Svolgimento esercizio 14 del secondo gruppo

$$P(s) = \frac{80(s+1)}{s(s+0.5)(s^2-4)}$$

Si completa la fattorizzazione $P(s) = \dfrac{80(s+1)}{s(s+0.5)(s+2)(s-2)}$

Calcoli preliminari:

$$K_{BODE} = \frac{80 \times 1}{0.5 \times 2 \times -2} = -40$$

$$|K_{BODE}|_{dB} = 20 \log_{10}(40) \approx 32$$

← il segno negativo di K_{BODE} qui non è influente!

$$\varphi_{in} = \underset{\uparrow}{+180} - \underset{\nwarrow}{90} = +90$$

contributo dovuto al segno negativo di K_{BODE} (si può anche scegliere −180)

contributo dovuto al polo singolo in $s=0$

$$P_{in} = -20 \frac{dB}{dec}$$ (1 polo singolo in $s=0$)

$$\varphi_{fin} = \underset{\varphi_{in}}{+90} + \underset{\text{zero in } s=-1}{90} - \underset{\text{polo in } s=-0.5}{90} - \underset{\text{polo in } s=-2}{90} + \underset{\text{polo in } s=+2}{90} = +90$$

← vedere osservazione successiva

$$P_{fin} = \underset{\text{1 solo zero}}{+20 \frac{dB}{dec}} + \underset{\text{4 poli tutti singoli}}{4\left(-20 \frac{dB}{dec}\right)} = -60 \frac{dB}{dec}$$

punti di rottura:

Moduli: $\omega_{M1} = 0.5$, $\omega_{M2} = 1$, $\omega_{M3} = 2$

Fasi: si nota dapprima che i fattori $(s+2)$ e $(s-2)$ a denominatore contribuiscono al diagramma delle fasi con due contributi uguali in modulo ed opposti in segno, che si elidono completamente (anche nel

diagramma vero, non solo in quello approssimato), quindi possono essere trascurati completamente nel diagramma delle fasi.

per il fattore $(s+1)$: $\quad 0.1 \quad 10$

$(s+0.5)$: $\quad 0.05 \quad 5$

quindi $\omega_{F1} = 0.05$, $\omega_{F2} = 0.1$, $\omega_{F3} = 5$, $\omega_{F4} = 10$

Appare chiaro che per tracciare il diagramma dei moduli basta avere nella carta l'intervallo di ω $(0.1, 10)$ mentre per il diagramma delle fasi occorre $(0.01, 100)$

non del tutto necessario, l'ultimo segmento orizzontale può stare fuori dalla carta graduata, nel margine bianco.

quindi sono sufficienti

$$\underbrace{0.01 \quad 0.1}\ \underbrace{\quad 1}\ \underbrace{\quad 10}\ \underbrace{\quad 100}$$

4 decadi, con 2 decadi prima di $\omega = 1$ e 2 decadi dopo

Tabelline delle pendenze (non ci sono né poli né zeri immaginari, quindi non ci sono asintoti verticali nei moduli né salti nelle fasi)

Moduli

	$\omega_{M1} = 0.5$		$\omega_{M2} = 1$		$\omega_{M3} = 2$	
-20		-40		-20		-60

$-60 \rightarrow$ pendenza finale OK

-20: Pin

ω_{M1}: "entra in azione" un polo semplice $\Delta p = -20$

ω_{M2}: zero semplice $\Delta p = +20$

ω_{M3}: due poli semplici (stesso modulo) $\Delta p = -40$

Fasi

	ω_{F1} 0.05		ω_{F2} 0.1		ω_{F3} 5		ω_{F4} 10	
$\emptyset$		-45		$\emptyset$		$+45$		$\emptyset$

è sempre $\emptyset \rightarrow \emptyset$

$\emptyset \rightarrow$ è sempre $\emptyset$ OK

ω_{F1}: "entra in azione" un polo semplice con $\mathrm{Re}(p) < 0$ $\Delta = -\frac{45°}{dec}$

