

Esercizio 1

Verificare la stabilità di un sistema a retroazione unitaria avente la seguente funzione di trasferimento ad anello aperto

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{10}{s \cdot (1 + 0,5 \cdot s)^2}$$

ed eventualmente stabilizzarlo con una rete ritardatrice. Si richiede un margine di fase $m_\phi = 45^\circ$.

La funzione di trasferimento ad anello aperto ha un polo nullo ($p_1 = 0$) e due poli reali negativi coincidenti ($p_2 \equiv p_3 = -2$). Il sistema è stabile ad anello aperto perché la funzione $G(s) \cdot H(s)$ non presenta poli a parte reale positiva ($P=0$). Posto $s = j \cdot \omega$, si ha:

$$G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega) = \frac{10}{j \cdot \omega \cdot \left(1 + \frac{j \cdot \omega}{2}\right)^2} \quad [5.1.E]$$

Il modulo in dB e la fase della funzione di trasferimento ad anello aperto sono uguali rispettivamente a:

$$|G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log 10 - 20 \cdot \log \omega - 40 \cdot \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

$$\Phi = -90^\circ - 2 \cdot \arctg \frac{\omega}{2}$$

Il diagramma asintotico del modulo, rappresentato in figura 5.1.E, interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza della pulsazione di taglio $\omega_T \cong 3,5 \text{ rad/s}$ con una pendenza di $-40 \text{ dB per decade}$. Per $\omega_T \cong 3,5 \text{ rad/s}$ sul diagramma asintotico della fase (Fig. 5.2.E) si legge $\Phi_{\omega_T} \cong -210^\circ$.

Il margine di fase m_ϕ e il margine di guadagno, quest'ultimo calcolato quando $\Phi \cong -180^\circ$, sono rispettivamente uguali a:

$$m_\phi = 180^\circ - |\Phi_{\omega T}|$$

$$m_\phi \cong 180^\circ - |90^\circ + 2 \cdot 60^\circ| \cong -30,5^\circ$$

$$m_g \cong 5 \text{ dB}$$

Il sistema è instabile ad anello chiuso perché il margine di fase è negativo e il margine di guadagno è minore del valore consigliato.

MATLAB

```
% Cap5 Esercizio 1
n1=[10]; d1=[1 0]; d2=[0.25 1 1];
[d3]=conv(d1,d2)
% Margine di fase e margine di guadagno.
[mag,phase,w]=bode(n1,d3)
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w)
% Rappresentazione grafica.
margin(mag,phase,w)
```

Fig. 5.1.E

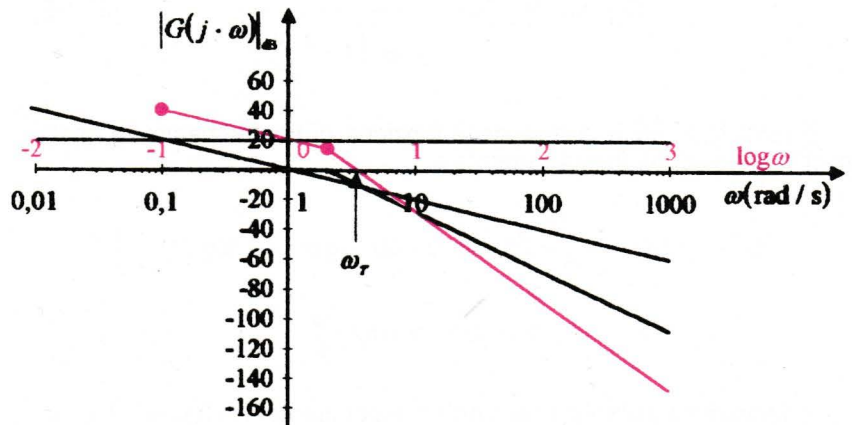
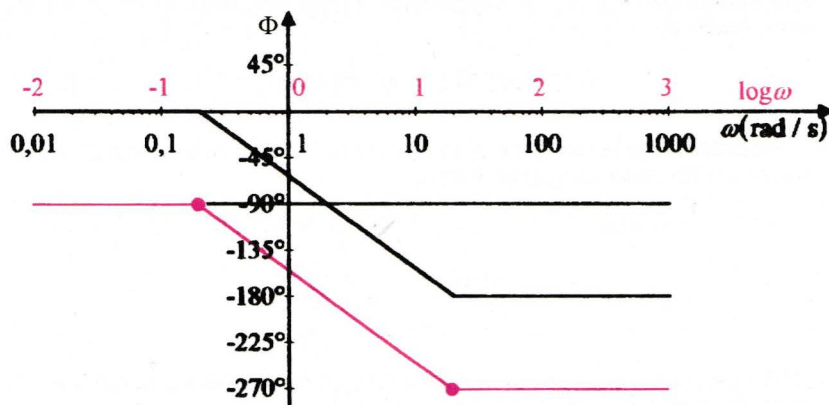
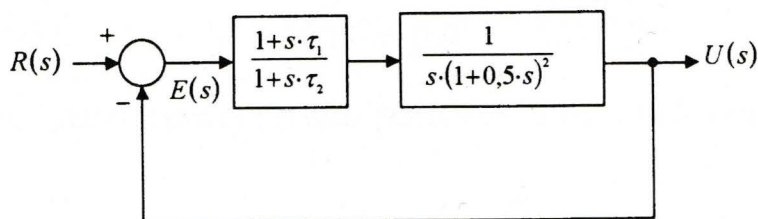


Fig. 5.2.E



Per stabilizzare il sistema senza modificare il guadagno statico si inserisce una rete ritardatrice subito dopo il nodo sommatore (Fig. 5.3.E).

