Università degli Studi di Cassino

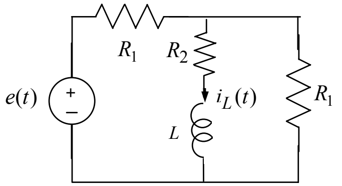
Esercitazioni di Elettrotecnica: circuiti in evoluzione dinamica

Antonio Maffucci

ver.1 – settembre 2005

1. Circuiti dinamici del primo ordine.

<u>ES. 1.1</u> Considerato il seguente circuito, che fino all'istante t = 0 lavora in regime stazionario, calcolare la corrente nell'induttore per ogni istante.



$$e(t)=\begin{cases}10\ V & t<0\\ -10\ V & t>0\end{cases}$$
$R_1 = 10\ \Omega$
$R_2 = 20\ \Omega$
$L = 2\ mH$

Per $t<0$ il circuito è in regime stazionario, quindi l'induttore si comporta come un corto circuito. Per tale ragione, posto $R_a = R_1 // R_2$ si ha:

$$i_L(t) = e(t)\frac{R_a}{R_a + R_1}\frac{1}{R_2} = 0.2\ A \qquad t<0 .$$

Per $t>0$, applicando le leggi di Kirchhoff si ha:

$$R_1 i_x + R_1 i_y = e, \quad R_1 i_y = R_2 i_L + L\frac{di_L}{dt}, \quad i_x = i_y + i_L ,$$

da cui, sostituendo in modo da lasciare come unica incognita la corrente $i_L(t)$:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{\tau} i_L = \frac{e}{2L} \qquad \text{dove} \quad \tau \equiv \frac{L}{R_{eq}}, \quad R_{eq} = R_2 + \frac{R_1}{2} .$$

Alternativamente si può dapprima valutare l'equivalente di Norton ai capi dell'induttore:

$$R_{eq} = R_2 + \frac{R_1}{2} \ \text{ e } \ I_{cc}(t) = \frac{e(t)}{R_1 + 2R_2},$$

e quindi ricavare l'equazione differenziale nell'incognita $i_L(t)$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{\tau} = \frac{I_{cc}}{\tau} .$$

La radice dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata è pari a $\lambda = -1/\tau = -12.5 \cdot 10^3\ s^{-1}$, quindi la soluzione generale si esprime nella forma:

$$i_L(t) = Ke^{-12.5\cdot 10^3 t} + i_{LP}(t),$$

dove $i_{LP}(t)$ è una soluzione particolare che si può valutare calcolando la soluzione di regime. Essendo tale regime stazionario, utilizzando quanto ottenuto per $t<0$ è facile ottenere

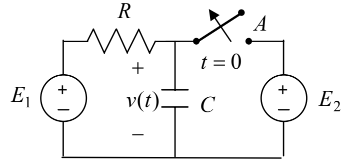
$$i_{LP}(t) = -0.2\ A$$

La costante K si ottiene imponendo la continuità della variabile di stato $i_L(t)$

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) \quad \Rightarrow \quad 0.2 = K - 0.2 \quad \Rightarrow \quad K = 0.4,$$

da cui: $\quad i_L(t) = -0.2 + 0.4e^{-12.5\cdot 10^3 t} \qquad t>0 .$

<u>ES. 1.2</u> Nel seguente circuito all'istante *t* = 0 si apre l'interruttore A. Calcolare la tensione sul condensatore per ogni istante.



$E_1 = 8\ V, \quad E_2 = 2\ V$
$R = 10\ k\Omega, \quad C = 2\ mF$

Per $t<0$ il circuito è in regime stazionario, quindi il condensatore si comporta come un circuito aperto. Per tale ragione si ha:

$$v(t) = E_2 = 2\ V .$$

Per $t>0$, applicando la LKT all'unica maglia e la caratteristica del condensatore si ottiene facilmente l'eq. differenziale di primo ordine nell'incognita $v(t)$

$$Ri + v = E_1, \quad i = C\frac{dv}{dt}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{E_1}{\tau} \qquad \text{dove} \quad \tau = RC .$$

La radice dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata è pari a $\lambda = -1/\tau = -0.05\ s^{-1}$, quindi la soluzione generale si esprime nella forma:

$$v(t) = Ke^{-0.05t} + v_P(t),$$

dove $v_P(t)$ è una soluzione particolare che si può valutare calcolando la soluzione di regime. Poiché per $t \to \infty$ si tende ad un regime stazionario, il condensatore si comporta come un circuito aperto ai capi del quale ci sarà

