ESERCIZIO 2 – Sistemi del secondo ordine

Si consideri il sistema lineare tempo invariante descritto nello "Spazio degli Stati" dalla relazione costitutiva seguente:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned} \quad \textit{in cui si deve intendere:} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Si desidera determinare, tramite SCILAB:

- ***la Funzione di Trasferimento del Sistema Lineare in oggetto;***
- ***i poli e gli zeri del sistema con le relative verifiche nonché la rappresentazione cartesiana della loro dislocazione nel piano della variabile complessa "s";***
- ***la risposta al gradino unitario in relazione alle seguenti condizioni iniziali:*** ***X_{01} = [1;1] – X_{02} = [2;0] – X_{03} = [-2;-1] – X_{04} = [0;-1] – X_{05} = [4;2];***
- ***La risposta a regime per il segnale di ingresso u(t) = sin(8·t) con le stesse condizioni iniziali indicate al punto precedente;***
- ***Visualizzare stato ed uscita nei confronti del segnale u(t)= sin(8·t) nel caso delle condizioni iniziali date da X_{01} = [1;1];***
- ***Il movimento libero dell'uscita y(t) dovuto alle condizioni iniziali X_{01} = [1;1] – X_{02} = [2;0] e X_{06} = [-1;0];***

Ipotesi Risolutiva

```
-->A=[-1 2;0 -3];B=[1;2];C=[1 0];D=0;
-->GSS=syslin('c',A,B,C,D);
-->GTF=ss2tf(GSS)
```

$$\rightarrow \quad \boxed{GTF = \frac{7+s}{3+4s+s^2}}$$

```
-->poliGTF=roots(GTF.den);
-->zeriGTF=roots(GTF.num);
```

$$\rightarrow \quad \boxed{z_1 = -7 \qquad p_1 = -1 \quad p_2 = -3}$$

Procedura di verifica mediante il calcolo degli auto valori della matrice A e manipolazione della GTF

```
-->spec(A);
-->[d,num,den]=ss2tf(GSS);
```

$$\rightarrow \quad \boxed{den = 3 + 4s + s^2 \qquad num = 7 + s \qquad d = 0}$$

```
-->poli=roots(den)
-->zeri=roots(num)
```

Procedura di verifica mediante rappresentazione nel piano complesso "s" dei poli e degli zeri

```
-->plzr(GTF)
```

Determinazione della risposta al gradino unitario sca(t) in relazione alle condizioni iniziali. Per avere lo effetto delle condizioni iniziali si deve considerare il sistema assegnato nello Spazio degli Stati:

```
-->X01=[1;1];X02=[2;0];X03=[-2;-1];X04=[0;-1];X05=[4;2];
-->GSS1=syslin('c',A,B,C,D,X01);
-->GSS2=syslin('c',A,B,C,D,X02);
-->GSS3=syslin('c',A,B,C,D,X03);
```

-->GSS4=syslin('c',A,B,C,D,X04);

-->GSS5=syslin('c',A,B,C,D,X05);

Il sistema dinamico tempo invariante del secondo ordine presenta due poli reali e distinti ($\xi > 1$) e la durata della risposta al gradino risulta determinata dalle loro costanti di tempo, ovvero dalla posizione dei poli nel piano "s"; si può ritenere che la durata sia pari a Ta =$\cdot 5 \cdot \tau$, essendo τ la costante di tempo più grande (polo più vicino all'origine), anche se le due costanti di tempo sono vicine.

-->t=0:0.01:6;

-->[y1,x1]=csim('step',t,GSS1);

