numeratore di grado inferiore o uguale a quello del denominatore: $m \leq n$.

La funzione [19.2] può essere fattorizzata per entrambi i polinomi effettuando la soluzione separata delle due equazioni:

$$\begin{aligned} a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0 &= 0 \\ b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0 &= 0 \end{aligned}$$

Le radici dell'equazione a numeratore si chiamano gli *zeri* (z) della funzione; le radici dell'equazione a denominatore si chiamano i *poli* (p) della funzione.

La funzione di trasferimento fattorizzata assumerà la forma:

$$G(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad [19.3]$$

in cui K è un fattore moltiplicativo.

Si definisce: *guadagno statico* $G(0)$, il valore di $G(s)$ per $s = 0$. Dalla [19.2] risulta:

$$G(0) = a_0/b_0.$$

Le funzioni di trasferimento vengono classificate secondo l'ordine e il tipo:

l'*ordine* è dato dal numero dei poli;

il *tipo* è dato dal numero di poli all'origine.

Esaminiamo ora i collegamenti elettrici tipici, riferiti a quadripoli, per ricavarne le funzioni di trasferimento.

19.2 Funzioni di trasferimento fondamentali

Sottoponiamo ad analisi i quadripoli a due e tre componenti e, per ciascuno di essi forniamo:

- il circuito elettrico;
- la funzione di trasferimento;
- il diagramma delle radici, cioè la posizione di poli (x) e zeri (o);
- il guadagno statico $G(0)$.

I quadripoli esaminati sono tutti del tipo zero.

Per essi vengono correlate le tensioni di ingresso V_i e di uscita V_u , per cui la funzione di trasferimento $G(s)$ sarà adimensionale.

Quadripolo RL, $V_u = V_L$ (fig. 19.2)

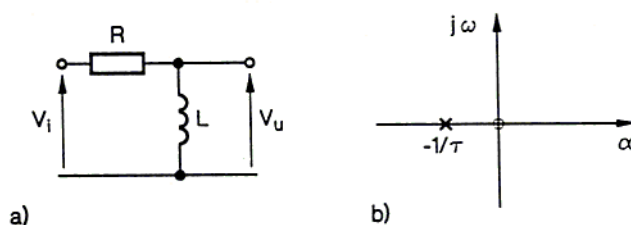


Fig. 19.2 a) Quadripolo RL; b) diagramma delle radici.

$$G(s) = \frac{sL}{R + sL} = \frac{s\tau}{1 + s\tau} \quad [19.4]$$

$$\begin{cases} \tau = L/R \\ \text{zeri: } s = 0 \\ \text{poli: } s = -1/\tau \\ G(0) = 0 \\ 1^\circ \text{ ordine} \end{cases}$$

Quadripolo LR , $V_u = V_R$ (fig. 19.3)

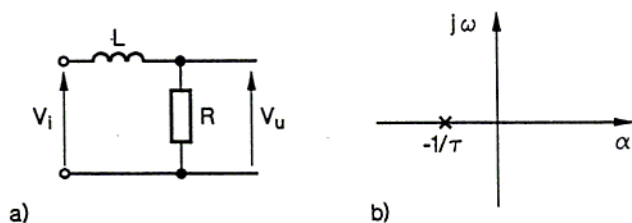


Fig. 19.3 a) Quadripolo LR ; b) diagramma delle radici.

$$G(s) = \frac{R}{R + sL} = \frac{1}{1 + s\tau} \quad [19.5]$$

$$\begin{cases} \tau = L/R \\ \text{zeri: nessuno} \\ \text{poli: } s = -1/\tau \\ G(0) = 1 \\ 1^\circ \text{ ordine} \end{cases}$$

Quadripolo RC , $V_u = V_C$ (fig. 19.4)

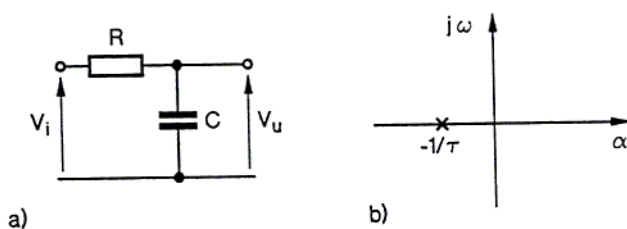


Fig. 19.4 a) Quadripolo RC ; b) diagramma delle radici.

$$G(s) = \frac{1/sC}{R + 1/sC} = \frac{1}{1 + s\tau} \quad [19.6]$$

$$\begin{cases} \tau = RC \\ \text{zeri: nessuno} \\ \text{poli: } s = -1/\tau \\ G(0) = 0 \\ 1^\circ \text{ ordine} \end{cases}$$

Quadripolo CR, $V_u = V_R$ (fig. 19.5)

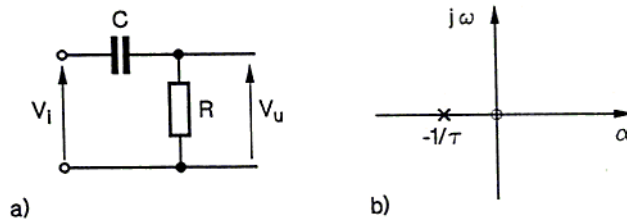


Fig. 19.5 a) Quadripolo CR; b) diagramma delle radici.

$$G(s) = \frac{R}{R + 1/sC} = \frac{s\tau}{1 + s\tau} \quad [19.7]$$

$$\begin{cases} \tau = RC \\ \text{zeri: } s = 0 \\ \text{poli: } s = -1/\tau \\ G(0) = 0 \\ 1^\circ \text{ ordine} \end{cases}$$

Quadripolo RLC, $V_u = V_R$ (fig. 19.6)

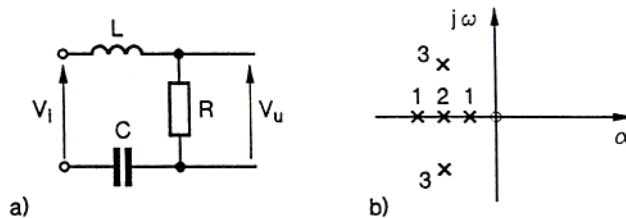


Fig. 19.6 a) Quadripolo RLC, $V_u = V_R$; b) diagramma delle radici.

$$G(s) = \frac{R}{R + sL + 1/sC} = \frac{sR/L}{s^2 + sR/L + 1/LC} \quad [19.8]$$

$$\begin{cases} \text{zeri: } s = 0 \\ \text{poli: } s = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ G(0) = 0 \\ 2^\circ \text{ ordine} \end{cases}$$

Il diagramma delle radici (fig. 19.6b) comporta tre casi possibili:

- 1) $R/2L < 1/\sqrt{LC}$, 2 poli reali distinti;
- 2) $R/2L = 1/\sqrt{LC}$, 2 poli reali coincidenti;
- 3) $R/2L > 1/\sqrt{LC}$, 2 poli complessi coniugati

Quadripolo RLC , $V_u = V_L$ (fig. 19.7)

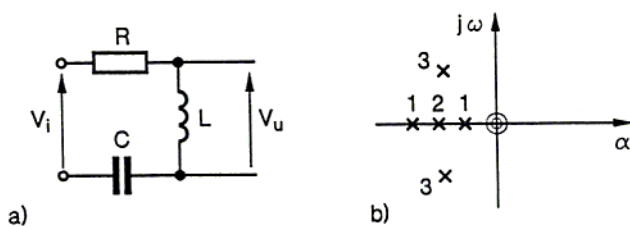


Fig. 19.7 a) Quadripolo RLC , $V_u = V_L$; b) diagramma delle radici.

$$G(s) = \frac{sL}{R + sL + 1/sC} = \frac{s}{s^2 + sR/L + 1/LC} \quad [19.9]$$

$$\begin{cases} \text{zeri: } s = 0 \text{ doppio} \\ \text{poli: } s = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ G(0) = 0 \\ 2^\circ \text{ ordine} \end{cases}$$

Il diagramma delle radici è come il precedente, ma presenta uno zero doppio all'origine.

Quadripolo RLC , $V_u = V_C$ (fig. 19.8)

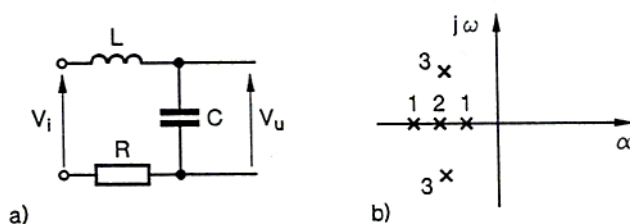


Fig. 19.8 a) Quadripolo RLC , $V_u = V_C$; b) diagramma delle radici.

$$G(s) = \frac{1/sC}{R + sL + 1/sC} = \frac{1/LC}{s^2 + sR/L + 1/LC} \quad [19.10]$$

$$\begin{cases} \text{zeri: nessuno} \\ \text{poli: } s = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ G(s) = 1 \\ 2^\circ \text{ ordine} \end{cases}$$

Questa funzione non presenta zeri mentre i poli sono come quelli di fig. 19.6b.

Osservazione

L'esame dei quadripoli ha messo in luce un fatto fondamentale, e cioè che nei sistemi

fisici stabili le radici del polinomio sono reali negative oppure complesse coniugate con parte reale negativa. Nel primo caso esse sono il reciproco della costante di tempo: $s = -1/\tau$.

I metodi grafici

Lo studio delle funzioni di trasferimento può essere condotto molto efficacemente per via grafica, mediante due metodi di tracciamento equivalenti, indicati come:

- diagramma di *Nyquist*;
- diagrammi di *Bode*.

Entrambi seguono l'andamento della funzione al variare della pulsazione $s = j\omega$.

Il metodo di Nyquist produce il diagramma polare dell'andamento globale del vettore $G(s)$ sul piano di Gauss. Normalmente il vettore viene individuato attraverso le sue componenti cartesiane: reale (Re) e immaginaria (Im).

Il metodo di Bode produce due diagrammi cartesiani nei quali vengono tracciati, separatamente, gli andamenti del modulo e della fase di $G(s)$ in funzione di ω .

19.3 Diagrammi di Nyquist

Abbiamo detto che i diagrammi di Nyquist sono di tipo polare, perciò occorre, per ogni valore di ω , stabilire per $G(s)$ la componente reale Re e la componente immaginaria Im . Noti questi parametri, si traccia il vettore sul piano di Gauss. Esaminiamo ora le funzioni che ci interessano.

Funzioni del 1° ordine

Dallo studio effettuato nel paragrafo precedente sono risultate due funzioni distinte, che esaminiamo separatamente.

1) Funzioni senza zeri

Corrispondono ai quadripoli LR e RC (fig. 19.9), con funzione di trasferimento:

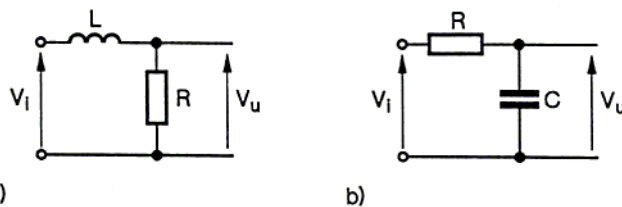


Fig. 19.9 Quadripoli del 1° ordine senza zeri: a) LR ; b) RC .

$$G(s) = \frac{1}{1 + s\tau} \quad [19.11]$$

Ponendo $s = j\omega$ e razionalizzando si ottiene:

$$G(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \quad [19.12]$$

da cui:

$$Re = \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2} \quad [19.13]$$

$$Im = -\frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \quad [19.14]$$

Il diagramma si estende a semicerchio nel 4° quadrante (fig. 19.10) e presenta i seguenti punti fondamentali:

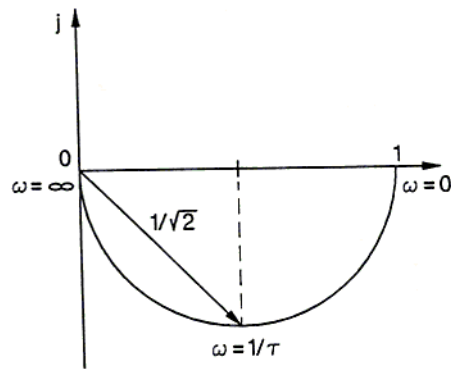


Fig. 19.10 Diagramma di Nyquist dei quadripoli di fig. 19.9.

| | | | |
|--|---------------------|---------------------|---------------------------|
| per $\omega = 0$, | $Re = 1,$ | $Im = 0,$ | $G(\omega) = 1$ |
| per $\omega = 1/\tau, \omega\tau = 1,$ | $Re = 1/2,$ | $Im = -1/2,$ | $G(\omega) = 1/\sqrt{2}$ |
| per $\omega \rightarrow \infty,$ | $Re \rightarrow 0,$ | $Im \rightarrow 0,$ | $G(\omega) \rightarrow 0$ |

2) Funzioni con uno zero all'origine

Corrispondono ai quadripoli RL e CR (fig. 19.11), con funzione di trasferimento:

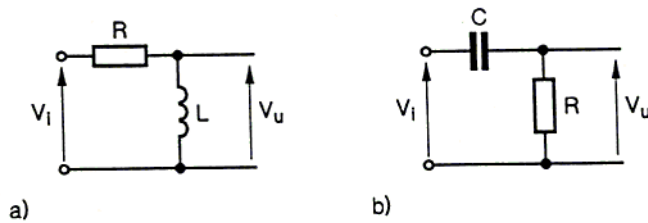


Fig. 19.11 Quadripoli del 1° ordine con uno zero all'origine: a), RL; b) CR.