Fig. 5.3.E



Per ottenere il margine di fase richiesto di 45° , è necessario determinare la pulsazione di taglio ω_{T1} tale che la fase della funzione di trasferimento ad anello aperto sia uguale a:

$$\angle G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1}) = -180^\circ + (45^\circ + 5^\circ)$$

$$\Phi_{\omega_{T1}} = -130^\circ$$

Considerato che la fase della funzione di trasferimento ad anello aperto è uguale a -130° quando è $\omega_{T1} = 0,7 \text{ rad/s}$, si pone lo zero della rete ritardatrice in corrispondenza della pulsazione

$$\omega_z = 0,1 \cdot \omega_{T1}$$

$$\omega_z = 0,07 \text{ rad/s}$$

Con questa scelta progettuale si assume che la fase della rete ritardatrice sia uguale a 5° quando è $\omega_{T1} = 0,7 \text{ rad/s}$. Con questo valore il modulo della funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema

rappresentato in Fig. 5.3.E, comprensivo della rete ritardatrice, deve essere uguale a:

$$|G_c(j \cdot \omega_{T1}) \cdot G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})| = 1 \quad [5.2.E]$$

Ricordato che la funzione di trasferimento di una rete ritardatrice può essere scritta nella seguente forma

$$G_c(j \cdot \omega) = \frac{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_z}}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_p}}$$

e che $\omega_p < \omega_z$, si ha $\omega_{T1} > \omega_z > \omega_p$. In corrispondenza della pulsazione ω_{T1} il modulo della funzione di trasferimento della rete ritardatrice è uguale a:

$$|G_c(j \cdot \omega_{T1})| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{T1}}{\omega_z}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{T1}}{\omega_p}\right)^2}}$$

$$|G_c(j \cdot \omega_{T1})| \cong \frac{\omega_p}{\omega_z} \quad [5.3.E]$$

Posto $\omega_{T1} = 0,7 \text{ rad/s}$, dalla [5.2.E], dalla [5.1.E] e dalla [5.3.E] si ricava:

$$\frac{\omega_p}{\omega_z} = \frac{1}{|G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})|}$$

$$|G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})| = \frac{10}{\omega_{T1} \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{T1}}{2}\right)^2} \right]^2}$$

$$|G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})| = \frac{10}{0,7 \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{0,7}{2}\right)^2} \right]^2} \cong 12,7$$

$$\frac{\omega_p}{\omega_z} = \frac{1}{12,7}$$

Le costanti di tempo della rete ritardatrice sono uguali a:

$$\omega_p = 0,0787 \cdot \omega_z$$

$$\omega_p = 0,0787 \cdot 0,07 = 0,0055 \text{ rad/s}$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_z} = \frac{1}{0,07} = 14,28 \text{ s}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{\omega_p} = \frac{1}{0,0055} = 181 \text{ s}$$

La funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema compensato è

$$G_c(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = \frac{1+s \cdot \tau_1}{1+s \cdot \tau_2} \cdot \frac{10}{s \cdot (1+0,5 \cdot s)^2}$$

$$G_c(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = \frac{1+s \cdot 14,28}{1+s \cdot 181} \cdot \frac{10}{s \cdot (1+0,5 \cdot s)^2} \quad [5.4.E]$$

dove

– $G_c(s) = \frac{1+s \cdot \tau_1}{1+s \cdot \tau_2}$ è la funzione di trasferimento della rete ritardatrice;

– $\tau_2 > \tau_1$.

Il diagramma asintotico del modulo del sistema compensato (Fig. 5.4.E) interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza della pulsazione $\omega_{T1} = 0,7 \text{ rad/s}$ con una pendenza di $-20 \text{ dB per decade}$. Per $\omega_{T1} = 0,7 \text{ rad/s}$ la fase della funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema compensato, rappresentata nella figura 5.5.E è uguale a circa -139° e pertanto il margine di fase m_ϕ è uguale a:

$$m_\phi = 180^\circ - |\Phi_{\omega_{T1}}|$$

$$m_\phi \cong 180^\circ - |139^\circ| = 41^\circ$$

La rete correttiva ha migliorato il margine di fase senza variare il guadagno statico, ma ha peggiorato la rapidità della risposta perché il tempo impiegato dal sistema compensato per portarsi a regime è determinato dalla costante di tempo dominante $\tau_2 = 181 \text{ s}$.

MATLAB

```
% Cap5 Esercizio1 Sistema compensato.
n1=10*[14.28 1]; d1=[1 0]; d2=[0.25 1 1]; d3=[181 1]
[d4]=conv(d1,conv(d2,d3))
% Margine di fase e margine di guadagno.
[mag,phase,w]=bode(n1,d4)
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w)
% Rappresentazione grafica.
margin(mag,phase,w)
```

Fig. 5.4.E - Diagramma asintotico del modulo del sistema compensato.