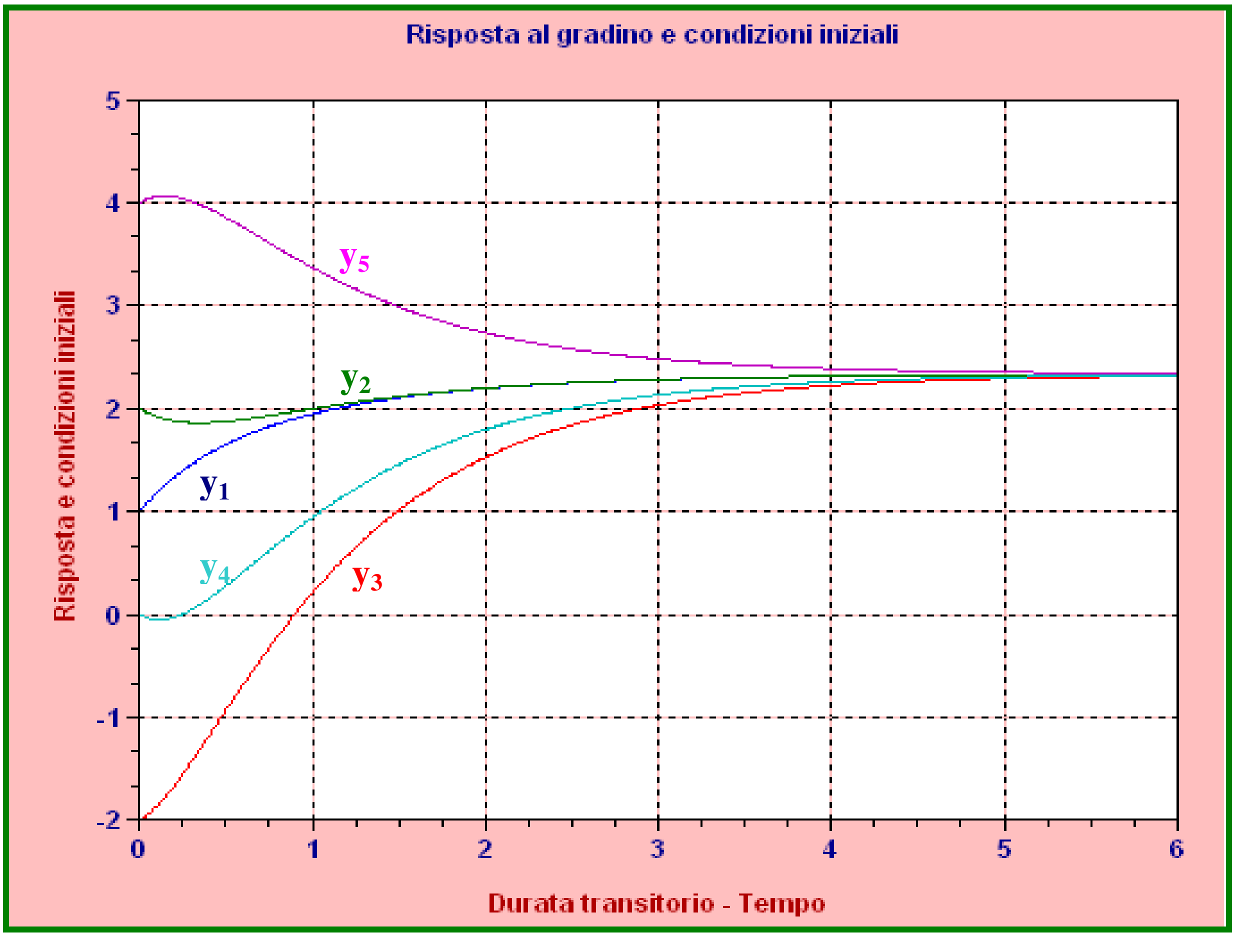
-->[y2,x2]=csim('step',t,GSS2);

-->[y3,x3]=csim('step',t,GSS3);

-->[y4,x4]=csim('step',t,GSS4);

-->[y5,x5]=csim('step',t,GSS5);

-->plot(t,y1,t,y2,t,y3,t,y4,t,y5),xgrid



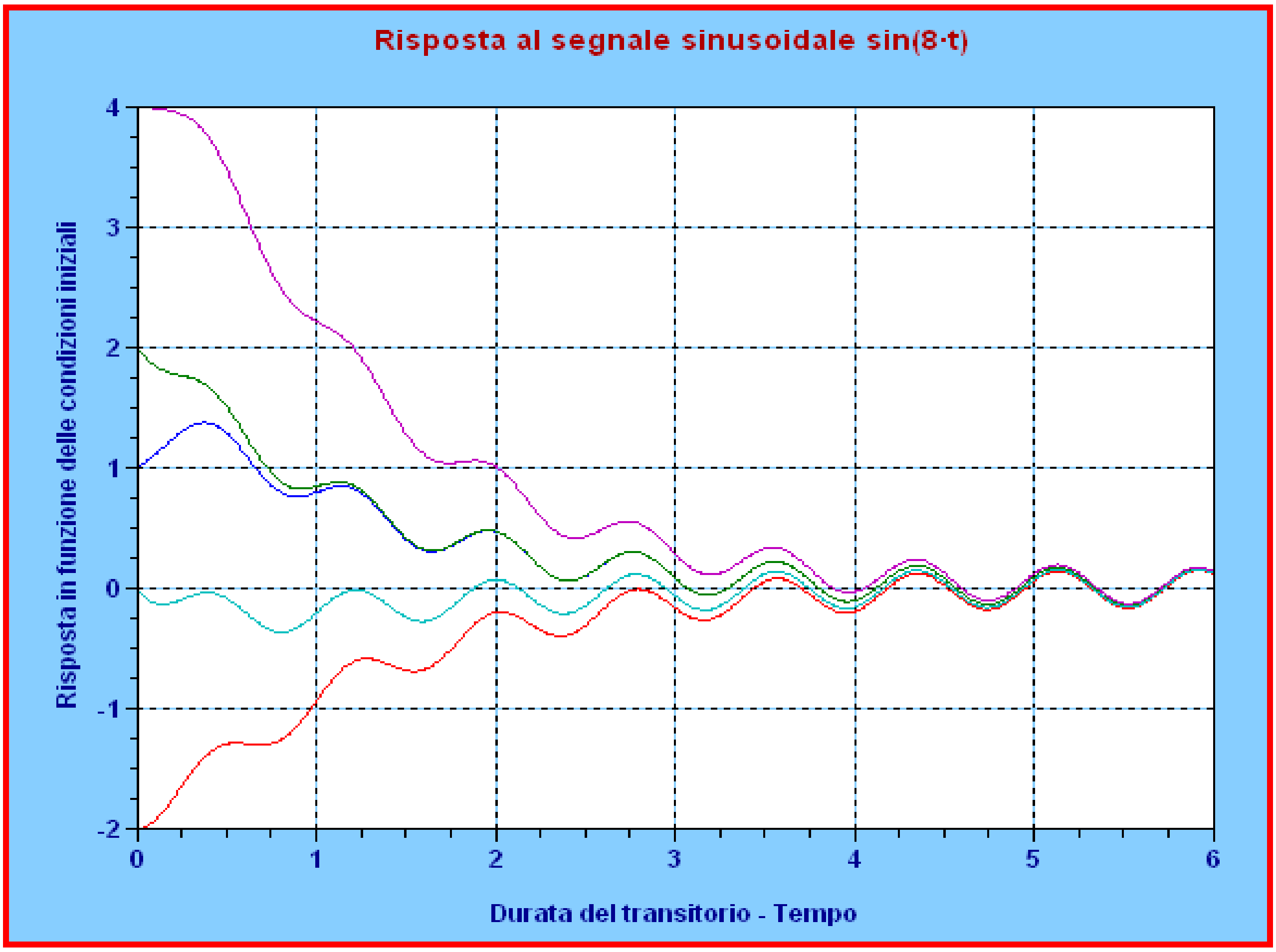
$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{7+s}{3+4s+s^2} = \frac{7}{3}$$