$$G(s) = \frac{s\tau}{1 + s\tau} \quad [19.15]$$

Ponendo $s = j\omega$ e razionalizzando si ottiene:

$$G(\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{(\omega\tau)^2 + j\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \quad [19.16]$$

da cui:

$$Re = \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} \quad [19.17]$$

$$Im = \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \quad [19.18]$$

Il diagramma si estende a semicerchio nel 1° quadrante (fig. 19.12) e presenta i seguenti punti fondamentali:

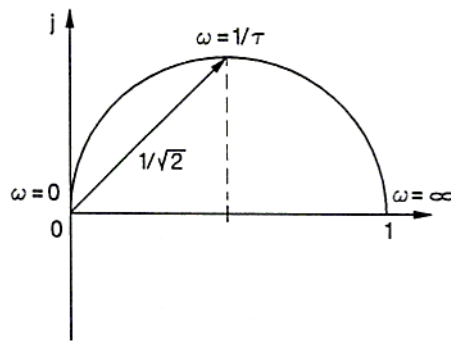


Fig. 19.12 Diagramma di Nyquist dei quadripoli di fig. 19.11.

| | | | |
|--|---------------------|---------------------|---------------------------|
| per $\omega = 0$, | $Re = 1,$ | $Im = 0,$ | $G(\omega) = 0$ |
| per $\omega = 1/\tau, \omega\tau = 1,$ | $Re = 1/2,$ | $Im = 1/2,$ | $G(\omega) = 1/\sqrt{2}$ |
| per $\omega \rightarrow \infty,$ | $Re \rightarrow 1,$ | $Im \rightarrow 0,$ | $G(\omega) \rightarrow 1$ |

Funzioni del 2° ordine

Nel paragrafo precedente abbiamo esaminato tre funzioni del secondo ordine, tutte riferite allo stesso circuito. Data la loro similitudine, in questa sede faremo riferimento ad uno di essi, ma ciò che diremo è caratterizzante anche per gli altri e facilmente estensibile.

Quadripolo RLC serie, $V_u = V_C$ (fig. 19.13)

La funzione di trasferimento è senza zeri e risulta:

$$G(s) = \frac{1/LC}{s^2 + sR/L + 1/LC} \quad [19.19]$$

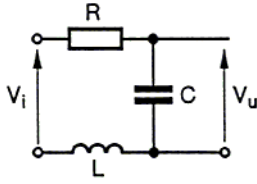


Fig. 19.13 Quadripolo del 2° ordine senza zeri.

ponendo $\tau_1 = L/R$, $\tau_2 = RC$, è $\tau_1 \tau_2 = LC$ e la [19.19] si può anche esprimere con:

$$G(s) = \frac{1/\tau_1 \tau_2}{s^2 + s/\tau_1 + 1/\tau_1 \tau_2} \quad [19.20]$$

Poiché $\omega_0^2 = 1/LC$, assumendo nella [19.19] come nuova variabile la pulsazione normalizzata s/ω_0 , si ottiene:

$$G(s) = \frac{1}{(s/\omega_0)^2 + (R/2L)(s/\omega_0) + 1} \quad [19.21]$$

Le soluzioni dell'equazione a denominatore sono:

$$\frac{s}{\omega_0} = -\frac{R}{2\omega_0 L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2\omega_0 L}\right)^2 - 1} \quad [19.22]$$

Il termine $R/2\omega_0 L = \zeta$, che contiene la resistenza, determina il carattere dissipativo della funzione, cioè il suo smorzamento. Sostituendo il simbolo indicato, la [19.22] diviene:

$$\frac{s}{\omega_0} = -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad [19.23]$$

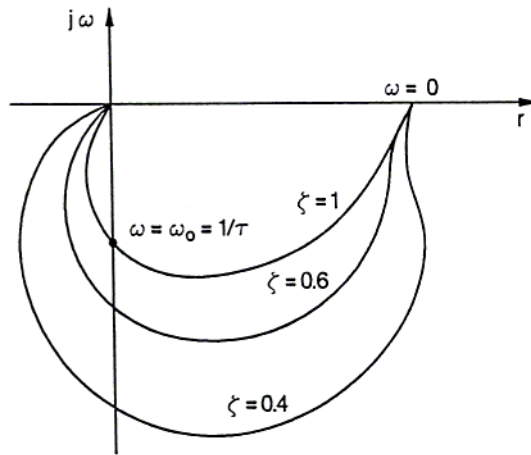


Fig. 19.14 Diagrammi di Nyquist del quadripolo di fig. 19.13.

Possono verificarsi, come noto, tre casi:

- 1) $\zeta > 1$, funzione *aperiodica smorzata*;
- 2) $\zeta = 1$, funzione *aperiodica critica*;
- 3) $\zeta < 1$, funzione *oscillatoria smorzata*.

I diagrammi di Nyquist sono tracciati in fig. 19.14. In particolare, per smorzamento critico si ha:

$$\begin{aligned} \text{per } \omega = 0, \quad & G(\omega) = 1, \quad Re = 1, \quad Im = 0; \\ \omega = \omega_0 = 1/\tau, \quad & G(\omega) = \tau, \quad Re = 0, \quad Im = -1/2 \\ \omega \rightarrow \infty, \quad & G(\omega) \rightarrow 0, \quad Re \rightarrow 0, \quad Im \rightarrow 0. \end{aligned}$$

19.4 Diagrammi di Bode

Per ogni funzione di trasferimento da esaminare, i diagrammi di Bode sono due e precisamente:

- un *diagramma del modulo* $G(\omega)$,
- un *diagramma della fase* $\varphi(\omega)$.

Entrambi sono riferiti ad una scala delle ascisse logaritmica a base 10, la quale suddivide l'asse in tante decadi identiche, che si succedono per potenze di 10.

Le ordinate del diagramma dei moduli sono computate in decibel (dB), che rappresenta un valore logaritmico in base 10 e precisamente:

$$G_{dB} = 20 \log |G| \quad [19.24]$$

È vantaggioso far corrispondere al segmento di ordinata pari a 20 dB una lunghezza pari a quella di una decade.

Funzione a radici reali

Per l'importanza che assume nei casi pratici esaminiamo una funzione di trasferimento formata unicamente da radici reali. Abbiamo già detto che esse sono negative e pari al reciproco della costante di tempo per cui, ponendo $z = -1/\tau_z$ e $p = -1/\tau_p$, la funzione diviene:

$$\begin{aligned} G(s) &= K \frac{(s + 1/\tau_{z_1})(s + 1/\tau_{z_2}) \dots (s + 1/\tau_{z_m})}{(s + 1/\tau_{p_1})(s + 1/\tau_{p_2}) \dots (s + 1/\tau_{p_n})} \\ G(s) &= K \frac{\tau_{p_1} \cdot \tau_{p_2} \dots \tau_{p_n} (1 + s\tau_{z_1})(1 + s\tau_{z_2}) \dots (1 + s\tau_{z_m})}{\tau_{z_1} \cdot \tau_{z_2} \dots \tau_{z_m} (1 + s\tau_{p_1})(1 + s\tau_{p_2}) \dots (1 + s\tau_{p_n})} \end{aligned} \quad [19.25]$$

In questo caso il coefficiente moltiplicativo coincide col guadagno statico:

$$G(0) = K \frac{\tau_{p_1} \cdot \tau_{p_2} \dots \tau_{p_n}}{\tau_{z_1} \cdot \tau_{z_2} \dots \tau_{z_m}}$$

Esaminiamo ora separatamente i fattori binomiali della funzione: di zero a numeratore; di polo a denominatore.

Funzione di zero

Posto $s = j\omega$, il binomio è:

$$G(\omega) = 1 + j\omega\tau \quad [19.26]$$

Esso assume il nome di *derivatore*.

Diagramma del modulo

Il modulo della [19.26] è:

$$G(\omega) = \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \quad [19.27]$$

Il diagramma viene considerato per due tratti distinti e precisamente:

- per $\omega\tau < 1$, cioè $\omega < 1/\tau$, si trascura questo termine e risulta: $G(\omega) = 20 \log 1 = 0$ dB; si tratta di un segmento orizzontale condotto per 0 dB e limitato fra $\omega = 0$ e $\omega = 1/\tau$;
- per $\omega\tau > 1$, cioè $\omega > 1/\tau$, si trascura l'unità e risulta: $G(\omega) = 20 \log \omega\tau$.

Poiché $20 \log 10 = 20$ dB;
 $20 \log 10^2 = 40$ dB;
 $20 \log 10^3 = 60$ dB;

possiamo affermare che, con l'aumentare della frequenza, la funzione presenta un *guadagno di 20 dB/decade*. Il diagramma di Bode relativo al modulo assume l'aspetto di una spezzata (fig. 19.15) raccordata a spigolo nel punto $\omega = 1/\tau$ (*Frequency Corner*).

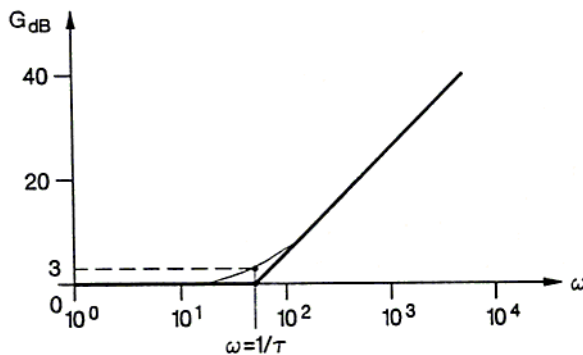


Fig. 19.15 Diagramma di Bode del modulo di una funzione di zero (derivatore).

Nei filtri questa corrisponde alla frequenza di taglio. Nella realtà, per $\omega = 1/\tau$, cioè $\omega\tau = 1$, risulta:

$$G(\omega) = 20 \log \sqrt{2} = 3 \text{ dB}$$

quindi si ha un'amplificazione di 3 dB.

Diagramma della fase

La fase della [19.26] è:

$$\varphi = \arctan \omega\tau \quad [19.28]$$

I valori tipici sono:

- per $\omega\tau \ll 1$, cioè $\omega \ll 1/\tau$, si assume $\omega\tau = 0$ e quindi $\varphi = 0$;
- per $\omega\tau = 1$, cioè $\omega = 1/\tau$, risulta $\varphi = 45^\circ$;
- per $\omega\tau \gg 1$, cioè $\omega \gg 1/\tau$, si assume $\omega\tau = \infty$ e quindi $\varphi = 90^\circ$.

Il diagramma di Bode (fig. 19.16) viene eseguito a spezzata secondo due tratti orizzontali:

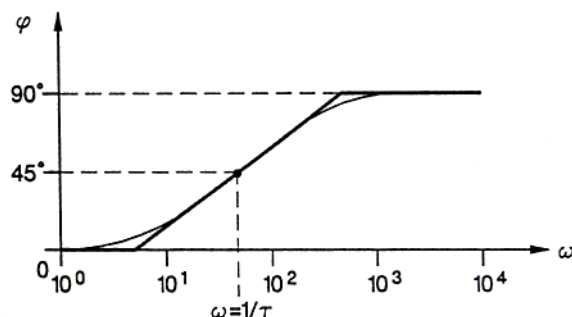


Fig. 19.16 Diagramma di Bode della fase di una funzione di zero (derivatore).

- il primo, per $\varphi = 0$, limitato ad una decade prima del taglio;
- il secondo, per $\varphi = 90^\circ$, che inizia una decade dopo il taglio.

I due estremi sono poi uniti da un segmento che passa per il punto: $\omega = 1/\tau$, $\varphi = 45^\circ$

Zero all'origine

Se la funzione binomiale si riduce a $G(\omega) = j\omega K$, si ha uno zero all'origine.

Il modulo è: $G(\omega) = \omega K$ e il diagramma è una retta a guadagno 20 dB/decade, che taglia l'asse delle pulsazioni a 0 dB nel punto $\omega = 1/K$ (fig. 19.17a).

Come caso particolare, per $K = 1$, la retta a 20 dB/decade taglia l'asse delle ascisse nel punto $\omega = 1$.

La fase è costantemente $\varphi = 90^\circ$ (fig. 19.17b).

Questa funzione corrisponde al *derivatore puro*.

Funzione di polo

Posto $s = j\omega$, la funzione di polo è:

$$G(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad [19.29]$$

Esso assume il nome di *integratore*.

Diagramma del modulo

Il modulo della [19.29] è:

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad [19.30]$$

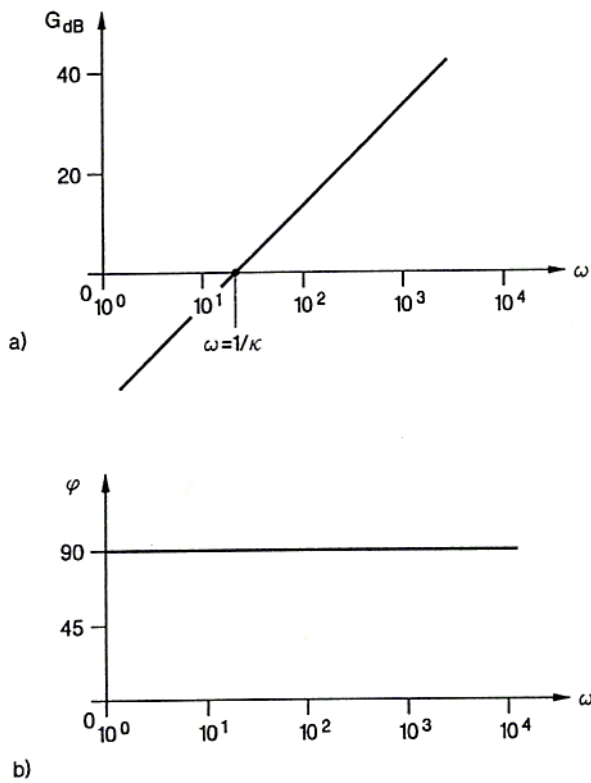


Fig. 19.17 Diagrammi di Bode di un derivatore puro: a) modulo; b) fase.

