

La funzione di trasferimento d'anello assegnata (senza rete di compensazione) è  $L \equiv GH$

$$L(s) = \frac{1000}{(1+s/2\pi 100)(1+s/2\pi 1000)(1+s/2\pi 6000)} \Rightarrow \text{sostituendo } s \text{ con } j\omega \quad \omega = 2\pi f$$

$$L(j\omega) = \frac{1000}{(1+j\omega/2\pi 100)(1+j\omega/2\pi 1000)(1+j\omega/2\pi 6000)} = \frac{1000}{(1+jf/100)(1+jf/1000)(1+jf/6000)}$$

Il diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento d'anello senza rete di compensazione è riportato in tratto nero nell'allegato 1 (diagramma in funzione della frequenza in Hz). Calcolo il margine di fase

- frequenza di attraversamento è circa  $f_c = 8 \text{ kHz}$
- fase critica  $\varphi_c = -\arctan\left(\frac{8000}{100}\right) - \arctan\left(\frac{8000}{1000}\right) - \arctan\left(\frac{8000}{6000}\right) = -225^\circ$
- margine di fase è:  $\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| = 180^\circ - 225^\circ = -45^\circ$

La compensazione con sola riduzione del guadagno o con rete ritardatrice non consentono di soddisfare i requisiti di banda (quella con sola riduzione del guadagno riduce anche il guadagno statico; non ci sono specifiche al riguardo, ma è bene non ridurlo).

La compensazione con rete a sella permette di non modificare il guadagno statico.

Si procede per tentativi con rete a sella.

**Prima ipotesi di soluzione.** Compenso i 2 poli a 100 e 1000 Hz con 2 zeri alle stesse frequenze e impongo il primo polo a 6 Hz in modo tale che la frequenza di attraversamento a 0 dB avvenga a 6000 Hz, cioè in corrispondenza del cambio di pendenza della rete compensata.

Le funzioni di trasferimento della rete compensatrice e della funzione compensata sono rispettivamente:

|  |  |
|--|--|
| $G_{c1} = \frac{(s+2\pi 100)(s+2\pi 1000)}{(s+2\pi 6)(s+2\pi 100000/6)}$ | $L_{c1} = \frac{1000}{(1+s/2\pi 6000)(1+s/2\pi 6)(1+s/2\pi 100000/6)}$ |
|--|--|

**Seconda ipotesi di soluzione.** Compenso i 2 poli a 100 e 1000 Hz con 2 zeri alle stesse frequenze e impongo il primo polo a 1 Hz in modo tale che la frequenza di attraversamento a 0 dB avvenga a 1 kHz, cioè al limite richiesto.

Le funzioni di trasferimento della rete compensatrice e della funzione compensata sono rispettivamente:

|  |  |
|--|--|
| $G_{c2} = \frac{(s+2\pi 100)(s+2\pi 1000)}{(s+2\pi 1)(s+2\pi 100000/1)}$ | $L_{c2} = \frac{1000}{(1+s/2\pi 6000)(1+s/2\pi 1)(1+s/2\pi 100000/1)}$ |
|--|--|

I relativi diagrammi di Bode sono rappresentati nella figura allegata con tratti **blu** e **rosso**, nella quale sono indicate le frequenze di attraversamento (rispettivamente 6 kHz e 1 kHz) dalle quali calcolare le corrispondenti fasi critiche e margini di fase. Calcolo i margini di fase

**Caso 1:** - frequenza di crossover  $f_{c1} = 6 \text{ kHz}$

- fase critica  $\varphi_{c1} = -\arctan\left(\frac{6000}{6}\right) - \arctan\left(\frac{6000}{6000}\right) - \arctan\left(\frac{6000}{100 * 1000 / 6}\right) = -155^\circ$
- margine di fase  $\varphi_{m1} = 180^\circ - |\varphi_{c1}| = 180^\circ - 155^\circ = 25^\circ$

**Caso 2:** - frequenza di crossover  $f_{c2} = 1 \text{ kHz}$

- fase critica  $\varphi_{c2} = -\arctan\left(\frac{1000}{1}\right) - \arctan\left(\frac{1000}{6000}\right) - \arctan\left(\frac{1000}{100 * 1000 / 1}\right) = -100^\circ$
- margine di fase  $\varphi_{m2} = 180^\circ - |\varphi_{c2}| = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

La prima ipotesi di soluzione non soddisfa i requisiti sul margine di fase (compensazione insufficiente)

la seconda soluzione (soddisfa ampiamente i requisiti sul margine di fase, ma siamo al limite per quanto riguarda i requisiti di banda).

La migliore soluzione è intermedia alle due e si ottiene dalla seconda riducendo il margine di fase e allargando la banda passante.