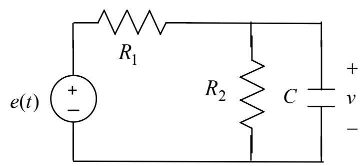
$$v_P(t) = E_1 = 8\ V .$$

Resta da determinare la costante K, che si ottiene dalla condizione iniziale, ottenuta imponendo la continuità della variabile di stato $v(t)$

$$v(0^-) = v(0^+) \quad \Rightarrow \quad 2 = K + 8 \quad \Rightarrow \quad K = -6,$$

da cui $\quad v(t) = 8 - 6e^{-0.05t} \qquad t>0 .$

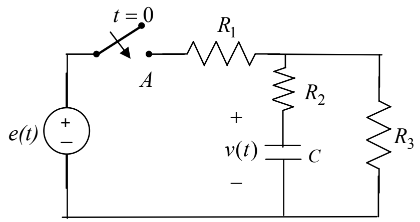
<u>ES. 1.3</u> Dato il seguente circuito, valutare la tensione $v(t)$ per $t>0$.



$e(t) = 50\ V \quad t>0$
$v(t=0) = 10\ V, \quad C = 1\ mF$
$R_1 = 20\ \Omega, \quad R_2 = 24\ \Omega.$

Risultato: $v(t) = 27.3 - 17.3e^{-91.7t}\ V$.

ES. 1.4 Il seguente circuito è a riposo fino a $t = 0$, istante in cui si chiude l'interruttore *A*. Calcolare: a) la costante di tempo τ del circuito;
b) la tensione ai capi del condensatore per $t > 0$ (tracciarne anche il grafico).



$e(t) = 10\cos(\omega t)$
$\omega = 100 rad/s$
$R_1 = 20\,\Omega, \quad R_2 = 5\,\Omega$
$R_3 = 10\,\Omega, \quad C = 1\,mF$

a) Per calcolare la costante di tempo basta valutare la resistenza dell'equivalente di Thévenin visto ai capi del condensatore:

$$R_{eq} = (R_1 // R_3) + R_2 = \frac{35}{3}\Omega \qquad \Rightarrow \qquad \tau = R_{eq}C = 11.7\,ms$$

b) Per $t < 0$ il circuito è a riposo, quindi $v_c(0^-) = v_c(0^+) = 0$. Per $t > 0$, ricavando la tensione a vuoto dell'equivalente di Thévenin visto ai capi del condensatore si ha:

$$V_0(t) = \frac{e(t)R_3}{R_1 + R_3}.$$

Applicando le leggi di Kirchhoff al circuito ottenuto sostituendo ai capi di C il generatore equivalente di Thévenin si ricava l'equazione differenziale nell'incognita v_c:

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{\tau} = \frac{V_0}{\tau}.$$

La radice dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata è pari a $\lambda = -1/\tau = -85.5\ s^{-1}$, quindi la soluzione generale si esprime nella forma:

$$v_c(t) = A\exp(-85.5t) + v_{cp}(t),$$

dove $v_{cp}(t)$ è la soluzione di regime sinusoidale, valutabile attraverso il metodo fasoriale. Posto:

$$\overline{E} = 10, \quad \dot{Z}_1 = R_1 = 20, \quad \dot{Z}_2 = R_2 - \frac{j}{\omega C} = 5 - 10j, \quad \dot{Z}_3 = R_3 = 10,$$

e applicando ripetutamente la regola del partitore di tensione si ha, posto $\dot{Z}_x = \dot{Z}_2 // \dot{Z}_3$:

$$\overline{V}_2 = \overline{E}\frac{\dot{Z}_x}{\dot{Z}_x + \dot{Z}_1} \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_c = \frac{\overline{V}_2 \dot{Z}_c}{R_2 + \dot{Z}_c} = 2.17e^{-j0.86}$$

da cui: $v_{cp}(t) = 2.17\cos(100t - 0.86)$ V

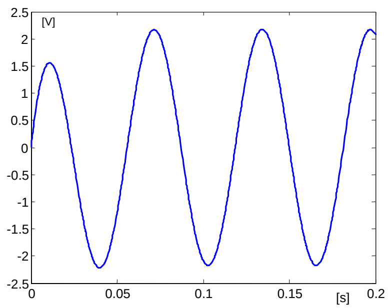
Dalla condizione iniziale si ha:

$$v_c(0^+) = 0 = A + 2.17\cos(-0.86) \quad \Rightarrow \quad A = -1.41$$

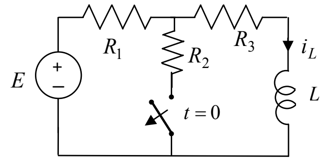
Quindi in definitiva si ottiene la tensione

$$v_c(t) = -1.41\exp(-85.5t) + 2.17\cos(100t - 0.86) \quad V$$

il cui andamento è tracciato nella figura a lato.