Il diagramma viene considerato per due tratti distinti e precisamente:

- per $\omega\tau < 1$, cioè $\omega < 1/\tau$, si trascura questo termine e risulta: $G(\omega) = 20 \log 1 = 0$ dB; si tratta di un segmento orizzontale, condotto per 0 dB e limitato fra $\omega = 0$ e $\omega = 1/\tau$;
- per $\omega\tau > 1$, cioè $\omega > 1/\tau$, si trascura l'unità e risulta: $G(\omega) = -20 \log \omega\tau$; in questo caso, con l'aumentare della frequenza, la funzione presenta un guadagno di -20 dB/decade, cioè un'attenuazione di 20 dB/decade.

Il diagramma di Bode relativo al modulo presenta l'aspetto di una spezzata (fig. 19.18), raccordata a spigolo nel punto $\omega = 1/\tau$ (*Frequency Corner*).

Nei filtri questa corrisponde alla frequenza di taglio. In realtà, per $\omega = 1/\tau$, cioè $\omega\tau = 1$, risulta: $G(\omega) = -20 \log \sqrt{2} = -3$ dB, quindi si ha un'attenuazione di 3 dB.

Diagramma della fase

Per trovare la fase razionalizziamo la [19.29]; si ottiene:

$$G(\omega) = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}$$

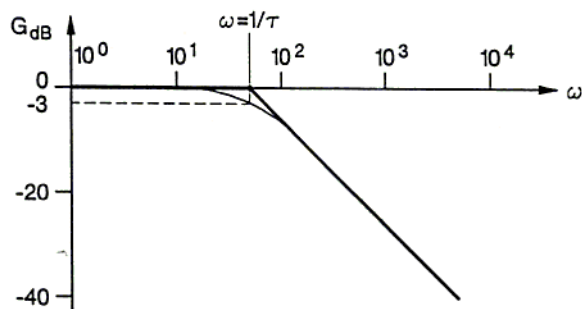


Fig. 19.18 Diagramma di Bode del modulo di una funzione di polo (integratore).

per cui la fase risulta:

$$\varphi = -\arctan \omega\tau \quad [19.31]$$

I valori tipici sono:

- per $\omega\tau \ll 1$, cioè $\omega \ll 1/\tau$, si assume $\omega\tau = 0$ e quindi $\varphi = 0$;
- per $\omega\tau = 1$, cioè $\omega = 1/\tau$, risulta $\varphi = -45^\circ$;
- per $\omega\tau \gg 1$, cioè $\omega \gg 1/\tau$, si assume $\omega\tau = \infty$ e quindi $\varphi = -90^\circ$.

Il diagramma di Bode (fig. 19.19) viene eseguito a spezzata secondo due tratti orizzontali:

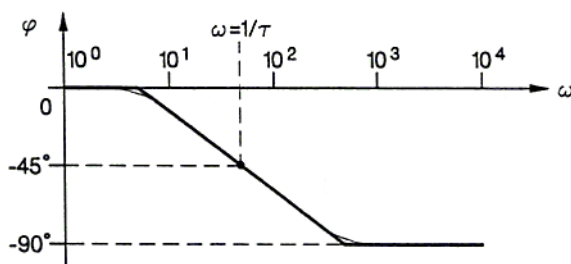


Fig. 19.19 Diagramma di Bode della fase di una funzione di polo (integratore).

- il primo, per $\varphi = 0$, limitato ad una decade prima del taglio;
- il secondo, per $\varphi = -90^\circ$, che inizia una decade dopo il taglio.

I due estremi sono poi uniti da un segmento che passa per il punto: $\omega = 1/\tau$, $\varphi = -45^\circ$.

Polo all'origine

Se la funzione binomiale si riduce a $G(\omega) = 1/j\omega K$, si ha un polo all'origine.

Il modulo è: $G(\omega) = 1/\omega K$ e il diagramma è una retta ad attenuazione 20 dB/decade, che taglia l'asse delle pulsazioni, a 0 dB, nel punto $\omega = 1/K$ (fig. 19.20a).

Come nel caso particolare, per $K = 1$, la retta a -20 dB/decade taglia l'asse delle ascisse nel punto $\omega = 1$.

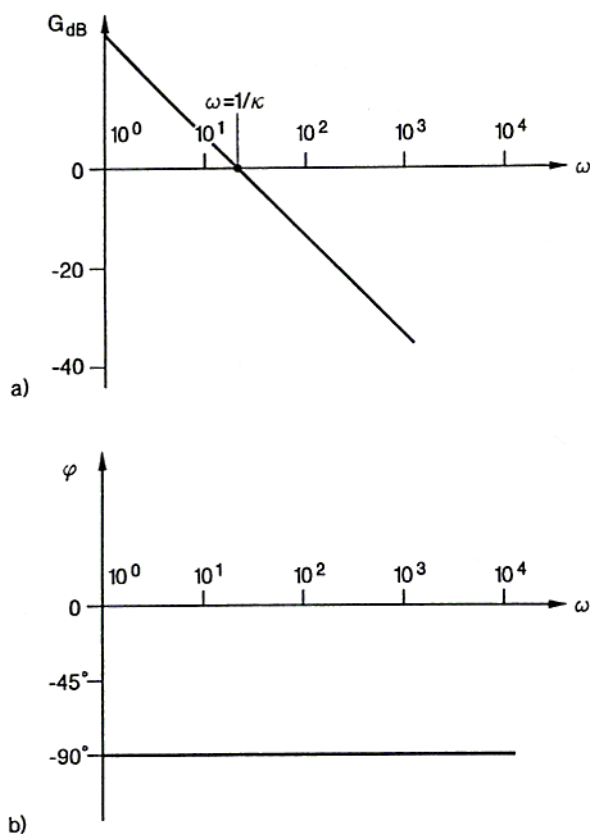


Fig. 19.20 Diagrammi di Bode di un integratore puro: a) modulo; b) fase.

La fase è costantemente $\varphi = -90^\circ$ (fig. 19.20b).

Funzioni del 1° ordine senza zeri

Sono i quadripoli LR e RC aventi funzioni di trasferimento [19.11]. Con $s = j\omega$ è:

$$G(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad [19.32]$$

Diagramma del modulo

Il modulo della [19.32], con $\tau = L/R$ oppure $\tau = RC$ vale:

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad [19.33]$$

La funzione è uguale alla [19.30] già discussa per cui i diagrammi di Bode assumono l'andamento delle figure 19.18 e 19.19.

Essi coincidono con la funzione di un filtro passa basso, con pulsazione di taglio $\omega = 1/\tau$.

Funzione del 1° ordine con uno zero all'origine

Sono i quadripoli RL e CR ; aventi funzioni di trasferimento [19.15]. Con $s = j\omega$ è:

$$G(\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \quad [19.34]$$

Questa è una funzione composta, costituita dalla sovrapposizione di due funzioni parziali:

- uno zero all'origine, per $\omega = 0$;
- un polo per $\omega = 1/\tau$.

Per ottenerla perciò si devono disegnare i diagrammi di Bode per ciascuna di esse, sommando poi le ordinate corrispondenti.

La funzione però può anche essere studiata direttamente come segue.

Diagramma del modulo

Il modulo della [19.34], con $\tau = L/R$ oppure $\tau = RC$ risulta:

$$G(\omega) = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (1/\omega\tau)^2}} \quad [19.35]$$

Il diagramma viene considerato per due tratti distinti e precisamente:
per $\omega\tau > 1$ cioè $\omega > 1/\tau$, si trascura questo termine e risulta:

$$G(\omega) = 20 \log 1 = 0 \text{ dB, attenuazione nulla;}$$

per $\omega\tau < 1$, cioè $\omega < 1/\tau$, si trascura l'unità e risulta: $G(\omega) = -20 \log (1/\omega\tau)$

Anche in questo caso possiamo affermare che la funzione attenua 20 dB/decade, ma ciò avviene al diminuire della frequenza.

Il diagramma di Bode (fig. 19.21a) è rappresentato da una spezzata, raccordata nel punto $\omega = 1/\tau$ (*Frequency Corner*). Nei filtri questa corrisponde alla frequenza di taglio inferiore.

Anche in questo caso si ha in realtà un'attenuazione di 3 dB.

Diagramma della fase

La funzione di trasferimento razionalizzata risulta:

$$G(\omega) = \frac{j\omega\tau (1 - j\omega\tau)}{1 + (\omega\tau)^2} = \frac{\omega\tau (\omega\tau + j)}{1 + (\omega\tau)^2} \quad [19.36]$$

La fase vale: $\varphi = \arctg (1/\omega\tau)$

I valori tipici sono:

- per $\omega\tau \gg 1$, cioè $\omega \gg 1/\tau$, si assume $\omega\tau = \infty$ quindi $\varphi = 0^\circ$;
- per $\omega\tau = 1$, cioè $\omega = 1/\tau$, è $\varphi = 45^\circ$;
- per $\omega\tau \ll 1$, cioè $\omega \ll 1/\tau$, si assume $\omega\tau = 0$ quindi $\varphi = 90^\circ$.

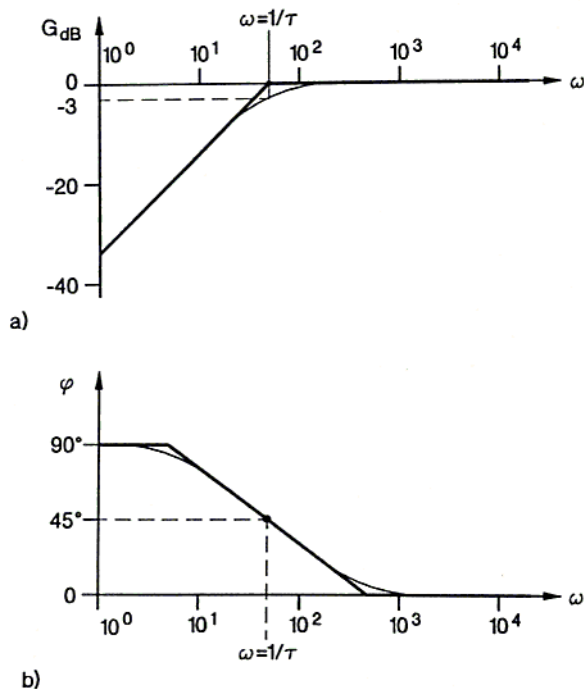


Fig. 19.21 Diagrammi di Bode di una funzione del 1° ordine con uno zero all'origine: a) modulo; b) fase.

Il diagramma (fig. 19.21b) presenta una linea spezzata formata da due tratti orizzontali:

- il primo, per $\varphi = 90^\circ$, limitato ad una decade prima del taglio;
- il secondo, per $\varphi = 0^\circ$, che inizia una decade dopo il taglio.

I due estremi sono raccordati da un segmento che passa per il punto: $\omega = 1/\tau$, $\varphi = 45^\circ$.

Funzioni del 2° ordine

Per le funzioni di 2° ordine ci limitiamo all'esame di uno dei tre tipi presi in considerazione nel paragrafo 19.2, e precisamente al circuito *RLC* con uscita sul condensatore. I risultati sono tipici del 2° ordine e facilmente estensibili alle altre uscite.

La funzione di trasferimento [19.21], con $s = j\omega$ è:

$$G(\omega) = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta(\omega/\omega_0)} \quad [19.37]$$

in cui, ricordiamo, ζ è il fattore di smorzamento, dato da:

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{R}{2L} \sqrt{LC} \quad [19.38]$$

I poli di questa funzione sono risultati:

$$s/\omega_0 = -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad [19.39]$$

Come abbiamo già osservato, esistono tre condizioni tipiche di funzionamento, che riassumiamo come segue:

$\zeta > 1$, poli reali negativi distinti, *funzionamento aperiodico*;

$\zeta = 1$, poli reali negativi coincidenti, *funzionamento critico*;

$\zeta < 1$, poli complessi coniugati, *funzionamento oscillatorio smorzato*.

Esaminiamo in un primo tempo la condizione critica $\zeta = 1$.

La funzione di trasferimento [19.37] diviene:

$$G(\omega) = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2j(\omega/\omega_0)} \quad [19.40]$$

Per $\omega \ll \omega_0$, si assume $\omega/\omega_0 = 0$ e quindi:

$$G(\omega) = 20 \log 1 = 0$$

Si deduce anche evidentemente: $\varphi = 0^\circ$.

Per $\omega \gg \omega_0$, il termine quadratico diviene predominante per cui si possono trascurare gli altri e si ha:

$$G(\omega) = 20 \log (\omega/\omega_0)^{-2} = -40 \log (\omega/\omega_0)$$

L'espressione rappresenta un'attenuazione di 40 dB/decade.

