ESERCIZI SVOLTI

Esercizio 1

Un sistema di controllo a retroazione unitaria ha la seguente funzione di trasferimento ad anello aperto:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{s+5}{s \cdot (s+3)}$$

Dopo aver ricavato la funzione di trasferimento ad anello chiuso e la risposta alla sollecitazione a gradino di ampiezza unitaria, calcolare:

- il valore massimo della risposta e il tempo di assestamento;
- gli errori di posizione, di velocità e di accelerazione.

Il sistema è di tipo 1 perché la funzione di trasferimento ad anello aperto ha un polo nell'origine. La funzione di trasferimento ad anello chiuso e la trasformata della risposta sono uguali a:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

$$W(s) = \frac{s+5}{s^2 + 4 \cdot s + 5}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s+5}{s^2 + 4 \cdot s + 5}$$

Considerato che i poli della risposta $U(s)$ sono $p_1 = 0$, $p_2 = -2 + j$ e $p_2 = -2 - j$, si ricava la risposta del sistema rappresentata in figura 3.1.E:

$$u(t) = 1 - 1 \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot [\text{sen}\, t + \cos t]$$

Il tempo di assestamento, la sovraelongazione massima percentuale e il valore massimo della risposta sono uguali a:

$$T_s = \frac{3}{\zeta \cdot \omega_n} = \frac{3}{0{,}9 \cdot 2{,}23} = 1.49$$

$$M\% = e^{\frac{-\zeta \cdot \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \cdot 100$$

$$M\% = e^{\frac{-0,9 \cdot 3,14}{\sqrt{1-0,8}}} \cdot 100 = 0,18\%$$

$$U_M = u_f + \frac{M\%}{100} \cdot u_f$$

$$U_M = 1 + e^{\frac{-0,9 \cdot 3,14}{\sqrt{1-0,8}}} \cdot 1 = 1,0018$$

L'errore di posizione, come si rileva anche dalla figura 3.1.E è nullo, mentre quelli di velocità e di accelerazione sono rispettivamente uguali a:

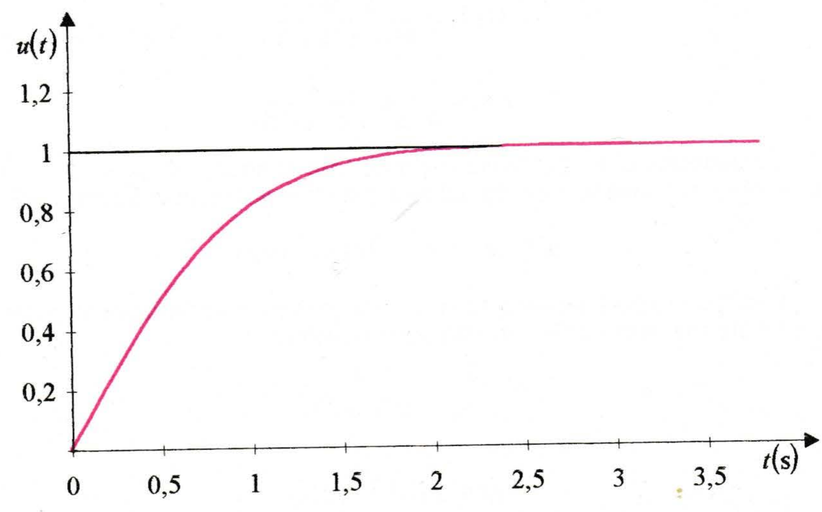
$$\varepsilon_v = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{s+5}{s \cdot (s+3)}} = \frac{3}{5}$$

$$\varepsilon_a = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s^3} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{s+5}{s \cdot (s+3)}} \to \infty$$

MATLAB

```
%Cap3Esercizio1
n1=[1 5];d1=[1 3 0]
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso.
[n2,d2]=cloop(n1,d1)
% Poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso.
r=roots(d2)
%Risposta al gradino di ampiezza unitaria.
invlaplace('(s+5)/(s*(s^2+4*s+5))')
step(n2,d2)
```

Fig. 3.1.E



Esercizio 2

Un sistema di controllo a retroazione unitaria ha la seguente funzione di trasferimento ad anello aperto:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{5}{s^2 + s + 2}$$

Dopo aver ricavato la funzione di trasferimento ad anello chiuso e la risposta alla sollecitazione a gradino di ampiezza unitaria calcolare:

- il valore massimo della risposta e il tempo di assestamento;
- gli errori di posizione, di velocità e di accelerazione.