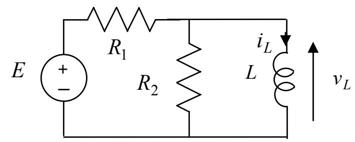
ES. 1.5 Il seguente circuito è in regime stazionario fino a $t = 0$, istante in cui si apre l'interruttore *A*. Calcolare la corrente nell'induttore in ogni istante e tracciarne l'andamento qualitativo.



$E = 220\,V, \quad L = 0.1\,H,$
$R_1 = 1\,k\Omega, \quad R_2 = R_3 = 500\,\Omega.$

Risultato: $i_L(t) = 88\,mA\ per\ t < 0; \quad i_L(t) = 147 - 59e^{-15000t}\ mA\ per\ t > 0.$

ES. 1.6 Nel seguente circuito è assegnata la corrente nell'induttore all'istante $t = 0$. Ricavare la tensione sull'induttore per $t > 0$.

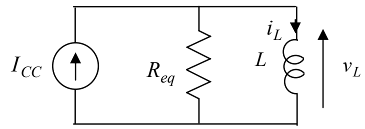


$E = 220\,V \quad per \quad t > 0,$
$i_L(0) = 0.4\,A,$
$L = 0.1\,H, \quad R_1 = 1\,k\Omega, \quad R_2 = 200\,$

Valutando l'equivalente di Norton ai capi dell'induttore:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 166.67\,\Omega,$$

$$I_{cc} = \frac{E}{R_1} = 0.22\text{ A},$$



si ricavare facilmente l'equazione differenziale nell'incognita $i_L(t)$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{\tau} = \frac{I_{cc}}{\tau}, \quad \text{dove} \quad \tau = \frac{L}{R_{eq}} = 0.60\text{ ms}$$

La radice dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda = -1/\tau = -1.67 \cdot 10^3\ s^{-1}$, quindi la soluzione generale si esprime nella forma:

$$i_L(t) = Ke^{-1.67 \cdot 10^3 t} + i_{LP}(t),$$

dove $i_{LP}(t)$ rappresenta il termine di regime stazionario:

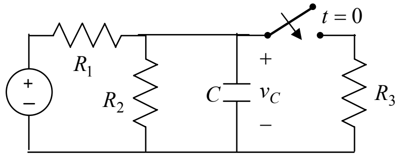
$$i_{LP}(t) = I_{CC} = 0.22\ A$$

La costante K si ottiene imponendo la condizione iniziale:

$$i_L(0^+) = 0.4 \quad \Rightarrow \quad 0.4 = K - 0.22 \quad \Rightarrow \quad K = 0.18,$$

da cui $i_L(t) = 0.18e^{-1.67 \cdot 10^3 t} + 0.22$ A per $t > 0$.

ES. 1.7 Il seguente circuito è in regime stazionario fino a $t=0$, istante in cui si chiude l'interruttore *A*. Calcolare la tensione sul condensatore in ogni istante e tracciarne l'andamento.



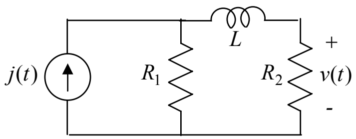
$E = 220\,V$, $C = 1\,F$,
$R_1 = R_3 = 1\,k\Omega$, $R_2 = 500\,\Omega$.

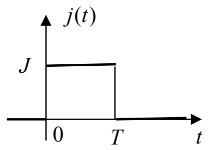
Risultato: $v_C(t) = 73.33\,V \;\; per\; t<0$; $\quad v_C(t) = 54.59 + 18.74e^{-0.004t}\,V \;\; per\; t>0$.

ES. 1.8 La seguente rete dinamica è a riposo per $t<0$.

a) Tracciare l'andamento della tensione ai capi di R_2 per $t>0$.

b) Calcolare l'energia dissipata da R_2 nell'intervallo $0<t<5\,ms$.