Per calcolare la fase dobbiamo razionalizzare la [19.40] e considerare il numero complesso. Si ottiene:

$$G(\omega) = \frac{[1 - (\omega/\omega_0)^2] - 2j(\omega/\omega_0)}{[1 - (\omega/\omega_0)^2]^2 + 4(\omega/\omega_0)^2} \quad \text{da cui:}$$

$$\varphi = -\arctg \frac{2(\omega/\omega_0)}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \quad \text{che, per } \omega = \infty, \text{ vale } \varphi = -\arctg(0) = -180^\circ.$$

Per $\omega = \omega_0$ si ottiene:

$$G(\omega) = -1/2j \quad [19.41]$$

Il modulo è: $G(\omega) = 1/2$, pari a 6 dB;

la fase è: $\varphi = -90^\circ$.

Il diagramma di Bode di modulo e fase per $\zeta = 1$ è tracciato in fig. 19.22.

Quando il fattore di smorzamento aumenta e diviene $\zeta > 1$, la caratteristica del modulo si abbassa. Ciò si può arguire dall'abbassamento del guadagno per $\omega = \omega_0$.

Dalla [19.37] si ha infatti:

$$\text{per } \omega/\omega_0 = 1: \quad G(\omega) = 1/2j\zeta,$$

$$\text{di modulo:} \quad G(\omega) = 1/2\zeta$$

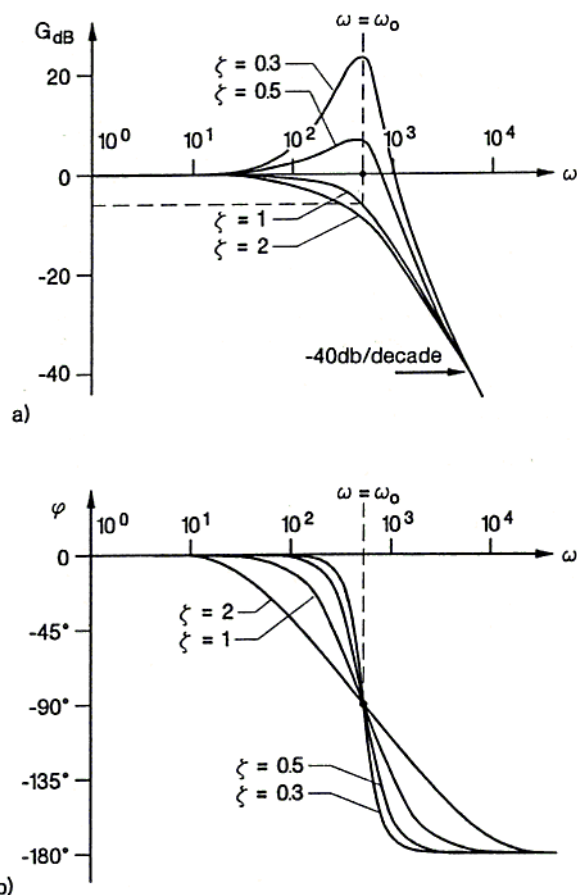


Fig. 19.22 Diagrammi di Bode di una funzione del 2° ordine: a) modulo; b) fase.

Come si nota, essa è inversamente proporzionale al fattore di smorzamento. Segue che:

- per $\zeta > 1$ crescente, $G(\omega)$ diminuisce e la caratteristica si abbassa;
- per $\zeta < 1$ decrescente, $G(\omega)$ aumenta e la caratteristica si alza.

In quest'ultimo caso si assiste all'apparizione di un picco di risonanza che, per $\zeta = 0$, produce un guadagno infinito.

Il diagramma della fase, imperniato sempre sui valori limite: 0° , 90° , 180° , modifica l'andamento; in particolare il passaggio da 0° a 180° , per $\zeta < 1$ diviene più ripido.

Funzioni composte a radici reali

Molto spesso, nei circuiti elettronici, le funzioni sono a radici reali; in questo caso i diagrammi di Bode di modulo e fase possono essere tracciati seguendo i criteri generali che seguono.

Diagramma dei moduli

Poiché si tratta di un diagramma in unità logaritmiche, i fattori della funzione divengono tutti termini e il diagramma complessivo è ottenuto mediante la sovrapposizione dei diagrammi parziali che possono essere di tre tipi:

- un diagramma del guadagno statico, corrispondente ad una linea orizzontale, tracciata in corrispondenza di: $20 \log G(0)$;
- un diagramma di zero, con guadagno 20 dB/decade per $\omega > 1/\tau$;
- un diagramma di polo, con attenuazione 20 dB/decade per $\omega > 1/\tau$.

Diagramma della fase

Anche in questo caso il diagramma complessivo sarà la sovrapposizione di diagrammi parziali ricordando che, al crescere della frequenza, si ha una rotazione di:

- + 90° per ogni zero;
- 90° per ogni polo.

Diamo ora alcuni esempi applicativi, che potranno servire da guida.

Esercizio 1

Determinare la funzione di trasferimento e tracciare i diagrammi di Bode del circuito di fig. 19.23, sapendo che:
 $R_1 = 4 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 10 \text{ mH}$.

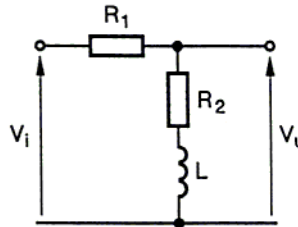


Fig. 19.23 Circuito dell'es. 1.

Soluzione

La funzione di trasferimento è:

$$G(s) = \frac{R_2 + sL}{R_1 + R_2 + sL} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + s\tau_1}{1 + s\tau_2}$$

avendo posto: $\tau_1 = L/R_2$, $\tau_2 = L/(R_1 + R_2)$.

La funzione è di 1° ordine e presenta,

- un guadagno statico: $G(0) = 20 \log [R_2/(R_1 + R_2)] = 20 \log (1/5) = -14 \text{ dB}$;
- uno zero per: $\omega_z = 1/\tau_1 = R_2/L = 10^3/10^{-2} = 100 \text{ krad/s}$;
- un polo per: $\omega_p = 1/\tau_2 = (R_1 + R_2)/L = 5 \cdot 10^3/10^{-2} = 500 \text{ krad/s}$.

Diagrammi di Bode

Si ottengono tracciando i diagrammi parziali e sovrapponendo poi le caratteristiche (fig. 19.24). Si nota un'attenuazione di 14 dB che, per $\omega = 100 \text{ krad/s}$, diminuisce sino ad annullarsi per $\omega = 500 \text{ krad/s}$. Il diagramma della fase si ottiene sovrapponendo i diagrammi parziali dello zero e del polo. Come si osserva, esiste uno sfasamento nella banda $50 \text{ krad/s} < \omega < 500 \text{ krad/s}$, pari a: $45 \log 5 = 31,5^\circ$ in anticipo.

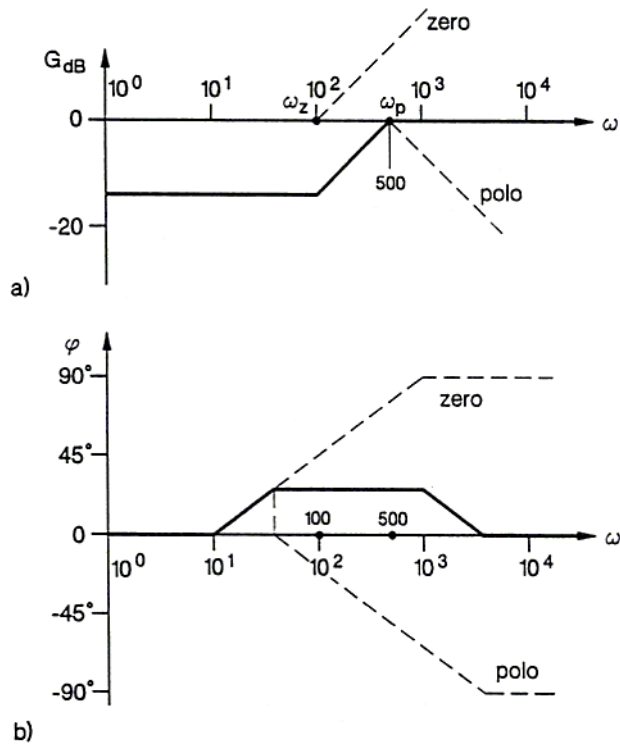


Fig. 19.24 Diagrammi di Bode dell'es. 1.

Esercizio 2

Determinare la funzione di trasferimento e tracciare i diagrammi di Bode del circuito di fig. 19.25, sapendo che:

$R_1 = 20 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 0,5 \text{ }\mu\text{F}$, $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$, $C_2 = 10 \text{ }\mu\text{F}$.

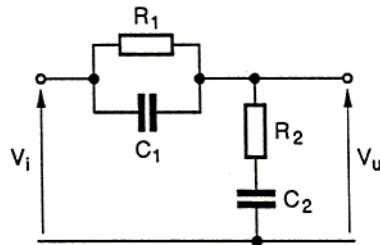


Fig. 19.25 Circuito dell'es. 2.

Soluzione

Esprimiamo le impedenze in funzione di s .

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{sC_2} = \frac{sR_2C_2 + 1}{sC_2}$$

$$Z_1 = \frac{R_1 (1/sC_1)}{R_1 + (1/sC_1)} = \frac{R_1}{sR_1C_1 + 1}$$

$$Z_t = \frac{sR_2C_2 + 1}{sC_2} + \frac{R_1}{sR_1C_1 + 1} = \frac{(sR_2C_2 + 1)(sR_1C_1 + 1) + sR_1C_2}{sC_2(sR_1C_1 + 1)}$$

$$G(s) = \frac{Z_2}{Z_t} = \frac{(sR_2C_2 + 1)(sR_1C_1 + 1)}{(sR_2C_2 + 1)(sR_1C_1 + 1) + sR_1C_2}$$

Sviluppiamo e risolviamo il denominatore.

$$s^2R_2C_2R_1C_1 + s(R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2) + 1 = 0$$

Poiché: $R_1C_1 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ s}$; $R_2C_2 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ s}$, $R_1C_2 = 200 \cdot 10^{-3} \text{ s}$, risulta:

$$R_2C_2R_1C_1 = 200 \cdot 10^{-6} \text{ s}^2; \quad R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2 = 230 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

e quindi sostituendo:

$$200 \cdot 10^{-6} (s^2 + 1,15 \cdot 10^3 s + 5 \cdot 10^3) = 0.$$

La soluzione dell'equazione di 2° grado offre:

$$s = -0,575 \cdot 10^3 \pm \sqrt{0,330625 \cdot 10^6 - 5 \cdot 10^3} = \begin{cases} -1146 \\ -4,364 \end{cases}$$

La funzione presenta,

– guadagno statico: $G(0) = 1$, pari a 0 dB;

– due zeri corrispondenti a:

$$\omega_{z1} = 1/R_1C_1 = 1/10^{-2} = 100 \text{ rad/s};$$

$$\omega_{z2} = 1/R_2C_2 = 1/(20 \cdot 10^{-3}) = 50 \text{ rad/s};$$

– due poli corrispondenti a:

$$\omega_{p1} = 4,364 \text{ rad/s}; \quad \omega_{p2} = 1146 \text{ rad/s}.$$

I diagrammi di Bode sono disegnati in fig. 19.26. Si nota che l'attenuazione massima, nella banda $50 \div 100 \text{ rad/s}$, è 21 dB, mentre la fase compie un'escursione di $\pm 47^\circ$ circa.

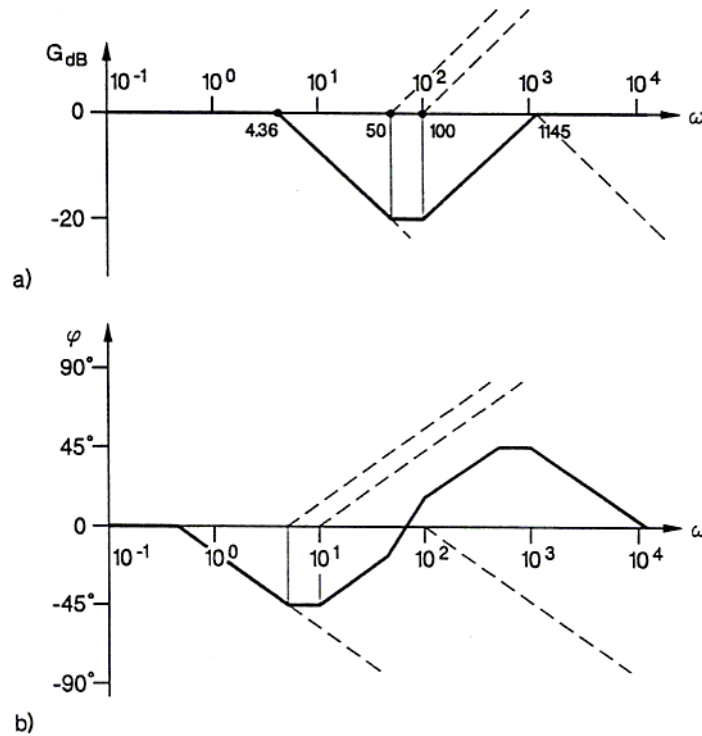


Fig. 19.26 Diagrammi di Bode dell'es. 2

Riepilogo

Funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}$$

fattorizzata, con z = zeri, p = poli:

$$G(s) = K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

Guadagno statico: $G(0) = a_0/b_0$

Ordine: n° dei poli;

tipo = n° dei poli all'origine.

| Quadrupolo | Uscita | $G(s)$ | τ | Note |
|------------|--------|--------------------------|--------|------------------|
| 1° ordine | | | | |
| LR | V_R | $(1/\tau)/(s+1/\tau)$ | L/R | senza zeri |
| RC | V_C | $(1/\tau)/(s+1/\tau)$ | R/C | senza zeri |
| RL | V_L | $s/(s+1/\tau)$ | L/R | zero all'origine |
| CR | V_R | $s/(s+1/\tau)$ | R/C | zero all'origine |
| 2° ordine | | | | |
| RLC | V_R | $(sR/L)/(s^2+sR/L+1/LC)$ | | |
| RLC | V_L | $s/(s^2+sR/L+1/LC)$ | | |
| RLC | V_C | $(1/LC)/(s^2+sR/L+1/LC)$ | | |

Diagramma di Nyquist

Funzioni $G(\omega)$ del 1° ordine

senza zeri: $Re = 1/[1+(\omega\tau)^2]$; $Im = \omega\tau/[1+(\omega\tau)^2]$

con uno zero all'origine: $Re = (\omega\tau)^2/[1+(\omega\tau)^2]$; $Im = \omega\tau/[1+(\omega\tau)^2]$

Funzioni $G(\omega)$ del 2° ordine, $V_u = V_C$:

$$G(s) = \frac{1}{(s/\omega_0)^2 + (R/2L)(s/\omega_0) + 1}$$

$$\frac{s}{\omega_0} = -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

con $\zeta = R/2 \omega_0 L$

$\zeta > 1$, funzione aperiodica;

$\zeta = 1$, funzione critica;

$\zeta < 1$, funzione oscillatoria smorzata.