Il sistema è di tipo 0 perché la funzione di trasferimento ad anello aperto non ha poli nell'origine. La funzione di trasferimento ad anello chiuso e la trasformata della risposta sono uguali a:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

$$W(s) = \frac{5}{s^2 + s + 7}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{5}{s^2 + s + 7}$$

Considerato che i poli della risposta $U(s)$ sono $p_1 = 0$, $p_2 = -0{,}5 + j \cdot 2{,}6$ e $p_3 = -0{,}5 - j \cdot 2{,}6$, si ricava la risposta del sistema rappresentata in figura 3.2.E:

$$u(t) = 0{,}71 - e^{-0{,}5 \cdot t} \cdot \left[0{,}14 \cdot \mathrm{sen}(2{,}6 \cdot t) + 0{,}71 \cdot \cos(2{,}6 \cdot t)\right]$$

Il tempo di assestamento, la sovraelongazione massima percentuale e il valore massimo della risposta sono uguali a:

$$T_s = \frac{3}{\zeta \cdot \omega_n} = \frac{3}{0{,}189 \cdot \sqrt{7}} = 6 \text{ s}$$

$$M\% = e^{\frac{-\zeta \cdot \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \cdot 100$$

$$M\% = e^{\frac{-0{,}189 \cdot 3{,}14}{\sqrt{1-0{,}0357}}} \cdot 100 = 54\%$$

$$U_M = u_f + \frac{M\%}{100} \cdot u_f$$

$$U_M = 0{,}71 + 0{,}54 \cdot 0{,}71 = 1{,}09$$

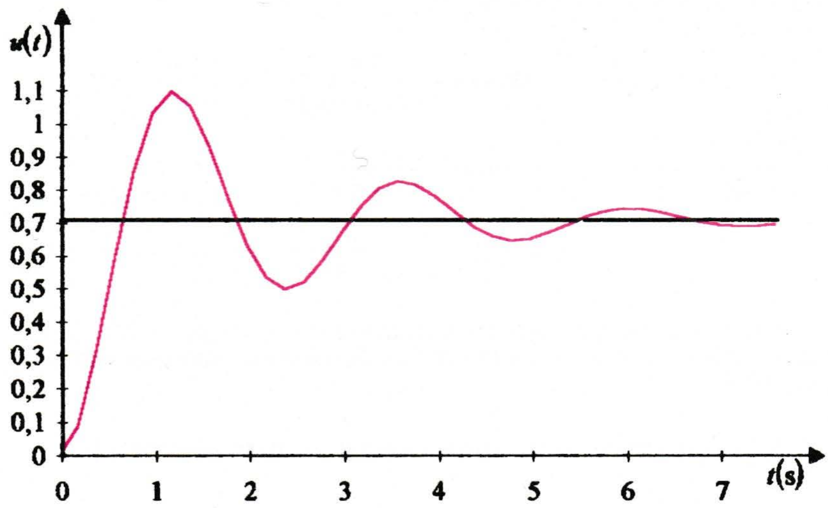
Gli errori di posizione, di velocità e di accelerazione sono rispettivamente uguali a:

$$\varepsilon_p = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{5}{s^2+s+2}} = \frac{2}{7}$$

$$\varepsilon_v = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{5}{s^2+s+2}} \to \infty$$

$$\varepsilon_a = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s^3} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{5}{s^2+s+2}} \to \infty$$

Fig. 3.2.E



Esercizio 3

Un sistema di controllo ha la seguente funzione di trasferimento ad anello chiuso:

$$W(s) = \frac{0,4 \cdot (s+1)}{(s+2) \cdot \left(s^2 + 0,4 \cdot s + 1\right)} \qquad [3.1.E]$$

Dopo aver ricavato la risposta alla sollecitazione a gradino di ampiezza unitaria, calcolare il valore massimo della risposta e il tempo di assestamento.

