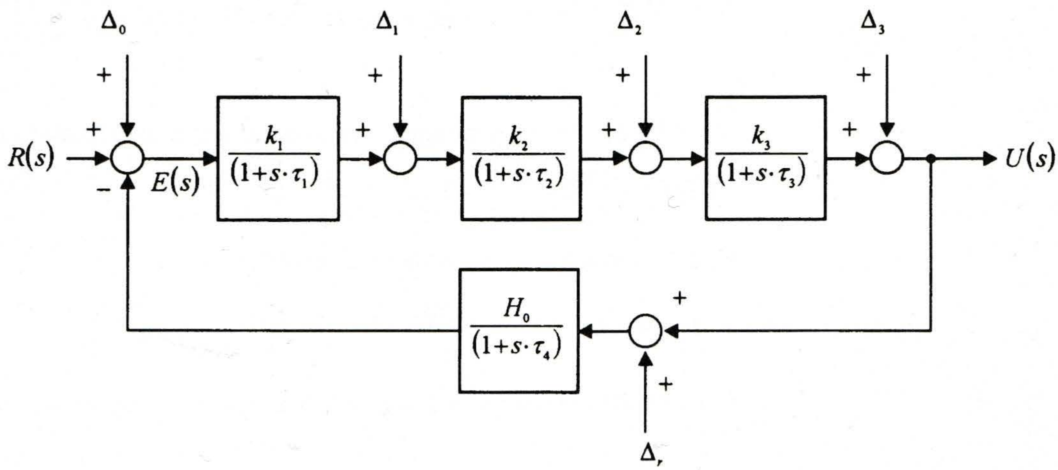
3.6.4 - I disturbi additivi.

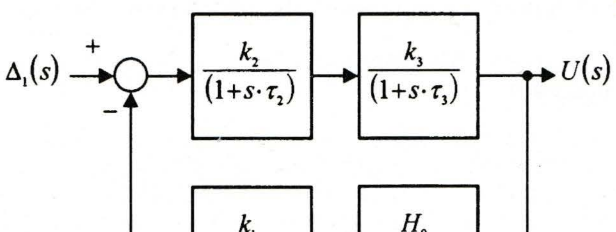
Un buon sistema di controllo deve ridurre il più possibile i disturbi esterni che si possono introdurre in qualsiasi punto della catena. Ad esempio, nel sistema di riscaldamento considerato nel paragrafo 3.1 la variazione della temperatura esterna o l'apertura dello sportello del forno riscaldato sono disturbi additivi. I disturbi additivi, come è facile intuire, provocano una variazione non desiderata del valore della grandezza d'uscita. Per comprendere come la reazione negativa riduca l'effetto indesiderato dei disturbi additivi, si consideri il sistema rappresentato in figura 3.26 e siano Δ_0, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_r i disturbi additivi che potrebbero presentarsi nei vari punti della catena e che sono considerati dei segnali a gradino per semplificare la trattazione.

Fig. 3.26



Per valutare l'effetto prodotto dal disturbo Δ_1 si applica il principio di sovrapposizione degli effetti. Annullato l'effetto del segnale di riferimento e quello degli altri disturbi, $r(t) = 0$, $\Delta_0 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$, $\Delta_r = 0$, il sistema può essere rappresentato con lo schema di figura 3.27.

Fig. 3.27



La trasformata dell'uscita dovuta all'effetto del disturbo Δ_1 è uguale a:

$$U_{\Delta 1}(s)=\Delta_1(s)\cdot\left[\frac{\dfrac{k_2}{(1+s\cdot\tau_2)}\cdot\dfrac{k_3}{(1+s\cdot\tau_3)}}{1+\dfrac{k_2}{(1+s\cdot\tau_2)}\cdot\dfrac{k_3}{(1+s\cdot\tau_3)}\cdot\dfrac{k_1}{(1+s\cdot\tau_1)}\cdot\dfrac{H_0}{(1+s\cdot\tau_4)}}\right]$$

Posto $\Delta_1(s)=\dfrac{\Delta_1}{s}$ e applicando il teorema del valore finale, la risposta a regime $u_{\Delta 1}$ dovuta al disturbo Δ_1 è uguale a:

$$u_{\Delta 1}=\lim_{s\to 0} s\cdot U_{\Delta 1}(s)=\Delta_1\cdot\frac{k_1\cdot k_2\cdot k_3}{\left[1+H_0\cdot k_1\cdot k_2\cdot k_3\right]\cdot k_1}=\Delta_1\cdot\frac{G_T}{\left[1+G_T H_0\right]\cdot k_1} \qquad [3.23]$$

dove:

