FORME D'ONDA
DEI SEGNALI ELETTRICI

SEGNALE ELETTRICO : v, i AI MORSETTI DI UN BIPOLO
$a(t)$
IN UN LATO DI CIRCUITO

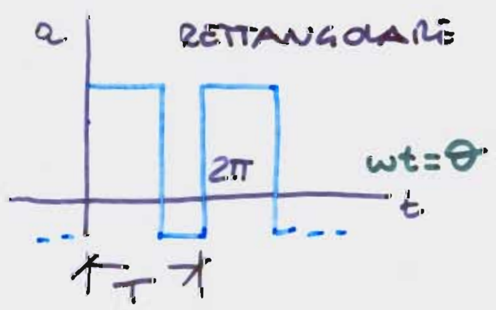
- $a(t)$ È PERIODICO SE $a(t+T) = a(t)$ PER OGNI t

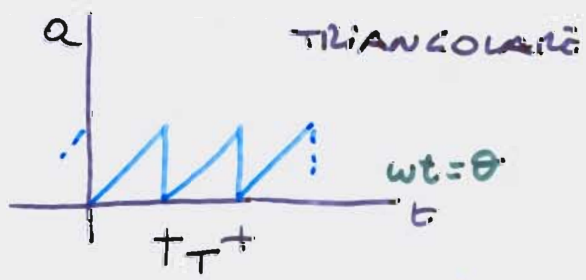
T = PERIODO (s)

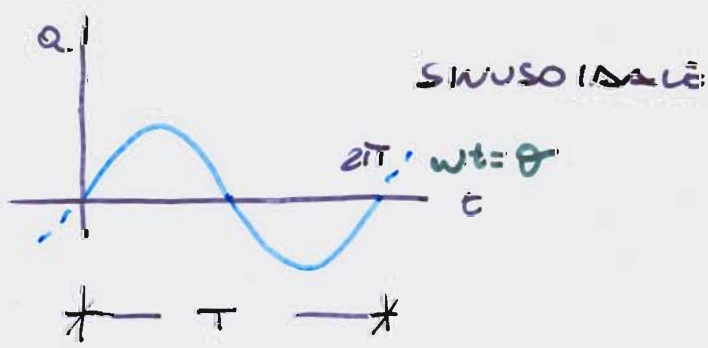
$f = 1/T$ = FREQUENZA ($s^{-1} = Hz$)

$\omega = 2\pi/T$ = PULSAZIONE (s^{-1})

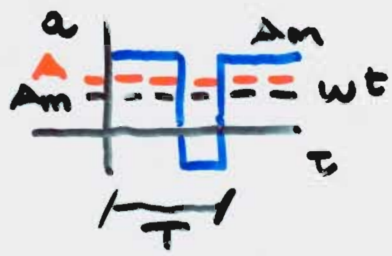
ESEMPI







SEGNALE PERIODICO



VALOR MASSIMO A_m

VALOR MEDIO

$$A_m = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} a(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_\theta^{\theta+2\pi} a(\theta)\,d\theta$$

SE $A_m = 0 \rightarrow$ SEGNALE ALTERNATO

VALOR MEDIO ARITMETICO

$$A_{ma} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} |a(t)|\,dt$$

VALORE EFFICACE

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} a^2(t)\,dt}$$

FATTORE DI VERTICE

$$k_v = A_m / A$$

FATTORE DI FORMA

$$k_f = A / A_{ma}$$

SEGNALE P. A. S.

VALOR MEDIO

$$A_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_M \sin\theta \, d\theta = 0$$

VALOR MEDIO ARITMETICO

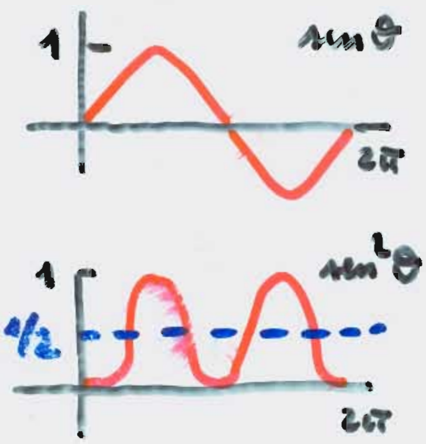
$$A_{ma} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_M \left|\sin\theta\right| d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^{\pi} A_M \sin\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} 2 A_M \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = \frac{2A_M}{\pi}$$

VALORE EFFICACE

$$A = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_M^2 \sin^2\theta \, d\theta}$$



$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi} A_M^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi} = \frac{A_M}{\sqrt{2}}$$