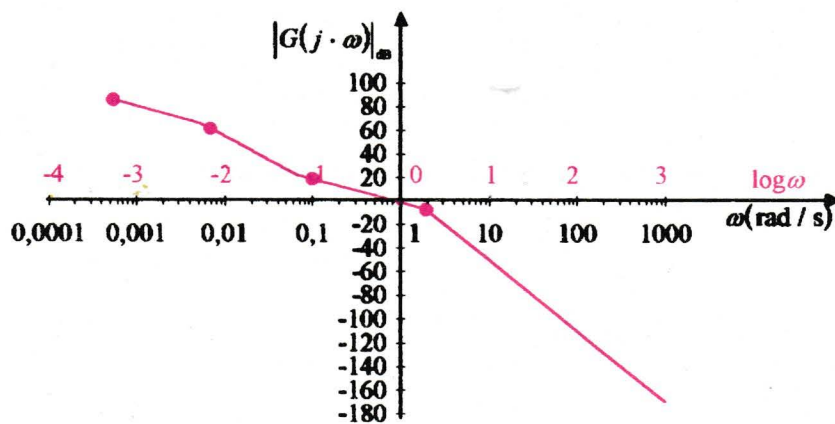
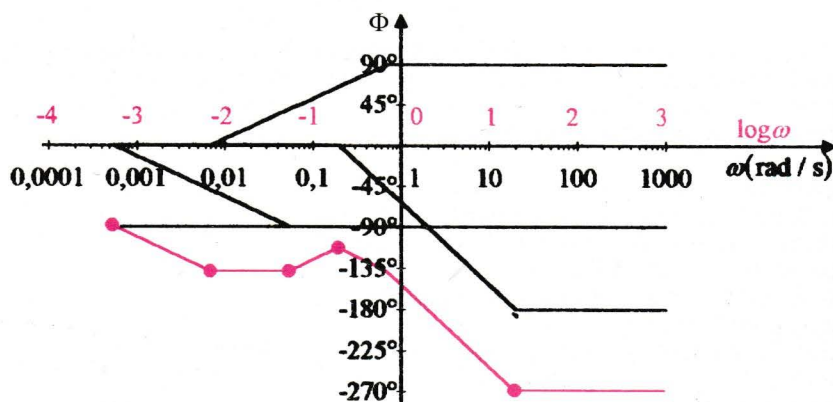


Fig. 5.5.E - Diagramma asintotico della fase del sistema compensato.



Esercizio 2

Verificare la stabilità di un sistema avente la seguente funzione di trasferimento ad anello aperto

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{25}{s \cdot \left(1 + \frac{s}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{s}{16}\right)}$$

ed eventualmente stabilizzarlo con una rete anticipatrice. Si richiede un margine di fase uguale a $m_\phi = 20^\circ$.

La funzione di trasferimento ad anello aperto $G(s) \cdot H(s)$ ha un polo nullo ($p_1 = 0$) e due poli reali negativi ($p_2 = -4$, $p_3 = -16$). Il sistema è stabile ad anello aperto ($P = 0$). Posto $s = j \cdot \omega$, si ha:

$$G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega) = \frac{25}{j \cdot \omega \cdot \left(1 + \frac{j \cdot \omega}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{j \cdot \omega}{16}\right)} \quad [5.5.E]$$

Le pulsazioni d'angolo della [5.5.E] sono uguali a:

$$\omega_{c1} = 4 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{c2} = 16 \text{ rad/s}$$

Il modulo in dB e la fase della funzione di trasferimento ad anello aperto sono uguali rispettivamente a:

$$|G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log 25 - 20 \cdot \log \omega - 20 \cdot \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{4}\right)^2} - 20 \cdot \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{16}\right)^2}$$

$$\Phi = -90^\circ - \arctg \frac{\omega}{4} - \arctg \frac{\omega}{16}$$

Il diagramma asintotico del modulo interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza della pulsazione di crossover $\omega_T \cong 8,9 \text{ rad/s}$ con una pendenza di $-40 \text{ dB per decade}$ (Fig. 5.6.E). Per $\omega_T \cong 8,9 \text{ rad/s}$ la fase della funzione di trasferimento ad anello aperto è $\Phi_{\omega_T} \cong -185^\circ$ (fig. 5.7.E). Pertanto il margine di fase m_ϕ e il margine di guadagno, quest'ultimo calcolato quando è $\Phi \cong -180^\circ$ e $\omega \cong 8 \text{ rad/s}$, sono uguali a:

$$m_\phi = 180^\circ - |\Phi_{\omega_T}|$$

$$m_\phi \cong 180^\circ - |185^\circ| \cong -5^\circ$$

$$m_g \cong -2 \text{ dB}$$

Il sistema è instabile ad anello chiuso perché il margine di fase e il margine di guadagno sono negativi.

Fig. 5.6.E

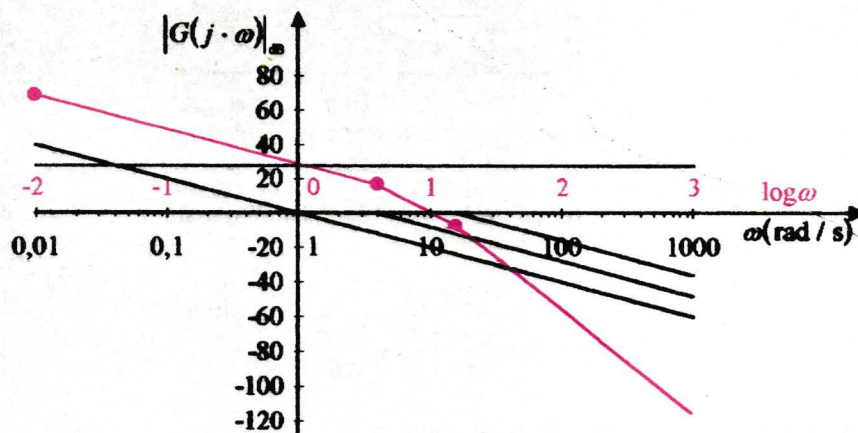
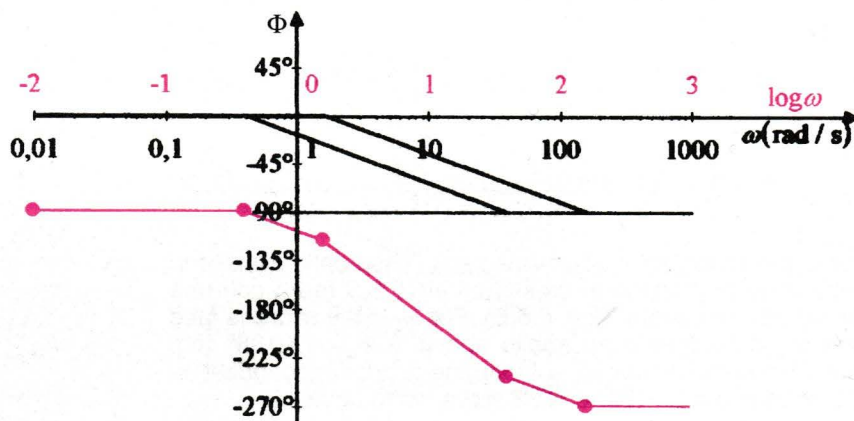