La funzione di trasferimento ad anello chiuso presenta un polo reale negativo $p1 = -2$, e due poli complessi coniugati $p_2 = -0{,}2 + j \cdot 0{,}98$ e $p_3 = -0{,}2 - j \cdot 0{,}98$. Considerato che questi ultimi sono dominanti rispetto al polo reale negativo perché sono molto più vicini all'asse immaginario, è possibile approssimare la funzione di trasferimento assegnata a quella di un sistema del secondo ordine. Poiché la risposta a regime non può variare, si riscrive la [3.1.E] nella seguente forma:

$$W(s) = \frac{0{,}4 \cdot (s+1)}{2 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot s) \cdot \left(s^2 + 0{,}4 \cdot s + 1\right)}$$

e, trascurando il termine $0{,}5 \cdot s$ rispetto all'unità, si ottiene la funzione di trasferimento $W_1(s)$ di un sistema del secondo ordine:

$$W_1(s) \cong \frac{0{,}2 \cdot (s+1)}{\left(s^2 + 0{,}4 \cdot s + 1\right)}$$

Le approssimazioni fatte sono tanto più valide quanto più i due poli sono distanti l'uno dall'altro. In particolare, nei sistemi del terzo ordine il polo p_1, reale negativo, può essere trascurato rispetto ai poli dominanti e p_2 e p_3, entrambi reali negativi o complessi coniugati a parte reale negativa, quando il suo valore assoluto è dieci volte maggiore del valore assoluto della parte reale dei poli dominanti. La trasformata della risposta non approssimata $U(s)$ e di quella approssimata $U_1(s)$ sono uguali a:

$$U(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{0{,}4 \cdot (s+1)}{(s+2) \cdot \left(s^2 + 0{,}4 \cdot s + 1\right)}$$

$$U_1(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{0{,}2 \cdot (s+1)}{\left(s^2 + 0{,}4 \cdot s + 1\right)}$$

Applicando i procedimenti noti si ricavano le risposte rappresentate in figura 3.3.E:

$$u(t) = 0{,}2 + 0{,}047 e^{-2 \cdot t} + e^{-2 \cdot t} \cdot \left[0{,}046 \cdot \mathrm{sen}(0{,}98 \cdot t) - 0{,}247 \cdot \cos(0{,}98 \cdot t)\right]$$

$$u_1(t) = 0{,}2 + e^{-0{,}2 \cdot t} \cdot \left[0{,}16 \cdot \mathrm{sen}(0{,}98 \cdot t) - 0{,}2 \cdot \cos(0{,}98 \cdot t)\right]$$

Il tempo di assestamento, la sovraelongazione massima percentuale e il valore massimo della risposta per il sistema del secondo ordine sono uguali a:

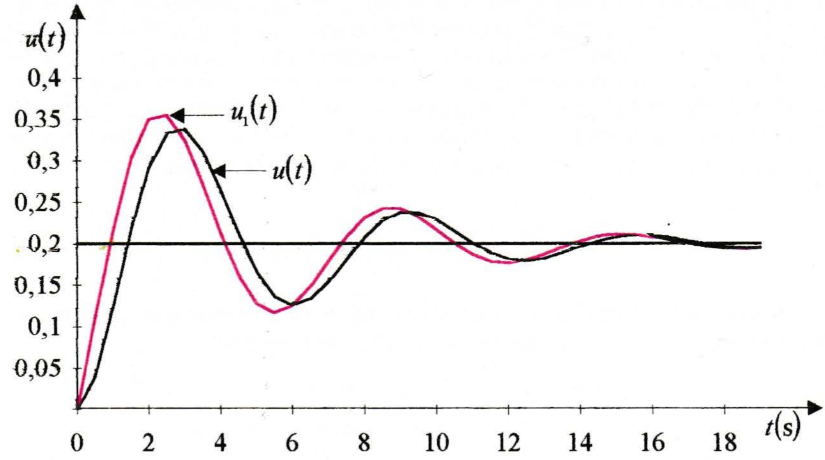
$$T_s = \frac{3}{\zeta \cdot \omega_n} = \frac{3}{0{,}2 \cdot \sqrt{1}} = 15 \text{ s}$$

