

FORME D'ONDA DEI SEGNALE ELETTRICI

SEGNALE ELETTRICO : v, i ai morsetti
di un bipolo
in un lato di
circuito

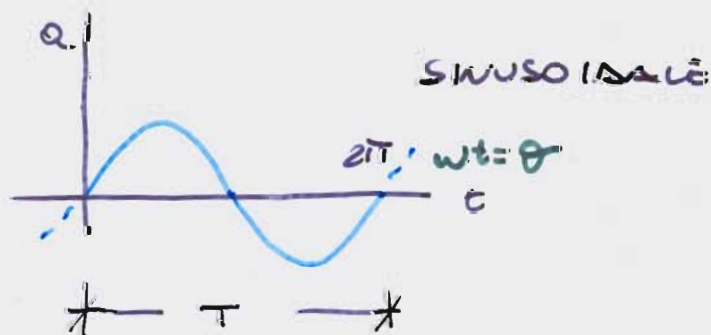
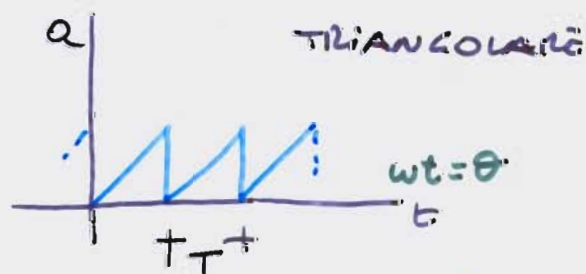
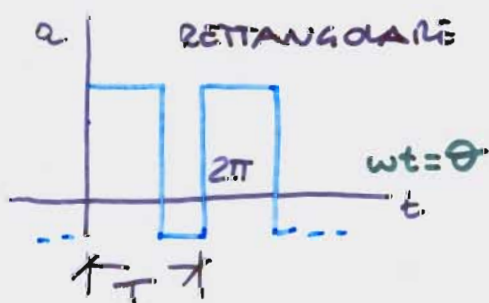
- $q(t)$ è periodico se $q(t+T) = q(t)$
per ogni t

T = PERIODO (s)

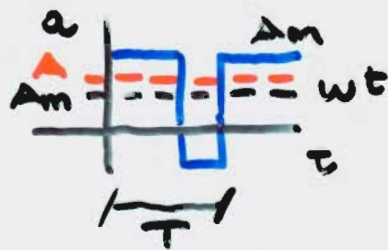
$f = 1/T$ = FREQUENZA ($s^{-1} = Hz$)

$\omega = 2\pi/T$ = PULSAZIONE (s^{-1})

ESEMPI



SEGNALE PERIODICO



VALORE MASSIMO A_m

VALORE MEDIO

$$A_m = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} a(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_\theta^{\theta+2\pi} a(\theta) d\theta$$

SE $A_m = 0 \rightarrow$ SEGNALE ALTERNATO

VALORE MEDIO ARITMETICO

$$A_{ma} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |a(t)| dt$$

VALORE EFFICACE

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} a^2(t) dt}$$

FATTORE DI VERTICE

$$k_v = A_m / A$$

FATTORE DI FORMA

$$k_f = A / A_{ma}$$

SEGNALE P. A. S.



VALORE MEDIO

$$A_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_m \sin \theta d\theta = 0$$

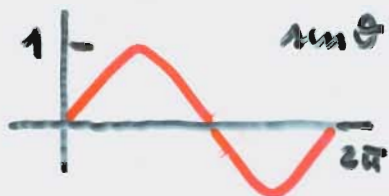
VALORE MEDIO ARITMETICO

$$\begin{aligned} A_{ma} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_m |\sin \theta| d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^{\pi} A_m \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} 2 A_m [-\cos \theta]_0^{\pi} = \frac{2 A_m}{\pi} \end{aligned}$$

VALORE EFFICACE

$$A = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_m^2 \sin^2 \theta d\theta}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi} A_m^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi} = \frac{A_m}{\sqrt{2}}$$

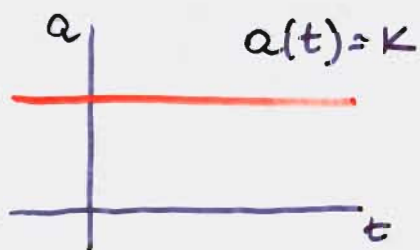


FATTORE DI VERTICE $K_v = \frac{A_m}{A} = \sqrt{2} = 1,41$

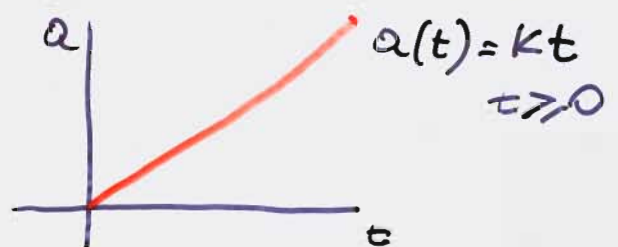
FATTORE DI FORMA $K_f = \frac{A}{A_{ma}} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2 A_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$