$J = 40\,A$, $\quad T = 1\,ms$
$R_1 = 30\,\Omega$, $\quad R_2 = 20\,\Omega$
$L = 50\,mH$

Per $t<0$ il circuito è a riposo, quindi $i_L(t)=0$.
Per $0<t<T$, applicando le leggi di Kirchhoff e scrivendo le caratteristiche dei bipoli si ha:

$$R_1 i_1 = L\frac{di_L}{dt} + v, \qquad j = i_1 + i_L, \qquad i_L = \frac{v}{R_2},$$

da cui si ricava l'equazione differenziale nell'incognita $v(t)$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R_1+R_2}{L}v = \frac{R_1R_2}{L}j \;,$$

la cui omogenea associata fornisce un'equazione caratteristica avente radice pari a $\lambda = -(R_1+R_2)/L = -1000\,s^{-1}$. Pertanto si ha:

$$v(t) = Ke^{-1000t} + v_P(t),$$

dove $v_P(t)$ è una soluzione particolare che si può valutare calcolando la soluzione di regime. Per $t\to\infty$ si tende ad un regime stazionario, quindi l'induttore si comporta come un corto circuito:

$$v_P(t) = J\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = 480\,V.$$

Resta da determinare la costante *K*, che si ottiene dalla condizione iniziale (si osservi che la tensione *v*, pur non essendo una variabile di stato, è continua in quanto proporzionale ad una variabile di stato):

$$v(0^+) = R_2 i_L(0^+) = R_2 i_L(0^-) = v(0^-) = 0 \quad\Rightarrow\quad 0 = K + 480 \quad\Rightarrow\quad K = -480,$$

da cui $\quad v(t) = 480(1-e^{-1000t}) \qquad 0<t<T$.

Per $t>T$ l'equazione differenziale sarà

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R_1+R_2}{L}v = 0 \;,$$

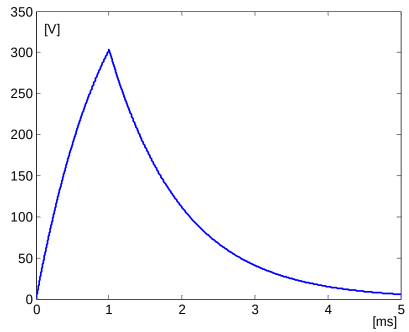
e quindi ragionando come prima si avrà

$$v(t) = He^{-1000t},$$

dove H è una costante arbitraria, determinata imponendo la condizione iniziale per $t=T^+$

$$v(T^+) = R_2 i_L(T^+) = R_2 i_L(T^-) = v(T^-) \quad\Rightarrow$$
$$480(1\text{-}e^{-1}) = He^{-1} \quad\Rightarrow\quad H = 825$$

da cui $\quad v(t) = 825e^{-1000t}\;\; V$, $\;$ per $t>T$.
L'andamento della soluzione è tracciato nel grafico a lato.



Per calcolare l'energia dissipata da R_2 nell'intervallo $[0,\, t_{fin}]$ con $t_{fin} = 5\,\text{ms}$, basta integrare la potenza istantanea assorbita:

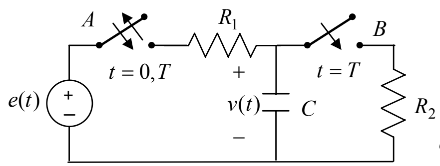
$$W_{R_2}(0,t_{fin}) = \int_0^{t_{fin}} \frac{v^2(t)}{R_2}dt = \int_0^T \frac{v^2(t)}{R_2}dt + \int_T^{t_{fin}} \frac{v^2(t)}{R_2}dt = \int_0^T \frac{480^2(1-e^{-1000t})^2}{20}dt + \int_T^{t_{fin}} \frac{825^2 e^{-2000t}}{20}dt$$

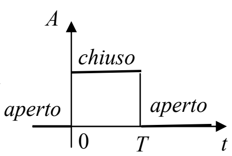
$$W_{R_2}(0,t_{fin}) = 25.48\text{ J}$$

ES. 1.9 La seguente rete rappresenta un semplice circuito di carica e scarica di un condensatore. La carica avviene tra l'istante $t=0$ e l'istante $t=T$, intervallo in cui l'interruttore *A* resta chiuso. Per $t>T$, invece, il condensatore C viene collegato al resto della rete attraverso la chiusura dell'interruttore B. Supponendo la rete a riposo per $t<0$, valutare:

a) la tensione sul condensatore $v(t)$ per $0<t<T$;

b) l'energia massima $W_{\max}$ erogabile da C per $t>T$;





