

## 10 Controllo di temperatura di un ambiente

Si analizzano di seguito le principali tecniche utilizzate per il controllo della temperatura di un ambiente, espresso nel senso più generale; si citano per esempio la temperatura dell'aria in una *cella frigorifera* o in un *forno*, dell'acqua di una *piscina*, di un *liquido* di altra natura immerso in un particolare contenitore.

Il sistema controllato è in questo caso l'*ambiente* di cui si vuole controllare la temperatura ovvero il *sistema termico*.

Dal punto di vista sistemico gli schemi a blocchi per il **controllo analogico** sono sostanzialmente identici nella struttura a quelli relativi al controllo di velocità di un motore a patto di sostituire il *motore* con il *sistema termico* e il *trasduttore di velocità* con il *trasduttore di temperatura*; si riporta in FIGURA 22 lo schema a blocchi relativo a un sistema di controllo ad anello chiuso.

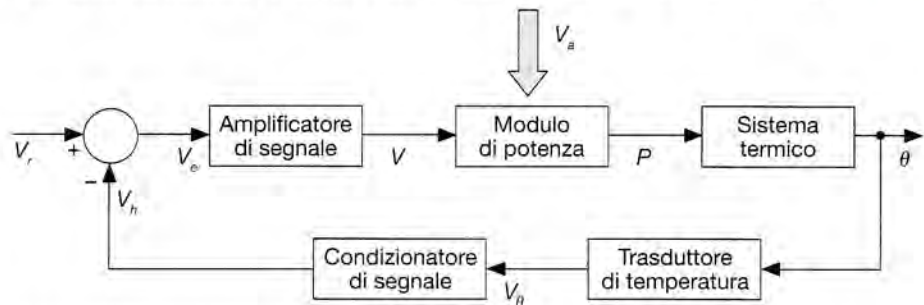


FIGURA 22  
Schema a blocchi  
per il controllo analogico  
della temperatura  
di un ambiente.

Le grandezze caratteristiche coinvolte sono:

- la *variabile controllata* è la temperatura  $\theta$ ;
- il *modulo di potenza* ha come ingresso la tensione  $V$  che ha un contenuto informativo e come uscita (*variabile manipolabile*) la potenza  $P$  fornita al sistema termico;
- la grandezza non elettrica (*temperatura*) viene convertita dal *trasduttore di temperatura* in una grandezza elettrica  $V_\theta$  amplificata a sua volta dal *condizionatore di segnale*.

Un sistema di controllo ad anello chiuso deve essere in grado di regolare la temperatura di un ambiente da mantenere costante a 35 °C modulando la potenza fornita da un riscaldatore a resistenza; il sistema comprende:

- una termocoppia con costante di guadagno pari a 4 mV/°C che provvede alla misura della temperatura dell'ambiente;
- un generatore di tensione di riferimento alimentato a 12 V;
- un potenziometro rotativo con angolo massimo di 300 °C;
- un modulo di potenza comprensivo del circuito d'innescio degli impulsi e del riscaldatore con costante di guadagno complessiva pari a 200 W/V.

Si richiede di calcolare:

- la costante di guadagno del condizionatore di segnale in modo tale che a 35 °C il segnale di retroazione risulti uguale al segnale di riferimento supposto pari a 7 V;
- l'angolo del potenziometro corrispondente a 35 °C di temperatura ambiente;
- la costante di guadagno del sistema termico espresso come rapporto tra la temperatura e la potenza fornita dall'elemento riscaldatore sapendo che per ottenere un aumento di temperatura di 1 °C l'elemento riscaldatore deve fornire una potenza pari a 100 W;
- il valore a cui polarizzare il modulo di potenza in modo tale che a una tensione continua d'ingresso pari a 0 V corrisponda una potenza in uscita pari a quella necessaria per portare la temperatura da 20 °C a 35 °C;
- il guadagno d'anello del sistema di controllo che, normalmente soggetto a variazioni di temperatura del 20%, deve essere retroazionato in modo tale che le variazioni di temperatura siano contenute entro l'1%;
- la costante di guadagno dell'amplificatore di segnale;
- l'errore di regolazione che il sistema commetterebbe se si decidesse di innalzare a 40 °C la temperatura dell'ambiente;
- la temperatura effettiva dell'ambiente in corrispondenza di un valore teorico di 40 °C tenendo conto del disturbo.

### Soluzione

Non essendo richiesto il progetto dinamico del sistema i blocchi vengono considerati semplicemente proporzionali.

### Costante di guadagno del condizionatore di segnale

Alla temperatura di 35 °C il sensore fornisce una tensione pari a 140 mV.