Terza soluzione (ottimale). Posti i 2 zeri a 100 e 1000 Hz si impone il primo polo a 2.5 Hz, conseguentemente si ottiene il secondo polo a

$$p_2 = \frac{z_1 \cdot z_2}{p_1} = \frac{100 \cdot 1000}{2.5} = 40 \text{ kHz}$$

Le funzioni di trasferimento della rete compensatrice e della funzione compensata sono rispettivamente:

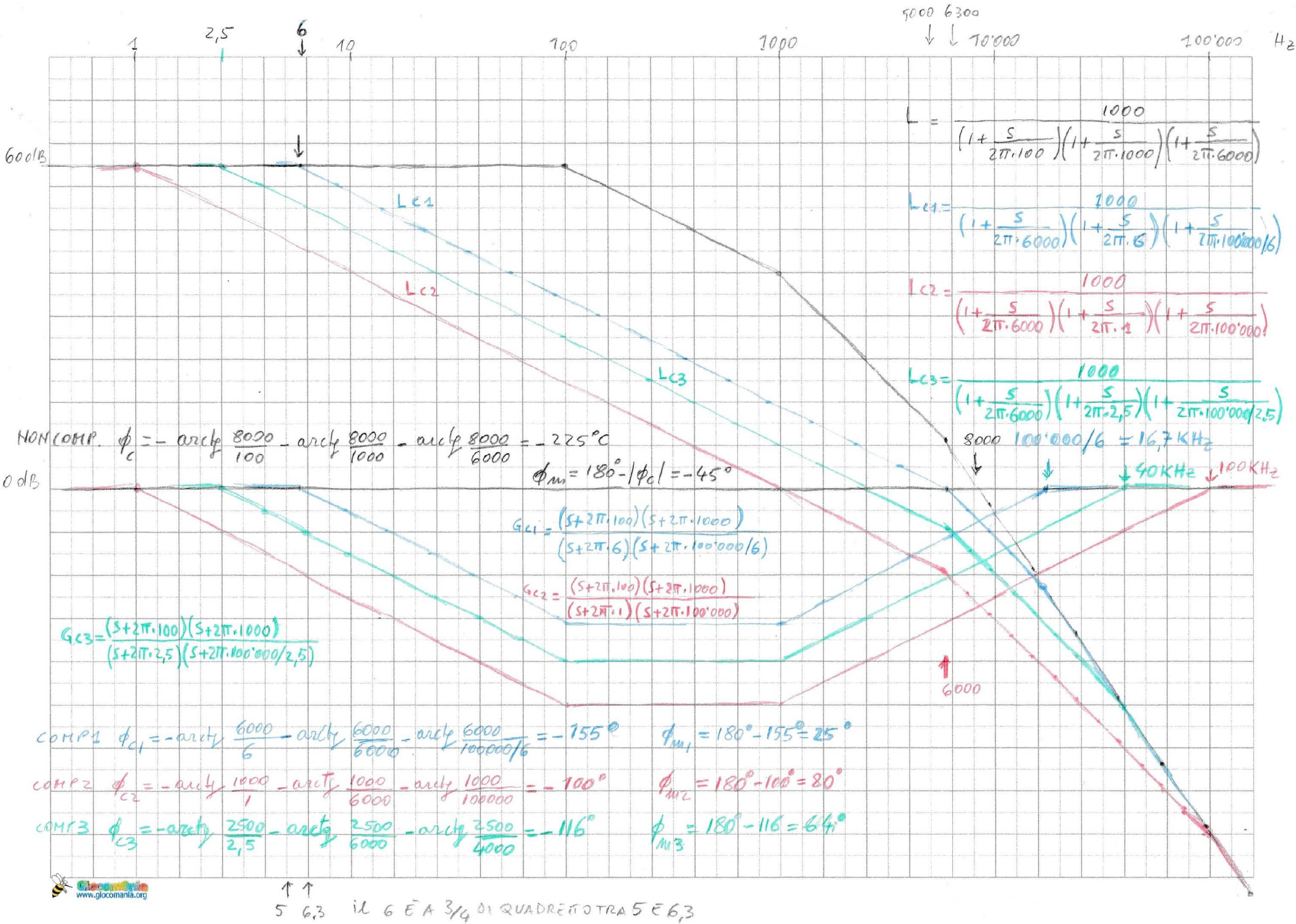
|  |  |
|--|--|
| $G_{c3} = \frac{(s+2\pi 100)(s+2\pi 1000)}{(s+2\pi 2.5)(s+2\pi 100000/2.5)}$ | $L_{c3} = \frac{1000}{(1+s/2\pi 6000)(1+s/2\pi 2.5)(1+s/2\pi 100000/2.5)}$ |
|--|--|

I relativi diagrammi di Bode sono rappresentati nella figura allegata con tratto verde.