- $G_T=k_1\cdot k_2\cdot k_3$ è il guadagno statico della funzione di trasferimento
  $G_T(s)=\dfrac{k_1}{(1+s\cdot\tau_1)}\cdot\dfrac{k_2}{(1+s\cdot\tau_2)}\cdot\dfrac{k_3}{(1+s\cdot\tau_3)}$;
- H_0 è il guadagno statico della funzione $H(s)$;
- k_1 è il guadagno statico della funzione $G_1(s)=\dfrac{k_1}{(1+s\cdot\tau_1)}$.

Procedendo in modo analogo si ricava la risposta a regime dovuta al disturbo Δ_2:

$$u_{\Delta 2}=\lim_{s\to 0} s\cdot U_{\Delta 2}(s)=\Delta_2\cdot\frac{G_T}{\left[1+G_T\cdot H_0\right]\cdot k_1\cdot k_2} \qquad [3.24]$$

Dalla [3.23] e dalla [3.24] si ricava che l'effetto del disturbo sulla risposta, a parità di ampiezza del disturbo, è tanto meno accentuato quanto più elevato è il valore del guadagno statico dei blocchi che precedono il punto in cui è inserito il disturbo. Infatti il disturbo Δ_1 è attenuato di un fattore $\dfrac{1}{k_1}$ e il disturbo Δ_2 di un fattore $\dfrac{1}{k_1\cdot k_2}$.

Se il disturbo è presente all'ingresso, allora all'uscita si ha un segnale a regime uguale a:

$$u_{\Delta 0}=\lim_{s\to 0} s\cdot U_{\Delta 0}(s)=\Delta_0\cdot\frac{G_T}{\left[1+G_T\cdot H_0\right]}$$

Il disturbo introdotto all'inizio del ramo diretto non può essere annullato nemmeno per G_T tendente all'infinito. Per rendere minimo l'effetto del disturbo presente all'ingresso è necessario che esso sia il più debo-

le possibile già all'origine. Pertanto è necessario che i primi stadi della catena diretta siano progettati con la massima cura e siano possibilmente esenti da rumori affinché non influenzino significativamente la variabile controllata.

Se il disturbo si presenta all'uscita, la risposta a regime dovuta al disturbo Δ_3 è uguale a:

$$u_{\Delta 3} = \lim_{s \to 0} s \cdot U_{\Delta 3}(s) = \Delta_3 \cdot \frac{1}{\left[1 + G_T \cdot H_0\right]}$$

e, per G_T molto elevato, tende praticamente a zero. In tal caso un disturbo introdotto all'uscita non ha, in pratica, alcun effetto sulla variabile controllata.

Considerato che in condizioni di regime la risposta dovuta alla sola sollecitazione $r(t)$ è u_r, la risposta complessiva dovuta alla sollecitazione e al disturbo additivo introdotto in uscita è:

$$u_f = u_r + u_{\Delta 3}$$

Pertanto lo scostamento δ_r della risposta effettiva, ottenuta sommando gli effetti della sollecitazione e del disturbo da quella dovuta alla sola sollecitazione è:

$$\delta_r = u_f - u_r$$

$$\delta_r = \Delta_3 \cdot \frac{1}{\left[1 + G_T H_0\right]}$$

Se il disturbo è presente nella linea di reazione, per esempio all'ingresso del trasduttore, la trasformata dell'uscita dovuta al disturbo Δ_r è uguale a:

$$U_{\Delta r}(s) = -\frac{\Delta_r}{s} \cdot \frac{G_T(s) \cdot H(s)}{\left[1 + G_T(s) \cdot H(s)\right]}$$

Per i sistemi di tipo zero e per un guadagno statico G_T molto elevato, la risposta a regime dovuta al disturbo Δ_r è uguale a:

$$u_{\Delta r} = \lim_{s \to 0} s \cdot U_{\Delta r}(s) \cong -\Delta_r$$

È importante che il trasduttore e i relativi circuiti di condizionamento abbiano specifiche di alta qualità perché la reazione non attenua l'effetto dei disturbi introdotti nella linea di reazione. Per non compromettere le prestazioni dell'intero sistema è necessario quindi che i circuiti della linea di reazione abbiano una *elevata insensibilità* ai disturbi e i componenti mantengano inalterate nel tempo le loro caratteristiche.