Determinazione della risposta al segnale sinusoidale u(t) = sin(8·t) in relazione alle condizioni iniziali. Per avere l'effetto delle condizioni iniziali si deve considerare il sistema assegnato nello Spazio degli Stati:

-->u=sin(8*t);

-->[ya,xa]=csim(u,t,GSS1);

```
-->[yb,xb]=csim(u,t,GSS2);
-->[yc,xc]=csim(u,t,GSS3);
-->[yd,xd]=csim(u,t,GSS4);
-->[ye,xe]=csim(u,t,GSS5);
-->scf(1);plot(t,ya,t,yb,t,yc,t,yd,t,ye),xgrid
```



(ya = bleu - yb = verde - yc = rosso - yd = ciano - ye = magenta)

Visualizzazione del vettore dello stato x(t) e dell'uscita y(t) nei confronti del segnale u(t)= sin(8·t) nel caso delle condizioni iniziali date da X_{01} = [1;1];

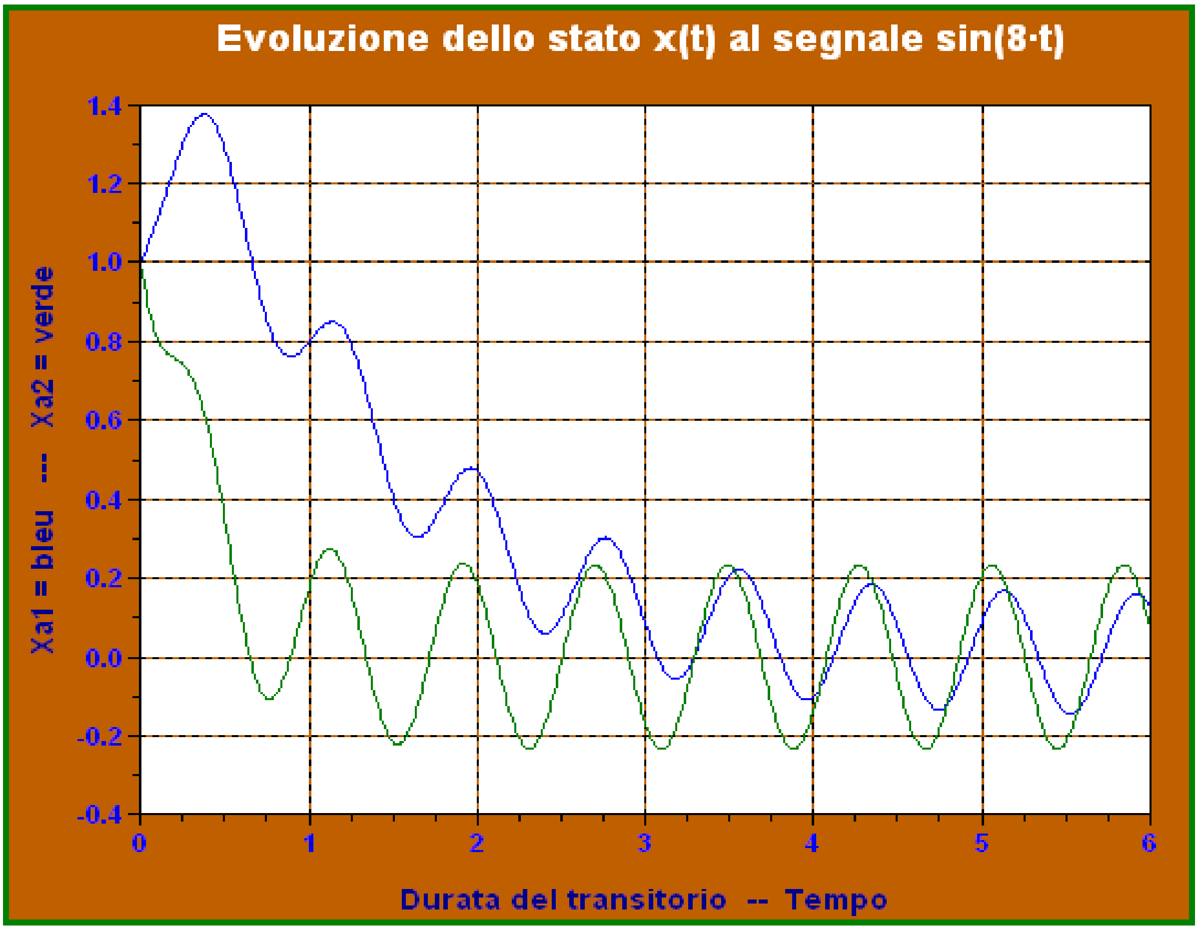
```
-->scf(2);plot(t,xa),xgrid
-->scf(3);plot(t,ya),xgrid
```