Caso 3: - frequenza di crossover  $f_{c3} = 2.5 \text{ kHz}$

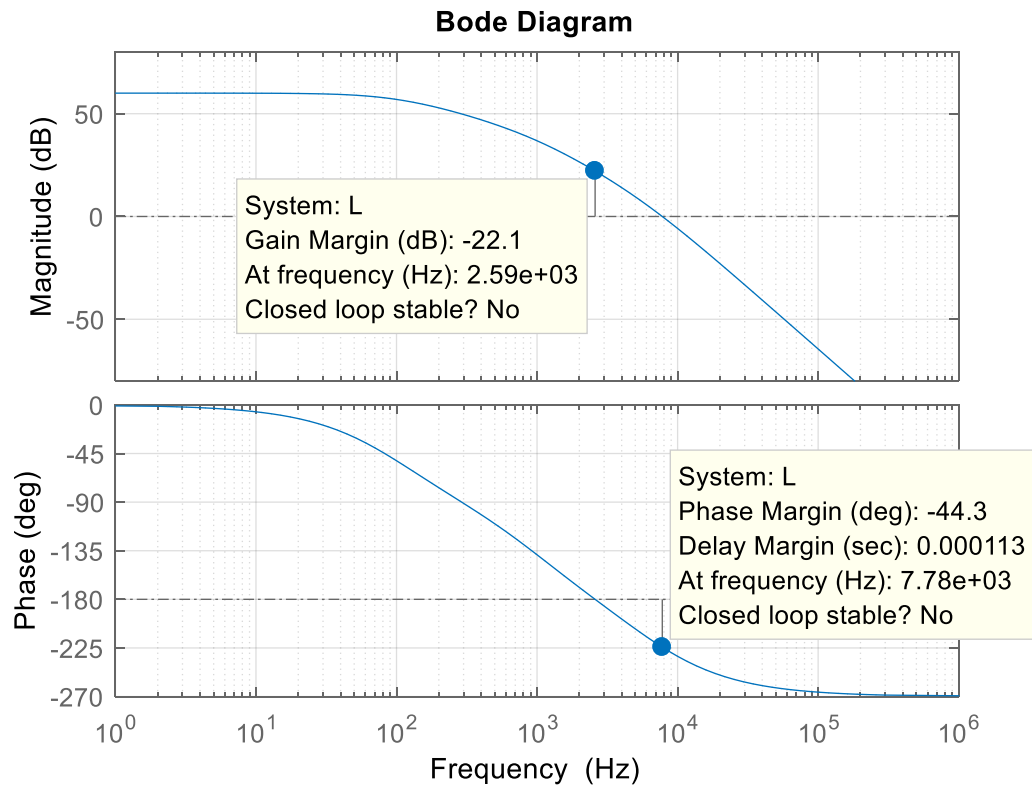
$$\text{- fase critica } \varphi_{c3} = -\arctan\left(\frac{2500}{2.5}\right) - \arctan\left(\frac{2500}{6000}\right) - \arctan\left(\frac{2500}{40000}\right) = -116^\circ$$

$$\text{- margine di fase } \varphi_{m3} = 180^\circ - |\varphi_{c3}| = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$$



## SOLUZIONE CON MATLAB

```
% Funzione di trasferimento d'anello senza rete di compensazione
s=zpk('s')
L=1000/(1+s/(2*pi*100))/(1+s/(2*pi*1000))/(1+s/(2*pi*6000))
[z,p,k] = zpkdata(L,'v')
L = zpk(z,p,k,'d','f')
bode(L)
grid
```



Il sistema ad anello chiuso è instabile con margine di fase pari a  $-44.3^\circ$ .

La compensazione con sola riduzione del guadagno o con rete ritardatrice non consentono di soddisfare i requisiti di banda (quella con sola riduzione del guadagno riduce anche il guadagno statico).

La compensazione con rete a sella permette di non modificare il guadagno statico.

Si procede per tentativi con rete a sella

% Funzione di trasferimento d'anello senza rete di compensazione

$L = 1000 / (1 + s / (2 \pi \cdot 100)) / (1 + s / (2 \pi \cdot 1000)) / (1 + s / (2 \pi \cdot 6000))$

$[z, p, k] = \text{zpkdata}(L, 'v');$  ;  $L = \text{zpk}(z, p, k, 'd', 'f')$

bode(L)

hold on

% prima ipotesi di compensazione con rete a sella

$Gc1 = (1 + s / (2 \pi \cdot 100)) \cdot (1 + s / (2 \pi \cdot 1000)) / (1 + s / (2 \pi \cdot 6)) / (1 + s / (2 \pi \cdot 100 \cdot 1000 / 6))$  % fdt rete di compensazione

bode(Gc1)

$Lc1 = L \cdot Gc1$  % fdt rete compensata

$Lc1 = \text{minreal}(Lc1)$ ; bode(Lc1)

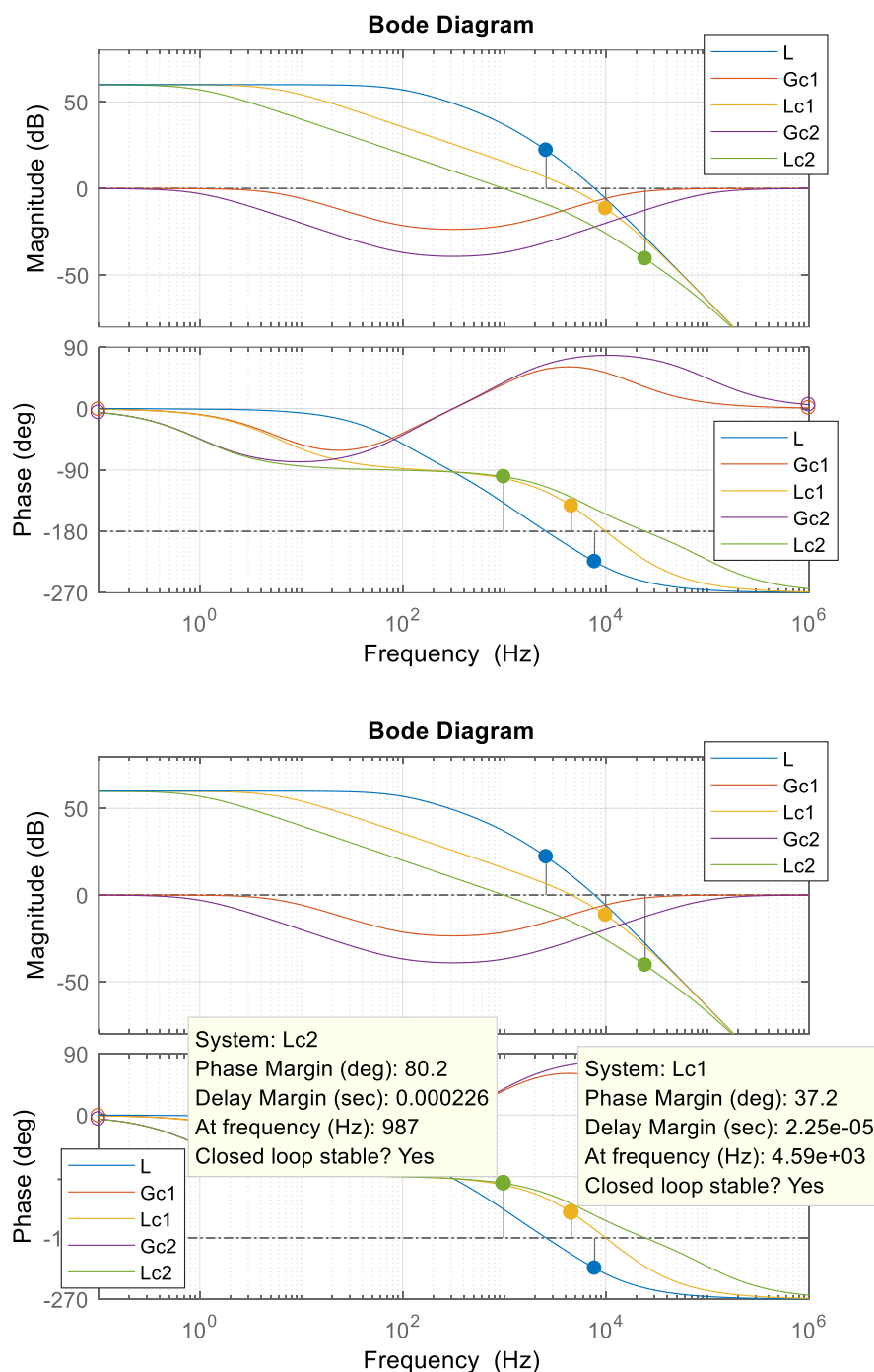
% seconda ipotesi di compensazione con rete a sella