Diagrammi di Bode

Sono due diagrammi riferentesi rispettivamente:

— al modulo, $G_{dB} = 20 \log |G|$;

— alla fase di $G(\omega)$.

Funzione di zero (derivatore):

$$G(\omega) = 1 + j\omega\tau;$$

$$G(\omega) = \sqrt{1+(\omega\tau)^2}; \quad \varphi = \arctan \omega\tau$$

Funzione di polo (integratore):

$$G(\omega) = 1/(1 + j\omega\tau)$$

$$G(\omega) = 1/\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}; \quad \varphi = -\arctan \omega\tau$$

| | ω | $G(\omega)$ | ω | φ |
|-------------------------|----------------|---------------|----------------|--------------|
| 1° ordine senza zeri | $< 1/\tau$ | 0 dB | $\ll 1/\tau$ | 0° |
| | $= 1/\tau$ | -3 dB | $= 1/\tau$ | -45° |
| | $> 1/\tau$ | -20 dB/decade | $\gg 1/\tau$ | -90° |
| uno zero all'origine | $< 1/\tau$ | -20 dB/decade | $\ll 1/\tau$ | 90° |
| | $= 1/\tau$ | -3 dB | $= 1/\tau$ | 45° |
| | $> 1/\tau$ | 0 dB | $\gg 1/\tau$ | 0° |
| 2° ordine | $\ll \omega_0$ | 0 dB | $\ll \omega_0$ | 0° |
| | $= \omega_0$ | -6 dB | $= \omega_0$ | -90° |
| | $\gg \omega_0$ | -40 dB/decade | $\gg \omega_0$ | -180° |

con $\zeta < 1$ si ha un aumento del guadagno con una punta di risonanza per $\omega \rightarrow \omega_0$.

Esercizi da svolgere

Determinare la funzione di trasferimento $G(s) = V_u/V_i$ e tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase dei seguenti circuiti.

19.1 Circuito di fig. 19.27.

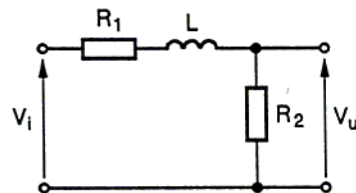


Fig. 19.27

19.2 Circuito di fig. 19.28.

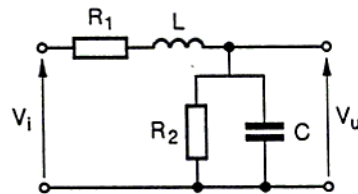


Fig. 19.28

19.3 Circuito di fig. 19.29.

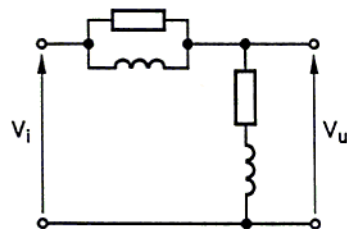


Fig. 19.29

19.4 Circuito di fig. 19.30.

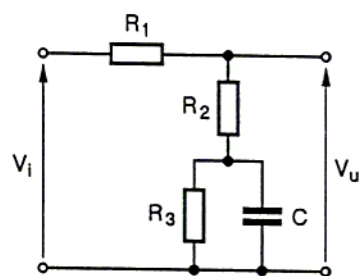


Fig. 19.30

19.5 Circuito di fig. 19.31.

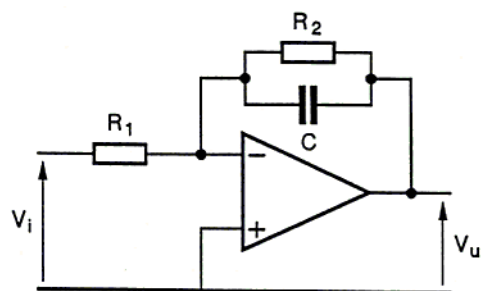


Fig. 19.31

19.6 Circuito di fig. 19.32.

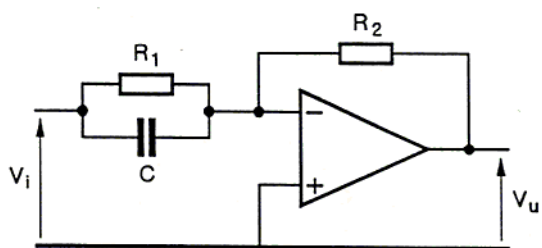


Fig. 19.32

20

I criteri di stabilità

20.1 La stabilità

I criteri per riconoscere, in una funzione di trasferimento (f.d.t.), possibili condizioni di instabilità possono essere di carattere matematico oppure grafico.

I primi si rifanno alla f.d.t. espressa in forma polinomiale; fattorizzando il denominatore [17.38], essa assume la forma:

$$G(s) = \frac{P(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)} \quad [20.1]$$

in cui $s_k = p_k$ sono i poli della funzione.

Se consideriamo questa espressione, la condizione di instabilità che provoca $G(s) = \infty$ conduce necessariamente ad escludere dal funzionamento tutte le situazioni in cui $s = s_k$, in quanto per esse il binomio corrispondente tende a zero e la funzione tende ad infinito.

I criteri grafici operano sulla f.d.t. nella forma [15.8]

$$G_f = \frac{G}{1 - GH}$$

in cui viene messo in evidenza il guadagno d'anello. Essi sono: il *criterio di Nyquist* e il *criterio di Bode*.

A questo punto è necessario fare una precisazione. La formula del guadagno del sistema retroazionato G_f si basa sul fatto che al *nodo di confronto*, o *nodo sommatore*, si è effettuata la somma dei segnali X_i e X_f per ottenere $X_i = X_i + X_f$ (fig. 20.1a).

Nel caso dei sistemi complessi retroazionati, di cui ci stiamo occupando, e da un punto di vista della stabilità, si preferisce considerare il nodo di confronto come *sottrattore*

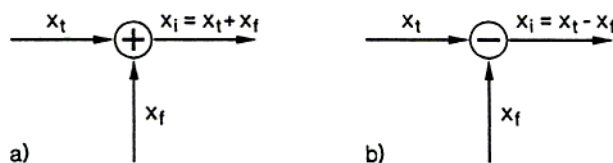


Fig. 20.1 Nodo di confronto: a) sommatore; b) sottrattore.

anziché sommatore, giudicando il segnale risultante X_i come segnale errore (fig. 20.1b).

Ammettere questa condizione significa però rovesciare il segno di X_f e con esso del guadagno d'anello per cui la formula della f.d.t. da considerare è:

$$G_f = \frac{G}{1 + GH} \quad [20.2]$$

Il sistema diviene instabile quando il guadagno d'anello vale $GH = -1$; infatti, in questo caso, risulta $G_f = \infty$.

È evidente che un sistema complesso, per poter essere affidabile, non solo non deve ammettere tale condizione, ma ne deve rimanere sensibilmente lontano, presentando ampi margini di sicurezza.

Esaminiamo ora dettagliatamente i vari criteri.

20.2 Criterio di Routh-Hurwitz

Posizione dei poli

Nel capitolo dedicato alla f.d.t. e all'antitrasformazione di Laplace [17.4] abbiamo già esaminato la possibilità di produrre l'espansione della [20.2] nella somma di tanti termini, ciascuno dei quali può ricondursi all'espressione:

$$F(s) = \frac{c_k}{s - s_k} \quad [20.3]$$

in cui c_k è un coefficiente e s_k un polo generico.

La condizione di instabilità, per la quale si produce $G(s) = \infty$, scaturisce dalla presenza di poli s_k per i quali possa verificarsi la condizione $s = s_k$. Se applichiamo alla [20.3] l'antitrasformazione di Laplace, la funzione corrispondente nel dominio del tempo risulta:

$$f(t) = c_k e^{s_k t} \quad [20.4]$$

Sviluppando la radice complessa nei suoi termini componenti: $s_k = \alpha_k + j\omega_k$, la [20.4] può anche scriversi:

$$f(t) = c_k e^{\alpha_k t} e^{j\omega_k t} \quad [20.5]$$

Questa espressione è rappresentativa di una funzione oscillatoria con inviluppo esponenziale, crescente per $\alpha_k > 0$, decrescente per $\alpha_k < 0$ (fig. 20.2).

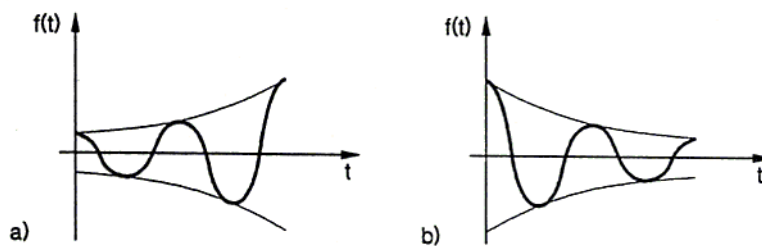


Fig. 20.2 Funzione oscillatoria ad inviluppo esponenziale: a) $\alpha_k > 0$; b) $\alpha_k < 0$.

Per $\omega_k = 0$ la funzione assume andamento aperiodico, ma ancora crescente per $\alpha_k > 0$, decrescente per $\alpha_k < 0$ (fig. 20.3).

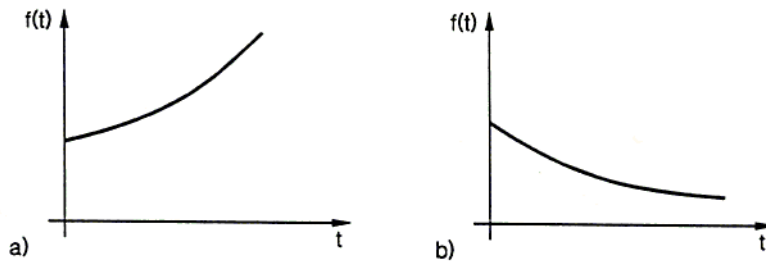


Fig. 20.3 Funzione aperiodica esponenziale: a) $\alpha_k > 0$; b) $\alpha_k < 0$.

È chiaro quindi che, quando $\alpha_k > 0$, per $t \rightarrow \infty$ la funzione $f(t) \rightarrow \infty$, ed è quindi *instabile*.

Possiamo allora concludere che:

condizione di stabilità di un sistema è che la f.d.t. non abbia poli con parte reale positiva.

In sostanza, nel piano di Gauss, la f.d.t. $G(s)$ non deve possedere poli nel semipiano destro (fig. 20.4).

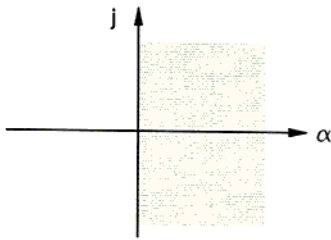


Fig. 20.4 Piano di Gauss: semipiano destro di instabilità.

Studio sul segno delle radici

Il denominatore della f.d.t. è un polinomio di grado n :

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 \quad [20.6]$$

Lo studio sul segno delle radici si può effettuare mediante il *criterio di Routh-Hurwitz* (RH). Si basa su alcune condizioni che devono essere tutte verificate e che sono espresse nei punti seguenti.

- 1) Tutti i coefficienti a_k del polinomio devono avere lo stesso segno e nessuno deve essere nullo.
- 2) I coefficienti della tabella di fig. 20.5, ottenuti applicando le formule [20.7] devono avere lo stesso segno.

Da questa condizione scende che:

il numero di radici con parte reale positiva è pari al numero di alternanze di segno.

| | | | |
|-----------|-----------|-----------|-------|
| a_n | a_{n-2} | a_{n-4} | |
| a_{n-1} | a_{n-3} | a_{n-5} | |
| c_1 | c_2 | c_3 | |
| d_1 | d_2 | d_3 | |
| | | | |

Fig. 20.5 Tabella dei coefficienti di Routh-Hurwitz.

Le formule per la compilazione della tabella sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \\
 c_2 &= \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \\
 &\dots\dots\dots \\
 d_1 &= \frac{c_1 a_{n-3} - a_{n-1} c_2}{c_1} \\
 d_2 &= \frac{c_1 a_{n-5} - a_{n-1} c_3}{c_1} \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{20.7}$$

Osservazioni

Se nella prima colonna compare uno 0, si scrivono i coefficienti in ordine inverso.