FATTORE DI VERTICE $K_v = \frac{A_M}{A} = \sqrt{2} = 1,41$

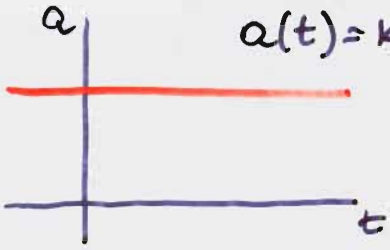
FATTORE DI FORMA $K_f = \frac{A}{A_{ma}} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2A_M}$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$$

– **$a(t)$** È APERIODICO, VICEVERSA

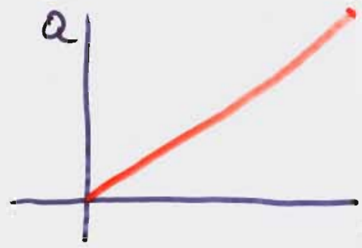
ESEMPI

$a(t)=0 \quad t<0$



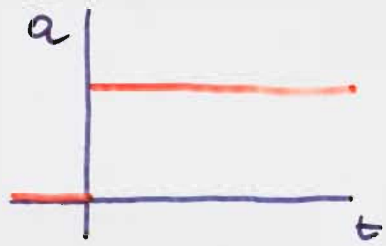
$a(t)=K$

COSTANTE



$a(t)=Kt \quad t\geq 0$

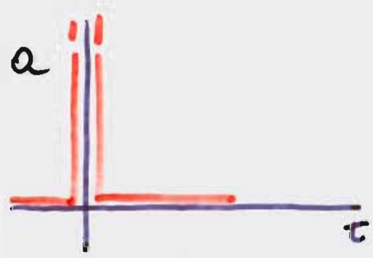
RAMPA



GRADINO

$t<0 \quad a(t)=0$

$t\geq 0 \quad a(t)=K$

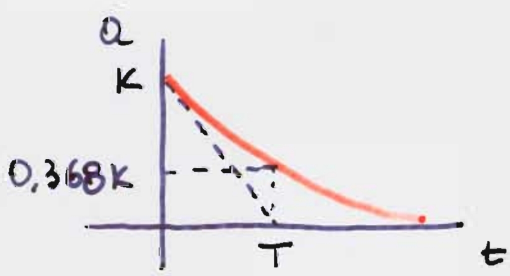


IMPULSO

$a(t)=K\,\delta(t)$

$t\neq 0 \quad a(t)=0$

$\int_{0^-}^{0^+} a(t) = K$



ESPONENZIALE

$a(t)=Ke^{-ht}=Ke^{-t/T}$

$h>0 \; ; \; T=\frac{1}{h}=$ COSTANTE DI TEMPO

$e^{-\frac{5T}{T}}=0.007$

THÉORIE

ANALYTIQUE

DE LA CHALEUR,

PAR M. FOURIER.

A PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,

LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE HYDRAULIQUE ET LA MARINE, RUE JACOB, N° 24.

1822.

SERIE DI FOURIER

1822 J. B. J. FOURIER

THEORIE ANALITIQUE DE LA CHALEUR

DOPO EULERO DICE CHE
OGNI FUNZIONE PERIODICA PUÒ
ESSERE RAPPRESENTATA CON UNA
SERIE DI SINUSOIDI

1859 P. G. L DIRICHLET

PRECISA LE CONDIZIONI

SE

$a(t)$ – È A UN SOL VALORE $\forall t$

– HA UN NUMERO FINITO IN T
DI DISCONTINUITÀ E DI
MASSIMI O MINIMI

– ESISTE ED È FINITO

$$\int_{t}^{t+T} |a(t)|\, dt$$

ALLORA

SERIE TRIGONOMETRICA DI FOURIER

S. SENO - COSENO

$$a(t) = A_m + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\mathrm{sen}(n\omega t)$$

$n = 1, 2, \dots$

o $$a(t) = A_m + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \phi_n)$$

S. AMPIEZZA - FASE

DOVE

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a(t) \cos(n\omega t)\, d\omega t$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a(t)\, \mathrm{sen}(n\omega t)\, d\omega t$$

TERMINI ARMONICI ($n = 1$, ARMONICA FONDAMENT.)