- $a(t)$ È APERIODICO, VICEVERSA

ESEMPI



COSTANTE



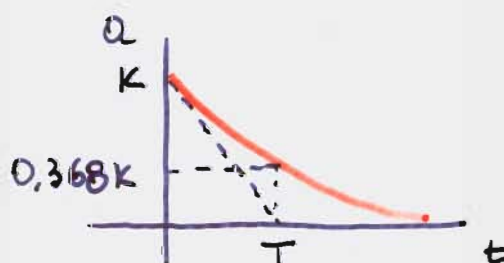
RAMPA



GRADINO



IMPULSO



ESPOENZIALE

$$a(t) = 0 \quad t < 0$$

$$a(t) = kt \quad t \geq 0$$

$$t < 0 \quad a(t) = 0$$

$$t \geq 0 \quad a(t) = K$$

$$a(t) = K \delta(t)$$

$$t \neq 0 \quad a(t) = 0$$

$$\int_{0^-}^{0^+} a(t) dt = K$$

$$a(t) = K e^{-\frac{t}{T}} = K e^{-\frac{1}{T}t}$$

$$K > 0; \quad T = \frac{1}{h}$$

COSTANTE DI
TEMPO

$$e^{-\frac{5T}{T}} = 0.007$$



THÉORIE
ANALYTIQUE
DE LA CHALEUR,

PAR M. FOURIER.



A PARIS,
CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,
LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE HYDRAULIQUE
ET LA MARINE, RUE JACOB, N° 24.

1822.

P. 4.

Pour résoudre ces équations, on suppose d'abord que le nombre des équations est m , et qu'il y a seulement un nombre m d'inconnues a, b, c, d , etc. en omettant tous les termes subséquents. On détermine les inconnues pour une certaine valeur du nombre m , ensuite on augmente successivement cette valeur de m , et l'on cherche la limite dont s'approchent continuellement les valeurs des coefficients; ces limites sont les quantités qu'il s'agit de déterminer. — Expression des valeurs de a, b, c, d, e , etc. lorsque m est infini.

ART. 215, 216.

226. On développe sous la forme

$$a \sin. x + b \sin. 2x + c \sin. 3x + d \sin. 4x + \text{etc.}$$

la fraction φx , que l'on suppose d'abord ne contenir que des puissances impaires de x .

ART. 217, 218.

228. Expression différente de ce même développement. Application à la fonction $e^x - e^{-x}$.

ART. 219, 220, 221.

231. La fonction quelconque φx peut être développée sous cette forme :

$$a \sin. x + a_1 \sin. 2x + a_2 \sin. 3x \dots + a_i \sin. ix + \text{etc.}$$

La valeur du coefficient général a_i est $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi dx \varphi x \sin. ix$. On en conclut ce théorème très-simple :

$$\frac{\pi}{2} \varphi x = \sin. x \int_0^\pi d\alpha \varphi \alpha \sin. \alpha + \sin. 2x \int_0^\pi d\alpha \varphi \alpha \sin. 2\alpha + \sin. 3x \int_0^\pi d\alpha \varphi \alpha \sin. 3\alpha + \text{etc.}$$

ou

$$\frac{\pi}{2} \varphi x = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sin. ix \int_0^\pi d\alpha \varphi \alpha \sin. \alpha.$$

SERIE DI FOURIER

1822 J. B J. FOURIER

THEORIE ANALITIQUE DE LA CHALEUR

DOPO EULERO DICE CHE

OGNI FUNZIONE PERIODICA PUÒ
ESSERE RAPPRESENTATA CON UNA
SERIE DI SINUSOIDI

1859 P. G. L. DIRICHLET

PRECISA LE CONDIZIONI

SE

$q(t)$ - È A UN SOL VALORE $\forall t$

- HA UN NUMERO FINITO IN T
DI DISCONTINUITÀ E DI
MASSIMI O MINIMI

- ESISTE ED È FINITO

$$\int_t^{t+T} |q(t)| dt$$

ALLORA

SERIE TRIGONOMETRICA DI FOURIER

S. SENO - COSENO

$$q(t) = A_m + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$o \quad a(t) = A_m + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \phi_n)$$

S. AMPIEZZA - FASE

DOVE

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a(t) \cos(n\omega t) d\omega t$$

TERMINI
ARMONICI

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a(t) \sin(n\omega t) d\omega t$$