Se in una riga compare una fila di zeri, ci si mette la derivata del polinomio formato coi coefficienti della riga precedente.

Variante del criterio RH

La seconda condizione che abbiamo esposto conduce talvolta a calcoli laboriosi. Il criterio di RH può essere formulato in modo equivalente considerando tutti i determinanti che si possono formare coi coefficienti del polinomio, impostati secondo la successione indicata:

$$\begin{vmatrix}
 a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots \\
 a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots \\
 a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{vmatrix}$$

La condizione di stabilità impone che:
tutti i determinanti devono risultare positivi.

Diamo nel seguito alcuni esempi di elaborazione matematica secondo questo ultimo metodo, assumendo sempre $a_n > 0$.

Equazione di 2° grado: $a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$

Condizioni di stabilità: $a_1 > 0$; $a_0 > 0$.

Equazione di 3° grado: $a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$

Determinanti

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}$$

Condizioni di stabilità: $a_2 > 0$; $a_2 a_1 - a_3 a_0 > 0$; $a_0 > 0$

Equazione di 4° grado: $a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$

Determinanti

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}$$

Condizioni di stabilità: $a_3 > 0$; $a_3 a_2 - a_4 a_1 > 0$; $a_1(a_3 a_2 - a_4 a_1) - a_0 a_3^2 > 0$; $a_0 > 0$.

Esercizio 1

Ricercare col criterio di RH il segno delle radici del polinomio denominatore di $G(s)$: $y = s^2 + 3s + 2$ e calcolarne il valore.

Soluzione

I coefficienti sono:

$a_1 = 3 > 0$, $a_0 = 2 > 0$; perciò il sistema è stabile.

Le radici sono: $s_{1,2} = -1,5 \pm \sqrt{2,25 - 2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

Come si osserva, esse sono entrambe negative.

Esercizio 2

Ricercare col criterio di RH il segno delle radici del polinomio denominatore di $G(s)$: $y = s^3 + 8s^2 + 19s + 12$ e calcolarne il valore.

Soluzione

I coefficienti sono:

$a_3 = 1$, $a_2 = 8$, $a_1 = 19$, $a_0 = 12$.

Risulta: $a_2 = 8 > 0$; $a_2 a_1 - a_3 a_0 = 8 \cdot 19 - 12 = 140 > 0$; $a_0 = 12 > 0$

perciò il sistema è stabile.

Per il calcolo delle radici si osserva che, sostituendo $s = -1$, il polinomio si annulla, quindi $s = -1$ è una radice. Dividendo allora il polinomio dato per $(s + 1)$ si ottiene: $y' = y/(s + 1) = s^2 + 7s + 12$.

Le altre due radici sono perciò:

$$s = -3,5 \pm \sqrt{12,25 - 12} = \begin{cases} -4 \\ -3 \end{cases}$$

Come si osserva, tutte le radici sono negative.

20.3 Criterio di stabilità di Nyquist

Abbiamo già visto che i diagrammi di Nyquist si basano sul tracciamento polare di un vettore, individuato attraverso le sue due componenti, reale e immaginaria. Premesso ciò, si consideri nuovamente la f.d.t. di un sistema retroazionato [20.2]:

$$G_f = \frac{G}{1 + GH}$$

La condizione di instabilità è data da: $GH = -1$; vale a dire che, in nessun caso, il guadagno d'anello deve essere reale, negativo e di valore unitario.

Il criterio di Nyquist perciò si basa sul tracciamento polare della funzione GH sul piano di Gauss ed afferma che:

un sistema è stabile se, e solo se, il diagramma polare di GH non abbraccia il punto $(-1, 0)$.

Operativamente perciò si traccia il diagramma di GH e si osserva l'andamento della curva rispetto al punto di riferimento $(-1, 0)$. Se tale linea non lo abbraccia il sistema è stabile, altrimenti è instabile (fig. 20.6).

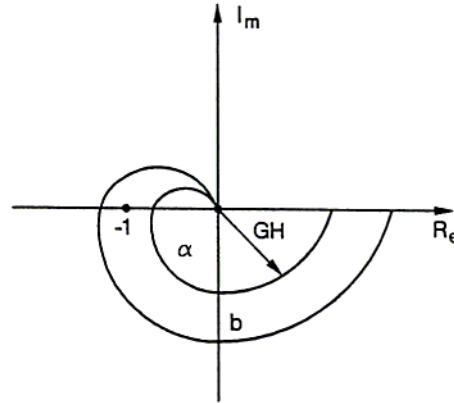


Fig. 20.6 Stabilità secondo Nyquist: a) sistema stabile; b) sistema instabile.

Supponiamo di considerare un sistema stabile avente la caratteristica polare come in fig. 20.7. Valutiamo la posizione del punto $P(-a, 0)$, intersezione fra la curva e l'asse reale.

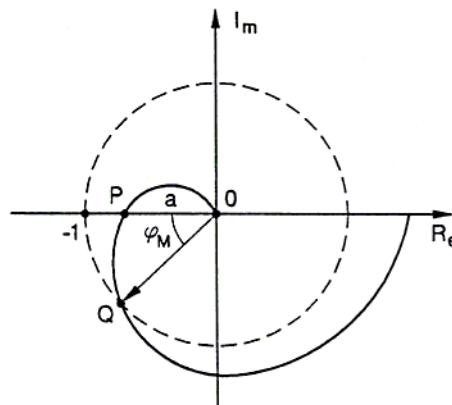


Fig. 20.7 Sistema stabile secondo Nyquist: $20 \log 1/a =$ margine di guadagno; $\varphi_M =$ margine di fase.

Si definisce: *margin di guadagno*, M_G , il reciproco di a :

$$M_G = 1/a \quad [20.8]$$

o, in unità logaritmiche:

$$M_G = -20 \log a \quad [29.9]$$

Tracciamo ora un cerchio di raggio unitario e valutiamo la posizione del punto Q , intersezione fra la curva e il cerchio, avente modulo 1 e fase.

Si definisce:

$$\text{margin di fase, } \varphi_M$$

l'angolo del vettore unitario OQ rispetto a 180° .

È evidente che un sistema è tanto più affidabile quanto maggiori risulteranno i margini di guadagno e di fase.

20.4 Criterio di stabilità di Bode

Il criterio di stabilità di Bode si ricollega, in linea di principio, a quello di Nyquist di cui condivide le valutazioni sulla funzione del guadagno d'anello GH . Ciò che distingue i due metodi è il procedimento grafico, che per Bode si basa sul tracciamento di due diagrammi cartesiani, uno riferito al modulo e l'altro alla fase. Il riferimento per l'instabilità è sempre dato dal punto $(-1, 0)$, corrispondente ad un vettore di modulo 1 (0 dB) e fase 180° .

Si tracciano i due diagrammi correlati, riferiti ad una scala logaritmica delle frequenze e si verificano due situazioni:

- 1) In corrispondenza al guadagno 0 dB si osserva la fase:
 - se $\varphi < 180^\circ$, il sistema è *stabile*;
 - il margine di fase è dato da: $\varphi_M = 180^\circ - \varphi$ [20.10]
 - se $\varphi > 180^\circ$, il sistema è *instabile*.
- 2) In corrispondenza alla fase $\varphi = 180^\circ$ si osserva il guadagno:
 - se $20 \log |GH| < 0$ il sistema è *stabile*;
 - il margine di guadagno è dato da $-20 \log |GH|$;
 - se $20 \log |GH| > 0$, il sistema è *instabile*.

Dalle considerazioni fatte appare chiaro che una funzione del 1° ordine corrisponderà sempre ad un sistema stabile, perché non può produrre angoli di fase superiori a 90° (fig. 20.8).

Una funzione con tre poli invece può produrre instabilità, perché la fase può raggiungere 270° . Si osservi la fig. 20.9 relativa ad un sistema con tre poli. In corrispondenza a 0 dB si legge $\varphi = 200^\circ > 180^\circ$, quindi il sistema è instabile.

Lo stesso sistema, con un guadagno inferiore, può divenire stabile. Infatti in fig. 20.10 in corrispondenza a 0 dB si legge: $\varphi = 150^\circ < 180^\circ$.

Sullo stesso diagramma si possono rilevare i margini di guadagno e di fase.

Per lo studio effettuato sulla f.d.t. si rammenti che:

- ogni *zero* determina uno sfasamento di 90° *in anticipo*;
- ogni *polo* determina uno sfasamento di 90° *in ritardo*.

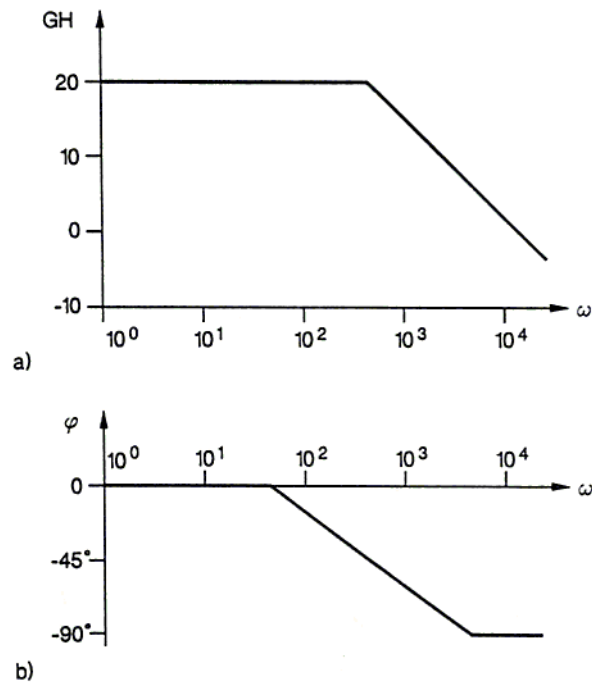


Fig. 20.8 Diagrammi di Bode di un sistema del 1° ordine, sistema stabile.

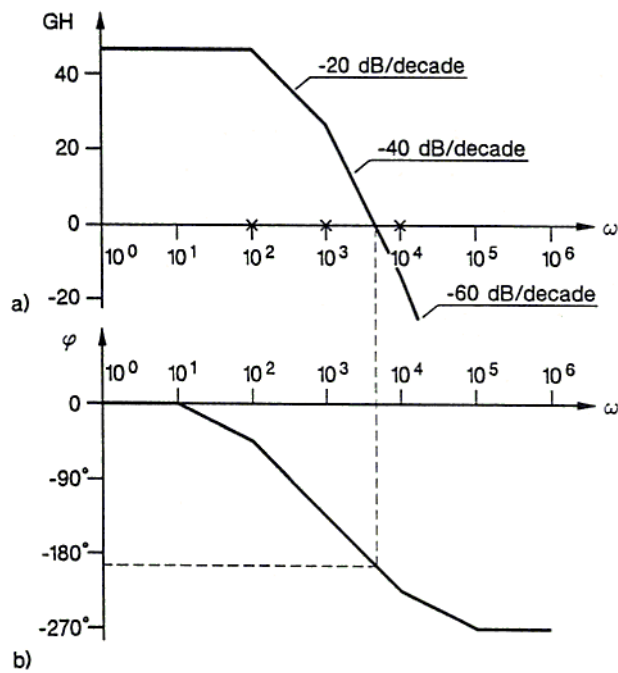


Fig. 20.9 Diagrammi di Bode di un sistema del 3° ordine, sistema instabile.

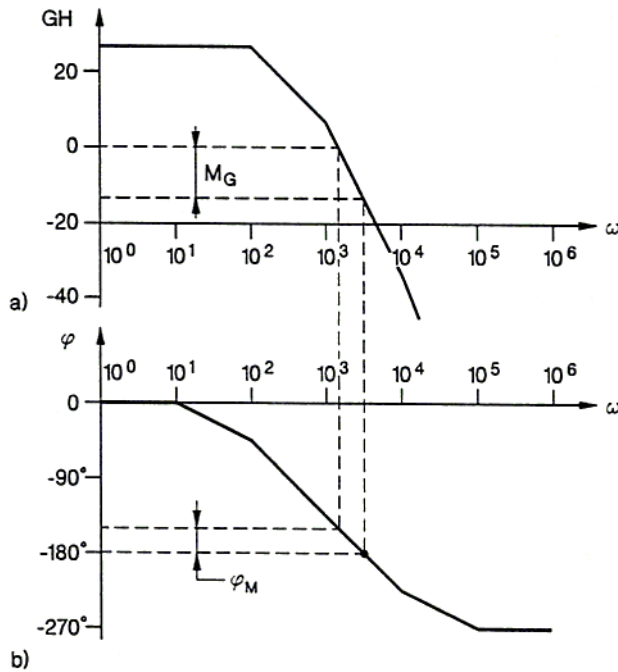


Fig. 20.10 Diagrammi di Bode di un sistema del 3° ordine, sistema stabile: M_G = margine di guadagno; φ_M = margine di fase.

Esercizio 3

Un sistema retroazionato avente guadagno statico $G(0) = 20$ dB, presenta tre poli in corrispondenza alle pulsazioni: $\omega_{p1} = 1$ krad/s, $\omega_{p2} = 5$ krad/s, $\omega_{p3} = 100$ krad/s. Determinare se il sistema è stabile e, in questo caso, i margini di guadagno e di fase.

Soluzione

Tracciamo i diagrammi di Bode di modulo e fase (fig. 20.11). Come si osserva dai grafici, in corrispondenza a 0 dB si ha una fase $\varphi = 150^\circ$, quindi il sistema è stabile. Esso presenta:

- un margine di fase $\varphi_M = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$;
- un margine di guadagno $M_G = 20$ dB.