Osservazione

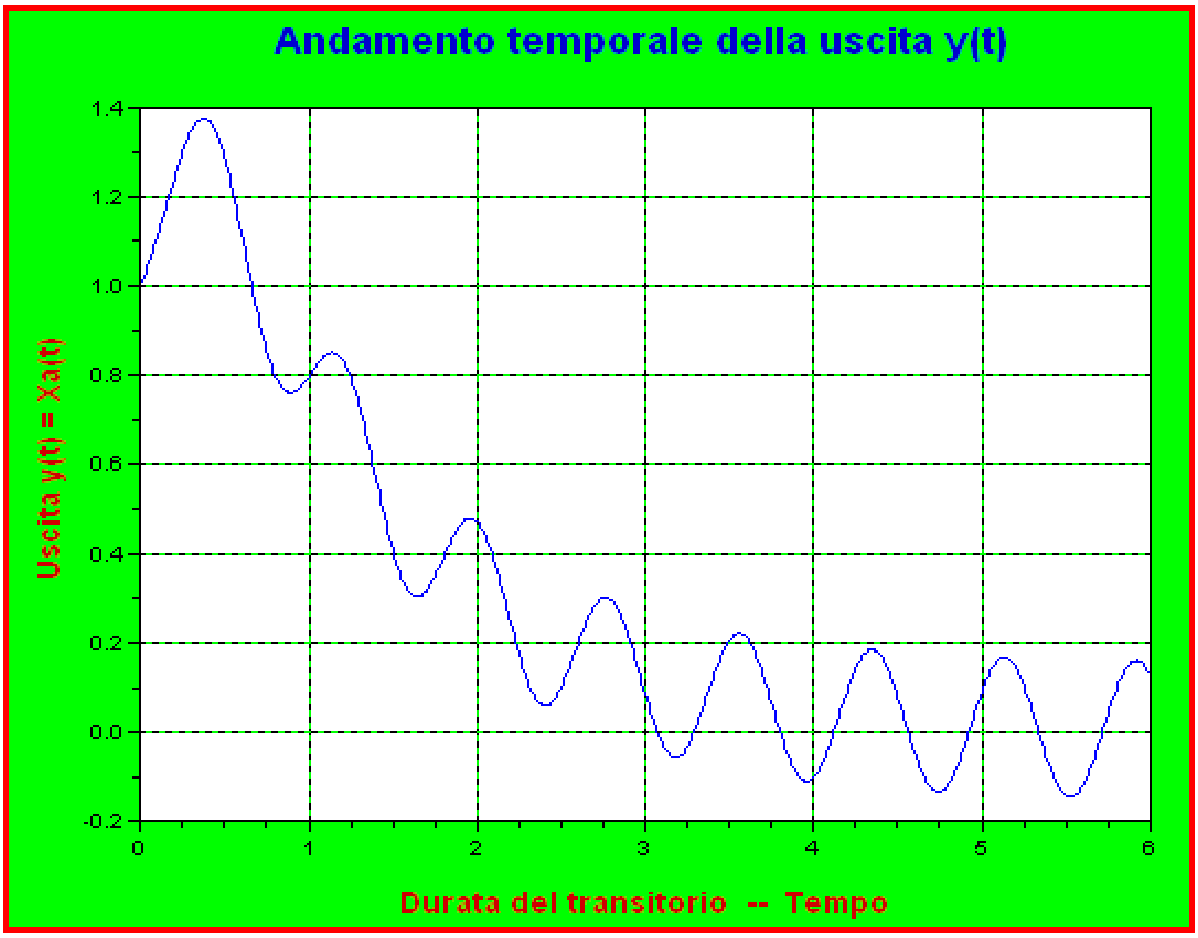
Come si deduce dalla "relazione costitutiva" del Sistema Dinamico Lineare Tempo Invariante, l'uscita y(t), data la matrice C = [1 0], è funzione della sola componente $x_1(t)$ del vettore di stato x(t).
Consegue, per tant,o che l'andamento temporale dell'uscita y(t) coincide, istante per istante, con l'evoluzione temporale della componente $x_1(t)$ del vettore di stato x(t), ovvero: $y(t) = x_1(t)$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\cdot u(t) \qquad y = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = x_1$$

I grafici che seguono confermano quanto sopra esposto.