3.6.5 - La sensibilità.

I disturbi parametrici, come detto precedentemente, sono provocati dalle variazioni dei parametri del sistema. Se la temperatura dell'ambiente in cui opera il sistema varia, si possono avere modificazioni di alcuni parametri del sistema: ad esempio possono variare le resistenze, i parametri dei transistor e dei circuiti integrati ecc. Sebbene le variazioni di temperatura siano disturbi esterni di tipo additivo, tuttavia i suoi effetti modificano i parametri del sistema e la temperatura, pertanto, può essere considerata anche un disturbo parametrico. Le variazioni di alcune caratteristiche del sistema conseguente alle variazioni dei parametri è detta *sensibilità*. Si definisce sensibilità di una funzione $F(s)$ rispetto a un parametro p e si indica con $S_p^{F(s)}$ il rapporto tra la variazione percentuale della funzione e la variazione percentuale del parametro

$$S_p^{F(s)} = \frac{\dfrac{\Delta F(s)}{F(s)}}{\dfrac{\Delta p}{p}} = \frac{\Delta F(s)}{\Delta p} \cdot \frac{p}{F(s)}$$

e per $\Delta p \to 0$ diventa:

$$S_p^{F(s)} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta F(s)}{\Delta p} \cdot \frac{p}{F(s)} = \frac{\partial F(s)}{\partial p} \cdot \frac{p}{F(s)}$$

dove $\dfrac{\partial F(s)}{\partial p}$ è la derivata parziale della funzione $F(s)$ calcolata rispetto al parametro p.

Si consideri un sistema ad anello aperto e sia $U(s)$ la trasformata della risposta:

$$U(s) = R(s) \cdot G(s)$$

Se variano i parametri della funzione $G(s)$, la sensibilità rispetto a $G(s)$ della risposta è uguale a:

$$S_{G(s)}^{U(s)} = R(s) \frac{G(s)}{R(s) \cdot G(s)} = 1 \qquad [3.25]$$

In un sistema a catena aperta le variazioni dei parametri della funzione $G(s)$ si trasmettono interamente all'uscita.

Si consideri ora un sistema a catena chiusa e si consideri costante la funzione $H(s) = H_0$. La trasformata della funzione di trasferimento ad anello chiuso è uguale a:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H_0}$$

Se la funzione $G(s)$ subisce modificazioni a causa delle variazioni dei parametri, la sensibilità della funzione di trasferimento ad anello chiuso è uguale a:

$$S_{G(s)}^{W(s)} = \frac{1+G(s)\cdot H_0 - G(s)\cdot H_0}{\left[1+G(s)\cdot H_0\right]^2}\cdot\frac{G(s)\cdot\left[1+G(s)\cdot H_0\right]}{G(s)}$$

$$S_{G(s)}^{W(s)} = \frac{1}{1+G(s)\cdot H_0} \qquad [3.26]$$

In un sistema di controllo a catena chiusa le modificazioni della funzione $G(s)$ dovute alle variazioni di parametri sono trasmesse attenuate di un fattore $\frac{1}{1+G(s)\cdot H_0}$ sulla risposta. Un sistema a catena chiusa, a differenza di quello a catena aperta, è praticamente *insensibile* alle variazioni parametriche della funzione di trasferimento della catena diretta.

Si supponga ora $G(s)$ costante e $H(s)$ variabile. La sensibilità della funzione di trasferimento ad anello chiuso alle variazioni dei parametri del ramo di reazione è uguale a:

$$S_{H(s)}^{W(s)} = -\frac{G(s)\cdot \overset{G(s)}{\cancel{H(s)}}}{\left[1+G(s)\cdot H(s)\right]^2}\cdot\frac{H(s)\cdot\left[1+G(s)\cdot H(s)\right]}{\cancel{H(s)}\,G(s)}$$

$$S_{H(s)}^{W(s)} = -\frac{G(s)\cdot H(s)}{1+G(s)\cdot H(s)} \qquad [3.27]$$

e, se è $G(s)\cdot H(s) >> 1$, dalla [3.27] si ricava:

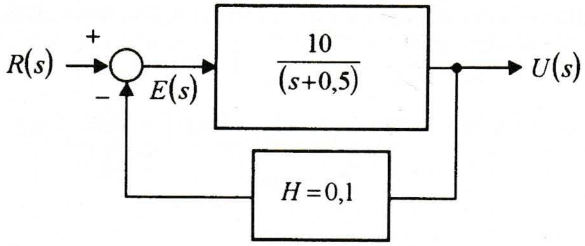
$$S_{H(s)}^{W(s)} \cong -1$$

È necessario che i componenti del ramo di reazione abbiano la massima stabilità nel tempo perché una variazione dei parametri della linea di reazione si trasmette interamente sulla risposta.