$$M\% = e^{\frac{-0{,}2 \cdot \pi}{\sqrt{1 - 0{,}04}}} \cdot 100 = 53\%$$

$$U_M = u_f + \frac{M\%}{100} \cdot u_f$$

$$U_M = 0{,}2 + 0{,}53 \cdot 0{,}2 \cong 0{,}31$$

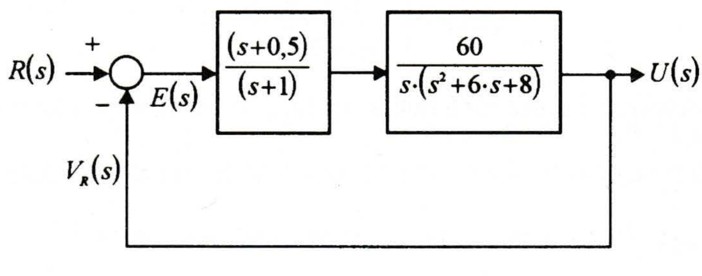
Fig. 3.3.E



Esercizio 4

Il sistema di controllo a retroazione unitaria rappresentato in figura 3.4.E è sollecitato da un segnale a gradino.

Fig. 3.4.E



Dopo aver ricavato i poli della funzione di trasferimento e la risposta del sistema alla sollecitazione a gradino di ampiezza unitaria, calcolare:

- gli errori di posizione, di velocità e di accelerazione.

Il sistema è di tipo 1 perché la funzione di trasferimento ad anello aperto ha un polo nell'origine. La funzione di trasferimento ad anello chiuso e la trasformata della risposta sono uguali a:

$$W(s) = \frac{60 \cdot (s + 0,5)}{s^4 + 7 \cdot s^3 + 14 \cdot s^2 + 68 \cdot s + 30}$$

$$U(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{60\cdot(s+0,5)}{s^4+7\cdot s^3+14\cdot s^2+68\cdot s+30}$$

Il sistema è stabile perché i poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso sono tutti a parte reale negativa: $p_1=-6,36$, $p_2=-0,08+j\cdot 3,14$, $p_3=-0,08-j\cdot 3,14$, $p_4=-0,477$. Applicando i procedimenti noti si ricava la risposta del sistema rappresentata in figura 3.5.E:

$$u(t)=1-0,19\cdot e^{-6,3\cdot t}-0,0475\cdot e^{-0,477\cdot t}-e^{-0,08\cdot t}\cdot\left[0,41\cdot \mathrm{sen}(3,14\cdot t)+0,76\cdot\cos(3,14\cdot t))\right]$$

Gli errori di posizione, di velocità e di accelerazione sono uguali a:

$$\varepsilon_p=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+\frac{(s+0,5)}{s+1}\cdot\frac{60}{s\cdot\left(s^2+6\cdot s+8\right)}}=0$$

$$\varepsilon_v=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{(s+0,5)}{s+1}\cdot\frac{60}{s\cdot\left(s^2+6\cdot s+8\right)}}=0,266$$

$$\varepsilon_a=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{(s+0,5)}{s+1}\cdot\frac{60}{s\cdot\left(s^2+6\cdot s+8\right)}}\to\infty$$

