1 Sintesi per assegnazione dei poli: un esercizio svolto in più modi

Dato il processo descritto da

$$P(s) = \frac{3(s+1)^2}{s(s-1)(s+2)},$$

per cui è noto che vale l'Assunzione 1, si richiede di progettare $C(s)$ in modo che gli autovalori del sistema a ciclo chiuso appartengano all'insieme $\{-1,\ -2,\ -3\}$, e che si abbia errore permanente nullo in presenza di un riferimento costante e di disturbi d_1 e d_2 anch'essi costanti.

Osservazione. Si noti che la richiesta che gli autovalori a ciclo chiuso siano in un insieme finito di numeri non ha delle vere motivazioni pratiche, serve piuttosto per rendere finite le possibili scelte risolutive, quindi è una scelta che si fa spesso negli esercizi di esame.

Svolgimento 1. Per assicurare la specifica di precisione è necessario introdurre un polo in $s = 0$ nel compensatore, quindi si sceglie un compensatore del tipo $C(s) = C_1(s)C_2(s)$ in cui $C_1(s) = \dfrac{1}{s}$. Per sfruttare la Proprietà 1 del primo paragrafo di questo Capitolo 7, si può considerare che $P_1(s) = C_1(s)P(s)$ sia ora il processo per il quale si deve progettare il compensatore $C_2(s)$ in modo da assegnare gli autovalori desiderati a ciclo chiuso. Essendo

$$P_1(s) = \frac{3(s+1)^2}{s^2(s-1)(s+2)},$$

si ha $n = 4$ e quindi si possono assegnare gli autovalori con un compensatore di ordine $\ell = 3$. Per sfruttare appieno le cancellazioni, poiché -1 e -2 appartengono alla regione ammissibile per gli autovalori, si pone

$$\begin{aligned} C_2(s) &= \frac{(s+2)(c_2s^2+c_1s+c_0)}{(s+1)^2(s+d_0)} = \frac{(s+2)}{(s+1)^2}\overline{C_2}(s), \\ P_1(s) &= \frac{(s+1)^2}{(s+2)}\overline{P_1}(s), \end{aligned}$$

essendo

$$\overline{C_2}(s) = \frac{c_2s^2+c_1s+c_0}{s+d_0}, \quad \overline{P_1}(s) = \frac{3}{s^2(s-1)}.$$

Sviluppando semplici calcoli si vede che il polinomio $D_W(s)$ può essere scritto come segue

$$D_W(s) = (s+1)^2(s+2)\left(s^2(s-1)(s+d_0) + 3(c_2s^2+c_1s+c_0)\right) = (s+1)^2(s+2)\overline{D_W}(s).$$

Imponendo che sia $D_W(s) = (s+1)^6(s+2)$, e quindi

$$\overline{D_W}(s) = s^2(s-1)(s+d_0) + 3(c_2s^2+c_1s+c_0) = (s+1)^4,$$

si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} d_0 &= 5 \\ -d_0 + 3c_2 &= 6 \\ 3c_1 &= 4 \\ 3c_0 &= 1, \end{aligned}$$

che ha come soluzione

$$d_0 = 5, \quad c_2 = \frac{11}{3}, \quad c_1 = \frac{4}{3}, \quad c_0 = \frac{1}{3}.$$

Il compensatore proposto è quindi:

$$C(s) = \frac{(s+2)\left(\frac{11}{3}s^2 + \frac{4}{3}s + \frac{1}{3}\right)}{s(s+1)^2(s+5)} = \frac{11}{3}\frac{(s+2)\left(s^2 + \frac{4}{11}s + \frac{1}{11}\right)}{s(s+1)^2(s+5)},$$

il che corrisponde a una funzione di trasferimento sul ramo diretto

$$F(s) = C(s)P(s) = \frac{11\left(s^2 + \frac{4}{11}s + \frac{1}{11}\right)}{s^2(s-1)(s+5)}.$$

Per confermare la correttezza della sintesi, si può tracciare il luogo delle radici per tale $F(s)$, sostituendo il valore di guadagno 11 con un guadagno K' supposto variabile. Tale luogo dovrà avere un punto singolare triplo in $\overline{s} = -1$, in corrispondenza di $\overline{K'} = 11$, in quanto è noto che per $K' = 11$ i quattro autovalori del sistema a ciclo chiuso che sono poli di $W(s)$ si trovano in $s = -1$. Tale luogo delle radici è disegnato nelle ultime pagine di questo paragrafo.