Esempio 6

Calcolare la sensibilità della funzione di trasferimento del sistema rappresentato in figura 3.28 alle variazioni del parametro k e della funzione di trasferimento del blocco di retroazione.

Fig. 3.28



Scritta la funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

la sensibilità alle variazioni di k e alle variazioni di H sono rispettivamente uguali a:

$$S_k^{W(s)} = \frac{\partial W(s)}{\partial k} \cdot \frac{k}{W(s)} = \frac{s + 0{,}5}{[s + 0{,}5 + k \cdot H]^2} \cdot \frac{k \cdot (s + 0{,}5 + k \cdot H)}{k}$$

$$S_H^{W(s)} = \frac{\partial W(s)}{\partial H} \cdot \frac{H}{W(s)} = \frac{-k \cdot H}{[s + 0{,}5 + k \cdot H]^2} \cdot \frac{H}{\frac{k}{s + 0{,}5 + k \cdot H}}$$

$$S_k^{W(s)} = \frac{1}{1 + \frac{k \cdot H}{s + 0{,}5}}$$

$$S_H^{W(s)} = \frac{-k \cdot H}{s + 0{,}5 + k \cdot H}$$

Considerato che le variazioni dei parametri avvengono in tempi molto lunghi, la sensibilità a regime è uguale a:

$$S_k^{W(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + \frac{k \cdot H}{s + 0{,}5}} = \frac{1}{3}$$

$$S_H^{W(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{-k \cdot H}{s + 0{,}5 + k \cdot H} = -\frac{1}{1{,}5}$$

L'aumento del guadagno k diminuisce la sensibilità $S_k^{W(s)}$ e aumenta la sensibilità $S_H^{W(s)}$ alle variazioni di H.

3.6.6 - Le specifiche a regime e nel dominio del tempo.

Il comportamento a regime di un sistema, come si vede dall'analisi della tabella 3.3, può essere migliorato aumentando il guadagno statico oppure inserendo elementi integratori nella funzione di trasferimento ad anello aperto in modo da aumentare la molteplicità dei poli nell'origine.

L'aumento del guadagno statico potrebbe compromettere, come si vedrà, la stabilità del sistema, mentre l'aggiunta di un elemento integratore influisce negativamente sulla stabilità. Il guadagno statico e l'errore a regime sono le specifiche principali di un sistema di controllo a regime, il tempo di salita, il tempo di assestamento e la sovraelongazione quelle nel dominio del tempo.

In un sistema privo di regolazione lo scostamento massimo percentuale della risposta reale u dal valore desiderato u_d causato dal disturbo additivo Δ introdotto in uscita è uguale a:

$$\delta\% = \frac{u - u_d}{u_d} \cdot 100 \qquad [3.28]$$

Tenendo presente che in un sistema privo di regolazione nel quale è presente un disturbo additivo la risposta a regime differisce da quella desiderata di una quantità uguale al disturbo, $u - u_d = \Delta$, la [3.28] si scrive come:

$$\delta\% = \frac{\Delta}{u_d} \cdot 100 \qquad [3.29]$$

In un sistema con regolazione e con guadagno statico d'anello $K_{st} = k \cdot H_0$, lo scostamento massimo percentuale della risposta reale dal valore desiderato causato dal medesimo disturbo introdotto in uscita è uguale a:

$$\delta_r\% = \frac{u_f - u_d}{u_d} \cdot 100$$

Considerato che in un sistema con retroazione negativa $u_f - u_d = \dfrac{\Delta}{1 + K_{st}}$

si ha:

$$\delta_r\% = \frac{\Delta}{1 + K_{st}} \cdot \frac{1}{u_d} \cdot 100 \qquad [3.30]$$

dove u_d e u_f sono rispettivamente la risposta desiderata e la risposta effettiva a regime.