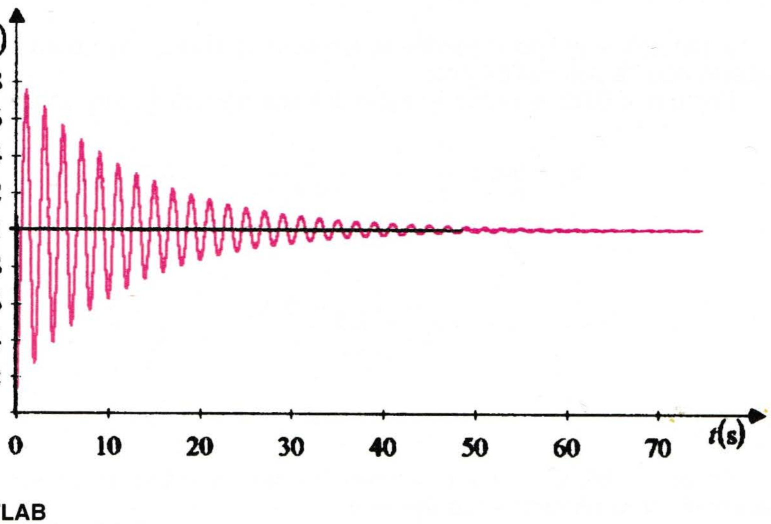


Fig. 3.5.E

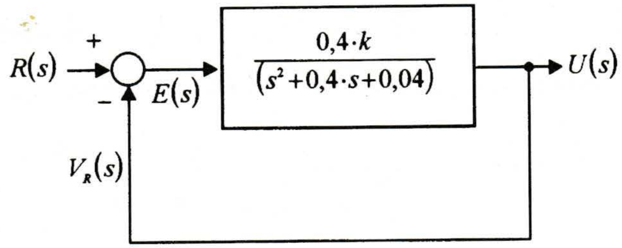
MATLAB

```
% Cap3 Esercizio4:
n1=[10,5];d1=[1 1]; n2=60; d2=[1 6 8 0]
% Funzione di trasferimento del ramo diretto.
[n3,d3]=series(n1,d1,n2,d2)
% Funzione di trasferimento ad anello chiuso.
[n4,d4]=cloop(n3,d3)
r=roots(d4)
step(n4,d4)
invlaplace('60*(s+0,5)/(s*(s^4+7*s^3+14*s^2+68*s+30))')
```

Esercizio 5

Il sistema di controllo a retroazione unitaria rappresentato in figura 3.6.E è sollecitato da un segnale a gradino unitario.

Fig. 3.6.E



Dopo aver calcolato il valore di k affinché l'errore di posizione a regime sia minore del 2% ricercare:

- la funzione di trasferimento ad anello chiuso e i suoi poli quando è $k = 10$;
- la risposta alla sollecitazione a gradino di ampiezza unitaria quando è $k = 10$.

Il sistema è di tipo 0 perché la funzione di trasferimento ad anello aperto non ha poli nell'origine.

Posto $\varepsilon_p < 0{,}02$, si ricava il valore di k che determina tale errore:

$$\varepsilon_p = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{0{,}4\cdot k}{s^2+0{,}4s+0{,}04}} < 0{,}02$$

$$\frac{1}{1+\dfrac{0{,}4\cdot k}{0{,}04}} < 0{,}02$$

$$k > 4{,}9$$

Posto $k = 10$, la funzione di trasferimento ad anello chiuso e la trasformata della risposta sono uguali a:

$$W(s) = \frac{4}{s^2+0{,}4\cdot s+4{,}04}$$

$$U(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{4}{s^2+0{,}4\cdot s+4{,}04}$$

Il sistema è stabile perché i poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso sono complessi coniugati a parte reale negativa $p_1 = -0{,}2 + j \cdot 2$ e $p_2 = -0{,}2 - j \cdot 2$. La risposta del sistema, rappresentata nella figura 3.7.E, è uguale a:

$$u(t) = 0{,}99 - e^{-0{,}2 \cdot t} \cdot \left[0{,}09 \cdot \text{sen}(2 \cdot t) + 0{,}99 \cdot \cos(2 \cdot t)\right]$$

Il tempo di assestamento, la sovraelongazione massima percentuale e il valore massimo della risposta sono uguali a:

$$T_s = \frac{3}{\zeta \cdot \omega_n} = \frac{3}{0{,}099 \cdot \sqrt{4{,}04}} = 15\ \text{s}$$

$$M\% = e^{\frac{-\zeta \cdot \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \cdot 100$$