20.5 Stabilizzazione dei circuiti

Quando un sistema manifesta instabilità, è possibile intervenire sulla sua funzione di trasferimento interponendo blocchi sfasatori i quali possono modificare la fase riportandola entro i valori prescritti.

Nel caso di un sistema elettrico, si può intervenire con reti correttive che possono essere:

- quadripoli *ritardatori*, se spostano la fase in ritardo;
- quadripoli *anticipatori*, se la spostano in anticipo;
- quadripoli a *sella*, se svolgono, in campi di frequenza distinti, entrambe le funzioni.

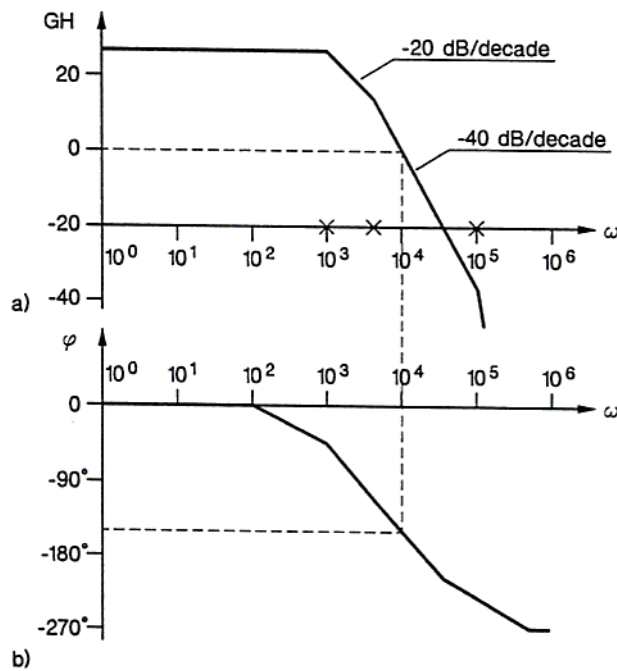


Fig. 20.11 Diagrammi di Bode dell'es. 3.

Quadripolo ritardatore

È costituito da due resistenze e un condensatore collegati come tracciato in fig. 20.12.

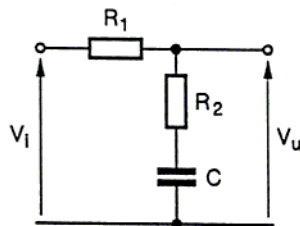


Fig. 20.12 Quadripolo ritardatore.

La sua f.d.t. è:

$$G(s) = \frac{R_2 + 1/sC}{R_1 + R_2 + 1/sC} \quad \text{cioè} \quad G(s) = \frac{1 + s\tau_2}{1 + s\tau_1} \quad [20.11]$$

con: $\tau_1 = (R_1 + R_2)C$; $\tau_2 = R_2C$.

Come si osserva la funzione presenta:

- un polo per $\omega_p = 1/\tau_1$;
- uno zero per $\omega_z = 1/\tau_2$;
- guadagno statico, $G(0) = 1$ cioè 0 dB,
- guadagno in alta frequenza, con $f \rightarrow \infty$:

$$G(\infty) = 20 \log [R_2/(R_1 + R_2)] = -20 \log [(R_1 + R_2)/R_2]$$

Dai diagrammi di Bode di fig. 20.13, che illustrano l'andamento del modulo e della fase, appare evidente che il quadripolo agisce da ritardatore di 90° entro l'intervallo di frequenze: $10 \omega_p \div \omega_z/10$.

Questo circuito è un ritardatore limitato. Sopprimendo R_2 si ottiene, come è noto, un integratore puro, che agisce da ritardatore di 90° per $\omega > 10 \omega_p$.

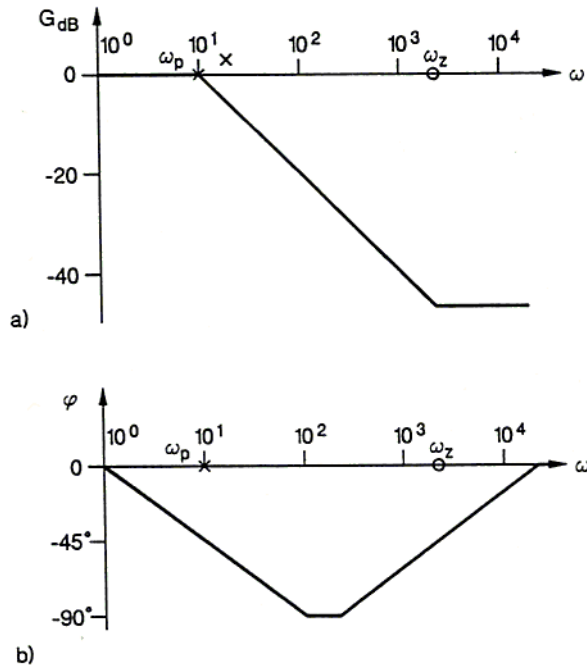


Fig. 20.13 Diagrammi di Bode di un quadripolo ritardatore.

Quadripolo anticipatore

È costituito da due resistenze e un condensatore collegati come illustrato in fig. 20.14.

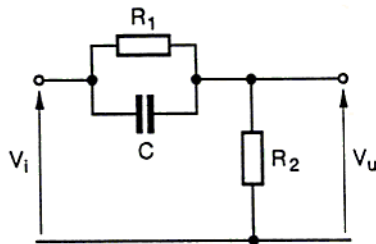


Fig. 20.14 Quadripolo anticipatore.

La sua f.d.t. è:

$$G(s) = \frac{R_2}{R_2 + 1/(1/R_1 + sC)} \quad \text{cioè} \quad \frac{1 + s \tau_1}{1 + s \tau_2} \quad [20.12]$$

con $\tau_1 = R_1 C$; $\tau_2 = (R_1 \parallel R_2) C$.

Come si osserva la funzione presenta:

- uno zero per $\omega_z = 1/\tau_1$;
- un polo per $\omega_p = 1/\tau_2$;
- guadagno statico $G(0) = -20 \log [(R_1 + R_2)/R_2]$

guadagno in alta frequenza, per $f \rightarrow \infty$:

$$G(\infty) = 1 \quad \text{cioè} \quad 0 \text{ dB.}$$

Dai diagrammi di Bode di fig. 20.15 appare evidente che il quadripolo agisce da anticipatore di 90° entro un intervallo di frequenze dato da: $10 \omega_z \div \omega_p/10$.

Questo circuito è un *anticipatore limitato*. Sopprimendo R_1 si ottiene, come è noto, un derivatore puro, che agisce da anticipatore di 90° per $\omega < \omega_p/10$.

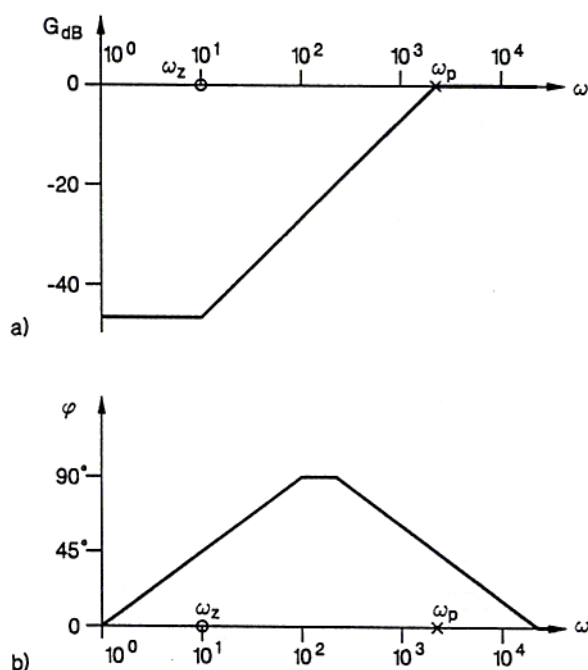


Fig. 20.15 Diagrammi di Bode di un quadripolo anticipatore.

Quadripolo a sella

È costituito da due resistenze e due condensatori come indicato in fig. 20.16 e può essere considerato la sovrapposizione dei due quadripoli precedenti. La sua f.d.t. vale:

$$G(s) = \frac{R_2 + 1/s C_2}{(R_2 + 1/s C_2) + 1/(1/R_1 + sC)}$$

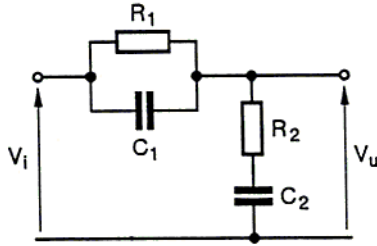


Fig. 20.16 Quadripolo a sella.

Elaborando la formula si giunge a:

$$G(s) = \frac{(1 + s \tau_2)(1 + s \tau_3)}{(1 + s \tau_1)(1 + s \tau_4)} \quad [20.13]$$

in cui:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (R_1 + R_2)C_2; & \tau_2 &= R_2C_2; \\ \tau_3 &= R_1C_1; & \tau_4 &= (R_1 // R_2)C_1 \end{aligned}$$

La funzione presenta:

- due zeri, alle pulsazioni: $\omega_{z_1} = 1/\tau_2$ e $\omega_{z_2} = 1/\tau_3$
- due poli, alle pulsazioni: $\omega_{p_1} = 1/\tau_1$ e $\omega_{p_2} = 1/\tau_4$
- guadagno statico, $G(0) = 1 = 0$ dB;
- guadagno in alta frequenza, per $f \rightarrow \infty$; $G(\infty) = 1 = 0$ dB;
- guadagno in centro banda:

$$G(\omega) = -20 \log [(R_1 + R_2)/R_2]$$

Tracciati i diagrammi di Bode (fig. 20.17) si osserva che il circuito agisce contemporaneamente da ritardatore e anticipatore, ma in due bande di frequenza diverse.

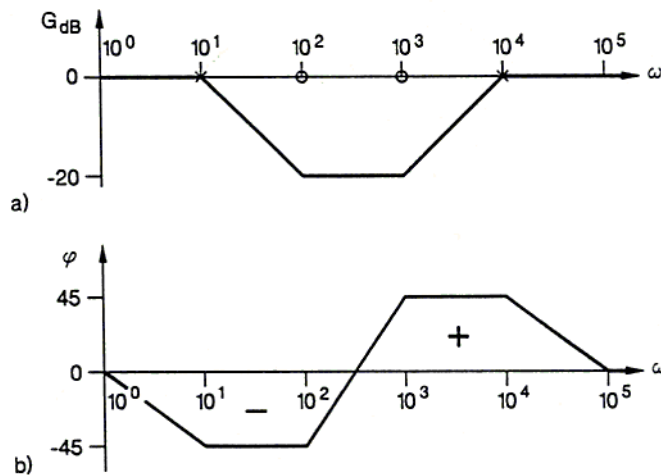


Fig. 20.17 Diagrammi di Bode di un quadripolo a sella.

Riepilogo

I criteri di stabilità

Criterio di Routh-Hurwitz

La funzione di trasferimento non deve avere poli con parte reale positiva.

Si forma un determinante multiplo dei coefficienti e si verifica che tutti i determinanti parziali siano positivi.

Eq. di 2° grado: $a_1 > 0$; $a_0 > 0$

Eq. di 3° grado: $a_2 > 0$; $a_2 a_1 - a_3 a_0 > 0$; $a_0 > 0$

Eq. di 4° grado: $a_3 > 0$; $a_3 a_2 - a_4 a_1 > 0$; $a_1(a_3 a_2 - a_4 a_1) - a_0 a_3 > 0$; $a_0 > 0$.

Criterio di Nyquist

Un sistema è stabile se il diagramma polare di GH non abbraccia il punto $(-1, 0)$.

Margine di guadagno: $M_G = 20 \log(1/a)$;

margine di fase: $\varphi_M = 180 - \varphi$.

Criterio di Bode

Un sistema è stabile se:

– per 0 dB è $\varphi < 180^\circ$;

– per $\varphi = 180^\circ$ è $20 \log |GH| < 0$.

Margine di guadagno: $M_G = 20 \log |GH|$ (dB).

Margine di fase: $\varphi_M = 180 - \varphi$.

Quadripoli stabilizzatori

$$\text{Quadripolo ritardatore } G(s) = \frac{1 + s \tau_1}{1 + s \tau_2}$$

$$\text{con: } \tau_1 = (R_1 + R_2)C; \quad \tau_2 = R_2 C.$$

$$\text{Quadripolo anticipatore } G(s) = \frac{1 + s \tau_1}{1 + s \tau_2}$$

$$\text{con: } \tau_1 = R C; \quad \tau_2 = (R_1 // R_2) C$$

$$\text{Quadripolo a sella } G(s) = \frac{(1 + s \tau_2)(1 + s \tau_3)}{(1 + s \tau_1)(1 + s \tau_4)}$$

$$\text{con: } \tau_1 = (R_1 + R_2)C_2; \quad \tau_2 = R_2 C_2; \quad \tau_3 = R_1 C_1; \quad \tau_4 = (R_1 // R_2) C_1$$

Esercizi da svolgere

- 20.1 Ricercare col criterio di *RH* il segno delle radici del polinomio $y = s^2 + 6s + 5$ e calcolarne il valore.
- 20.2 Ricercare col criterio di *RH* il segno delle radici del polinomio $y = s^3 + 10s^2 + 31s + 30$ e calcolarne il valore.
- 20.3 Un sistema retroazionato, avente guadagno statico $G(0) = 12$ dB, presenta tre poli in corrispondenza alle pulsazioni: $\omega_{p_1} = 2$ krad/s, $\omega_{p_2} = 5$ krad/s, $\omega_{p_3} = 20$ krad/s. Determinare se il sistema è stabile e, in questo caso, calcolare i margini di guadagno e di fase.