Fig. 5.7.E



Per ottenere il margine di fase di 20° è necessario determinare la pulsazione di crossover ω_{T1} tale che il modulo e la fase della funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema compensato con la rete anticipatrice siano rispettivamente uguali a:

$$|G_c(j \cdot \omega_{T1}) \cdot G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})| = 1 \quad [5.6.E]$$

$$\angle G_c(j \cdot \omega_{T1}) \cdot G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1}) = -180^\circ + 20^\circ \quad [5.7.E]$$

Posto il margine di fase $m_\phi = 20^\circ$, dalla [5.6.E] e dalla [5.7.E] si ricavano il modulo e la fase $\angle G_c(j \cdot \omega_{T1})$ della rete anticipatrice in corrispondenza della pulsazione ω_{T1} :

$$|G_c(j \cdot \omega_{T1})| = \frac{1}{|G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})|} \quad [5.8.E]$$

$$\angle G_c(j \cdot \omega_{T1}) = \vartheta = -180^\circ + m_\phi - \arctg G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1}) \quad [5.9.E]$$

Tenendo presente che la funzione di trasferimento della rete anticipatrice può essere posta nella forma

$$G_c(s) = \frac{k + k \cdot \tau_1 \cdot s}{1 + \tau_2 \cdot s}$$

dalla [5.8.E] e dalla [5.9.E] si ricava:

$$k \cdot \tau_1 = \frac{1 - k \cdot |G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})| \cdot \cos \vartheta}{\omega_{T1} \cdot |G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})| \cdot \sin \vartheta} \quad [5.10.E]$$

$$\tau_2 = \frac{\cos \vartheta - k \cdot |G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})|}{\omega_{T1} \cdot \sin \vartheta} \quad [5.11.E]$$

La costante di tempo τ_2 è maggiore di zero quando è verificata la disequaglianza:

$$\cos \vartheta > k \cdot |G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})|$$

$$k < \frac{\cos \vartheta}{|G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})|}$$

Considerato che per $\omega > 0$ il modulo della funzione di trasferimento della rete anticipatrice è maggiore del guadagno statico k , l'eguaglianza

$$|G_c(j \cdot \omega_{T1}) \cdot G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})| = 1$$

è verificata per valori di k che soddisfano la disequaglianza seguente:

$$|G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})| < \frac{1}{k}$$

Per progettare la rete anticipatrice si osserva la medesima procedura utilizzata per la progettazione dei regolatori *PID*:

- si traccia il diagramma di Bode del modulo e quello della fase della funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema non compensato e si calcola la pulsazione di attraversamento ω_T in corrispondenza della quale si ha:

$$|G(j \cdot \omega_T) \cdot H(j \cdot \omega_T)|_{\text{dB}} = 0$$

- si sceglie una pulsazione ω_{T1} , leggermente maggiore di ω_T , tale che la fase ϑ della rete anticipatrice sia minore di 90° e quella della funzione di trasferimento del sistema sia $\arg[G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})] < -180^\circ + m_\phi$. Si tenga presente che la larghezza di banda e la velocità di risposta del sistema aumentano quando aumenta la pulsazione di attraversamento ω_T ;
- si calcola la fase della funzione di trasferimento della rete anticipatrice con la formula:

$$\vartheta = \angle G_c(j \cdot \omega_{T1}) = -180^\circ + m_\phi - \angle G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})$$

Considerato che la pulsazione di attraversamento del sistema non compensato è $\omega_T \cong 8,9$ rad/s, si sceglie una pulsazione

$$\omega_{T1} = 10 \text{ rad/s}$$

maggiore, di poco, di ω_T e si calcolano il modulo e la fase della funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema:

$$|G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})| = \frac{25}{\omega_{T1} \cdot \sqrt{1 + (\omega_{T1})^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{T1}}{2}\right)^2}}$$

$$|G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})| = \frac{25}{10 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{10}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{10}{16}\right)^2}} \cong 0,79$$

$$\Phi_{\omega_{T1}} = -90^\circ - \arctg \frac{\omega_{T1}}{4} - \arctg \frac{\omega_{T1}}{16}$$

$$\Phi_{\omega_{T1}} = -90^\circ - 68,2^\circ - 32^\circ = -190^\circ$$

Ricordando la [5.9.E], la fase della rete anticipatrice è uguale a:

$$\vartheta = -180^\circ + m_\phi - \arctg G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})$$

$$\vartheta = -180^\circ + 20 - (-190^\circ) = +30^\circ$$

Dalla [5.10.E] e dalla [5.11.E] si ricavano le costanti di tempo della rete anticipatrice:

$$k \cdot \tau_1 = \frac{1 - k \cdot 0,79 \cdot 0,86}{10 \cdot 0,79 \cdot 0,5} \quad [5.12.E]$$