Dovendo essere tale tensione compatibile con i 7 V di riferimento, si dovrà realizzare un condizionatore di segnale con costante di guadagno definita dalla seguente relazione:

$$G_{cs} = \frac{7}{0,14} = 50$$

Il condizionatore di segnale può essere un amplificatore non invertente con rapporto tra resistenza di reazione e resistenza d'ingresso pari a 49.

### Angolo del potenziometro

L'angolo del potenziometro a 45 °C si ottiene utilizzando la relazione:

$$\alpha = \frac{300 \cdot 7}{12} = 175^\circ$$

### Costante di guadagno del sistema termico

Utilizzando i dati forniti risulta:

$$G_{st} = \frac{\theta}{P} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ °C / W}$$

### Polarizzazione del modulo di potenza

Un aumento di temperatura di 15 °C si ottiene fornendo una potenza di polarizzazione pari a:

$$P_0 = \frac{15}{0,01} = 1500 \text{ W}$$

### Guadagno d'anello

A un disturbo in assenza di retroazione del 20% corrisponde, in presenza di retroazione, un disturbo dell'1%; deve risultare pertanto la relazione:

$$\frac{d_r \%}{d \%} = \frac{1}{20}$$

Di conseguenza si ha anche:

$$\frac{1}{1 + A(0)k} = \frac{1}{20}$$

Risolvendo si ottiene un guadagno d'anello pari a 19 che si approssima a 20.

### Costante di guadagno dell'amplificatore di segnale

La costante incognita  $G_{as}$  dell'amplificatore di segnale si ottiene esprimendo il guadagno d'anello come prodotto delle costanti di guadagno dei singoli blocchi; risulta la relazione:

$$A(0)k = G_{as} G_{mp} G_{st} G_{cs} G_{tr}$$

essendo  $G_{mp}$  e  $G_{tr}$  le costanti di guadagno del modulo di potenza e del trasduttore.

Per la costante di guadagno incognita si ha quindi:

$$G_{as} = \frac{A(0)k}{G_{mp} G_{st} G_{cs} G_{tr}} = \frac{20}{200 \cdot 0,01 \cdot 50 \cdot 0,004} = 50$$



Per la realizzazione della rete, comprensiva del nodo di confronto, si può utilizzare un sommatore invertente i cui ingressi sono il segnale di retroazione e il segnale di riferimento con polarità invertita; in uscita viene prodotto il segnale errore.

Pari a 50 deve essere il rapporto tra la resistenza di reazione e le resistenze d'ingresso.

#### Errore di regolazione a 40 °C

Il sistema è di tipo 0; alla temperatura  $\theta_1$  di 40 °C l'errore statico vale:

$$e = \frac{\theta_1 - \theta_0}{1 + A(0)k} = \frac{40 - 35}{21} = 0,24 \text{ °C}$$

essendo  $\theta_0$  il valore di polarizzazione.

#### Errore complessivo a 40 °C

A un errore ad anello aperto del 20% dovuto a un disturbo corrisponde un errore ad anello chiuso pari a:

$$d_r \% = \frac{d \%}{1 + A(0)k} = \frac{20}{21} = 0,95 \%$$

Rapportato a 35 °C si ha quindi un errore pari a:

$$d = 35 \cdot \frac{0,95}{100} = 0,33 \text{ °C}$$

L'errore complessivo  $e_t$  valutato a 40 °C risulta dalla sovrapposizione degli effetti:

$$e_t = e + d = 0,24 + 0,33 = 0,57 \text{ °C}$$

La temperatura effettiva  $\theta$  risulta quindi pari a:

$$\theta = \theta_1 - e_t = 40 - 0,57 = 39,43 \text{ °C}$$

Si consideri un liquido immerso in una vasca la cui temperatura deve essere mantenuta costante modulando la potenza fornita da un riscaldatore a resistenza; si vuole realizzare un sistema di controllo ad anello chiuso che risponda alle seguenti specifiche:

- la temperatura del liquido deve rimanere costante a 40 °C;
- il sistema, normalmente soggetto a variazioni massime di temperatura del 5% a causa della presenza di disturbi sull'uscita, deve essere retroazionato in modo che tali variazioni siano contenute entro lo 0,5%;
- il sistema deve essere stabile con un margine di fase di almeno 60°.

Dopo aver discusso circa la stabilità e il margine di fase del sistema, si determinino in particolare:

- la costante di guadagno del regolatore;
- l'errore di regolazione che il sistema commetterebbe se si decidesse, cambiando la tensione di riferimento, di mantenere costante a 50 °C la temperatura del liquido;
- la temperatura effettiva del liquido nella condizione sopra citata, tenendo conto anche dell'errore dovuto alla presenza di un disturbo sull'uscita.