$Gc2 = (1 + s / (2 \pi \cdot 100)) \cdot (1 + s / (2 \pi \cdot 1000)) / (1 + s / (2 \pi \cdot 1)) / (1 + s / (2 \pi \cdot 100000))$  % fdt rete di compensazione

bode(Gc2)

$Lc2 = L \cdot Gc2$  % fdt rete compensata

$Lc2 = \text{minreal}(Lc2)$ ; bode(Lc2)



la prima soluzione (con rete a sella) non soddisfa i requisiti sul margine di fase (compensazione insufficiente)

la seconda soluzione (con rete a sella) soddisfa ampiamente i requisiti sul margine di fase, ma siamo al limite per quanto riguarda i requisiti di banda

si adotta una soluzione intermedia con minor margine di fase e maggiore banda



% Funzione di trasferimento d'anello senza rete di compensazione

$L = 1000 / ((1 + s / (2 * \pi * 100)) / (1 + s / (2 * \pi * 1000)) / (1 + s / (2 * \pi * 6000)))$

$[z, p, k] = \text{zpkdata}(L, 'v'); L = \text{zpk}(z, p, k, 'd', 'f')$

bode(L)

hold on

% terza ipotesi di compensazione

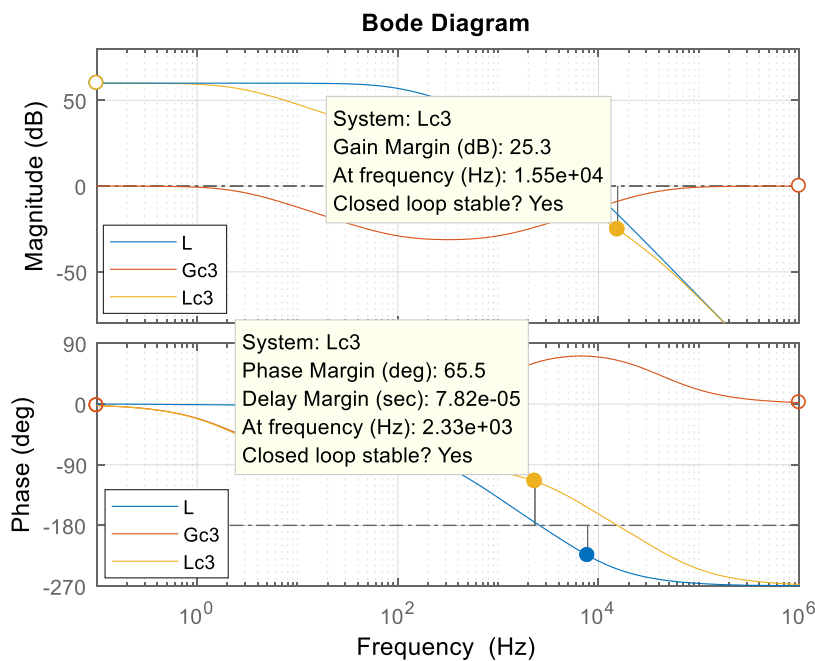
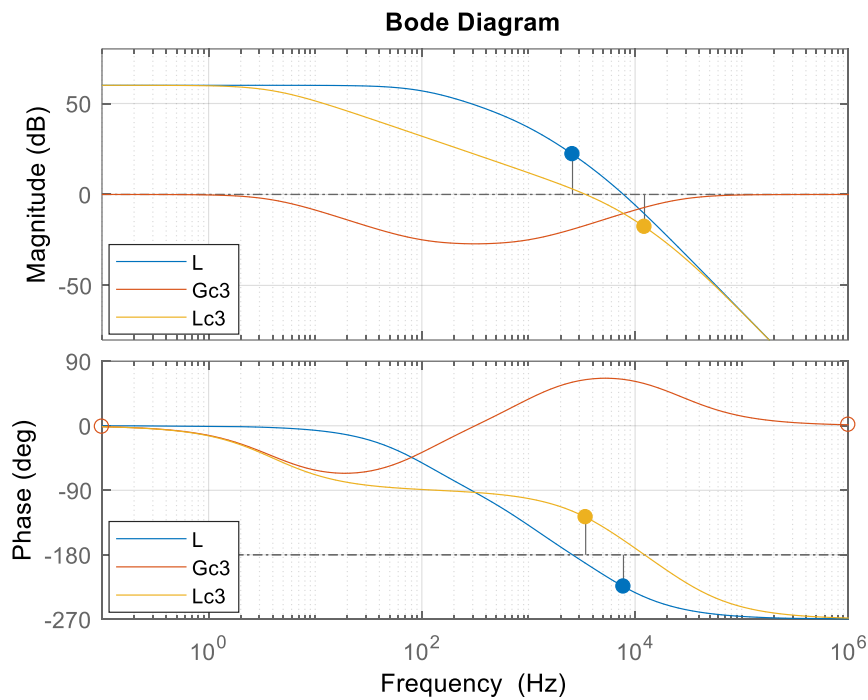
$Gc3 = (1 + s / (2 * \pi * 100)) * (1 + s / (2 * \pi * 1000)) / ((1 + s / (2 * \pi * 2.5)) / (1 + s / (2 * \pi * 100000 / 2.5)))$  % fdt rete di comp