$$A_n^2 = a_n^2 + b_n^2$$

$$\phi_n = \mathrm{atan}(b_n / a_n)$$

VALORE EFFICACE DI $a(t)$

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T a^2(t)\, dt} = \sqrt{A_m^2 + A_{e1}^2 + \dots + A_{en}^2}$$

$$A_{en} = \frac{A_n}{\sqrt{2}}$$

PROPRIETÀ

PER CALCOLARE A_m, a_n e b_n

È UTILE RICORDARE CHE:

$$\int_0^T \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt = 0 \; ; \; \int_0^T \cos n\omega_0 t \, dt = 0$$

$$\int_0^T \operatorname{sen} n\omega_0 t \cos m\omega_0 t \, dt = 0 \; ; \; \int_0^T \operatorname{sen} n\omega_0 t \operatorname{sen} m\omega_0 t \, dt = 0 \quad m \neq n$$

$$\int_0^T \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t \, dt = 0 \quad m \neq n$$

$$\int_0^T \operatorname{sen}^2 n\omega_0 t \, dt = \frac{T}{2} \; ; \; \int_0^T \cos^2 n\omega_0 t \, dt = \frac{T}{2}$$

$\cos 2n\pi = 1$

$\operatorname{sen} 2n\pi = 0$

$\cos n\pi = (-1)^n$

$\operatorname{sen} n\pi = 0$

$\cos \frac{n\pi}{2} = (-1)^{n/2}$ n PARI

$\phantom{\cos \frac{n\pi}{2}} = 0$ n DISPARI

$\sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^{(n-1)/2}$ n DISPARI

$\phantom{\sin \frac{n\pi}{2}} = 0$ n PARI

INFATTI

$$a(t) = A_m + a_1 \cos\omega t + a_n \cos n\omega t + \dots + b_1 \operatorname{sen}\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t + \dots$$

MOLT. PER $\cos n\omega t$ e INTEGRANDO $\int_0^{2\pi} d\theta$

$$\int_0^{2\pi} a(t) \cos n\omega t \, d\theta = \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} A_m \cos n\omega t \, d\theta} + \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} a_1 \cos\omega t \cos n\omega t \, d\theta}$$

$$+ \int_0^{2\pi} a_n \cos n\omega t \cos n\omega t \, d\theta + \dots$$

$$+ \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} b_1 \operatorname{sen}\omega t \cos n\omega t \, d\theta} + \cancelto{0}{\int b_n \operatorname{sen} n\omega t \cos n\omega t \, d\theta} + \dots$$

$$\int_0^{2\pi} a(t) \cos n\omega t \, d\theta = a_n \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a(t) \cos n\omega t \, d\theta$$

ANALOGAMENTE

MOLT PER $\operatorname{sen} n\omega t$ e INTEGRANDO $\int_0^{2\pi} d\theta$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a(t) \operatorname{sen} n\omega t \, d\theta$$

IL SEGNALE È DEFINITO

DOMINIO DI t

$a(t)$

FUNZ. CONTINUA

TRASF. DI FOURIER ↓

ANTITRASF. DI FOURIER ↑

DOMINIO DI ω

$a_n(n\omega)$, $b_n(n\omega)$

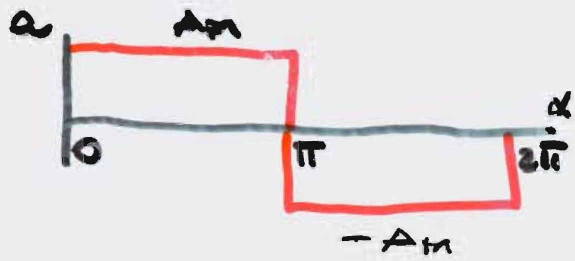
FUNZ. DISCONTINUE

SPETTRI ARMONICI

ESEMPIO 1

$a(t) = A_M \quad 0 < \alpha < \pi$

$a(t) = -A_M \quad \pi < \alpha < 2\pi$



$A_m = 0$

$$A_{mq} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_M \, d\alpha = A_M$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_M^2 \, d\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} 2\pi A_M^2} = A_M$$

FUNZIONE DISPARI : $a_n = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$

FUNZIONE EMISIMM : $b_n = 0 \quad n = 2, 4, 6, \dots$

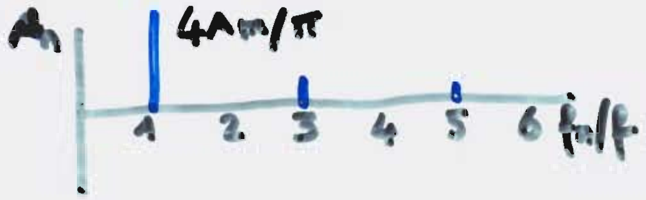
$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} A_M \operatorname{sen} n\omega t \, d\alpha - \int_{\pi}^{2\pi} A_M \operatorname{sen} n\omega t \, d\alpha\right]$$