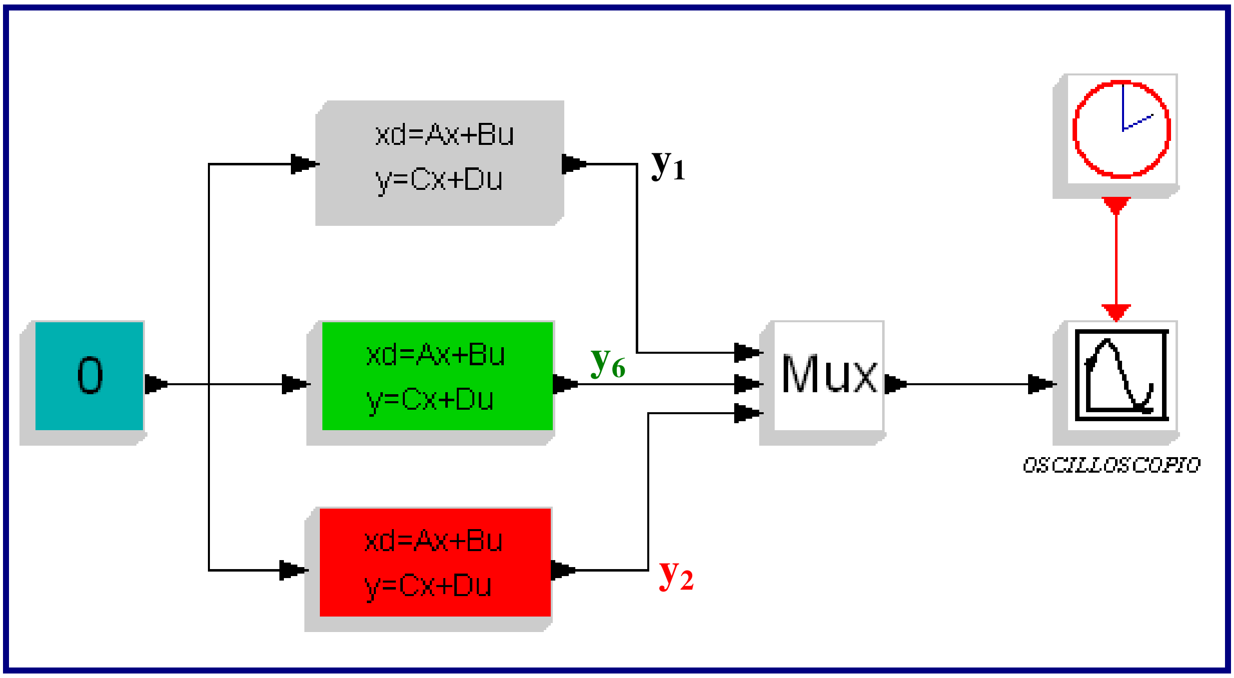
(Andamento temporale delle componenti del vettore di stato x(t)