Caratteristiche note del sistema sono le seguenti:

- il modulo di potenza, che è polarizzato in modo tale che l'errore di regolazione risulti nullo a regime, presenta una costante di guadagno pari a 200 W/V e una costante di tempo pari a 10 ms;
- la potenza termica da fornire al sistema per raggiungere i 40 °C quando la temperatura esterna è di 20 °C risulta pari a 1 kW;

- il sistema controllato presenta una costante di tempo pari a 10 000 s;
- come sensore di temperatura si utilizza una termocoppia con costante di guadagno pari a 5 mV/°C e costante di tempo pari a 100 s;
- si ha a disposizione un generatore di tensione costante pari a 10 V.

#### Soluzione

Si procede affrontando i progetti statico e dinamico del sistema nel rispetto delle specifiche richieste.

#### Guadagno d'anello

Devono essere soddisfatte le specifiche che riguardano i disturbi additivi:

$$d_r \% = \frac{d \%}{1 + A(0)k}$$

Approssimando per eccesso risulta:

$$A(0)k \cong \frac{d \%}{d_r \%} \geq \frac{5}{0,5} = 10$$

Si sceglie il valore limite pari a 10.

#### Funzione di trasferimento d'anello

Tenendo conto delle costanti di tempo (esprese in s) la f.d.t. d'anello assume la seguente forma:

$$AB(j\omega) = \frac{10}{(1 + j\omega 0,01)(1 + j\omega 100)(1 + j\omega 10\,000)}$$

#### Poli del sistema

Note le costanti di tempo, si ricavano le pulsazioni di taglio:

$$\omega_1 = 1/10\,000 = 10^{-4} \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 1/100 = 10^{-2} \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = 1/0,01 = 10^2 \text{ rad/s}$$

### Stabilità

Tenendo conto che il guadagno d'anello espresso in dB vale 20, il diagramma di Bode delle ampiezze viene riportato in FIGURA 34.

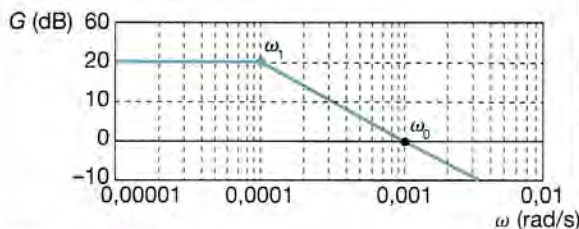


FIGURA 34  
Diagramma di Bode delle ampiezze.

Il diagramma non è completo ma sufficiente per ottenere le informazioni desiderate in quanto il punto di attraversamento a 0 dB avviene chiaramente con pendenza  $-1$ ; il sistema è pertanto sicuramente stabile.

In questo caso si può notare che la costante di tempo dominante è quella propria del sistema controllato (10000 s).

### Calcolo del margine di fase

Tenendo conto che il diagramma del modulo taglia l'asse a 0 dB esattamente in corrispondenza di  $\omega_0 = 0,001$  rad/s, per il calcolo del margine di fase si ha dunque:

$$\varphi_1 = \arctan(\omega_0/\omega_1) = \arctan(0,001/0,0001) = 84^\circ$$

$$\varphi_2 = \arctan(\omega_0/\omega_2) = \arctan(0,001/0,01) = 6^\circ$$

$$\varphi_3 = \arctan(\omega_0/\omega_3) = \arctan(0,001/100) = 0^\circ$$

Risulta quindi:

$$\sum \varphi_i = 84^\circ + 6^\circ + 0^\circ = 90^\circ$$

$$m.d.f. = 180^\circ - \sum \varphi_i = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Risultando un margine di fase superiore a  $60^\circ$ , la specifica risulta rispettata.

### Segnale fornito dalla termocoppia

La termocoppia fornisce una tensione di 5 mV per ogni  $^\circ\text{C}$  di temperatura; pertanto alla temperatura di  $40^\circ\text{C}$  la tensione vale 0,2 V.

### Guadagno del condizionatore di segnale

Il segnale fornito dalla termocoppia deve essere adattato al segnale di riferimento.

Poiché i 0,2 V in uscita dalla termocoppia corrispondono ai 10 V del segnale di riferimento, si dovrà realizzare un condizionatore con costante di guadagno:

$$G_{cs} = \frac{10}{0,2} = 50$$

Si può utilizzare a questo scopo un amplificatore non invertente con  $R_2/R_1$  pari a 49.