($n=1$, ARMONICA
FONDAMENT.)

$$A_n^2 = a_n^2 + b_n^2$$

$$\phi_n = \arctan(b_n/a_n)$$

VALORE EFFICACE DI $a(t)$

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a^2(t) dt} = \sqrt{A_m^2 + A_{e1}^2 + \dots + A_{en}^2}$$

$$A_{en} = \frac{A_n}{\sqrt{2}}$$

PROPRIETA'

PER CALCOLARE A_n , a_n e b_n
E' UTILE RICORDARE CHE:

$$\int_0^T \sin n\omega_0 t dt = 0 \quad ; \quad \int_0^T \cos n\omega_0 t dt = 0$$

$$\int_0^T \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = 0 \quad ; \quad \int_0^T \sin n\omega_0 t \sin m\omega_0 t dt = 0$$

$m \neq n$

$$\int_0^T \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = 0 \quad m \neq n$$

$$\int_0^T \sin^2 n\omega_0 t dt = \frac{T}{2} \quad ; \quad \int_0^T \cos^2 n\omega_0 t dt = \frac{T}{2}$$

$$\cos 2n\pi = 1$$

$$\sin 2n\pi = 0$$

$$\cos n\pi = (-1)^n$$

$$\sin n\pi = 0$$

$$\cos \frac{n\pi}{2} = \begin{matrix} (-1)^{n/2} & n \text{ PARI} \\ 0 & n \text{ DISPARI} \end{matrix}$$

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{matrix} (-1)^{(n-1)/2} & n \text{ DISPARI} \\ 0 & n \text{ PARI} \end{matrix}$$

INFATTI

$$\begin{aligned} a(t) &= A_m + a_1 \cos \omega t \\ &\quad + a_n \cos n\omega t + \dots \\ &\quad + b_1 \sin \omega t + b_n \sin n\omega t + \dots \end{aligned}$$

MOLT. PER $\cos n\omega t$ E INTEGRANDO $\int_0^{2\pi} d\theta$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} a(t) \cos n\omega t d\theta &= \int_0^{2\pi} A_m \cancel{\cos n\omega t} d\theta + \int_0^{2\pi} a_1 \cos \omega t \cancel{\cos n\omega t} d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} a_n \cos n\omega t \cos n\omega t d\theta + \dots \\ &\quad + \int_0^{2\pi} b_1 \sin \omega t \cancel{\cos n\omega t} d\theta + \int_0^{2\pi} b_n \sin n\omega t \cancel{\cos n\omega t} d\theta + \dots \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} a(t) \cos n\omega t d\theta = a_n \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a(t) \cos n\omega t d\theta$$

ANALOGAMENTE

MOLT. PER $\sin n\omega t$ E INTEGRANDO $\int_0^{2\pi} d\theta$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a(t) \sin n\omega t d\theta$$

IL SEGNALE È DEFINITO

DOMINIO DI t

$a(t)$

FUNZ. CONTINUA

TRASF. DI
FOURIER

ANTI-TRASF. DI
FOURIER

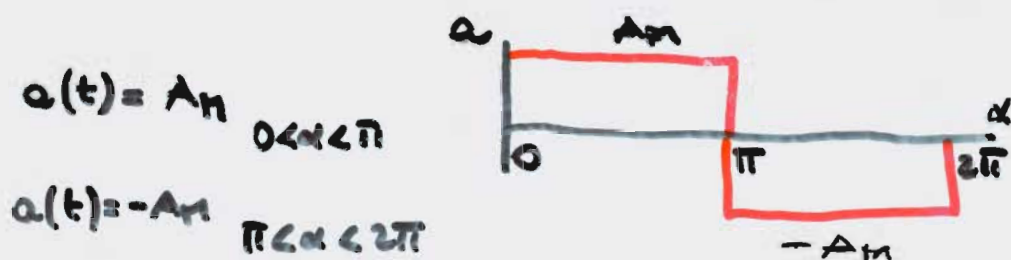
DOMINIO DI ω

$a_n(n\omega)$, $b_n(n\omega)$

FUNZ. DISCONTINUE

SPETTRI ALTRONICI

ESEMPIO 1



$$A_m = 0$$

$$A_{m0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_m d\alpha = A_m$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_m^2 d\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} 2\pi A_m^2} = A_m$$