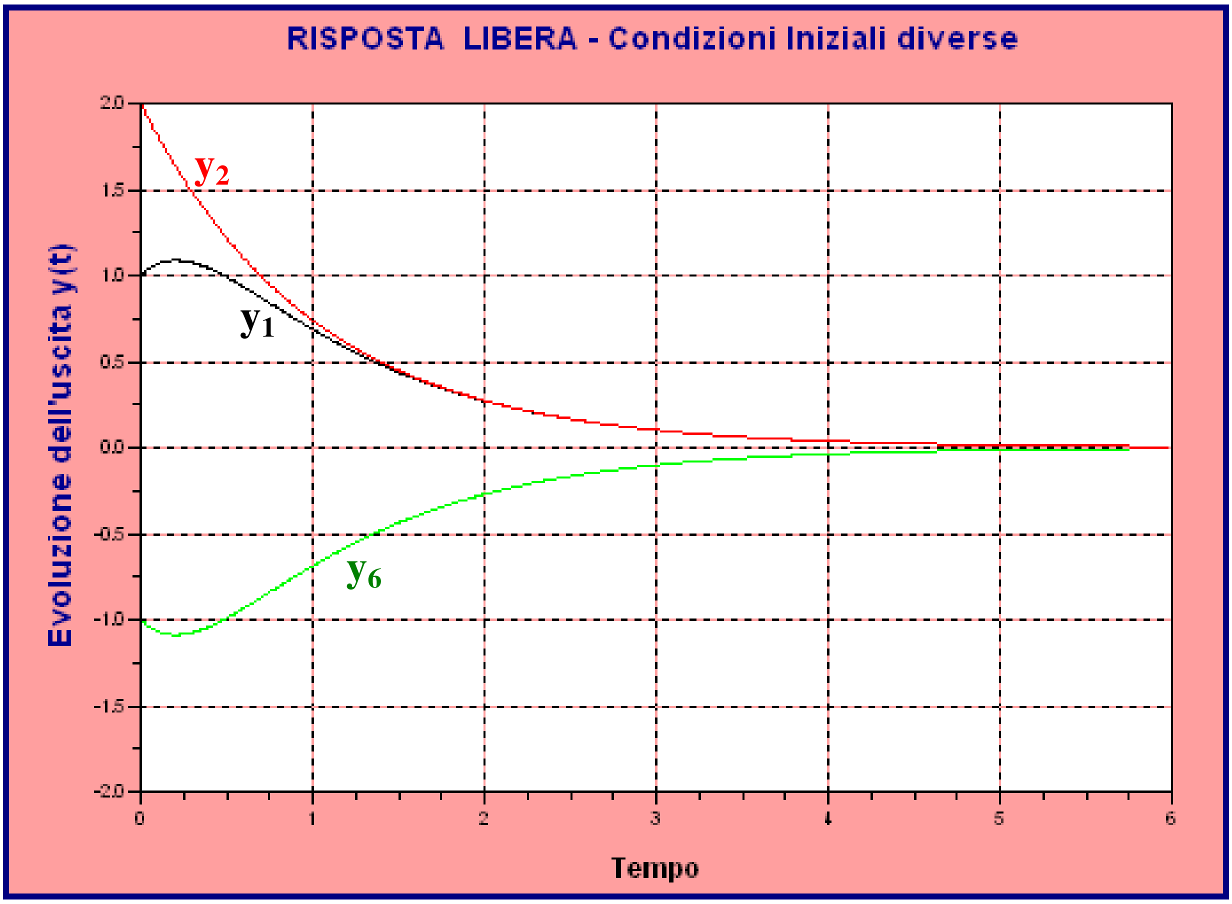


Si desidera determinare, in ambiente SCICOS, la risposta libera del Sistema Lineare Dinamico Tempo Invariante, già descritto nello Spazio degli Stati dalle matrici A = [-1 2 ; 0 -3], B = [1 ; 2], C = [1 0] e D = 0, nei casi in cui sono assegnate le tre condizioni iniziali di seguito riportate:

$x_{01} = [1 ; 1]$ -- -- $x_{02} = [2 ; 0]$ -- $x_{06} = [-1 ; -1]$.

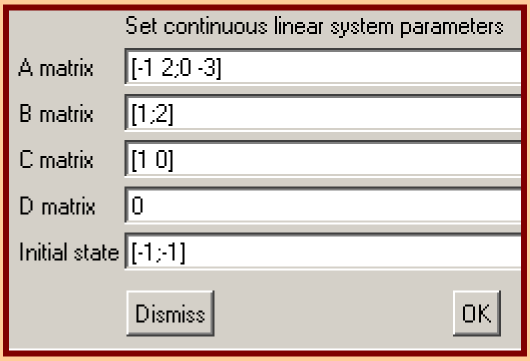
Lo schema da realizzare è il seguente:



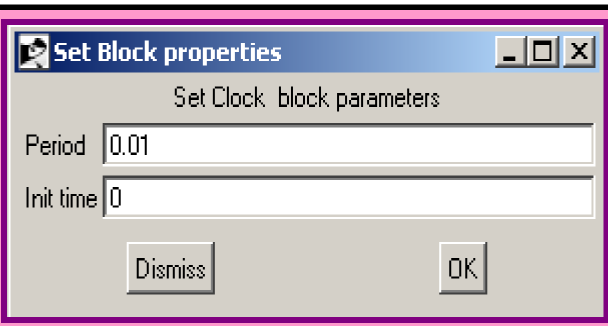


(nero → x_{01} --- verde → x_{06} --- rosso → x_{02})