bode(Gc3)

$Lc3 = L * Gc3$  % fdt rete compensata

$Lc3 = \text{minreal}(Lc3)$

bode(Lc3)



questa soluzione soddisfa i requisiti sul margine di fase, e i requisiti di banda senza ridurre il guadagno statico (margine di fase 65° e banda passante ad anello chiuso di oltre 2 kHz senza ridurre il guadagno statico)

## %% LE TRE SOLUZIONI A CONFRONTO

% Funzione di trasferimento d'anello senza rete di compensazione

figure

s=zpk('s')

$L=1000/(1+s/(2\pi*100))/(1+s/(2\pi*1000))/(1+s/(2\pi*6000))$

[z,p,k] = zpkdata(L,'v')

L = zpk(z,p,k,'d','f')

bode(L)

grid

hold on

%prima ipotesi di compensazione con rete a sella

$Gc1=(1+s/(2\pi*100))*(1+s/(2\pi*1000))/(1+s/(2\pi*6))/(1+s/(2\pi*100000/6))$  %fdt rete di comp

bode(Gc1)

Lc1=L\*Gc1 %fdt rete compensata

Lc1=minreal(Lc1)

bode(Lc1)

grid

%seconda ipotesi di compensazione con rete a sella

$Gc2=(1+s/(2\pi*100))*(1+s/(2\pi*1000))/(1+s/(2\pi*1))/(1+s/(2\pi*100000))$  %fdt rete di comp

bode(Gc2)

Lc2=L\*Gc2 %fdt rete compensata

Lc2=minreal(Lc2)

bode(Lc2)

grid

%terza ipotesi di compensazione

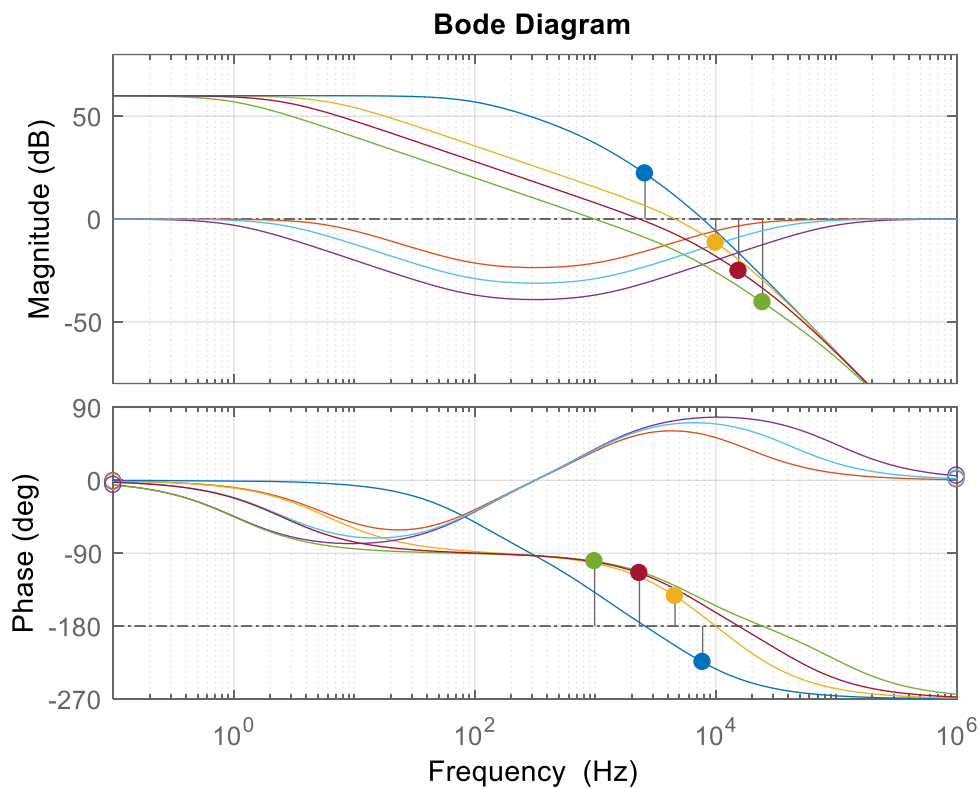
$Gc3=(1+s/(2\pi*100))*(1+s/(2\pi*1000))/(1+s/(2\pi*2.5))/(1+s/(2\pi*100000/2.5))$  %fdt rete di comp

bode(Gc3)