IL CRITERIO DI ROUTH

Il criterio di Routh consente di stabilire la presenza di poli a parte reale positiva dall'esame dei coefficienti dell'equazione caratteristica del sistema. Esso si basa su alcune proprietà matematiche delle equazioni algebriche, che permettono di stabilire il segno delle soluzioni senza dover risolvere l'equazione stessa.

Si consideri dunque che l'equazione caratteristica di un sistema, le cui soluzioni producono i poli, sia espressa da:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad [A1]$$

Uno dei teoremi dell'algebra afferma che condizione necessaria, ma non sufficiente, affinché le soluzioni siano tutte negative è che i coefficienti a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 siano tutti dello stesso segno e diversi da zero.

Se detta condizione non si verifica, il sistema è sicuramente instabile per la presenza di qualche polo (soluzione) a parte reale positiva. Se la condizione è verificata, essa non è ancora sufficiente ad assicurare che tutte le radici siano negative; a questo punto può essere adoperato il criterio di Routh per accertare la presenza o meno di radici a parte reale positiva. Allo scopo occorre costruire la seguente tabella:

| | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----|-----|
| a_n | a_{n-2} | a_{n-4} | ... | ... |
| a_{n-1} | a_{n-3} | a_{n-5} | ... | ... |
| b_1 | b_2 | b_3 | ... | ... |
| c_1 | c_2 | ... | ... | |
| d_1 | d_2 | ... | ... | |
| ... | ... | | | |
| h_1 | | | | |
| k_1 | | | | |

dove a partire dagli elementi noti delle prime due righe gli elementi successivi si ricavano con le

seguenti regole:

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$b_3 = \dots$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$c_3 = \dots$$

e così via per ogni altro elemento della tabella fino a terminare il procedimento quando un elemento sia nullo.

In sintesi, indicati genericamente con:

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots$$

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \dots$$

gli elementi delle due ultime righe della tabella, ogni elemento della riga successiva si ottiene con la regola:

$$z_k = -\frac{1}{y_1} \begin{vmatrix} x_1 & x_{k+1} \\ y_1 & y_{k+1} \end{vmatrix}$$

Costruita la tabella, il criterio di Routh stabilisce che «il numero di radici a parte reale positiva dell'equazione [A1] è pari al numero di variazioni di segno negli elementi della prima colonna».

Prima di vedere un'applicazione, osserviamo che il criterio di Routh permette di determinare se un sistema sia stabile, ma non consente né di determinare i poli né di ottenere elementi di conoscenza che ci consentano di operare un intervento per stabilizzare il sistema.

Come esempio di applicazione si prenda in considerazione l'equazione caratteristica:

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 5s^2 + s + 4 = 0 \quad [A2]$$

Le prime due righe della tabella sono:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{array}$$

Dagli elementi di questa si ricava:

$$b_1 = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}; \quad b_2 = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

Successivamente, componendo le tre righe:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1/2 & -1 & \end{array}$$

si ricava:

$$c_1 = -2 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1/2 & -1 \end{vmatrix} = 9; \quad c_2 = -2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

Si ottiene la quarta riga:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1/2 & -1 & \\ 9 & 4 & \end{array}$$

Abbiamo ancora da calcolare:

$$d_1 = -\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1/2 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{11}{9}$$

che si aggiunge alla tabella:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1/2 & -1 & \\ 9 & 4 & \end{array}$$

$$-11/9$$

infine l'ultimo elemento:

$$e_1 = \frac{9}{11} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -11/9 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

La tabella completa di tutti gli elementi è dunque:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1/2 & -1 & \\ 9 & 4 & \\ -11/9 & & \\ 4 & & \end{array}$$

Scorrendo gli elementi della prima colonna, si notano due variazioni di segno. Il sistema, di cui l'equazione [A2] è equazione caratteristica, ha pertanto due poli a parte reale positiva ed è per conseguenza instabile.

RETI DI COMPENSAZIONE

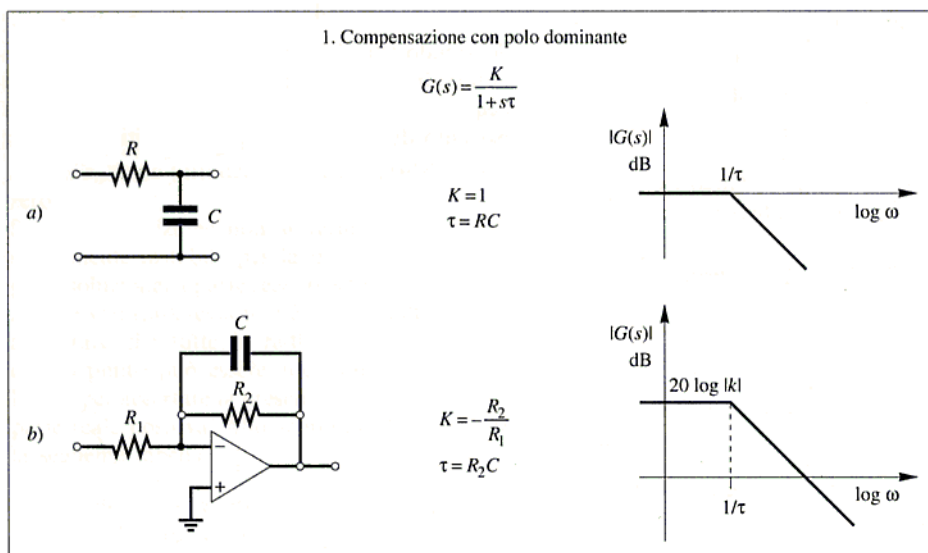
Viene presentata una rassegna di reti elettriche attive e passive che possono essere utilizzate per compensare un sistema.

Osserviamo che le reti passive hanno guadagno statico unitario, ad eccezione della rete anticipatrice nella sezione 3 della tab. A1 (fig. a), il cui guadagno è unitario ad infinito ed inferiore ad 1 a frequenza zero.

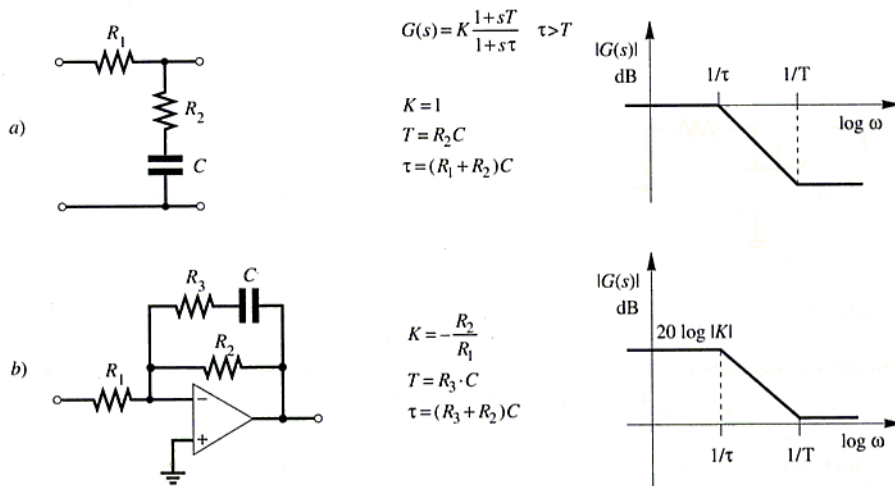
Le reti attive consentono viceversa di regolare il

guadagno statico o il guadagno proporzionale (sezione 6); fa ancora eccezione la rete anticipatrice nella sezione 3 della tab. A1 (fig. b), il cui guadagno statico è unitario. Inoltre sempre con l'eccezione di quest'ultima, tutte le reti attive invertono il segnale; in tal caso, se già non esiste nel sistema un amplificatore invertente, sarà necessario inserirne uno allo scopo di ripristinare la fase del segnale.

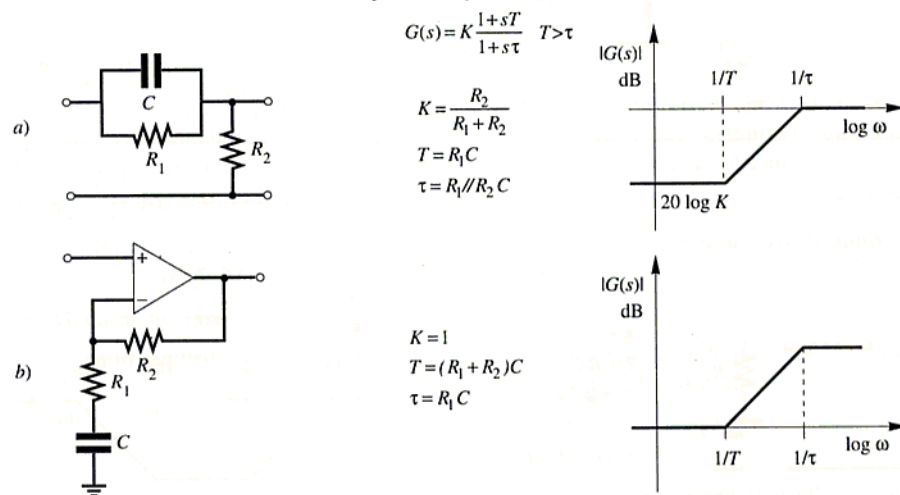
Tab. A1 - Reti di compensazione.



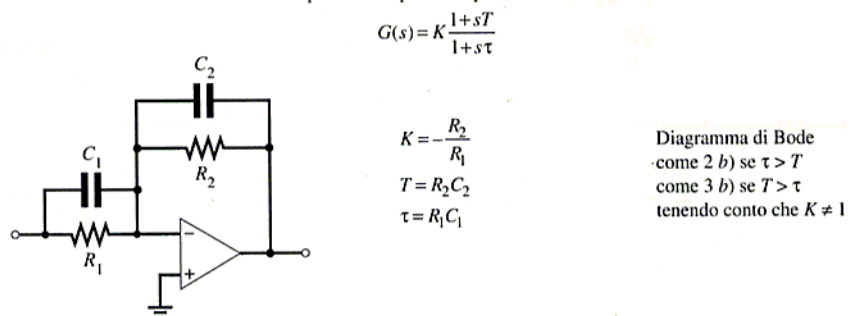
2. Compensazione per ritardo di fase



3. Compensazione per anticipo di fase

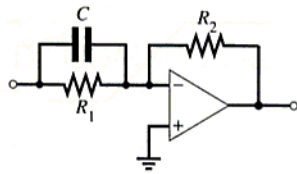


4. Compensazione per anticipo o ritardo di fase



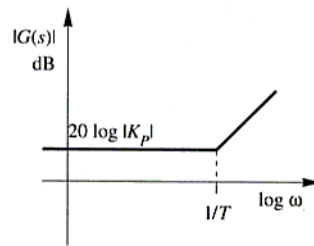
5. Compensazione proporzionale-derivativa

$$G(s) = K_p(1+sT)$$



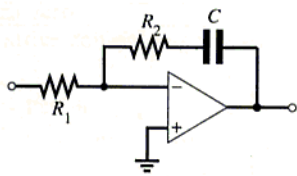
$$K_p = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$T = R_1 C$$



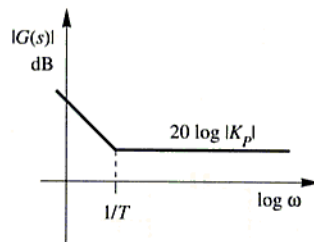
6. Compensazione proporzionale-integrale

$$G(s) = K_p \frac{1+sT}{sT}$$



$$K_p = -\frac{R_2}{R_1}$$

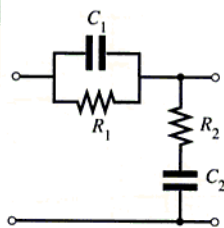
$$T = R_2 C$$



7. Compensazione con rete a sella

$$G_s = K \frac{(1+sT_1)(1+sT_2)}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$

$$\tau_1 > T_1 > T_2 > \tau_2$$



a)

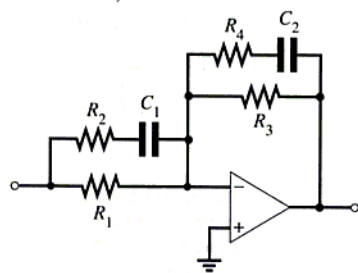
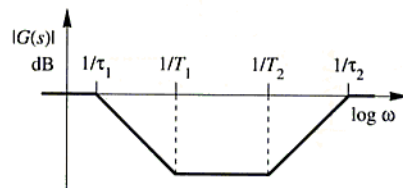
$$K = 1$$

$$T_1 = R_1 C_1$$

$$T_2 = R_2 C_2$$

$$\tau_1 \cdot \tau_2 = T_1 \cdot T_2$$

$$\tau_1 + \tau_2 = T_1 + T_2 + R_1 C_2$$



b)

$$K = -\frac{R_3}{R_1}$$

$$T_1 = (R_1 + R_2) C_1$$

$$T_2 = R_4 \cdot C_2$$

$$\tau_1 = (R_3 + R_4) C_2$$

$$\tau_2 = R_2 \cdot C_1$$