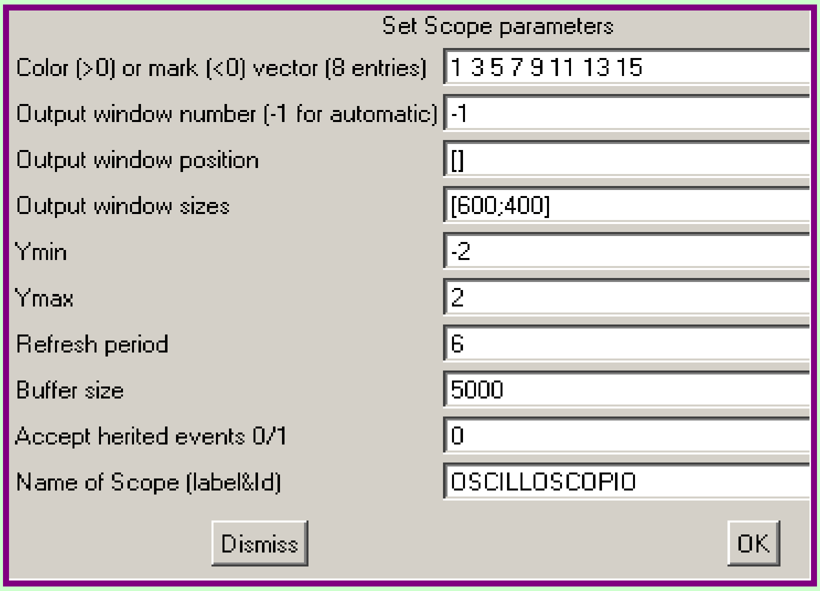
(rappresentazione grafica delle risposte libere ottenute con l'oscilloscopio di SCICOS)



Impostazione delle matrici



Impostazione dei parametri dell'orologio



Impostazione dei parametri dell'oscilloscopio

Le istruzioni necessarie ad ottenere lo stesso risultato nell' ambiente di SCILAB sono di seguito riportate:

Risposta libera con Scilab

```
-->A=[-1 2;0 -3];B=[1;2];C=[1 0];D=0;
-->x06=[-1;-1];x02=[2;0];x01=[1;1];
-->GSS1=syslin('c',A,B,C,D,x01);
-->GSS2=syslin('c',A,B,C,D,x02);
-->GSS6=syslin('c',A,B,C,D,x06);
-->t=0:0.01:6;
-->u=zeros(1,max(size(t)));
-->[y1,x1]=csim(u,t,GSS1);
-->[y2,x2]=csim(u,t,GSS2);
-->[y6,x6]=csim(u,t,GSS6);
-->plot(t,y1,t,y2,t,y3),xgrid
```

La visualizzazione del movimento libero dello stato è determinata dall'istruzione seguente :

```
-->plot(t,x1,t,x2,t,x3),xgrid
```

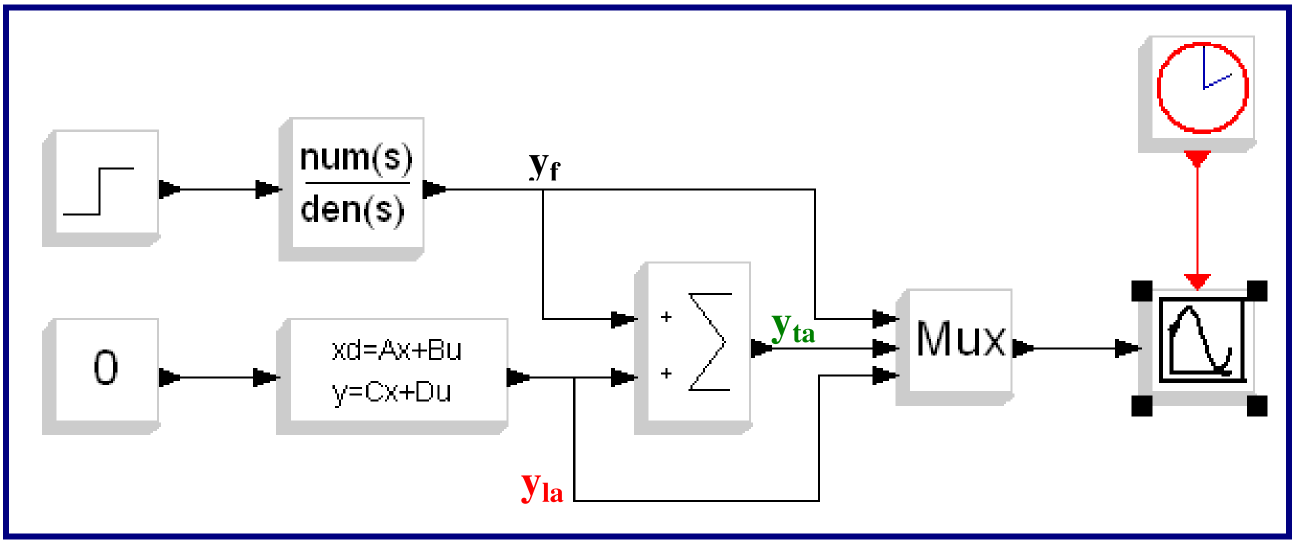
Determinazione della RISPOSTA LIBERA, RISPOSTA FORZATA e RISPOSTA TOTALE

```
-->A=[-1 2;0 -3];B=[1;2];C=[1 0];D=0;
-->X0a=[4;2];X0b=[-2;-1];
-->GSS=syslin('c',A,B,C,D)
-->GSSa=syslin('c',A,B,C,D,X0a);
-->GSSb=syslin('c',A,B,C,D,X0b);
-->t=0:0.01:6;
-->u=zeros(1,max(size(t)));
-->yla=csim(u,t,GSSa);
-->ylb=csim(u,t,GSSb);
-->GTF=ss2tf(GSS);
-->yf=csim('step',t,GTF);
-->yta=yla+yf;ytb=ylb+yf;
-->scf(1);plot(t,yla,t,yf,t,yta),xgrid
-->scf(2);plot(t,ylb,t,yf,t,ytb),xgrid
```