$e(t) = 100 sin(20t)\,V$
$R_1 = 10\,\Omega$
$C = 10\,mF$
$T = 2\,s$

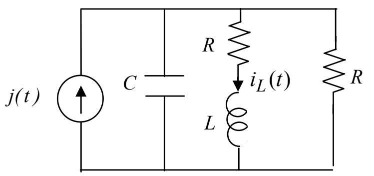
Risultato: *a)* $v(t) = 40e^{-10t} + 44.7\sin(20t - 1.11)$ V per $0<t<T$;
b) $W_{\max} = 8.64\,J$;

2. Circuiti dinamici del secondo ordine.

Es. 2.1 Il seguente circuito è in regime stazionario fino a $t=0$, quando il generatore si spegne. Calcolare:

a) il valore delle grandezze di stato all'istante $t=0^+$

b) la corrente $i_L(t)$ per t > 0



$$j(t)=\begin{cases}20 \ A & t<0\\ 0 \ A & t>0\end{cases}$$

$R=2\ \Omega$

$L=10\ \mu H$

$C=5\ \mu F$

a) Per $t<0$ il circuito è in regime stazionario, quindi il condensatore si comporta come un circuito aperto e l'induttore come un corto circuito. Per tale ragione:

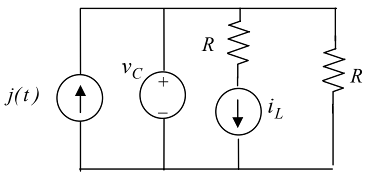
$$i_L(t)=j(t)/2=10\ A\ ,\quad v_C(t)=j(t)R/2=20\ V \qquad t<0\,.$$

Per la continuità delle variabili di stato si ha: $v_c(0^-)=v_c(0^+)=20\ V$ e $i_L(0^-)=i_L(0^+)=10\ A$.

b) Per $t>0$ il circuito è in evoluzione libera. Applicando le leggi di Kirchhoff e le caratteristiche dei bipoli si ricavano le equazioni di stato del sistema:

$$i_L+C\frac{dv_c}{dt}+\frac{v_c}{R}=0\,,\qquad v_C-Ri_L-L\frac{di_L}{dt}=0\,.$$

Alle stesse equazioni si perviene risolvendo il circuito resistivo associato:



Ricavando v_C dalla prima e sostituendola nella seconda si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2i_L}{dt^2}+\left(\frac{1}{RC}+\frac{R}{L}\right)\frac{di_L}{dt}+\frac{2}{LC}i_L=0\,,$$

la cui equazione caratteristica ammette le radici $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta=10^5(-1.5\pm1.3j)$. La soluzione si può esprimere, quindi, nella forma: $i_L(t)=\exp(\alpha t)[k_1\cos(\beta t)+k_2 sin(\beta t)]$, dove le costanti k_1,k_2 vanno determinate imponendo le condizioni iniziali su i_L e su di_L/dt:

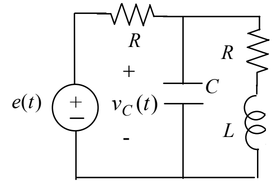
$$i_L(0^+)=10=k_1$$

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+}=\frac{1}{L}\left[v_C(0^+)-Ri_L(0^+)\right]=0=\alpha k_1+\beta k_2 \quad\Rightarrow\quad k_2=-\frac{\alpha k_1}{\beta}=11.5$$

La soluzione è, quindi:

$$i_L(t)=\exp(-1.5\cdot10^5t)[10\cos(1.3\cdot10^5t)+11.5 sin(1.3\cdot10^5t)] \qquad t>0\,.$$

ES. 2.2 Con riferimento al seguente circuito, in regime stazionario per $t<0$, calcolare la tensione $v_C(t)$ e la potenza $p_C(t)$ assorbita dal condensatore in ogni istante



$$e(t)=\begin{cases}20\ V & t<0\\ -20\ V & t>0\end{cases}$$

$R=1\ \Omega$

$L=5\ \mu H$

$C=5\ \mu F$

a) Per $t<0$ il circuito è in regime stazionario, quindi il condensatore si comporta come un circuito aperto e l'induttore come un corto circuito. Per tale ragione:

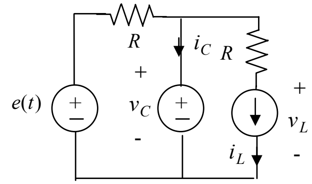
$$i_L(t)=e(t)/2R=10\ A\ ,\quad v_C(t)=e(t)/2=10\ V \qquad t<0\,.$$

Per la continuità delle variabili di stato si ha: $v_c(0^-)=v_c(0^+)=10\ V$ e $i_L(0^-)=i_L(0^+)=10\ A$.