### Sistema controllato

Con i dati forniti il guadagno del sistema controllato risulta il seguente:

$$G_{st} = \frac{\theta - \theta_a}{P_t} = \frac{40 - 20}{1000} = 0,02^\circ \text{ C/W}$$

### Nodo di confronto e amplificatore di segnale

Per realizzare il comparatore/amplificatore bisogna tenere conto dei guadagni statici degli altri blocchi del sistema e del guadagno d'anello in precedenza calcolato.

Il guadagno incognito  $G_{as}$  dell'amplificatore di segnale si ottiene esprimendo il guadagno d'anello come prodotto dei guadagni dei singoli blocchi; risulta:

$$A(0)k = G_{as}G_{mp}G_{st}G_{cs}G_{tr}$$

essendo  $G_{omp}$  e  $G_{otr}$  i guadagni noti del modulo di potenza e del trasduttore.

Per il guadagno del blocco si ha quindi:

$$G_{as} = \frac{A(0)k}{G_{mp}G_{st}G_{cs}G_{tr}} = \frac{10}{200 \cdot 0,02 \cdot 50 \cdot 0,005} = 10$$

Il sommatore invertente deve essere realizzato in modo tale che risulti  $R_3 = 10 R$ .

### Errore di regolazione a $50^\circ\text{C}$

Essendo il sistema polarizzato, alla temperatura  $\theta_0$  di  $40^\circ\text{C}$  l'errore statico risulta nullo; alla temperatura  $\theta_1$  di  $50^\circ\text{C}$  si ha:

$$e = \frac{\theta_1 - \theta_0}{1 + A(0)k} = \frac{50 - 40}{11} = 0,91^\circ\text{C}$$

### Errore complessivo a $50^\circ\text{C}$

A un errore ad anello aperto del 5% dovuto a un disturbo corrisponde un errore ad anello chiuso pari a:

$$d_r \% = \frac{d\%}{1 + A(0)k} = \frac{5}{11} = 0,45\%$$

Rapportato a  $40^\circ\text{C}$  si ha quindi un errore pari a:

$$d = 40 \cdot \frac{0,45}{100} = 0,18^\circ\text{C}$$

L'errore complessivo  $e_t$  a  $50^\circ\text{C}$  risulta dalla sovrapposizione degli effetti:

$$e_t = e + d = 0,91 + 0,18 = 1,09^\circ\text{C}$$

La temperatura effettiva  $\theta$  risulta quindi pari a:

$$\theta = \theta_1 - e_t = 50 - 1,09 = 48,91^\circ\text{C}$$



► I **sistemi di controllo ON-OFF** sono caratterizzati dalla presenza di dispositivi denominati **regolatori ON-OFF** che confrontano due grandezze che vengono loro inviate in ingresso e in relazione all'esito di questo confronto forniscono in uscita un segnale digitale.

Se si esclude il breve intervallo di tempo in cui avviene il passaggio da una condizione all'altra, i *regolatori ON-OFF* possono assumere soltanto i due livelli *ON* e *OFF*.

La **caratteristica elettrica** tipica di un *regolatore ON/OFF* è simile a quella di un *comparatore con isteresi* di tipo elettronico; un esempio, in questo caso corrispondente a una configurazione di tipo invertente, viene riportato in FIGURA 51.

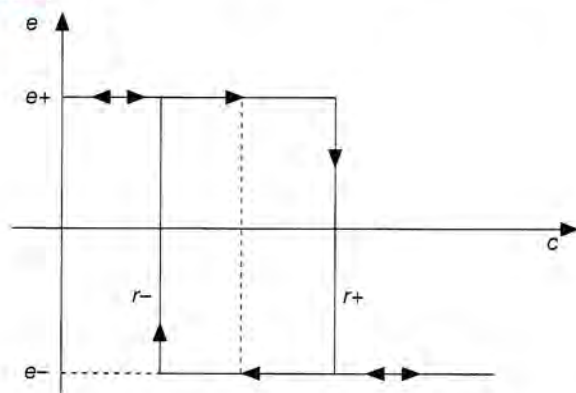


FIGURA 51  
Caratteristica elettrica  
di un regolatore ON/OFF.

La grandezza in uscita dal regolatore assume soltanto i due livelli alto e basso che, direttamente o attraverso un amplificatore di potenza, comandano un attuatore (per esempio un *relè*) che agisce a sua volta sul sistema controllato.

Si consideri come caso concreto l'esempio riportato in FIGURA 52.