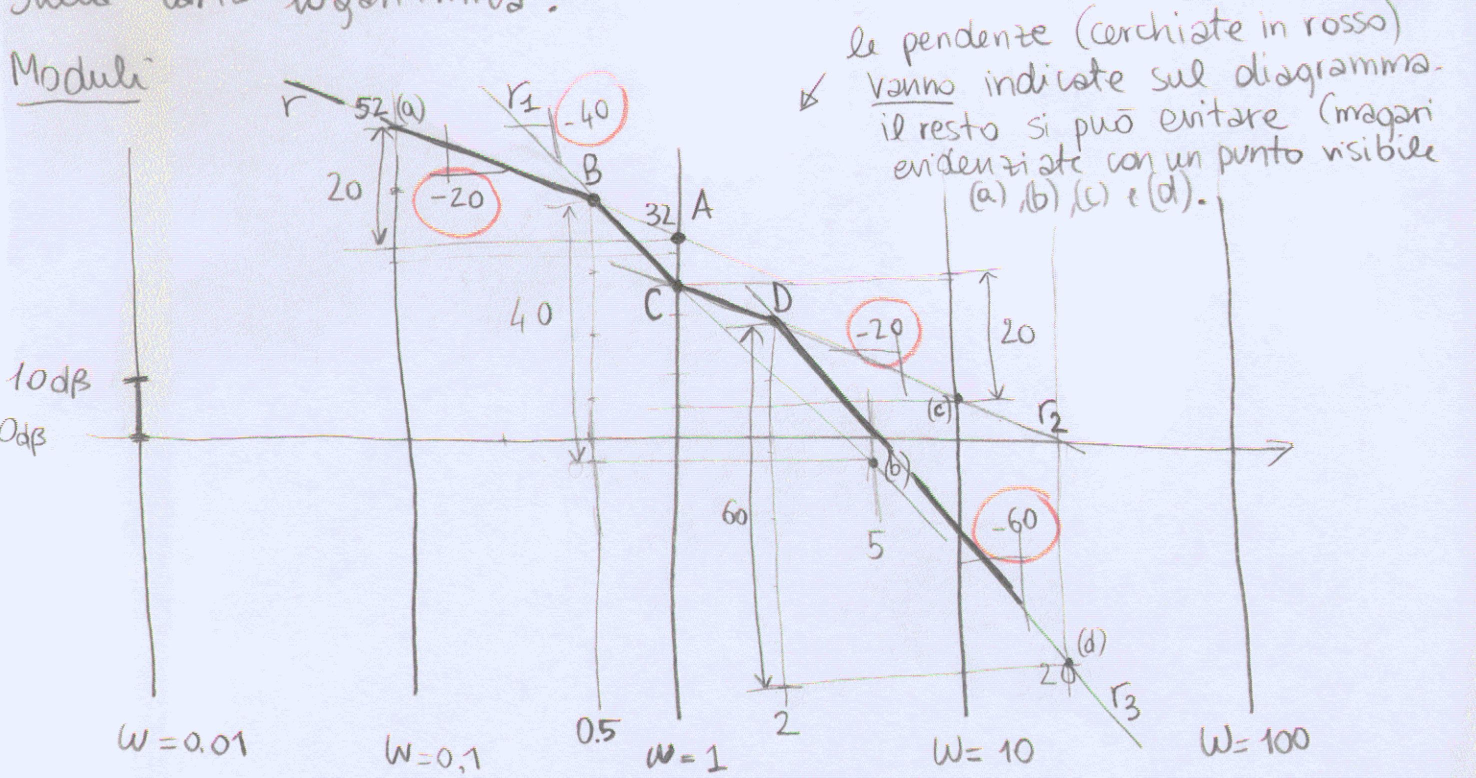
ω_{F2}: zero semplice con $\mathrm{Re}(z) < 0$ $\Delta = +\frac{45°}{dec}$

ω_{F3}: finisce l'azione di un polo semplice con $\mathrm{Re}(p) < 0$ $\Delta = +\frac{45°}{dec}$

ω_{F4}: finisce l'azione di uno zero semplice con $\mathrm{Re}(z) < 0$ $\Delta = -\frac{45°}{dec}$

Sulla carta logaritmica:

Moduli



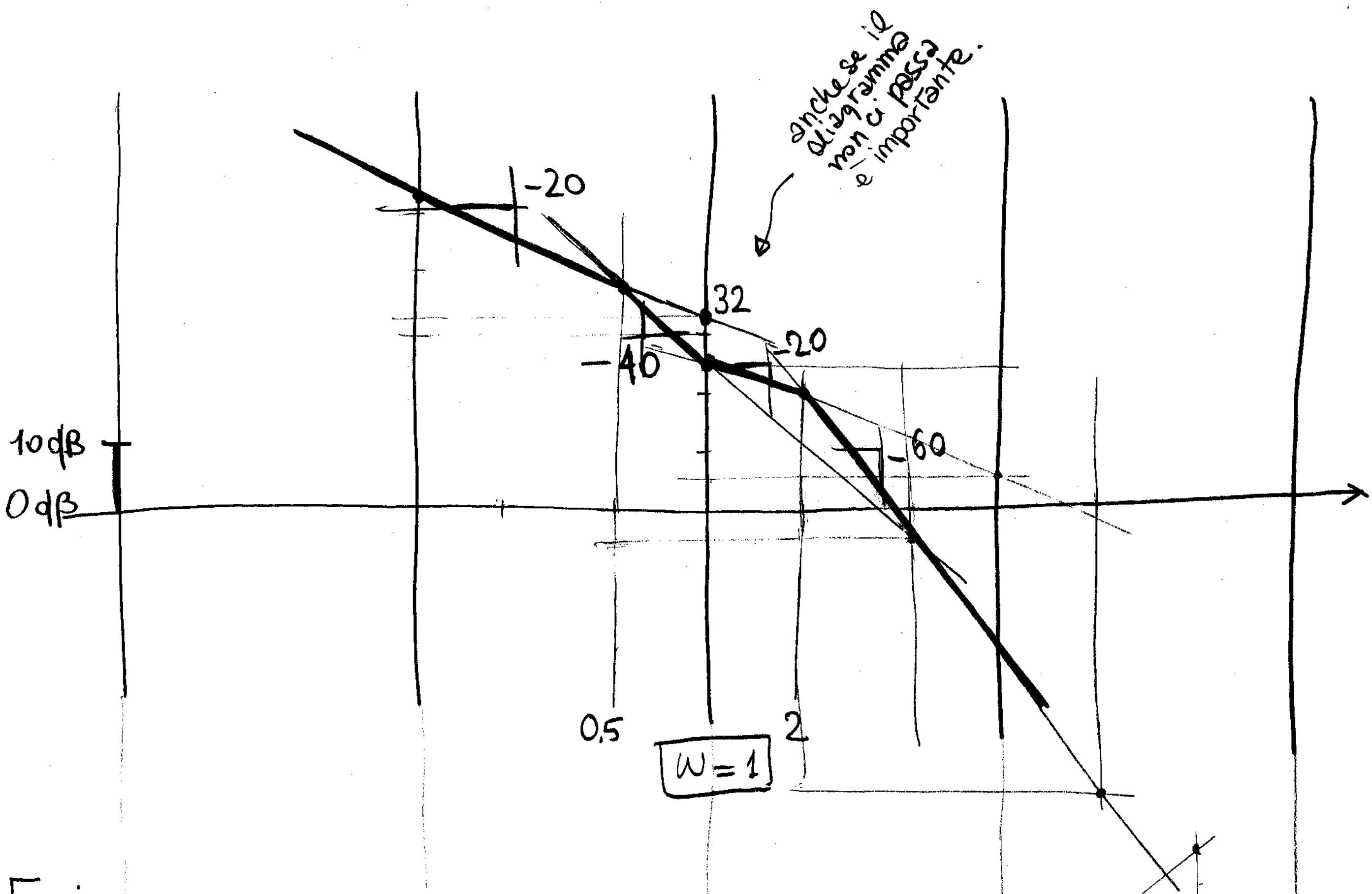
1) Scegliere $\omega = 1$, unità di misura
2) posizionare il punto A su $\omega = 1$, 32 dB
3) Tracciare, leggera, la retta r che passa per A con pendenza = pin = $-20\frac{dB}{dec}$
4) ripassare retta r fino a $\omega = \omega_{M1} = 0.5$
5) da $\omega_{M1} = 0.5$ a $\omega_{M2} = 1$ pendenza $-40\frac{dB}{dec}$ (segmento BC su retta r_1)

   da $\omega_{M2} = 1$ a $\omega_{M3} = 2$ pendenza $-20\frac{dB}{dec}$ (segmento CD su retta r_2)

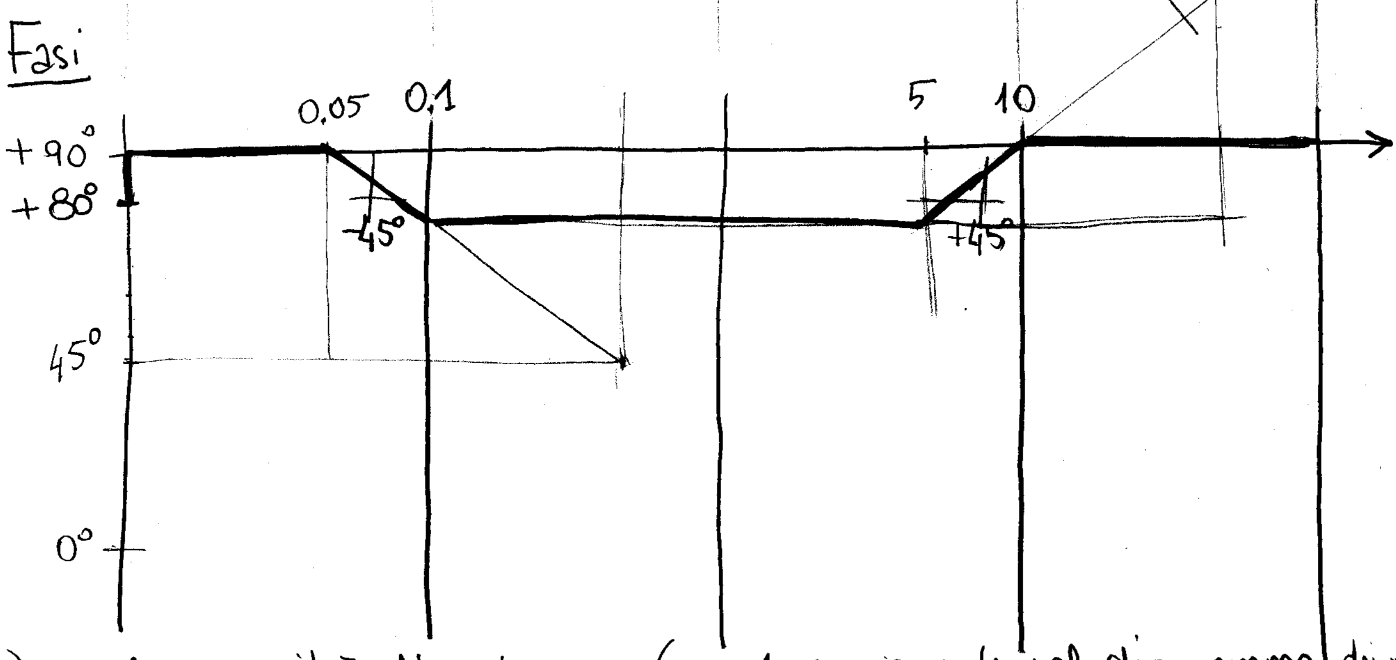
   da $\omega_{M3} = 2$ in poi pendenza $-60\frac{dB}{dec}$ (retta r_3)
6) pendenza finale $-60\frac{dB}{dec}$ OK (questo controllo è necessario se non si è fatta la tabellina)