Osserviamo che, essendo $i_c(t)=0$, si ha banalmente $p_c(t)=v_c(t)i_c(t)=0$.

b) Per $t>0$ il circuito è forzato dal generatore e(t), a partire dalle condizioni iniziali individuate al punto a). Risolvendo il circuito resistivo associato mostrato in figura:

$$i_C=\frac{e-v_C}{R}-i_L\,,\quad v_L=v_C-Ri_L$$



si ottengono le equazioni di stato:

$$\frac{dv_C}{dt}=\frac{e}{RC}-\frac{v_C}{RC}-\frac{i_L}{C}\,,\qquad \frac{di_L}{dt}=\frac{v_C}{L}-\frac{Ri_L}{L}\,.$$

Ricavando i_L dalla prima e sostituendola nella seconda si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2v_c}{dt^2}+\left(\frac{1}{RC}+\frac{R}{L}\right)\frac{dv_c}{dt}+\frac{2}{LC}v_c=\frac{1}{RC}\frac{de}{dt}+\frac{e}{LC}\,.$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata fornisce: $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta=2\cdot10^5(-1\pm j)$, quindi la soluzione si può esprimere nella forma:

$$v_C(t)=e^{\alpha t}[k_1\cos(\beta t)+k_2 sin(\beta t)]+v_{CP}(t)\,,$$

dove $v_{CP}(t)$ è una soluzione particolare che può essere scelta come la soluzione di regime a cui il circuito tende per $t\to\infty$ (regime stazionario):

$$v_{CP}(t)=e(t)/2=-10\ V\,.$$

Le costanti k_1,k_2 vanno determinate imponendo le condizioni iniziali su v_C e su dv_C/dt:

$$v_C(0^+)=10=k_1-10 \quad\Rightarrow\quad k_1=20;$$

$$\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{0^+}=-\frac{1}{C}\left[i_L(0^+)+\frac{v_C(0^+)-e(0^+)}{R}\right]=-8\cdot10^6=\alpha k_1+\beta k_2 \ \Rightarrow\ k_2=20.$$

La tensione sul condensatore per $t>0$ è, quindi:

$$v_C(t) = 20e^{-2\cdot 10^5 t}[\cos(2\cdot 10^5 t) - \sin(2\cdot 10^5 t)] - 10 = 28.3e^{-2\cdot 10^5 t}[\cos(2\cdot 10^5 t + 0.79)] - 10 \text{ V}.$$

La potenza assorbita per $t > 0$ si può valutare in due modi: possiamo calcolare preliminarmente la corrente che circola nel condensatore:

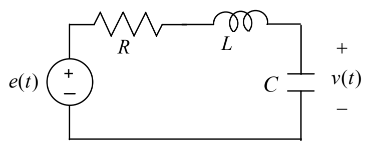
$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = -40e^{-2\cdot 10^5 t}\sin(2\cdot 10^5 t + 1.57) \text{ A, da cui:}$$

$$p_C(t) = v_C(t)i_C(t) = -565e^{-4\cdot 10^5 t}[\sin(4\cdot 10^5 t + 2.36) + 0.71] + 400e^{-2\cdot 10^5 t}\sin(2\cdot 10^5 t + 1.57) \text{ W}$$

Allo stesso risultato si perviene ricordando l'espressione dell'energia di un condensatore:

$$p_C(t) = \frac{C}{2}\frac{dv_C^2(t)}{dt} = 2.5\cdot 10^{-6}\frac{d}{dt}[28.3e^{-2\cdot 10^5 t}\cos(2\cdot 10^5 t + 0.79) - 10]^2.$$

ES. 2.3 Nella seguente rete sono assegnati i valori delle grandezze di stato all'istante $t = 0$. Calcolare la tensione sul condensatore per $t > 0$.



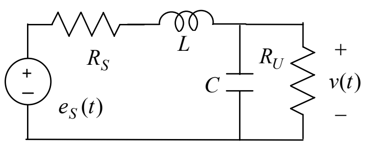
$v(0) = 1$ V, $i(0) = 0$ A

$E = 1$ V per $t > 0$

$R = 1\Omega,\ L = 1\mu H,\ C = 1\mu F$

Risultato: $v_C(t) = e^{-5\cdot 10^5 t}[\cos(8.7\cdot 10^5 t) + 0.57\sin(8.7\cdot 10^5 t)]$ V per $t > 0$.