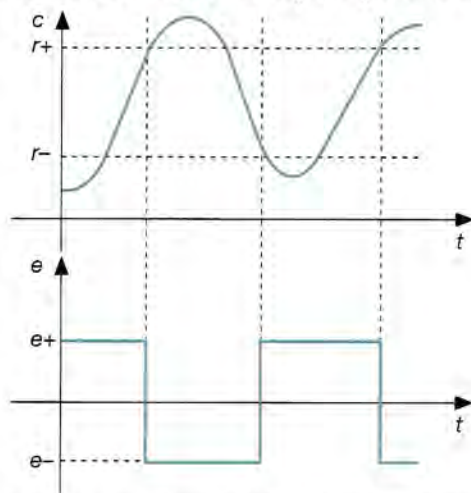


FIGURA 52  
Esempio di regolazione  
ON/OFF.

Il segnale d'ingresso è una grandezza variabile nel tempo che presenta l'andamento riportato nel grafico in alto; il corrispondente segnale d'uscita presenta l'andamento riportato nel grafico in basso.

Si suppone che nell'istante iniziale di osservazione del sistema l'uscita sia a livello alto  $e+$  come conseguenza del fatto che la variabile controllata è scesa sotto la soglia di riferimento  $r-$ ; tale condizione viene mantenuta fino a quando la variabile controllata non supera la soglia di riferimento  $r+$ ; l'uscita commuta e si porta a livello alto.

Nei sistemi di controllo ad anello chiuso anche i regolatori ON-OFF vengono posizionati sulla linea di andata a valle del nodo di confronto.

Un esempio applicativo tipico è la *regolazione ON-OFF della temperatura* (di un ambiente o di un liquido) che si vuole mantenere all'interno di un intervallo compreso tra una *soglia inferiore* e una *soglia superiore*.

Su questo principio funzionano i termostati che forniscono a un *elemento riscaldatore* la potenza necessaria per far aumentare la temperatura di un ambiente o di un liquido quando questa scende sotto la *soglia inferiore*; l'elemento riscaldatore viene staccato quando la temperatura sale al di sopra della *soglia superiore*.

Nodo di confronto e regolatore vengono quasi sempre realizzati in un unico dispositivo che può anche essere un semplice *comparatore integrato*, molto meglio se provvisto di *isteresi*.

Un esempio di **comparatore con isteresi** è il *trigger di Schmitt invertente*, un circuito elettronico con *reazione positiva* riportato in FIGURA 53.

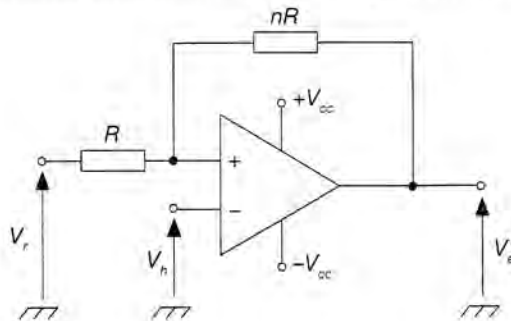


FIGURA 53  
Schema elettrico  
del regolatore.

Si precisa che:

- la tensione  $V_e$ , di tipo digitale, rende conto dell'esito del confronto;
- la tensione  $V_h$  identifica la variabile controllata e misurata dal trasduttore disposto sul ramo di retroazione;
- la tensione  $V_r$  identifica la variabile di riferimento.

Le tensioni  $V_{r-}$  e  $V_{r+}$  rappresentano rispettivamente i valori di soglia inferiore e superiore di tensione, i livelli logici in uscita  $V_{e-}$  e  $V_{e+}$  corrispondono ai due valori di saturazione dell'operazionale.

Noti questi valori i parametri che devono essere dimensionati in sede di progetto sono:

- il rapporto  $n$  che deve sussistere tra resistenza di retroazione  $nR$  e resistenza d'ingresso  $R$ ;
- il valore della tensione di riferimento  $V_r$ .

Le formule da utilizzarsi in sede di progetto sono le seguenti:

$$V_{r-} = V_r \left( \frac{n}{n+1} \right) + \frac{V_{e-}}{n+1}$$

$$V_{r+} = V_r \left( \frac{n}{n+1} \right) + \frac{V_{e+}}{n+1}$$



Il controllo ON-OFF di temperatura ad anello chiuso prevede:

- una misura continua della temperatura attraverso un *trasduttore di temperatura* e un *condizionatore di segnale*;
- un confronto continuo della grandezza a essa corrispondente con la grandezza di riferimento.

La *linea di andata* del sistema, come viene evidenziato nello schema a blocchi riportato in FIGURA 54, è costituita da un *circuito di comando* disposto a monte del *sistema termico*; esso comprende in genere:

- un *regolatore*, che svolge contemporaneamente anche la funzione di *nodo di confronto*;
- un *amplificatore di corrente con funzionamento a scatto*;
- un *relè* che isola fisicamente il *circuito di comando* dal *sistema termico* disposto a valle.