$$M\% = e^{\frac{-0{,}099 \cdot 3{,}14}{\sqrt{1-0{,}0099}}} \cdot 100 = 73\%$$

$$U_M = u_f + \frac{M\%}{100} \cdot u_f$$

$$U_M = 0{,}99 + 0{,}73 \cdot 0{,}99 = 1{,}71$$

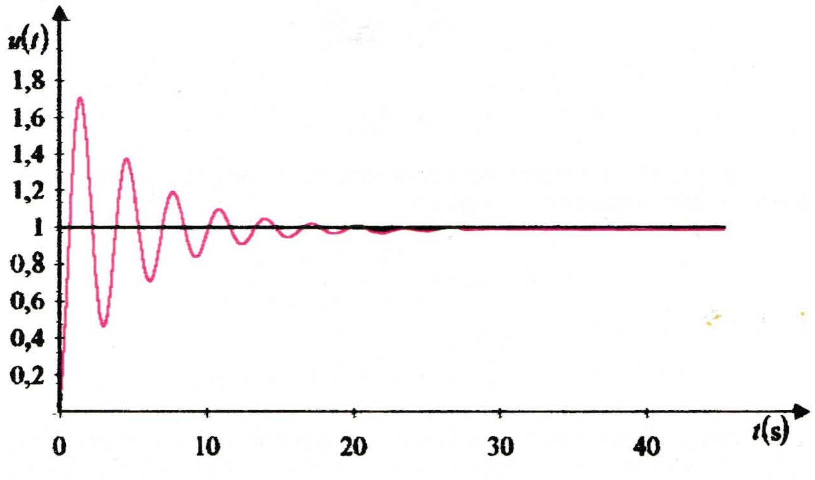
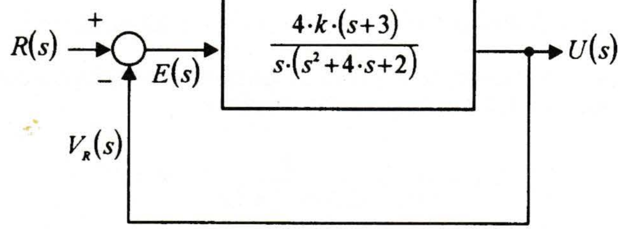


Fig. 3.7.E

Il sistema di controllo a retroazione unitaria rappresentato in figura 3.8.E è sollecitato da un segnale a rampa $r(t) = 0{,}3 \cdot t$.

Esercizio 6

Fig. 3.8.E



Dopo aver calcolato il valore di k affinché l'errore di velocità a regime sia minore del 2%, ricercare:

- la funzione di trasferimento ad anello chiuso e i suoi poli quando è $k = 10$;
- la risposta alla sollecitazione a rampa quando è $k = 10$.

Il sistema è di tipo 1 perché la funzione di trasferimento ad anello aperto ha un polo nell'origine.

Posto $\varepsilon_V < 0{,}02$, si ricava il valore di k che determina tale errore:

$$\varepsilon_V = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{0,3}{s^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{4\cdot k\cdot(s+3)}{s\cdot\left(s^2+4s+2\right)}} < 0,02$$

$$\frac{0,3}{\dfrac{12\cdot k}{2}} < 0,02$$

$$k > 2,5$$

Posto $k = 10$, la funzione di trasferimento ad anello chiuso e la trasformata della risposta sono uguali a:

$$W(s) = \frac{40\cdot(s+3)}{s^3+4\cdot s^2+42\cdot s+120}$$

$$U(s) = \frac{0,3}{s^2}\cdot\frac{40\cdot(s+3)}{s^3+4\cdot s^2+42\cdot s+120}$$

Il sistema è stabile perché la funzione di trasferimento ad anello chiuso ha tre poli a parte reale negativa $p_1 = -3{,}066$, $p_2 = -0{,}47 + j\cdot 6{,}24$ e $p_3 = -0{,}47 - j\cdot 6{,}24$. La risposta del sistema è uguale a:

$$u(t) = 0,3\cdot t - 0,005 - 0,0018\cdot e^{-3,066\cdot t} + 0,0034\cdot e^{-0,47\cdot t}\cdot$$
$$\left[0,0068\cdot\cos(6,24\cdot t) - 0,048\cdot \mathrm{sen}(6,24\cdot t)\right]$$

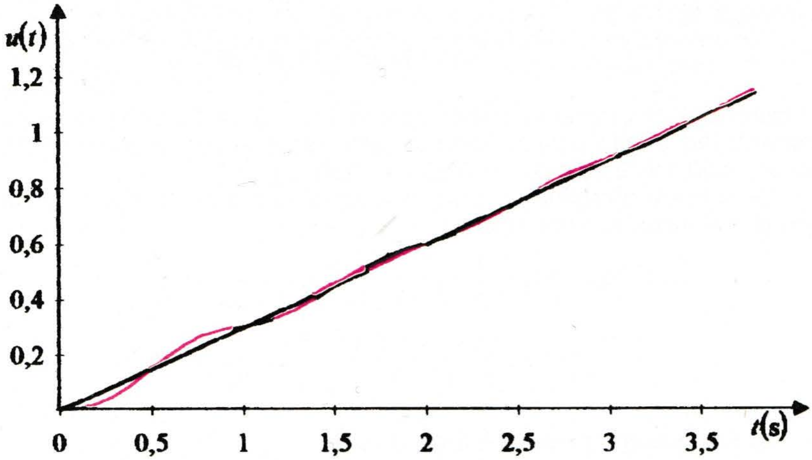


Fig. 3.9.E

Esercizio 7

Il sistema rappresentato in figura 3.10.E è sollecitato da un segnale a gradino di ampiezza unitaria.