$$\tau_2 = \frac{0,86 - k \cdot 0,79}{10 \cdot 0,5} \quad [5.13.E]$$

Affinché risulti

$$0,86 - k \cdot 0,79 > 0$$

il guadagno statico k del sistema deve essere

$$k < \frac{0,86}{0,79} \Rightarrow k < 1,088$$

Posto $k = 1$ nella [5.12.E] e nella [5.13.E] si ricava:

$$k \cdot \tau_1 = \frac{1 - 1 \cdot 0,79 \cdot 0,86}{10 \cdot 0,79 \cdot 0,5} \cong 0,08 \text{ s}$$

$$\tau_2 = \frac{0,86 - 1 \cdot 0,79}{10 \cdot 0,5} \cong 0,014 \text{ s}$$

La funzione di trasferimento della rete anticipatrice e quella del sistema compensato sono rispettivamente uguali a:

$$G_c(s) = \frac{1 + 0,08 \cdot s}{1 + 0,014 \cdot s}$$

$$G_c(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = \frac{(1 + 0,08 \cdot s)}{(1 + 0,014 \cdot s)} \cdot \frac{25}{s \cdot \left(1 + \frac{s}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{s}{16}\right)}$$

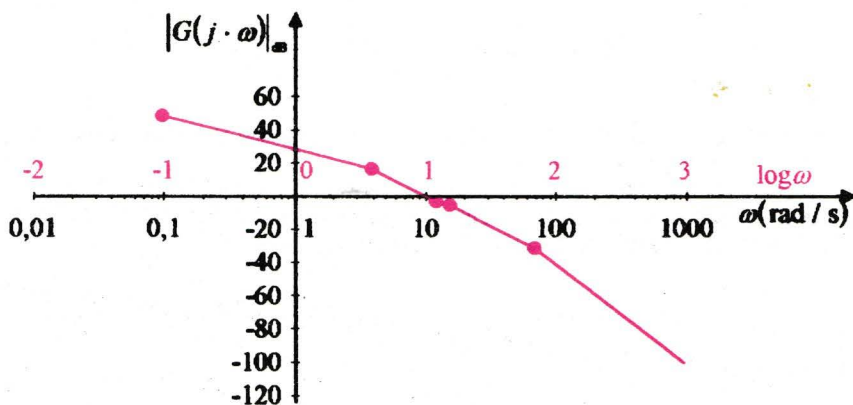


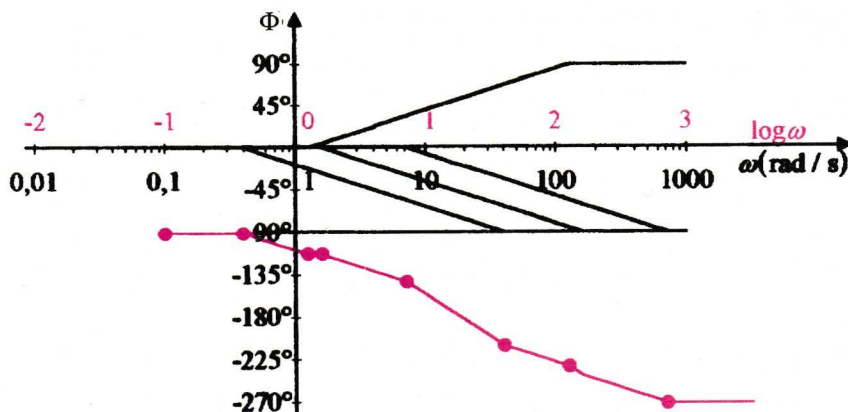
Fig. 5.8.E

Dalla figura 5.8.E e dalla figura 5.9.E si rileva che il diagramma asintotico del modulo della funzione di trasferimento del sistema compensato interseca l'asse delle ascisse nel punto $\omega_{T1} = 10 \text{ rad/s}$. Il margine di guadagno, posto $\Phi = -180^\circ$ e $\omega = 22 \text{ rad/s}$, è uguale a

$$m_g = 13 \text{ dB}$$

La rete anticipatrice ha migliorato il margine di fase e il margine di guadagno.

Fig. 5.9.E



Esercizio 3

Verificare la stabilità di un sistema avente la seguente funzione di trasferimento ad anello aperto

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{2,5}{s \cdot (s+1) \cdot (1+0,5 \cdot s)}$$

ed eventualmente stabilizzarlo con una rete a sella. Si richiede un margine di fase uguale a $m_\phi = 50^\circ$.

Considerato che la funzione di trasferimento ad anello aperto ha un polo nullo ($p_1 = 0$) e due poli reali e negativi ($p_2 = -1$, $p_3 = -2$), il sistema è stabile ad anello aperto ($P = 0$). Posto $s = j \cdot \omega$, si ha:

$$G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega) = \frac{2,5}{j \cdot \omega \cdot (1+j \cdot \omega) \cdot \left(1 + \frac{j \cdot \omega}{2}\right)} \quad [5.14.E]$$

Il modulo in dB e la fase della funzione di trasferimento ad anello aperto sono uguali a:

$$G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega) \Big|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log 2,5 - 20 \cdot \log \omega - 20 \cdot \log \sqrt{1 + (\omega)^2} - 20 \cdot \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

$$\Phi = -90^\circ - \arctg \omega - \arctg \frac{\omega}{2}$$

Dai diagrammi di Bode del modulo e della fase della funzione di trasferimento ad anello aperto, rappresentati nella figura 5.10.E e nella figura 5.11.E, si rileva che il diagramma del modulo interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza della pulsazione di crossover $\omega_T \cong 3,5$ rad/s con una pendenza uguale a -40 dB per decade. Posto $\omega_T \cong 3,5$ rad/s, sul diagramma della fase si legge un angolo $\Phi_{\omega_T} \cong -175^\circ$. Pertanto il margine di fase m_ϕ e il margine di guadagno sono uguali a:

$$m_\phi = 180^\circ - |\Phi_{\omega_T}|$$

$$m_\phi \cong 180^\circ - |175^\circ| \cong 5^\circ$$

$$m_g \cong 5 \text{ dB}$$

Il sistema è stabile ad anello chiuso ma il margine di fase e il margine di guadagno sono minori dei valori consigliati.