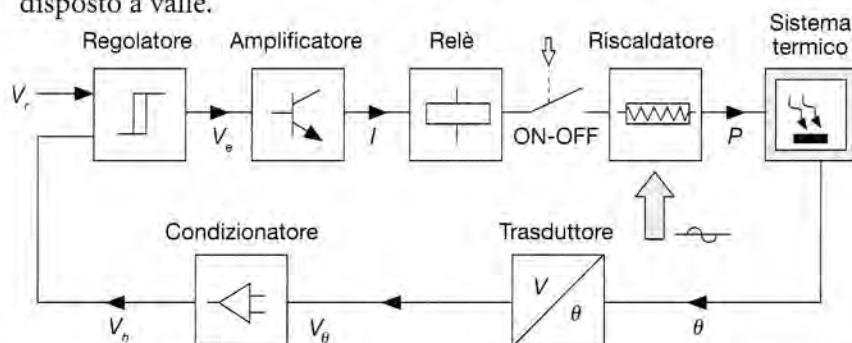


FIGURA 54  
Schema a blocchi  
per il controllo ON-OFF  
della temperatura  
di un ambiente.

Il *regolatore* ha come ingressi i segnali di riferimento  $V_r$  e di retroazione  $V_n$ ; produce in uscita il segnale  $V_e$  di tipo logico con due livelli (ON e OFF).

Poiché la corrente in uscita dal regolatore è in genere di debole intensità, si rende necessario un *amplificatore con funzionamento a scatto* che eroghi la corrente  $I$  necessaria per il funzionamento di un dispositivo *attuatore* (relè) che svolga praticamente l'*azione ON-OFF* di apertura e chiusura sul *sistema termico*; in questo caso si è ipotizzato che l'*azione riscaldante* sulla massa del sistema termico sia prodotta da un riscaldatore a resistenza alimentato in alternata.

## 23.1 Circuito di comando del riscaldatore

Per il circuito di comando del riscaldatore viene proposto lo schema impiantistico riportato in FIGURA 55.

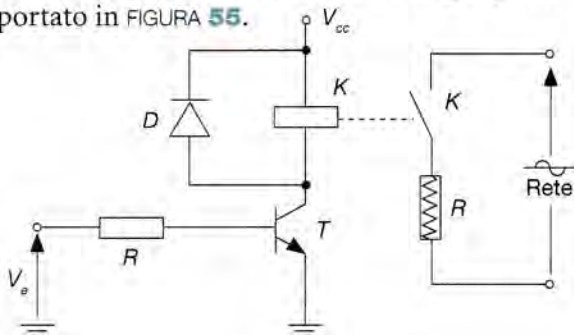


FIGURA 55  
Circuito di comando  
del riscaldatore.

Vengono individuati i seguenti elementi caratteristici:

- un *amplificatore di corrente con funzionamento a scatto* costituito da un *transistor* che funziona in *interdizione* quando il regolatore fornisce un livello basso di segnale, in *saturazione* quando gli viene inviato un livello alto;
- un *relè* disposto sul *collettore* del *transistor* che, attraverso un *contatto* del medesimo, posto in serie all'*elemento riscaldatore*, apre o chiude il circuito del *riscaldatore* medesimo alimentato alla tensione di rete.

Si verificano le situazioni seguenti:

- quando il transistor si trova in *interdizione* (OFF) la corrente di collettore si può considerare nulla, il relè risulta diseccitato e il suo contatto aperto; il riscaldatore è scollegato dalla rete;
- quando il transistor si trova in *saturazione* (ON) la corrente fluisce attraverso il collettore, il relè risulta eccitato e il suo contatto chiuso; il riscaldatore è collegato alla rete.

Il diodo viene posto in parallelo alla bobina per proteggere il transistor dalle sovratensioni prodotte durante il *transitorio di commutazione*.

#### ESEMPIO 8

La temperatura dell'acqua in un impianto industriale deve essere mantenuta costante a 45 °C con un sistema di regolazione ON-OFF.

Per la sua realizzazione si ha a disposizione un trasduttore integrato del tipo LM35 e un trigger invertente per la realizzazione del blocco regolatore.

Si vuole dimensionare il circuito del trigger ipotizzando che:

- le soglie di temperatura inferiore e superiore siano rispettivamente 43 °C e 47 °C;
- i valori di saturazione dell'operazionale valgano rispettivamente +12 V e -12 V.