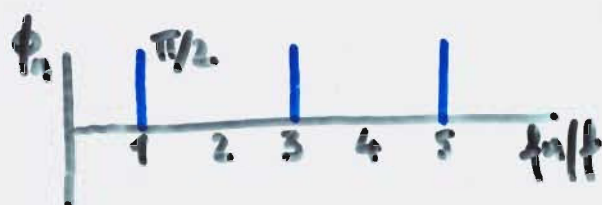
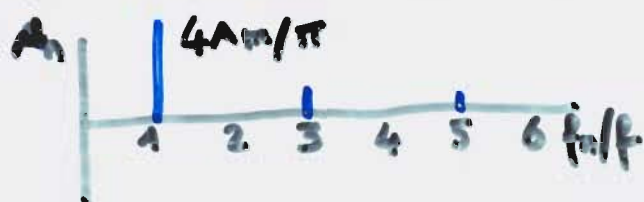
FUNZIONE DISPARI : $a_n = 0 \quad n=1, 2, 3, \dots$

FUNZIONE DISPARI : $b_n = 0 \quad n=2, 4, 6, \dots$

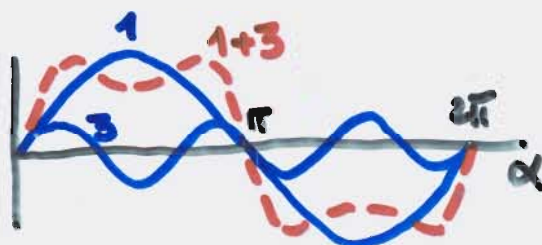
$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} A_m \sin n\omega t d\alpha - \int_{\pi}^{2\pi} A_m \sin n\omega t d\alpha \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{A_m}{n} \left[(-\cos n\omega t)_0^{\pi} - (-\cos n\omega t)_{\pi}^{2\pi} \right] \\
 &= \frac{2A_m}{n\pi} (1 - \cos n\pi)
 \end{aligned}$$

$$b_n = 0 \quad ; \quad n=2, 4, 6, \dots$$

$$b_n = \frac{4A_m}{n\pi} \quad ; \quad n=1, 3, 5, \dots$$



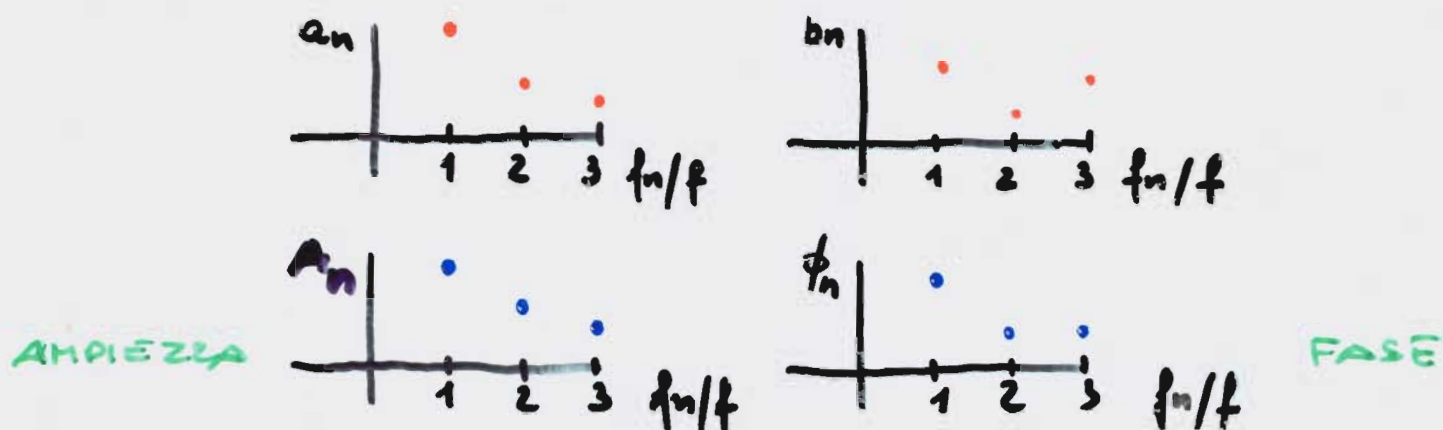
VERIFICA



SE n FINITO, LA SERIE È TRONCATA AL TERMINE n

NEL PUNTO DI DISCONTINUITÀ ($x=\pi$) SI HA SOVRAELENDAZIONE COSTANTE PER QUALSIASI n (FENOMENO DI GIBBS)

SPETTRO ARMONICO



a_n, b_n , non A_n , DIPENDONO DALLA POSIZIONE DELL'ASSE a RISPETTO ALL'ASSE t ; ϕ_n DIPENDE

CASI PARTICOLARI

$a(t)$ pari; $a(t) = a(-t) \rightarrow b_n = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$



$a(t)$ dispari; $a(t) = -a(-t) \rightarrow a_n = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$



$a(t)$ emisimmetrica; $a(t) = -a(t + T/2) \rightarrow \begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = 0 \end{cases} \quad n = 2, 4, \dots$