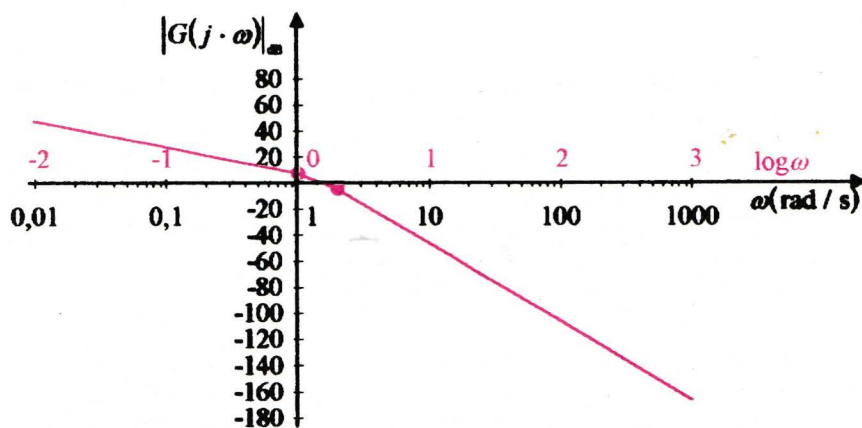
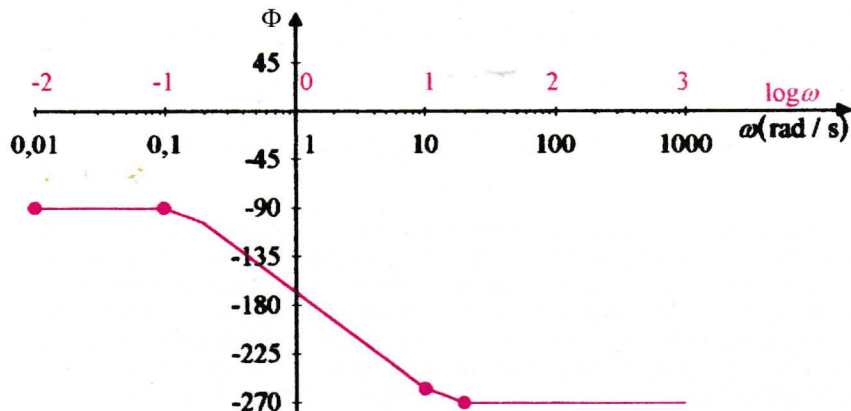


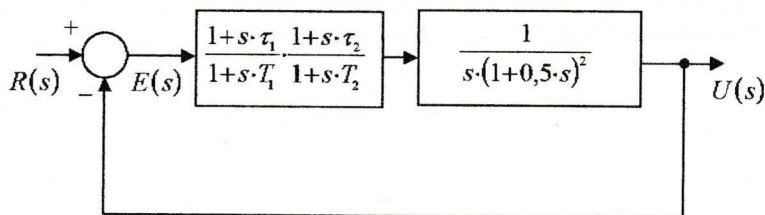
Fig. 5.10.E

Fig. 5.11.E



Per stabilizzare il sistema senza modificare il guadagno statico si inserisce una rete a sella dopo il nodo sommatore (Fig. 5.12.E).

Fig. 5.12.E



Per progettare la rete a sella si osservi la procedura di seguito descritta:

- si progetti la rete ritardatrice assumendo che essa debba assicurare un margine di fase arbitrario ma minore di quello richiesto. Nel caso specifico dell'esempio si assume che la rete ritardatrice assicuri un margine di fase uguale a $m_{\phi 1} = 20^\circ$;
- si progetti la rete anticipatrice che assicura il margine di fase richiesto.

1. Progetto della rete ritardatrice.

Per rispondere alle specifiche richieste si procede in modo analogo a quanto visto nell'esercizio 1. Si determina la pulsazione di crossover ω_{T1}

in corrispondenza della quale la fase della funzione di trasferimento ad anello aperto è uguale a:

$$\angle G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1}) = -180^\circ + (20^\circ + 5^\circ)$$

$$\Phi_{\omega_{T1}} = -155^\circ$$

Dal diagramma della fase si legge che è $\Phi_{\omega_{T1}} = -155^\circ$ in corrispondenza di $\omega_{T1} = 0,9$ rad/s, e si pone lo zero della rete ritardatrice in corrispondenza della pulsazione

$$\omega_z = 0,1 \cdot \omega_{T1}$$

$$\omega_z = 0,09 \text{ rad/s}$$

Con questa scelta progettuale si assume che in corrispondenza della pulsazione $\omega_{T1} = 0,9$ rad/s la fase della rete ritardatrice sia uguale a $|5^\circ|$. Con questo valore il modulo della funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema compensato con la sola rete ritardatrice deve essere uguale a:

$$|G_1(j \cdot \omega_{T1}) \cdot G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})| = 1 \quad [5.15.E]$$