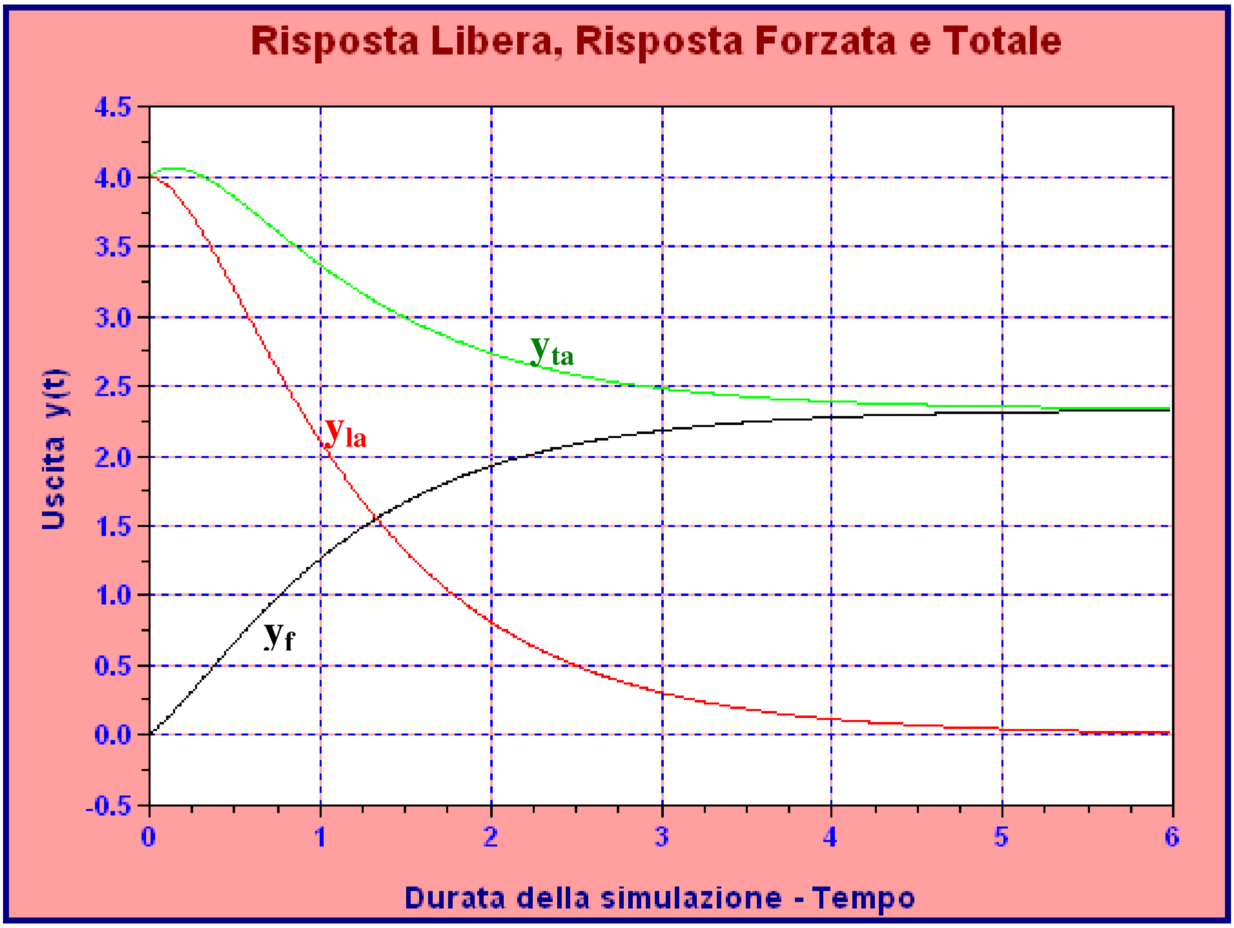
Verifica dei risultati tramite il calcolo della risposta totale operando direttamente nello Spazio degli Stati

```
-->ytta=csim('step',t,GSSa);
-->yttb=csim('step',t,GSSb);
-->scf(3);plot(t,ytta,t,yttb),xgrid
```

Lo schema a blocchi idoneo alla determinazione della RISPOSTA LIBERA, della RISPOSTA FORZARA e della RISPOSTA TOTALE in ambiente di simulazione SCICOS, relativo alla sola condizione iniziale X0a = [4;2], è mostrato nella figura che segue.



Il grafico corrispondente ottenuto tramite l'oscilloscopio di SCICOS è il seguente:



Risposta Libera, Risposta Forzata e Totale
Uscita y(t)
Durata della simulazione - Tempo
y_{ta}
y_{la}
y_f
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
0
1
2
3
4
5
6