Svolgimento 2. Procedendo esattamente come nello Svolgimento 1, ma imponendo invece $D_W(s) = (s+1)^4(s+2)^2(s+3)$, e quindi

$$\overline{D_W}(s) = s^2(s-1)(s+d_0) + 3(c_2s^2 + c_1s + c_0) = (s+1)^2(s+2)(s+3),$$

si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} d_0 &= 8 \\ -d_0 + 3c_2 &= 17 \\ 3c_1 &= 17 \\ 3c_0 &= 6, \end{aligned}$$

che ha come soluzione

$$d_0 = 8, \quad c_2 = \frac{25}{3}, \quad c_1 = \frac{17}{3}, \quad c_0 = 2.$$

Il compensatore proposto è quindi:

$$C(s) = \frac{(s+2)\left(\frac{25}{3}s^2 + \frac{17}{3}s + 2\right)}{s(s+1)^2(s+8)} = \frac{25}{3}\frac{(s+2)\left(s^2 + \frac{17}{25}s + \frac{6}{25}\right)}{s(s+1)^2(s+8)},$$

il che corrisponde a una funzione di trasferimento sul ramo diretto

$$F(s) = C(s)P(s) = \frac{25\left(s^2 + \frac{17}{25}s + \frac{6}{25}\right)}{s^2(s-1)(s+8)}.$$

Per confermare la correttezza della sintesi, si può tracciare il luogo delle radici per tale $F(s)$, sostituendo il valore di guadagno 11 con un guadagno K' supposto variabile. Tale luogo dovrà avere un punto singolare in $\overline{s} = -1$, in corrispondenza di $\overline{K'} = 25$, in quanto è noto che per $K' = 25$ due dei quattro autovalori del sistema a ciclo chiuso che sono poli di $W(s)$ si trovano in $s = -1$. Inoltre, il fatto che per $K' = 25$ gli altri due poli a ciclo chiuso debbano trovarsi in $s = -2$ e $s = -3$ impone la presenza di altri due punti singolari sull'asse reale, uno tra -3 e -2 e l'altro tra -2 e -1. Tale luogo delle radici è disegnato nelle ultime pagine di questo paragrafo.

Svolgimento 3. In questo esercizio, come in altri simili, la tecnica utilizzata negli Svolgimenti 1 e 2, che prevede di considerare i poli da aggiungere in $s = 0$ come parte di un "processo esteso" $P_1(s)$, aumenta in maniera non necessaria l'ordine del compensatore da usare. Infatti è stato utilizzato un compensatore $C(s)$ di ordine complessivo pari a 4, quando può bastare un compensatore $C(s)$ di ordine pari a 3. Infatti, ipotizzando

$$C(s) = \frac{(s+2)(c_2s^2 + c_1s + c_0)}{s(s+1)^2},$$

(si noti che anche in questo caso sono state sfruttate tutte le cancellazioni possibili) e imponendo $D_W(s) = (s+1)^5(s+2)$, sviluppando i soliti conti si ottiene:

$$\overline{D_W}(s) = s^2(s-1) + 3(c_2s^2 + c_1s + c_0) = (s+1)^3,$$

da cui si ha il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} 3c_2 &= 4 \\ 3c_1 &= 3 \\ 3c_0 &= 1 \end{aligned}$$

che ha come soluzione

$$c_2 = \frac{4}{3}, \quad c_1 = 1, \quad c_0 = \frac{1}{3}.$$

Il compensatore proposto è quindi:

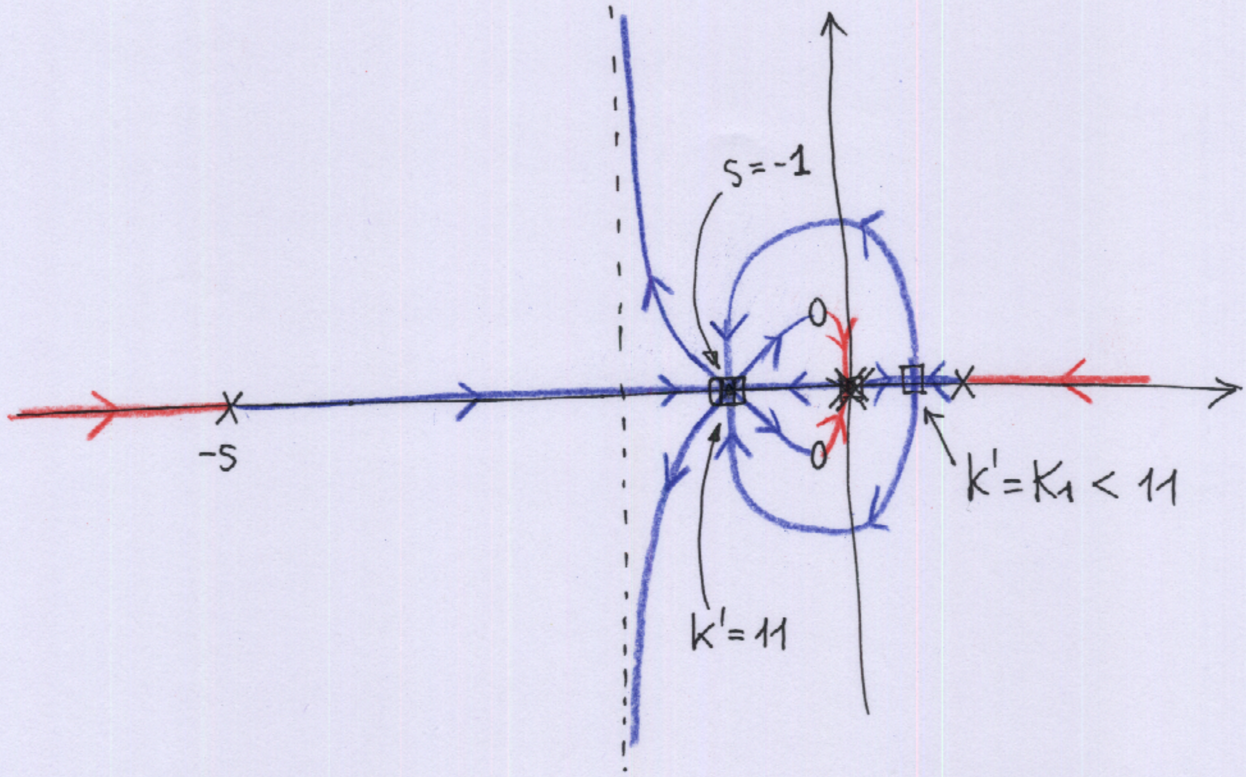
$$C(s) = \frac{(s+2)\left(\frac{4}{3}s^2 + s + \frac{1}{3}\right)}{s(s+1)^2} = \frac{4}{3}\frac{(s+2)\left(s^2 + \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}\right)}{s(s+1)^2},$$