Lc3=L\*Gc3 %fdt rete compensata

Lc3=minreal(Lc3)

bode(Lc3)



## %% COMPENSAZIONE CON RETE A SELLA E COMPENSAZIONE CON RETE PID

### %% COMPENSAZIONE CON RETE A SELLA

% Funzione di trasferimento d'anello senza rete di compensazione

$L = 1000 / ((1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 100)) \cdot (1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 1000)) \cdot (1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 6000)))$

$[z, p, k] = \text{zpkdata}(L, 'v')$ ;  $L = \text{zpk}(z, p, k, 'd', 'f')$

bode(L)

hold on

% compensazione con rete a sella

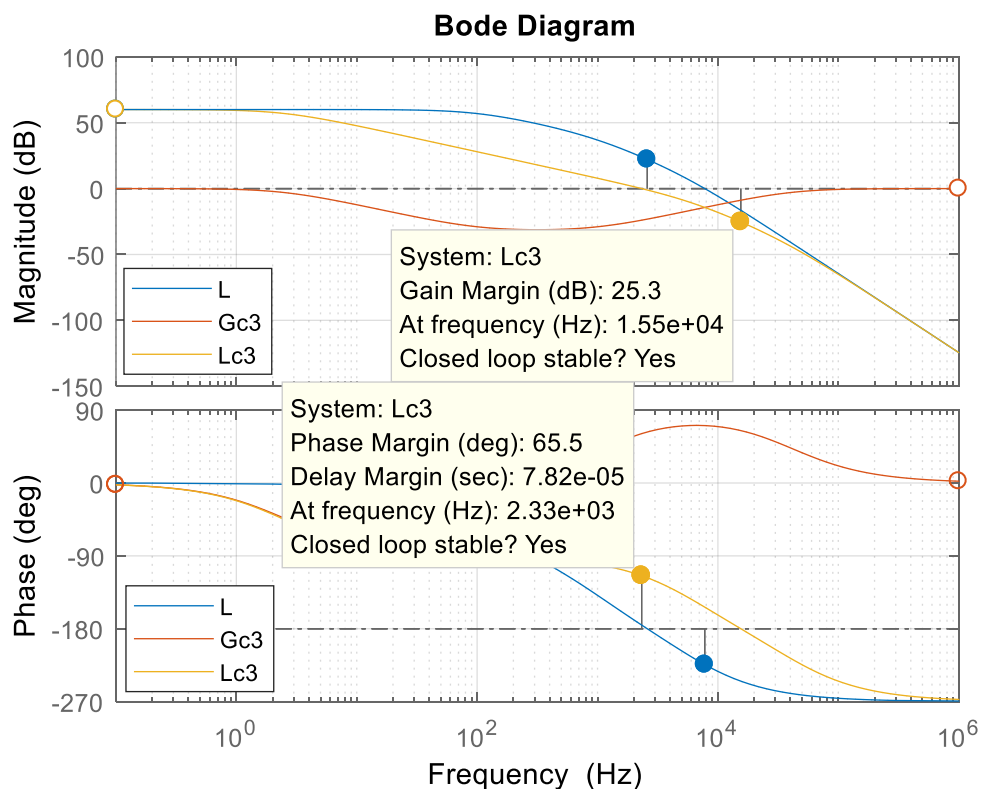
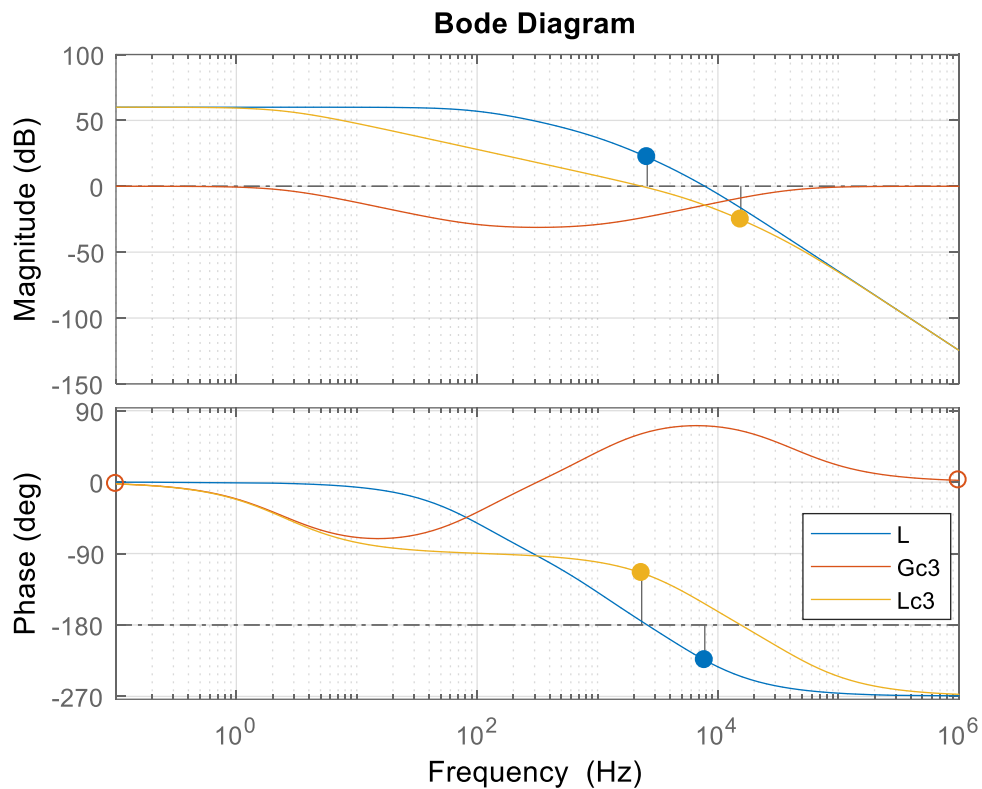
$Gc3 = (1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 100)) \cdot (1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 1000)) / ((1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 2.5)) \cdot (1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 100000 / 2.5)))$  % fdt rete di comp