Nota: per tracciare le rette r, r_1, r_2 e r_3, si sono usati i punti (a), (b), (c) e (d) posti a una decade di distanza, per individuare le pendenze. Se siete bravi con riga e squadra potete lavorare diversamente, ma con lo spazio a disposizione per le prove d'esame è difficile essere precisi con riga e squadra. La precisione del disegno conta poco finché tracciamo i diagrammi senza un fine preciso, ma sarà molto importante nell'ultima tipologia di esercizi che faremo (valutazione di specifiche sulla carta di Nichols).

Alla fine, a parte tutti i simboli che ho usato nella spiegazione, il diagramma che vorrei vedere è:



Fasi



1) scegliere unità di misura (ω = 1 corrisponde col diagramma dei moduli) e posizionare φ_{in} verticalmente

2) segmento orizzontale su $\varphi_{in} = 90°$ fino a $\omega_{F1} = 0.05$

3) da $\omega_{F1} = 0.05$ a $\omega_{F2} = 0.1$ pendenza $-45°/dec$

da $\omega_{F2} = 0.1$ a $\omega_{F3} = 5$ pendenza $0°/dec$

da $\omega_{F3} = 5$ a $\omega_{F4} = 10$ pendenza $+45°/dec$

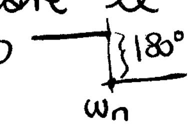
4) controllare che in ω_{F4} si abbia $\varphi_{fin} = +90°$ (a meno delle inevitabili imprecisioni grafiche).

Esercizio svolto

Tracciare i diagrammi di Bode approssimati per

$$P(s) = \frac{2s^2(s^2-0.4s+2)}{(s+3)(s^2+10)(1+0.05s)^3}$$

- $s^2-0.4s+2=0$ ha radici complesse ($\Delta = 0.16-8<0$) quindi si può scrivere come $s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2$ con $\omega_n=\sqrt{2}\approx 1.4$ e $\delta = \frac{0.4}{2\sqrt{2}} \approx 0.14$; $\omega_n = \sqrt{2}$ è il punto di rottura corrispondente a tale fattore sul diagramma dei moduli, $\sqrt{2}/10$ e $10\sqrt{2}$ sono i punti corrispondenti sul diagramma delle fasi a cui tale termine contribuisce con una pendenza di $-90°/dec$ (tra $\sqrt{2}/10$ e $10\sqrt{2}$) in quanto coppia di zeri complessi coniugati con $\delta<0 \Rightarrow \mathrm{Re}(z_{1,2})>0$. Il valore del modulo di δ, poiché $\in (0,1)$ non ha influenza sul diagramma approssimato, sarebbe però influente per le correzioni.
- s^2+10 ha radici immaginarie ($\pm\sqrt{10}j$, con $\sqrt{10}\approx 3.16$) quindi si può scrivere come $s^2+\omega_n^2$ con $\omega_n=\sqrt{10}$; $\omega_n=\sqrt{10}$ è il punto di rottura corrispondente a tale fattore sul diagramma dei moduli, in corrispondenza del quale va indicato anche sul diagramma approssimato un asintoto verticale con una freccia verso l'alto per ricordare che i moduli vanno a $+\infty$ in tale punto, $\omega_n=\sqrt{10}$ è anche un punto di salto sul diagramma delle fasi, nel quale andrà effettuato un salto di $-180°$ (oppure $+180°$). Questo fattore contribuisce al diagramma delle fasi <u>solo</u> con tale salto e non va considerato nell'effettuare le correzioni, in quanto il diagramma approssimato coincide con quello esatto.