#### Soluzione

Poiché il trasduttore fornisce una tensione di 0 V a 0 °C con un coefficiente di temperatura di 10 mV/°C, in corrispondenza delle due soglie di temperatura inferiore e superiore si hanno valori di tensione rispettivamente pari a:

$$V_{\theta-} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 43 = 0,43 \text{ V}$$

$$V_{\theta+} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 47 = 0,47 \text{ V}$$

Dato il livello di tensione abbastanza debole si amplifica il segnale prodotto dal trasduttore utilizzando un condizionatore con costante di guadagno pari a 10 ottenendo i valori limite seguenti:

$$V_{r-} = 10 \cdot 0,43 = 4,3 \text{ V}$$

$$V_{r+} = 10 \cdot 0,47 = 4,7 \text{ V}$$

Le incognite da determinare sono:

- il rapporto tra resistenza di retroazione e resistenza d'ingresso;
- il valore della tensione di riferimento.

Il problema della determinazione delle incognite si risolve facilmente sfruttando la simmetria ( $\pm 0,2 \text{ V}$ ) delle soglie di tensione inferiore e superiore rispetto al valore centrale di 4,5 V (corrispondente alla temperatura di 45 °C).

Poiché la soglia superiore di tensione vale 4,7 V, nella relazione:

$$V_{r+} = V_r \left( \frac{n}{n+1} \right) + \frac{V_{\theta+}}{n+1}$$

è sufficiente imporre:

$$V_r \left( \frac{n}{n+1} \right) = 4,5$$

e:

$$\frac{12}{n+1} = 0,2$$

per ottenere immediatamente i valori incogniti.

Con facili calcoli si ottiene  $n = 59$  e  $V_r = 4,576 \text{ V}$ .

Ai medesimi risultati si può pervenire sfruttando la relazione relativa alla soglia inferiore.



Un nastro trasportatore viene azionato da un motore in continua la cui velocità è controllata da un sistema ad anello chiuso che comprende un modulo di potenza, una dinamo tachimetrica, un

condizionatore di segnale e un regolatore proporzionale.

Le caratteristiche del sistema vengono evidenziate nello schema a blocchi riportato in FIGURA 89.

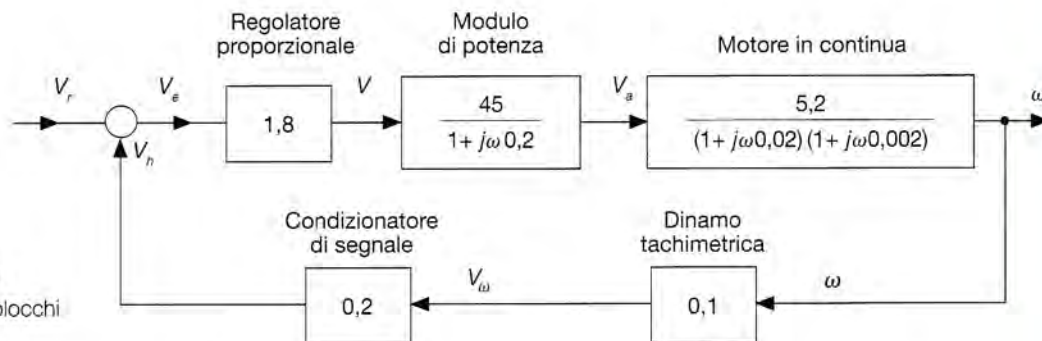


FIGURA 89  
Schema a blocchi del sistema.

Dopo avere individuato la f.d.t. del sistema nel suo complesso si richiede di:

- analizzare la stabilità del sistema utilizzando i criteri di Bode e Nyquist;
- valutare l'errore di posizione in risposta a un segnale a gradino di ampiezza unitaria.

## Soluzione

La costante di guadagno della linea d'andata vale 421,2; pertanto la f.d.t. della linea di andata risulta la seguente:

$$A(j\omega) = \frac{421,2}{(1 + j\omega 0,002)(1 + j\omega 0,02)(1 + j\omega 0,2)}$$

La costante di guadagno dell'anello espressa come prodotto delle costanti di guadagno dei singoli blocchi vale circa 8,4 (18,5 dB).

Per la f.d.t. d'anello risulta quindi:

$$AB(j\omega) = \frac{8,4}{(1 + j\omega 0,002)(1 + j\omega 0,02)(1 + j\omega 0,2)}$$

Per la f.d.t. di tutto il sistema retroazionato si ha di conseguenza:

$$G(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{1 + AB(j\omega)} = \frac{421,2}{8,4 + (1 + j\omega 0,002)(1 + j\omega 0,02)(1 + j\omega 0,2)}$$

## Analisi della stabilità con Bode

Per le indagini sulla stabilità è sufficiente studiare la f.d.t. d'anello.