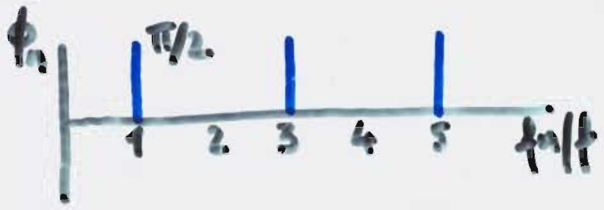
$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{A_M}{n}\left[(-\cos n\omega t)_0^{\pi} - (-\cos n\omega t)_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{2A_M}{n\pi}\left(1 - \cos n\pi\right)$$

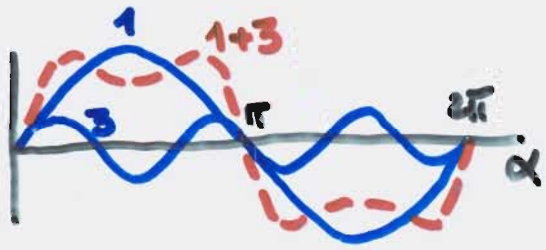
$b_n = 0 \quad ; \quad n = 2, 4, 6, \dots$

$b_n = \frac{4A_M}{n\pi} \quad ; \quad n = 1, 3, 5, \dots$





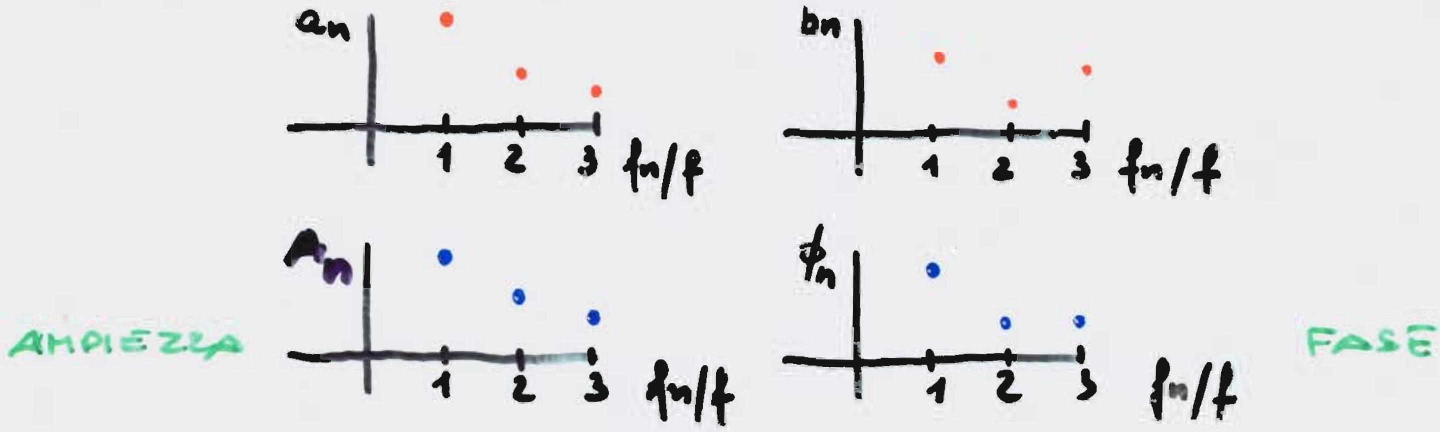
VERIFICA



SE n FINITO, LA SERIE È TRONCATA AL TERMINE n

NEL PUNTO DI DISCONTINUITÀ ($\alpha = \pi$) SI HA SOVRAELONGAZIONE COSTANTE PER QUALSIASI n (FENOMENO DI GIBBS)

SPETTRO ARMONICO

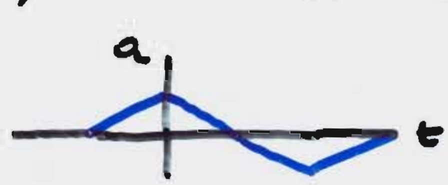


a_n, b_n, NON A_n, DIPENDONO DALLA POSIZIONE DELL'ASSE a RISPETTO ALL'ASSE t ; ϕ_n DIPENDE

CASI PARTICOLARI

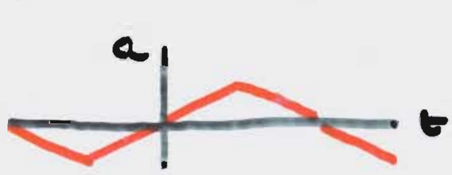
$a(t)$ PARI ; $a(t) = a(-t) \rightarrow b_n = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$

EX



$a(t)$ DISPARI ; $a(t) = -a(-t) \rightarrow a_n = 0 \quad n = 1, 2, 3 \dots$

EX



$a(t)$ EMISIMMETRICA ; $a(t) = -a(t + T/2) \rightarrow \begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = 0 \end{cases} \quad n = 2, 4, \dots$

EX