Per individuare facilmente i punti di rottura conviene riscrivere

$$P(s) = \frac{2s^2(s^2-0.4s+2)}{\left(\frac{1}{20}\right)^3(s+3)(s^2+10)(s+20)^3}$$

Calcoli preliminari

$$K_{BODE} = \frac{2 \times 2}{3 \times 10} = \frac{2}{3 \times 5} = 0.1\overline{3}$$

$$|K_{BODE}|_{dB} = 20 \log_{10}(0.1\overline{3}) \approx -17.5$$ ← attenzione! il segno in decibel è <0, perché il valore naturale è <1, ma K_{BODE} è >0, quindi non contribuisce a φ_{in}!

$$\varphi_{in} = \underbrace{2 \times (+90^\circ)}_{\text{doppio zero in } s=0} = +180^\circ$$

$$p_{in} = 2 \times 20 \frac{dB}{dec} = +40 \frac{dB}{dec}$$ (zero doppio in $s=0$)

$$\varphi_{fin} = \underbrace{+180^\circ}_{\varphi_{in}} \underbrace{-180^\circ}_{\substack{\text{zeri complessi} \\ \text{con } \omega_n = \sqrt{2} \\ \text{e } \delta < 0 \\ \Rightarrow \mathrm{Re}(z_i) > 0}} \underbrace{-90^\circ}_{\substack{\text{polo in} \\ s=-3}} \underbrace{-180^\circ}_{\substack{\text{salto dovuto} \\ \text{ai poli} \\ \text{immaginari} \\ \text{con } \omega_n = \sqrt{10}}} \underbrace{+3 \times (-90^\circ)}_{\substack{\text{triplo polo} \\ \text{in } s=-20}} = -540^\circ$$

Notare che scegliendo questo salto pari a $+180^\circ$ si otterrebbe un diagramma delle fasi più "compatto" e del tutto equivalente. Ma conviene fare 1 scelta e rispettarla per tutto lo svolgimento!

$$p_{fin} = \underbrace{4 \times \left(+20 \frac{dB}{dec}\right)}_{4 \text{ zeri}} + \underbrace{6\left(-20 \frac{dB}{dec}\right)}_{6 \text{ poli}} = -40 \frac{dB}{dec}$$

Punti di rottura:

Moduli : $\omega_{M1} = \sqrt{2} \approx 1.4$, $\omega_{M2} = 3$, $\omega_{M3} = \sqrt{10} \approx 3.16$, $\omega_{M4} = 20$

Fasi :

per $(s^2 - 0.4s + 2)$:	$\sqrt{2}/10 \approx 0.14$				$10\sqrt{2} \approx 14$	
per $(s+3)$:		0.3				30
per (s^2+10) :				$\sqrt{10} \approx 3.16$		
per $(s+20)$:			2			200

quindi : $\omega_{F1} = \frac{\sqrt{2}}{10}$, $\omega_{F2} = 0.3$, $\omega_{F3} = 2$, $\omega_{F4} = 3.16$, $\omega_{F5} = 10\sqrt{2}$, $\omega_{F6} = 30$, $\omega_{F7} = 200$

Servono

0.1 — 1 — 10 — 100 — 1000

4 decadi, con 1 decade prima di $\omega = 1$ e 3 decadi dopo

Tabelline delle pendenze (e degli asintoti e dei salti)

Moduli

↑ asintoto

	$\sqrt{2}$		3		3.16		20	
+40		+80		+60		+20		−40 → pendenza finale OK
pin	coppia di zeri complessi $\Delta p = +40$		polo semplice $\Delta p = -20$		coppia di poli immaginari $\Delta p = -40$		tre poli coincidenti $\Delta p = -60$	

Nota: poiché è impossibile distinguere 3 e 3.16 sulla carta logaritmica agli ingrandimenti usuali, tali due punti nel grafico saranno considerati coincidenti e il segmentino con pendenza $+60 \frac{dB}{dec}$ non verrà disegnato. Negli esercizi questo fatto va segnalato!