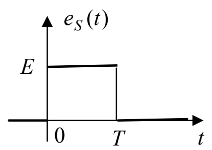
ES. 2.4 Il seguente circuito rappresenta un semplice sistema *trasmettitore-canale-ricevitore*. Calcolare la tensione sul ricevitore (R_U) in ogni istante e tracciarne l'andamento.



$E = 6\,V,\quad T = 1ns$

$R_S = R_U = 50\,\Omega$

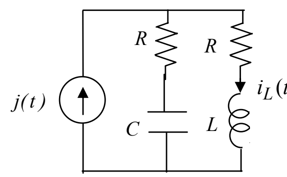
$L = 2\,nH,\quad C = 10\,pF$



Risultato: $v(t) = 0\,V$ per $t < 0$; $v(t) = -3.74e^{-4.45\cdot 10^9 t} + 0.74e^{-22.55\cdot 10^9 t} + 3\,V$ per $0 < t < T$;

$v(t) = 320e^{-4.45\cdot 10^9 t} - 4.6\cdot 10^9 e^{-22.55\cdot 10^9 t}$ per $t > T$.

ES. 2.5 Il seguente circuito è in regime sinusoidale fino $t = 0$, istante in cui il generatore si spegne. Calcolare la corrente $i_L(t)$ in ogni istante e tracciarne l'andamento.



$$j(t) = \begin{cases} 10\cos(100t)\ A & t < 0 \\ 0\ A & t > 0 \end{cases}$$

$R = 0.5\,\Omega$

$L = 10\,mH$

$C = 50\,mF$

Per $t < 0$ il circuito è in regime sinusoidale, quindi si può ricorrere al metodo fasoriale, ponendo:

$$\bar{J} = 10,\ \dot{Z}_1 = \dot{Z}_C + \dot{Z}_R = 0.5 - 0.2j,\ \dot{Z}_2 = \dot{Z}_L + \dot{Z}_R = 0.5 + j.$$

Per il partitore di corrente, nell'induttore si ha:

$$\bar{I}_L = \bar{J}\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} = 2.07 - 3.66j = 4.21\exp(-1.06j) \quad \Rightarrow \quad i_L(t) = 4.21\cos(100t - 1.06)\ A.$$

Applicando la LKC si ricava: $\bar{I}_C = \bar{J} - \bar{I}_L = 7.93 + 3.66j$, da cui la tensione:

$$\bar{V}_C = \dot{Z}_C\bar{I}_C = 1.74\exp(-1.14j) \quad \Rightarrow \quad v_C(t) = 1.74\cos(100t - 1.14)\ V.$$

Per la continuità delle variabili di stato: $v_c(0^-) = v_c(0^+) = 0.73\,V$, $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 2.07\,A$.

Per $t > 0$ il circuito è in evoluzione libera. Applicando la LKT all'unica maglia si ottiene:

$$v_C + 2Ri_L + L\frac{di_L}{dt} = 0.$$

Derivando tale equazione e sostituendovi la caratteristica di C si ottiene l'equazione differenziale

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{2R}{L}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L = 0,$$

la cui equazione caratteristica ammette le radici $\lambda_1 = -72.4$ e $\lambda_1 = -27.6$. La soluzione si può esprimere, quindi, nella forma: $i_L(t) = k_1\exp(\lambda_1 t) + k_2\exp(\lambda_2 t)$, dove le costanti k_1, k_2 sono determinate dalle condizioni iniziali su i_L e su di_L/dt:

$$i_L(0^+) = 2.07 = k_1 + k_2,$$

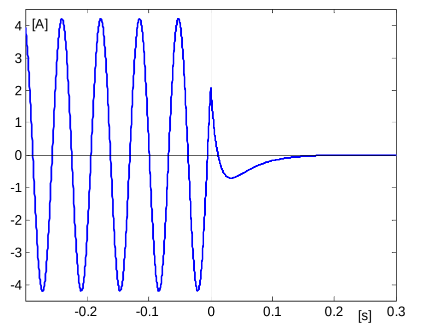
$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+} = -\frac{v_C(0^+) + 2Ri_L(0^+)}{L} = -280 \quad \Rightarrow$$

$$-280 = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 4.98,\ k_2 = -2.91$$

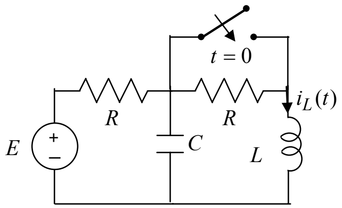
Per $t > 0$ la soluzione è, quindi, data da:

$i_L(t) = 4.98\exp(-72.4t) - 2.91\exp(-27.6t)$ A.