Sostituito nella [3.30] il disturbo $\Delta = \dfrac{\delta\%}{100} \cdot u_d$ ricavato dalla [3.29] si ottiene:

$$\delta_r = \frac{\delta}{1 + K_{st}}$$

$$\frac{\delta - \delta_r}{\delta_r} = K_{st} \qquad [3.31]$$

Generalmente il valore del guadagno statico H_0 della linea di reazione viene stabilito dal progettista in base al valore della sollecitazione mediante la relazione:

$$H_0 \cong \frac{R}{u_d}$$

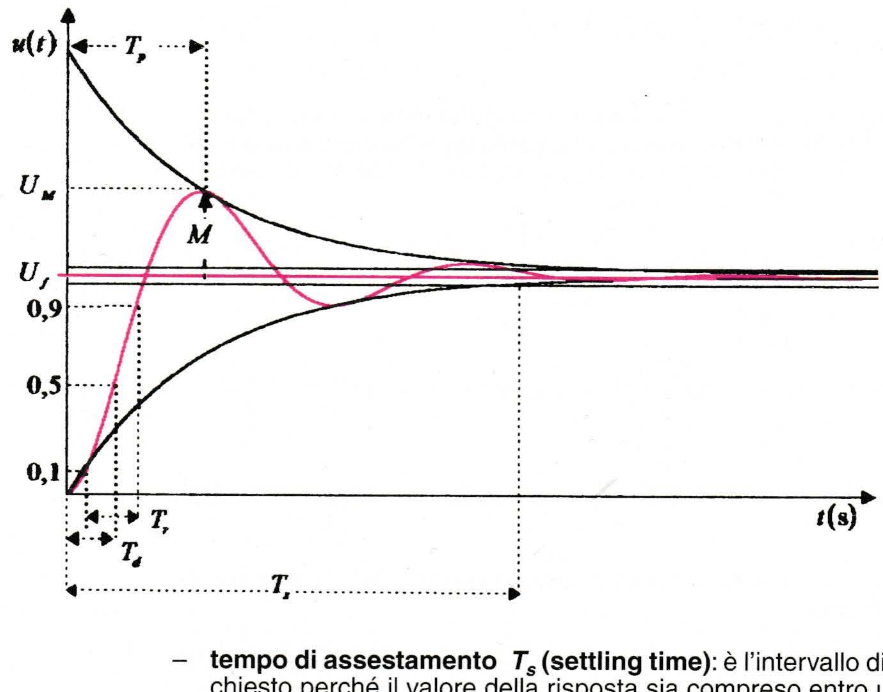
dove u_d ed R sono rispettivamente la risposta desiderata e la sollecitazione applicata. Pertanto il guadagno statico della funzione di trasferimento $G(s)$ si ricava facilmente dalla [3.31]:

$$k = \frac{\delta - \delta_r}{\delta_r} \cdot \frac{1}{H_0}$$

Di seguito si riportano le definizioni relative alle specifiche del dominio del tempo già studiate nel capitolo 13 del secondo volume (tempo di salita, tempo di ritardo, tempo di assestamento ecc.).

- **tempo di ritardo T_d (delay time)**: è l'intervallo di tempo richiesto perché il valore della risposta sia uguale al 50% del suo valore finale;
- **tempo di salita T_r (rise time)**: è l'intervallo di tempo necessario perché il valore della risposta aumenti dal 10% al 90% del valore finale;

Fig. 3.29 - Parametri temporali della risposta al gradino di un sistema del 2° ordine con fattore di smorzamento $0 < \zeta < 1$.



- **tempo di assestamento T_s (settling time)**: è l'intervallo di tempo richiesto perché il valore della risposta sia compreso entro una fascia di valori prestabiliti che si discostano dell'1% ÷ 5% dal valore finale;
- **sovraelongazione massima (Maximum overshoot)** è la differenza tra il valore massimo della risposta e il valore finale della stessa. In

pratica la sovraelongazione massima è espressa in percentuale in rapporto al valore finale:

$$M\% = \frac{U_M - U_f}{U_f} \cdot 100$$

dove U_M e U_f sono rispettivamente il valore massimo e il valore finale della risposta, ed $M\%$ è la sovraelongazione massima percentuale.