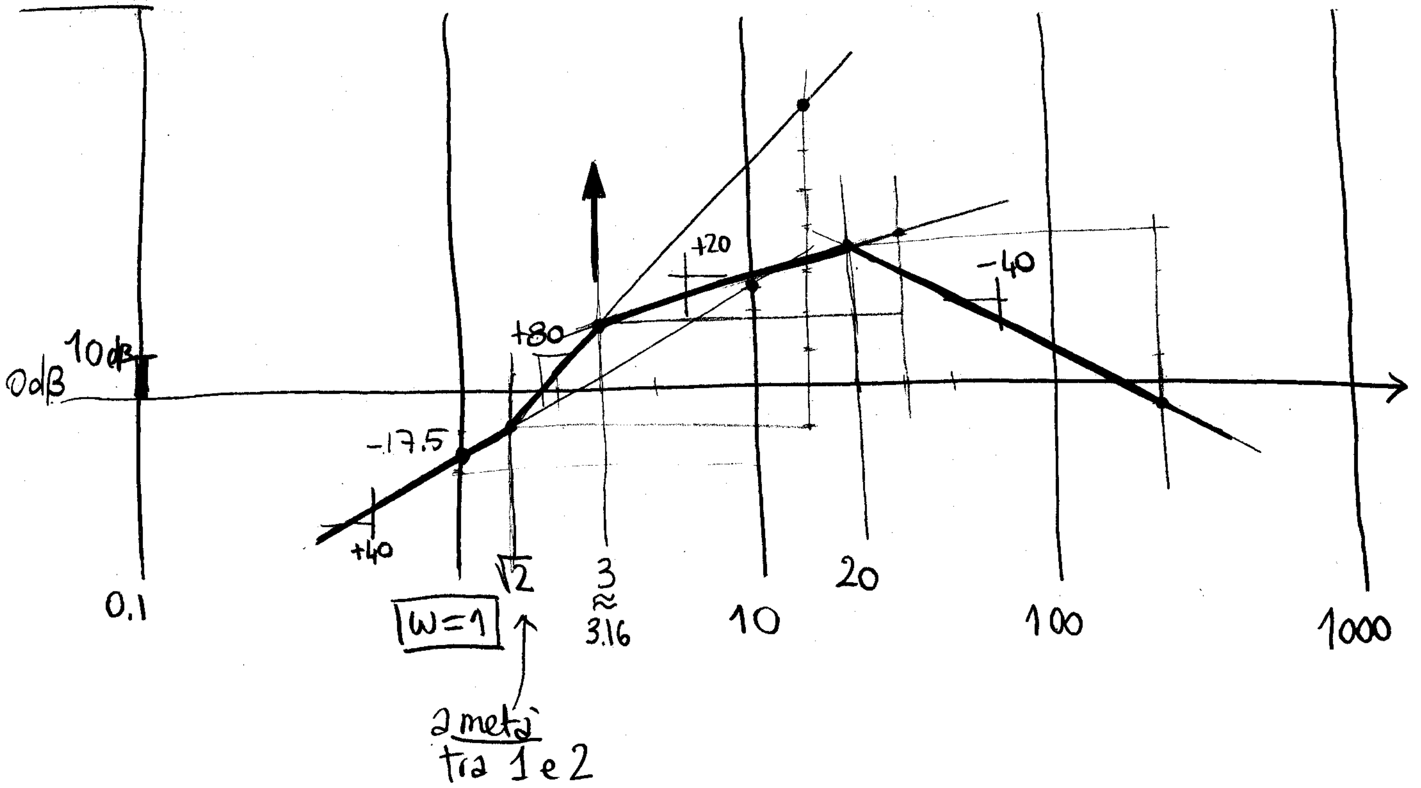
Fasi

−180° salto

	$\frac{\sqrt{2}}{10}$		0.3		2		3.16		$10\sqrt{2}$		30		200	
∅		−90		−135		−270		−270		−180		−135		∅
	$\Delta = -90°$ (coppia zeri con $Re(z) > 0$)		$\Delta = -45$		$\Delta = -135$ (tre poli coincidenti)		$\Delta = 0$ (corrisponde solo a poli immaginari ⇒ la pendenza non cambia)		$\Delta = +90$		$\Delta = +45$		$\Delta = +135$ (tre poli coincidenti)	