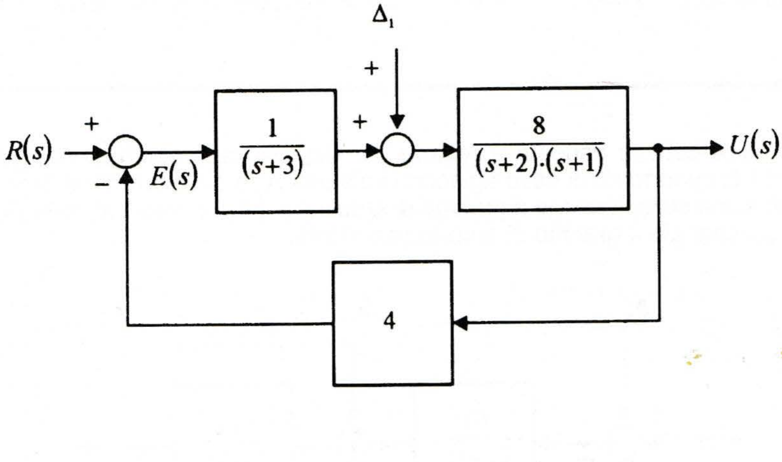


Fig. 3.10.E

Dopo aver verificato la stabilità del sistema, ricercare:

- la risposta a regime quando su di esso agisce il disturbo Δ_1 a gradino di ampiezza 0,1;
- la risposta $u_1(t)$ dovuta alla sollecitazione a gradino di ampiezza unitaria.

Considerato che la funzione di trasferimento ad anello chiuso è:

$$W(s) = \frac{8}{s^3 + 6 \cdot s^2 + 11 \cdot s + 38}$$

il sistema è sicuramente stabile perché i poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso sono a parte reale negativa $p_1 = -5{,}28$, $p_2 = -0{,}36 + j \cdot 2{,}66$ e $p_3 = -0{,}36 - j \cdot 2{,}66$.

Le risposte a regime u_{f1} e $u_{f\Delta 1}$ dovute rispettivamente alla sollecitazione e al disturbo, sono uguali a:

$$u_{f1} = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{8}{s^3 + 6 \cdot s^2 + 11 \cdot s + 38} = 0{,}2$$

$$u_{f\Delta 1} = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{0{,}1}{s} \cdot \frac{8 \cdot (s+3)}{s^3 + 6 \cdot s^2 + 11 \cdot s + 38} = 0{,}063$$

La risposta complessiva a regime u_{fT} è

$$u_{fT} = u_f + u_{f\Delta 1}$$

$$u_{fT} = 0{,}21 + 0{,}063 = 0{,}273$$

La risposta $u_1(t)$ si ricava dalla trasformata della risposta $U_1(s)$ dovuta alla sollecitazione a gradino di ampiezza unitaria:

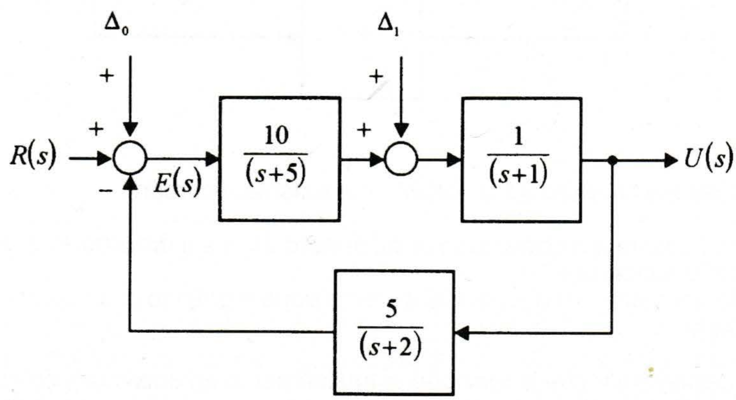
$$U_1(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{8}{s^3 + 6 \cdot s^2 + 11 \cdot s + 38}$$

$$u_1(t) = 0{,}21 + 0{,}048 \cdot e^{-5{,}28 \cdot t} - e^{-0{,}36 \cdot t} \cdot \left[0{,}118 \cdot \mathrm{sen}(2{,}66 \cdot t) + 0{,}162 \cdot \cos(2{,}66 \cdot t)\right]$$

Esercizio 8

Ricercare la risposta a regime del sistema rappresentato in figura 3.11.E quando su di esso agiscono i disturbi Δ_o e Δ_1, entrambi assimilabili a una sollecitazione a gradino di ampiezza 0,1. La sollecitazione $R(s)$ è un segnale a gradino di ampiezza unitaria.