Si ricorda che la sovraelongazione massima percentuale (overshoot) è funzione del fattore di smorzamento

$$M_{max}\% = 100 \cdot e^{\frac{-\pi \cdot \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

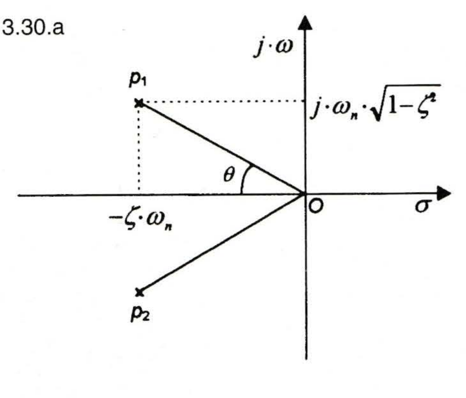
e che per $\zeta = 0$, ossia in assenza di elementi dissipativi, essa è uguale al 100% del valore finale e la risposta è costituita da oscillazioni persistenti. Il massimo valore dell'overshoot è raggiunto dopo un intervallo di tempo T_p uguale a:

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}}$$

dove $\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}$ è la pulsazione smorzata, così chiamata per distinguerla dalla pulsazione naturale ω_n la quale è caratteristica di un sistema che non contiene elementi dissipativi. Una sovraelongazione pronunciata con successive oscillazioni quasi persistenti corrisponde, come si è visto, a un sistema che tende ad oscillare e pertanto non stabile. Il tempo di assestamento di un sistema con $0 < \zeta < 1$ è uguale a $T_s \cong \frac{3}{\omega_n \cdot \zeta}$ quando è misurato all'istante in cui il valore della risposta è prossimo al 95% del valore finale.

Il tempo di assestamento cresce, a parità di ω_n, in modo inversamente proporzionale al fattore di smorzamento: quando è $\zeta = 0$ il tempo di assestamento T_s tende all'infinito perché la risposta è costituita da un'oscillazione di ampiezza costante e pertanto non raggiunge mai il valore di regime.

Fig. 3.30.a



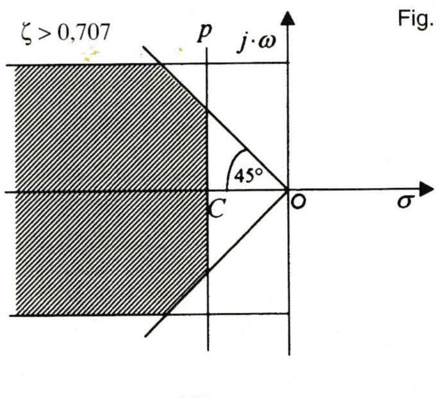


Fig. 3.30.b

La risposta di un sistema stabile di ordine superiore al secondo, ma le considerazioni possono essere estese anche a sistemi aventi ordine diverso, sollecitato da un segnale a gradino è la somma delle risposte dovute ai poli reali, considerati negativi, e delle risposte dovute alle coppie di poli complessi coniugati a parte reale negativa. I termini della risposta dovuti ai poli reali tendono a zero tanto più rapidamente quanto maggiore è il loro valore assoluto perché $\tau = -\frac{1}{p}$. I termini della risposta dovuti alle coppie dei poli complessi coniugati, a parità del fattore di smorzamento ζ, tendono a zero tanto più rapidamente quanto maggiore è la pulsazione ω_n, ossia quanto più i poli sono distanti dall'origine del piano s, e hanno una sovraelongazione tanto più trascurabile, a parità della pulsazione ω_n, quanto maggiore è ζ, ossia quanto più i poli sono distanti dall'asse immaginario (fig. 3.30.a).

Al fine di avere una elevata velocità di risposta, un'ampiezza della sovraelongazione limitata e un sufficiente grado di stabilità è opportuno che i poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso siano situati nella zona tratteggiata rappresentata in figura 3.30.b, distanti dall'origine e dall'asse immaginario del piano s.

Generalmente *il comportamento di un sistema è ritenuto soddisfacente quando il coefficiente di smorzamento è maggiore* di 0,707 perché in tal caso la percentuale di sovraelongazione è minore del 5% del valore finale e può essere considerata trascurabile.

Si ricorda infine che il tempo di ritardo T_d e quello di salita T_r assumono rispettivamente i valori:

$$T_d \cong \frac{1+0{,}7\cdot\zeta}{\omega_n} \qquad 0<\zeta<1$$

$$T_r \cong \frac{1+1{,}1\cdot\zeta+1{,}4\cdot\zeta^2}{\omega_n} \qquad 0<\zeta<1$$

Sia il tempo di ritardo che quello di salita aumentano quando aumenta il valore del fattore di smorzamento ζ.