Considerato che il modulo della funzione di trasferimento della rete ritardatrice è uguale a:

$$|G_1(j \cdot \omega_{T1})| = \frac{\omega_p}{\omega_z}$$

quando è $\omega_{T1} = 0,9$ rad/s, dalla [5.15.E] si ha:

$$\frac{\omega_p}{\omega_z} = \frac{1}{|G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})|} \quad [5.16.E]$$

Ricavato il modulo della funzione di trasferimento ad anello aperto quando è $\omega_{T1} = 0,9$ rad/s

$$|G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})| = \frac{2,5}{\omega_{T1} \cdot \sqrt{1 + (\omega)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{T1}}{2}\right)^2}}$$

$$|G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1})| = \frac{2,5}{0,9 \cdot \sqrt{1 + (0,9)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{0,9}{2}\right)^2}} \cong 1,88$$

e sostituito nella [5.16.E], si ottiene

$$\frac{\omega_p}{\omega_z} = \frac{1}{1,88}$$

Le costanti di tempo della rete ritardatrice sono uguali a:

$$\omega_p = 0,53 \cdot \omega_z$$

$$\omega_p = 0,53 \cdot 0,09 = 0,048 \text{ rad/s}$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_z} = \frac{1}{0,09} = 11,1 \text{ s}$$

$$T_1 = \frac{1}{\omega_p} = \frac{1}{0,048} = 20,8 \text{ s}$$

La funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema compensato con la sola rete ritardatrice è uguale a:

$$G_1(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = \frac{1+s \cdot \tau_1}{1+s \cdot T_1} \cdot \frac{2,5}{s \cdot (1+s)(1+0,5 \cdot s)}$$

$$G_1(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = \frac{1+s \cdot 11,1}{1+s \cdot 20,8} \cdot \frac{2,5}{s \cdot (s+1) \cdot (1+0,5 \cdot s)}$$

dove:

- $G_1(s) = \frac{1+s \cdot \tau_1}{1+s \cdot T_1}$ è la funzione di trasferimento della rete ritardatrice;
- $T_1 > \tau_1$.

2. Progetto della rete anticipatrice.

Terminata la progettazione della rete ritardatrice si assume che la funzione

$$G_1(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = \frac{1+s \cdot 11,1}{1+s \cdot 20,8} \cdot \frac{2,5}{s \cdot (s+1) \cdot (1+0,5 \cdot s)}$$

sia la funzione di trasferimento ad anello aperto di un sistema instabile che deve essere stabilizzato con una rete anticipatrice in modo da ottenere il margine di fase richiesto ($m_{\phi 2} = 50^\circ$).

Secondo la procedura di progettazione esaminata nell'esercizio 2 è necessario calcolare la pulsazione di attraversamento in corrispondenza della quale si ha

$$\left| G_1(j \cdot \omega_{T1}) \cdot G(j \cdot \omega_{T1}) \cdot H(j \cdot \omega_{T1}) \right|_{\text{dB}} = 0$$

e scegliere una pulsazione ω_{T2} , leggermente maggiore di ω_{T1} , tale che la fase ϑ della rete anticipatrice sia minore di 90° e quella della funzione

di trasferimento del sistema sia:

$$\arg[G_1(j \cdot \omega_{T2}) \cdot G(j \cdot \omega_{T2}) \cdot H(j \cdot \omega_{T2})] < -180^\circ + m_\phi.$$

Considerato che la pulsazione di attraversamento del sistema compensato con la sola rete ritardatrice è $\omega_{T1} = 0,9$ rad/s, per ottenere il margine di fase richiesto si sceglie una pulsazione

$$\omega_{T2} = 1,8 \text{ rad/s}$$

maggiore, di poco, della pulsazione $\omega_{T1} = 0,9$ rad/s e si calcolano il modulo e la fase che la funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema compensato con la sola rete ritardatrice assume quando è $\omega_{T2} = 1,8$ rad/s:

$$|G_1(j \cdot \omega_{T2}) \cdot G(j \cdot \omega_{T2}) \cdot H(j \cdot \omega_{T2})| = \frac{\sqrt{1 + (11,1 \cdot \omega_{T2})^2}}{\sqrt{1 + (20,8 \cdot \omega_{T2})^2}} \cdot \frac{2,5}{\omega_{T2} \cdot \sqrt{1 + (\omega_{T2})^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{T2}}{2}\right)^2}}$$

$$|G_1(j \cdot \omega_{T2}) \cdot G(j \cdot \omega_{T2}) \cdot H(j \cdot \omega_{T2})| = \frac{\sqrt{1 + (11,1 \cdot 1,8)^2}}{\sqrt{1 + (20,8 \cdot 1,8)^2}} \cdot \frac{2,5}{1,8 \cdot \sqrt{1 + (1,8)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1,8}{2}\right)^2}} \cong 0,27$$

$$\Phi_{\omega_{T2}} = + \operatorname{arctg} \frac{\omega_{T2}}{0,09} - \operatorname{arctg} \frac{\omega_{T2}}{0,048} - 90 - \operatorname{arctg} \omega_{T2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega_{T2}}{2}$$

$$\Phi_{\omega_{T2}} = 87^\circ - 88^\circ - 90^\circ - 61^\circ - 42^\circ = -194^\circ$$