bode(Gc3)

$Lc3 = L \cdot Gc3$  % fdt rete compensata

$Lc3 = \text{minreal}(Lc3)$

bode(Lc3)





## %% COMPENSAZIONE CON RETE PID

% Funzione di trasferimento d'anello senza rete di compensazione

$L = 1000 / (1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 100)) / (1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 1000)) / (1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 6000))$

$[z, p, k] = \text{zpkdata}(L, 'v');$ ;  $L = \text{zpk}(z, p, k, 'd', 'f')$

bode(L)

hold on

% compensazione con rete PID

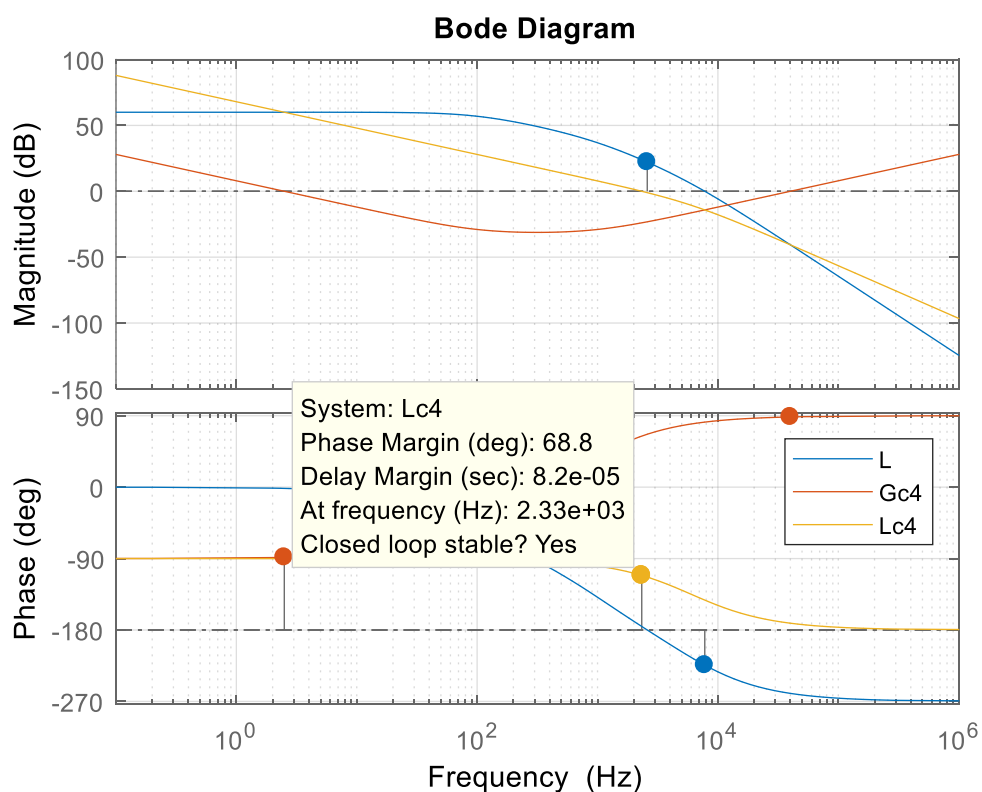
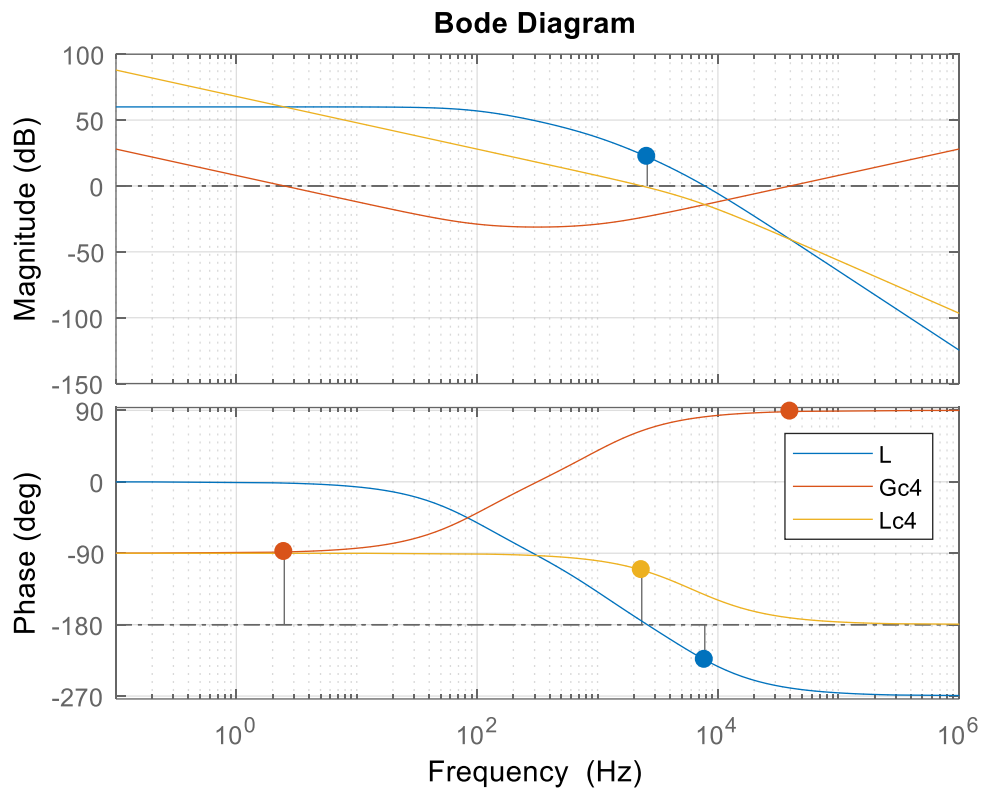
$Gc4 = (1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 100)) \cdot (1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 1000)) / (s / (2 \cdot \pi \cdot 2.5))$  % fdt rete di comp