La figura a lato riporta l'andamento della soluzione in ogni istante.



ES. 2.6 La rete in figura è in regime stazionario fino $t = 0$, istante in cui si chiude l'interruttore. Calcolare la corrente $i_L(t)$ per $t > 0$.



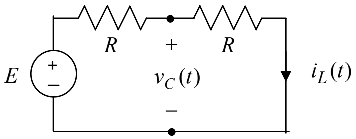
$E = 2\ V$

$R = 1/3\ \Omega$

$L = 1\ mH$

$C = 2\ mF$

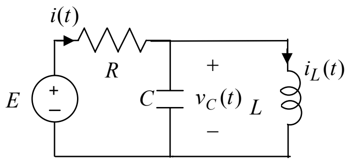
Il circuito da analizzare per $t < 0$ è disegnato a lato. Essendo in regime stazionario, il condensatore si comporta come un circuito aperto e l'induttore come un corto circuito:



$i_L(t) = E/2R = 3\ A$, $v_C(t) = E/2 = 1\,V$ $\quad (t < 0)$.

Per la continuità delle variabili di stato si ha: $v_c(0^-) = v_c(0^+) = 1\,V$ e $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 3\ A$.

Il circuito da analizzare per $t > 0$ è disegnato a lato. Analizzando il circuito resistivo associato si ricava il sistema di equazioni:



$$i_L + i_C = \frac{E - v_C}{R}, \qquad v_C = v_L,$$

da cui è semplice ottenere le equazioni di stato della rete:

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{E}{RC} - \frac{v_C}{RC} - \frac{i_L}{C}, \qquad \frac{di_L}{dt} = \frac{v_C}{L},$$

Ricavando v_C dalla seconda e sostituendola nella prima si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{E}{RLC}.$$

Le radici dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata sono: $\lambda_1 = -1000, \lambda_2 = -500$, quindi la soluzione si può esprimere nella forma:

$$i_L(t) = k_1 e^{-1000t} + k_2 e^{-500t} + i_{LP}(t),$$

dove $i_{LP}(t)$ è una soluzione particolare che può essere scelta come la soluzione di regime a cui il circuito tende per $t \to \infty$ (regime stazionario): $i_{LP}(t) = E/R = 6\ A.$.

Le costanti k_1, k_2 vanno determinate imponendo le condizioni iniziali su i_L e su di_L/dt:

$$i_L(0^+) = 3 = k_1 + k_2 + 6; \qquad \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+} = \frac{1}{L} v_C(0^+) = 1000 = -1000 k_1 - 500 k_2,$$

da cui: $k_1 = 1, k_2 = -4$, e quindi la soluzione per $t > 0$ è $i_L(t) = e^{-1000t} - 4e^{-500t} + 6\ A$.

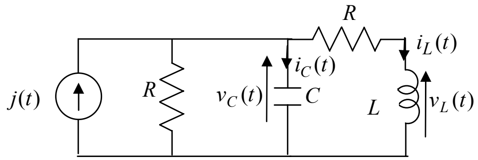
ES. 2.7 La rete in figura è in regime stazionario per $t < 0$. Determinare:

a) le grandezze di stato all'istante $t = 0^+$

b) la corrente nel condensatore e la tensione nell'induttore all'istante $t = 0^+$

c) la tensione sul condensatore per $t > 0$

d) la tensione sull'induttore per $t > 0$



$$j(t) = \begin{cases} 2 & t < 0 \\ 2\sin(\omega t) & t > 0 \end{cases}$$

$\omega = 10^6$ rad/s, $R = 1\ \Omega$

$L = 1\ \mu$H, $C = 2\ \mu$F

Risultato:

a) $v_C(0^+) = 1$ V, $i_L(0^+) = 1$ A

b) $i_C(0^+) = -2$ A, $v_L(0^+) = 0$ V

c) $v_C(t) = 2.28 e^{-10^6 t} \cos(10^6 t + 0.90) + 1.26 \cos(10^6 t - 0.32)\ V$ per $t > 0$

d) $v_L(t) = 4.46 \cos(10^6 t - 0.46) - e^{-10^6 t}[3.22 \sin(10^6 t + 1.69) - 9.12 \sin(10^6 t + 2.48)]\ V$ per $t > 0$