La fase della rete anticipatrice è uguale a:

$$\vartheta_2 = -180^\circ + m_{\phi 2} - \operatorname{arctg} G_1(j \cdot \omega_{T2}) \cdot G(j \cdot \omega_{T2}) \cdot H(j \cdot \omega_{T2})$$

$$\vartheta_2 = -180^\circ + 50 - (-194^\circ) = +64^\circ$$

Applicando la 5.10.E e la 5.11.E si ricavano le costanti di tempo della rete anticipatrice:

$$k \cdot \tau_2 = \frac{1 - k \cdot 0,27 \cdot 0,44}{1,8 \cdot 0,27 \cdot 0,9} \quad [5.17.E]$$

$$\tau_2 = \frac{0,44 - k \cdot 0,27}{1,8 \cdot 0,9} \quad [5.18.E]$$

Affinché risulti

$$0,44 - k \cdot 0,27 > 0$$

è necessario che il guadagno statico k della rete sia

$$k < \frac{0,44}{0,27} \Rightarrow k < 1,63$$

Posto $k = 1$ nella [5.17.E] e nella [5.18.E] si ottiene:

$$\tau_2 = \frac{1 - 0,27 \cdot 0,44}{1,8 \cdot 0,27 \cdot 0,9} \cong 2 \text{ s}$$

$$T_2 = \frac{0,44 - 0,27}{1,8 \cdot 0,9} \cong 0,1 \text{ s}$$

La funzione di trasferimento della rete anticipatrice e quella ad anello aperto del sistema stabilizzato sono uguali a:

$$G_2(s) = \frac{1 + 2 \cdot s}{1 + 0,1 \cdot s}$$

$$G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot H(s) = \frac{(1 + 2 \cdot s)}{(1 + 0,1 \cdot s)} \cdot \frac{(1 + 11,1 \cdot s)}{(1 + 20,8 \cdot s)} \cdot \frac{2,5}{s \cdot (1 + s) \cdot (1 + 0,5 \cdot s)}$$

I diagrammi asintotici del modulo e della fase della funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema compensato sono riportati rispettivamente nella figura 5.13.E e nella figura 5.14.E. Si rileva che il diagramma non asintotico del modulo, elaborato con MATLAB, interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza della pulsazione di crossover $\omega_{T2} \cong 1,8 \text{ rad/s}$ con una pendenza uguale a $-40 \text{ dB per decade}$. Posto $\omega_{T2} = 1,8 \text{ rad/s}$, sul diagramma della fase si legge un angolo $\Phi_{\omega T2} \cong -135^\circ$. Pertanto il margine di fase m_ϕ e il margine di guadagno sono uguali a:

$$m_\phi = 180^\circ - |\Phi_{\omega T2}|$$

$$m_\phi \cong 180^\circ - |135^\circ| \cong 45^\circ$$

$$m_g \cong 15 \text{ dB}$$

MATLAB

% Cap5 Esercizio3 Sistema compensato.

$n1=2.5*[2 \ 1]$; $n2=[11.1 \ 1]$; $d1=[1 \ 0]$; $d2=[1 \ 1]$; $d3=[0.5 \ 1]$

$d4=[0.1 \ 1]$; $d5=[20.8 \ 1]$

$[n3]=\text{conv}(n1,d2)$

$[d6]=\text{conv}(d1,\text{conv}(d2,d3))$

$[d7]=\text{conv}(d6,\text{conv}(d4,d5))$

% Margine di fase e margine di guadagno.

$[\text{mag},\text{phase},w]=\text{bode}(n3,d7)$

$[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=\text{margin}(\text{mag},\text{phase},w)$

% Rappresentazione grafica.

$\text{margin}(\text{mag},\text{phase},w)$

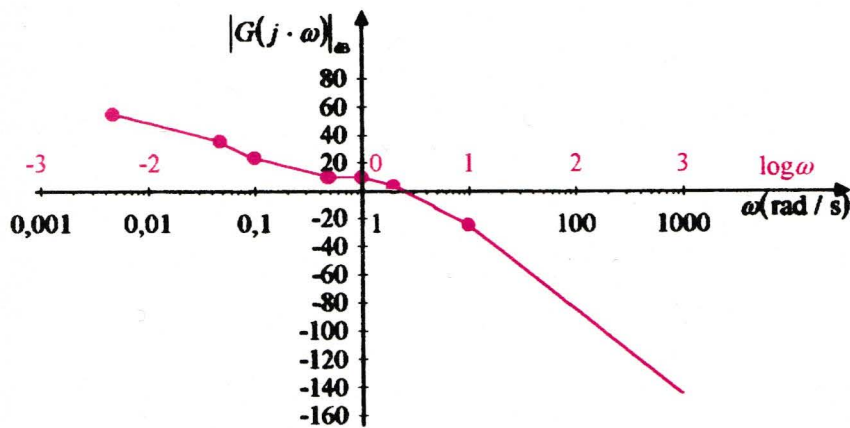


Fig. 5.13.E

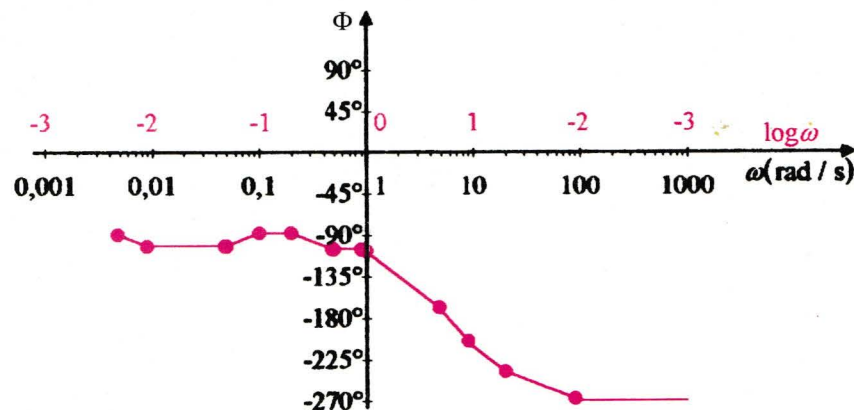


Fig. 5.14.E