Sulla carta logaritmica

Moduli

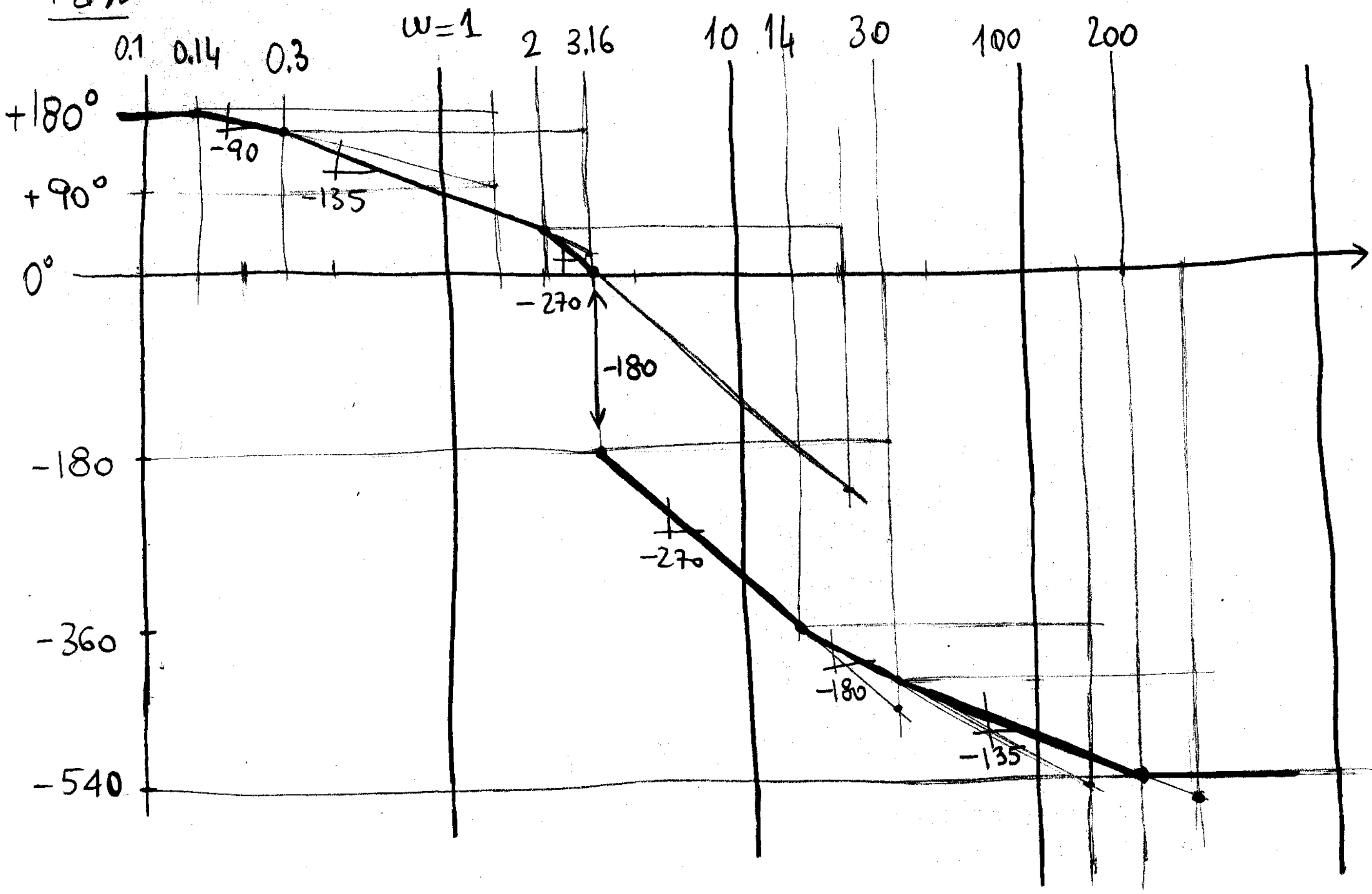


1) scegliere $\omega=1$ e unità di misura
2) posizionare il punto a -17.5 dB su $\omega=1$
3) Tracciare, leggera la retta passante per tale punto con pendenza $+40\,\frac{dB}{dec}$
4) ripassare tale retta fino a $\omega_{M1}=\sqrt{2}$
5) da $\omega_{M1}=\sqrt{2}$ a $\omega_{M2}\simeq\omega_{M3}\simeq 3$ pendenza $+80\,\frac{dB}{dec}$ (indicare asintoto su ω_{M3})

   da $\omega_{M3}\simeq 3$ a $\omega_{M4}=20$ pendenza $+20\,\frac{dB}{dec}$

   da ω_{M4} in poi pendenza $-40\,\frac{dB}{dec}$

Fasi



1) scegliere unità di misura e posizionare φ_{in} verticalmente
2) segmento orizzontale su $\varphi_{in} = +180°$ fino a $\omega_{F1} = \sqrt{2}/10 \approx 0.14$
3) da ω_{F1} a $\omega_{F2} = 0.3$ pend. -90
da ω_{F2} a $\omega_{F3} = 2$ pend. -135
da ω_{F3} a $\omega_{F4} = 3.16$ pend -270
In $\omega_{F4} = 3.16$ salto di -180°
da ω_{F4} a $\omega_{F5} = 10\sqrt{2}$ pend. -270
da ω_{F5} a $\omega_{F6} = 30$ pend -180
da ω_{F6} a $\omega_{F7} = 200$ pend -135
4) controllo che in $\omega_{F7} = 200$ si abbia $\varphi_{fin} = -540°$.

Ora, per lo stesso esercizio, supponiamo che venga richiesto di effettuare la correzione dei diagrammi in $\omega = \sqrt{2}$ (in tale punto la correzione da apportare al diagramma dei moduli dovrebbe essere importante poiché si tratta di un punto di rottura

corrispondente a una coppia di zeri complessi con δ piccolo.