Fig. 3.11.E



Per valutare la risposta complessiva si applica il principio di sovrapposizione degli effetti. Annullato l'effetto dei disturbi imponendo $\Delta_0 = 0$ e $\Delta_1 = 0$ (fig. 3.12.E), la risposta a regime dovuta alla sollecitazione $r(t)$ è uguale a:

$$U(s) = \frac{R}{s} \cdot \frac{10 \cdot (s+2)}{s^3 + 8 \cdot s^2 + 17 \cdot s + 60}$$

$$u_f = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{10 \cdot (s+2)}{s^3 + 8 \cdot s^2 + 17 \cdot s + 60} = 0,333$$

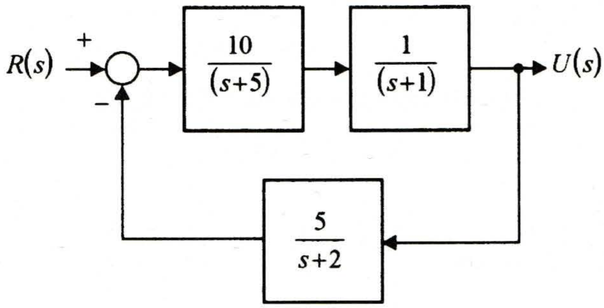


Fig. 3.12.E

Annullato l'effetto del segnale di riferimento e quello del disturbo Δ_1 si calcola la risposta a regime dovuta al disturbo Δ_0:

$$U_{\Delta 0}(s) = \frac{\Delta_0}{s} \cdot \frac{10 \cdot (s+2)}{s^3 + 8 \cdot s^2 + 17 \cdot s + 60}$$

$$u_{f\Delta 0} = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{0,1}{s} \cdot \frac{10 \cdot (s+2)}{s^3 + 8 \cdot s^2 + 17 \cdot s + 60} = 0,0333$$

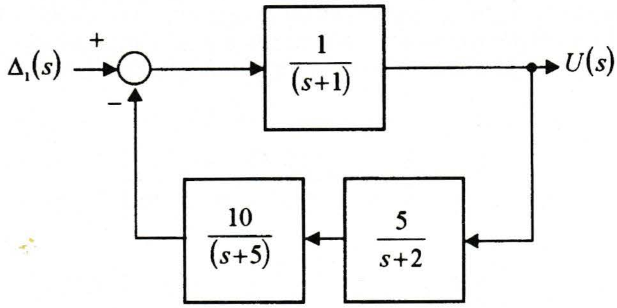
Infine, annullato l'effetto del segnale di riferimento e quello del disturbo Δ_0, imponendo $r(t)$ e $\Delta_0 = 0$, si calcola la risposta a regime dovuta all'effetto del disturbo Δ_1 (fig. 3.13.E):

$$U_{\Delta 1}(s) = \frac{\Delta_1}{s} \cdot \left[\frac{(s+5) \cdot (s+2)}{s^3 + 8 \cdot s^2 + 17 \cdot s + 60} \right]$$

$$u_{f\Delta 1} = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{0,1}{s} \cdot \left[\frac{(s+5) \cdot (s+2)}{s^3 + 8 \cdot s^2 + 17 \cdot s + 60} \right] = 0,0166$$

L'effetto del disturbo Δ_1 sulla risposta è attenuato rispetto a quello del disturbo che si introduce all'ingresso e l'attenuazione è uguale al guadagno statico del blocco che precede il punto in cui entra il disturbo Δ_1.

Fig. 3.13.E



La risposta complessiva a regime è uguale a:

$$u_{fT} = u_f + u_{f\Delta 0} + u_{f\Delta 1}$$

$$u_{fT} = 0,333 + 0,0333 + 0,0166 = 0,383$$