il che corrisponde a una funzione di trasferimento sul ramo diretto

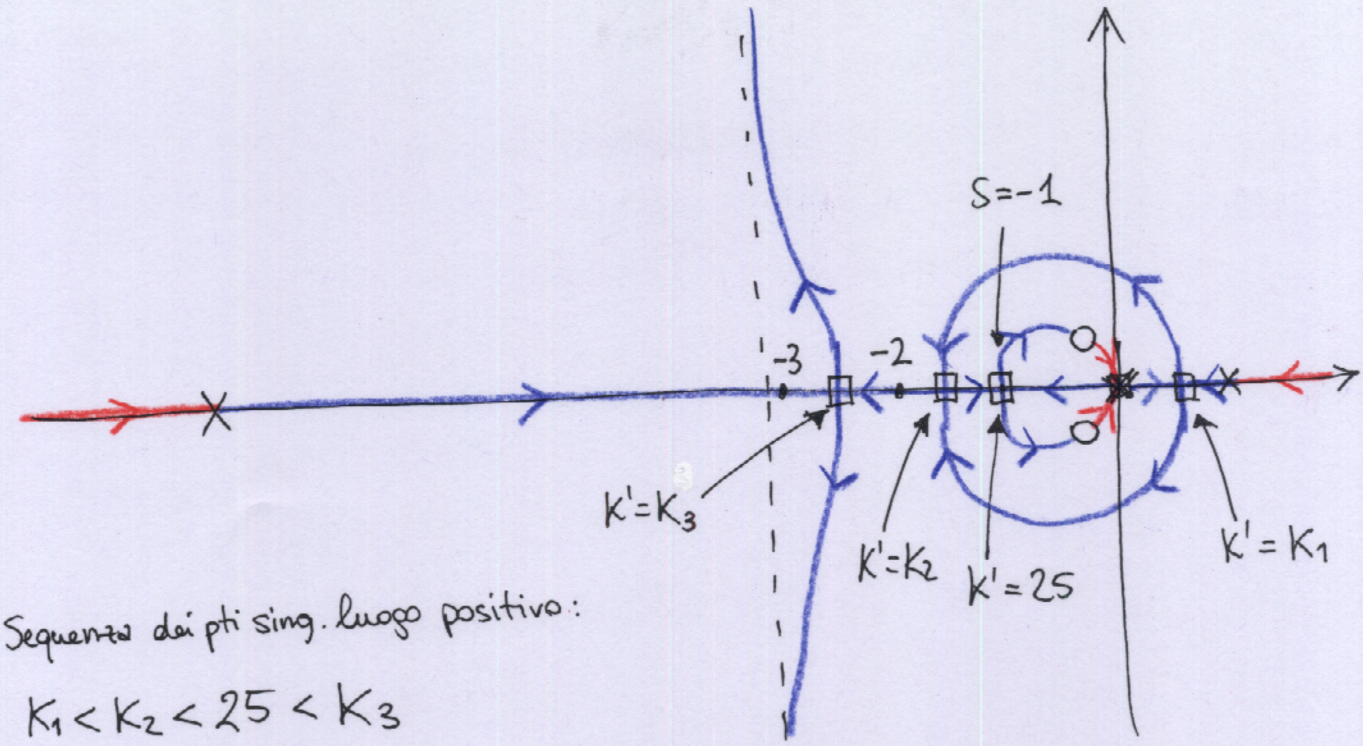
$$F(s) = C(s)P(s) = \frac{4\left(s^2 + \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}\right)}{s^2(s-1)}.$$

Per confermare la correttezza della sintesi, si può tracciare il luogo delle radici per tale $F(s)$, sostituendo il valore di guadagno 11 con un guadagno K' supposto variabile. Tale luogo dovrà avere un punto singolare doppio in $\overline{s} = -1$, in corrispondenza di $\overline{K'} = 4$, in quanto è noto che per $K' = 4$ i tre autovalori del sistema a ciclo chiuso che sono poli di $W(s)$ si trovano in $s = -1$. Anche tale luogo delle radici è disegnato nelle ultime pagine di questo paragrafo.

Luogo delle radici relativo allo Svolgimento 1



Luogo delle radici relativo allo <u>Svolgimento 2</u>



Sequenza dei pti sing. luogo positivo:

$K_1 < K_2 < 25 < K_3$

Luogo delle radici relativo allo <u>Svolgimento 3</u>