Correzione in $\boxed{\omega=\sqrt{2}}$ per i moduli

fattore	ω/ω_n	contributo
$s^2-0.4s+2$	1	-11 dB
$s+3$	0.47	-1 dB
s^2+10	0.45	$+2$ dB
$(s+20)^3$	0.07	–
TOTALE	sono trascurabili i contributi per $\frac{\omega}{\omega_n}>10$ o <0.1	$\boxed{-10\text{ dB}}$

(coppia di zeri complessi Il valore letto per $\zeta=0.14 \simeq |\delta|$ è 11 dB, cambiato segno perché zeri)

(polo reale semplice $\zeta=1$ valore letto -2dB da dividere per due)

(coppia di poli immaginari $\delta=0$, il valore letto è $+2$dB)

la somma è la correzione da apportare al diagramma approssimato

- Sono assenti gli zeri in $s=0$ perché il loro diagramma asintotico coincide con quello esatto.
- Nella seconda colonna si calcola il rapporto tra la ω in cui si desidera effettuare la correzione e il valore di ω_n che corrisponde al fattore considerato, cioè per poli e zeri complessi proprio ω_n, per poli e zeri reali il modulo del polo o dello zero (cioè il punto di rottura nel diagramma dei moduli).
- Il contributo nella terza colonna si calcola come segue:
  - → nel <u>diagramma delle correzioni per i moduli</u> (A) si segna in ascissa il valore ω/ω_n della seconda colonna
  - → si traccia una retta verticale fino a incontrare la curva che corrisponde a $\zeta=|\delta|$ se tale curva esiste. (*) Altrimenti si interpola linearmente tra i due valori di ζ più vicini a $|\delta|$. Nel caso di $\delta=0$ (zeri o poli immaginari) si consideri che la curva corrispondente coincide praticamente con quella per $\zeta=0.05$ tranne che in un piccolo intervallo attorno a $\frac{\omega}{\omega_n}=1$. In particolare passa per il valore 15dB per $\frac{\omega}{\omega_n}=0.9$ e raggiunge 20 dB per un valore di $\frac{\omega}{\omega_n}$ intermedio tra 0.9 e 1.

    Il valore in dB letto in ordinata su tale curva, dove

(*) <u>ζ vale 1 per poli o zeri reali</u>.

essere diviso per due qualora il fattore in considerazione sia un polo o zero reale semplice, diviso per due e moltiplicato per m, se tale fattore è uno zero o polo reale con molteplicità m, ⊛ e cambiato di segno qualora tale fattore corrisponda a degli zeri. Non si fa nulla nel caso in cui il fattore in considerazione sia una coppia di poli complessi coniugati o una coppia di poli reali coincidenti.

⊛ moltiplicato per m qualora sia una coppia di poli o zeri complessi coniugati con molteplicità m,

Correzione in $\boxed{\omega = \sqrt{2}}$ per le fasi

Fattore	ω/ω_n	Contributo
$s^2 - 0.4s + 2$	1	∅ (sempre per $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$)
$s + 3$	0.47	4° (differenza letta 8° divisa per 2 perché polo, semplice reale)
$(s + 20)^3$	0.07	−13.5° (differenza letta 9° divisa per 2 e moltiplicata per 3 perché polo reale triplo)
TOTALE		$\boxed{-9.5°}$ ← correzione da apportare

- sono assenti gli zeri in $s=0$ e i poli immaginari perchè il loro diagramma approssimato coincide con quello esatto
- la seconda colonna si calcola come per i moduli
- per calcolare i contributi nella terza colonna si prepari il <u>diagramma delle fasi</u> (B) tracciando la retta che si usa come diagramma approssimato, quella che unisce il punto (0.1, 0°) con (10, −180°), passando per (1, −90°). Poi, per ogni contributo:
  - → si segna in ascissa su tale diagramma il valore $\frac{\omega}{\omega_n}$ della seconda colonna
  - → si traccia una retta verticale fino a incontrare la curva che corrisponde a $z = |\delta|$ o si interpola linearmente tra le più vicine (z vale 1 per poli o zeri reali, le curve per valori di $z > 1$ non le usiamo). Si fa la differenza (con segno) tra il valore letto su tale curva e quello letto sulla retta che corrisponde al diagramma

approssimato (nel caso di $\frac{\omega}{\omega_n} < 0.1$ o $\frac{\omega}{\omega_n} > 10$, si tratta delle rette orizzontali su $0°$ e $-180°$, rispettivamente). Da tale differenza si calcola il contributo come segue:

- si divide per due qualora il fattore considerato sia un polo o uno zero reale semplice, si divide per due e si moltiplica per m se tale fattore è uno zero o un polo reale con molteplicità m, si moltiplica per m se è una coppia di zeri o poli complessi coniugati con molteplicità m;

e

- si cambia di segno se il fattore corrisponde a degli zeri con parte reale negativa (cioè $\delta > 0$ se complessi) oppure a dei poli con parte reale positiva (cioè $\delta < 0$ se complessi); non si cambia di segno se sono zeri con parte reale positiva perché due cambi di segno si annullano.