bode(Gc4)

$Lc4 = L \cdot Gc4$  % fdt rete compensata

$Lc4 = \text{minreal}(Lc4)$

bode(Lc4)



## %% LE DUE SOLUZIONI A CONFRONTO

% Funzione di trasferimento d'anello senza rete di compensazione

figure

s=zpk('s')

$L = 1000 / ((1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 100)) / (1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 1000)) / (1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 6000)))$

[z,p,k] = zpkdata(L,'v')

L = zpk(z,p,k,'d','f')

bode(L)

grid

hold on

% compensazione con rete a sella

$Gc3 = (1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 100)) \cdot (1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 1000)) / (1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 2.5)) / (1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 100000 / 2.5))$  % fdt rete di comp

bode(Gc3)

Lc3=L\*Gc3 % fdt rete compensata

Lc3=minreal(Lc3)

bode(Lc3)

grid

% compensazione con rete PID

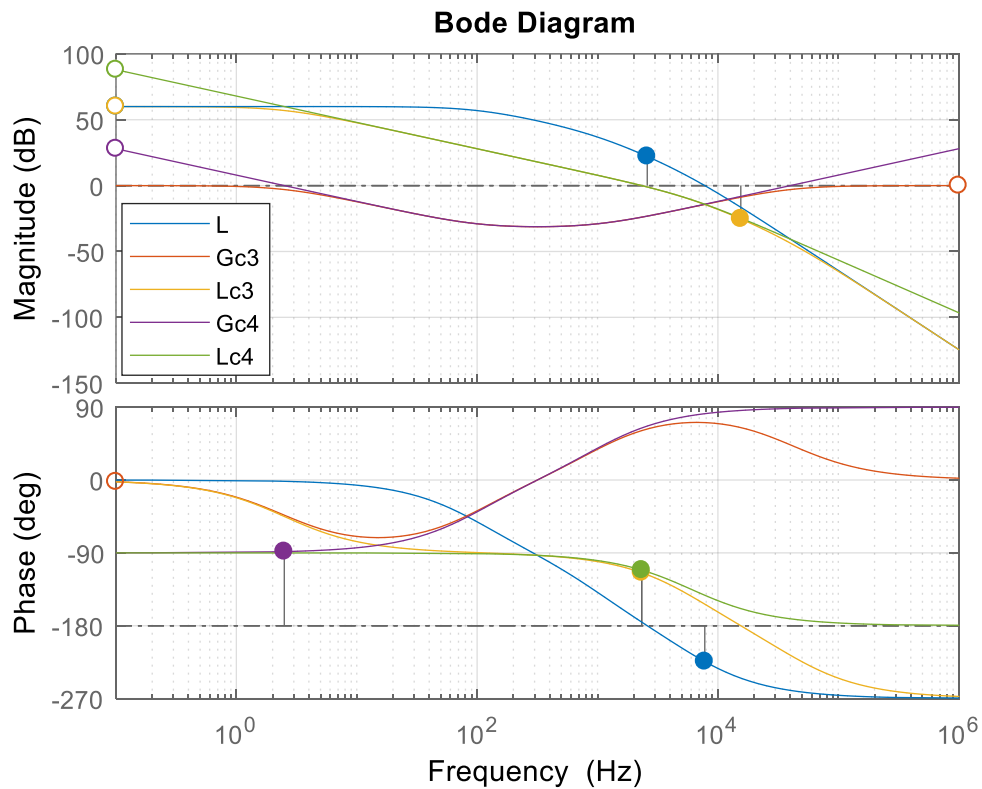
$Gc4 = (1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 100)) \cdot (1 + s / (2 \cdot \pi \cdot 1000)) / (s / (2 \cdot \pi \cdot 2.5))$  % fdt rete di comp

bode(Gc4)

Lc4=L\*Gc4 % fdt rete compensata

Lc4=minreal(Lc4)

bode(Lc4)



Il margine di fase ottenuto con le due compensazioni è pressoché identico, mentre il margine di guadagno ottenuto con rete PID è infinito contro i 25 dB della rete a sella (la fase del sistema compensato con rete PID tende asintoticamente a 180°).