In corrispondenza dei tre poli si hanno le seguenti pulsazioni:

$$\omega_1 = 1/\tau_1 = 1/0,2 = 5 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 1/\tau_2 = 1/0,02 = 50 \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = 1/\tau_3 = 1/0,002 = 500 \text{ rad/s}$$

In FIGURA 90 viene riportato il diagramma delle ampiezze.

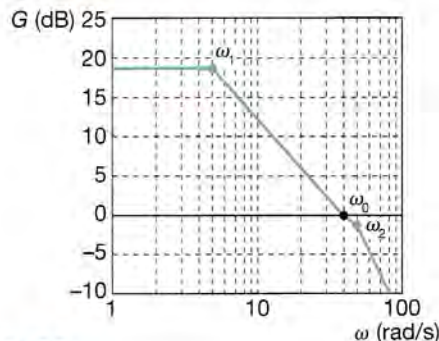


FIGURA 90  
Diagramma delle ampiezze.

Viene riprodotta soltanto quella parte di grafico interessante ai fini dello studio della stabilità ovvero la zona intorno all'intersezione con l'asse a 0 dB che avviene con pendenza -1 alla pulsazione di circa 40 rad/s.

In relazione al criterio di Bode il sistema si può ritenere pertanto sicuramente stabile (proprio per il fatto che la pendenza di attraversamento vale -1).

Anche l'analisi approssimata del margine di fase risulta soddisfacente; si ottiene infatti:

$$\varphi_1 = \arctan(\omega_c/\omega_1) = \arctan 40/5 = 83^\circ$$

$$\varphi_2 = \arctan(\omega_c/\omega_2) = \arctan 40/50 = 39^\circ$$

$$\varphi_3 = \arctan(\omega_c/\omega_3) = \arctan 40/500 = 5^\circ$$

$$\Sigma\varphi_i = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 83^\circ + 39^\circ + 5^\circ = 127^\circ$$

$$m.d.f. = 180^\circ - \Sigma\varphi_i = 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ$$

Il margine di fase è pertanto sufficiente in quanto superiore ai  $40^\circ \div 45^\circ$ .

### Analisi della stabilità con Nyquist

Tracciando il diagramma polare e utilizzando il criterio di Nyquist si raggiungono le stesse conclusioni.

Il diagramma polare viene riprodotto in FIGURA 91.

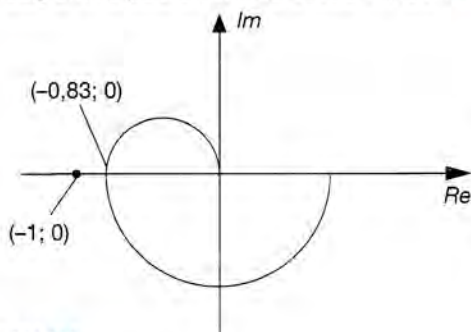


FIGURA 91

Diagramma polare.

Razionalizzando risulta:

$$AB(j\omega) = 8,4 \frac{(1 - j\omega 0,002)(1 - j\omega 0,02)(1 - j\omega 0,2)}{\left(1 + \frac{\omega^2}{250\,000}\right)\left(1 + \frac{\omega^2}{2500}\right)\left(1 + \frac{\omega^2}{25}\right)}$$

Con ulteriori passaggi si ottengono la parte reale e la parte immaginaria della funzione:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[AB(j\omega)] &= \\ &= 8,4 \left[ \frac{1 - j\omega^2 0,00444}{\left(1 + \frac{\omega^2}{250\,000}\right)\left(1 + \frac{\omega^2}{2500}\right)\left(1 + \frac{\omega^2}{25}\right)} \right] \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im}[AB(j\omega)] =$$

$$= j8,4 \left[ \frac{\omega(\omega^2 0,000008 - 0,222)}{\left(1 + \frac{\omega^2}{250\,000}\right)\left(1 + \frac{\omega^2}{2500}\right)\left(1 + \frac{\omega^2}{25}\right)} \right]$$

La pulsazione corrispondente al punto di intersezione con l'asse reale si ottiene annullando il numeratore della parte immaginaria:

$$\omega^2 0,000008 - 0,222 = 0$$

e ciò avviene per 166,6 rad/s.

In corrispondenza del valore trovato, per l'ascissa del punto d'intersezione con l'asse reale, deve risultare:

$$\begin{aligned} 8,4 \left[ \frac{1 - \omega^2 0,00444}{\left(1 + \frac{\omega^2}{250\,000}\right)\left(1 + \frac{\omega^2}{2500}\right)\left(1 + \frac{\omega^2}{25}\right)} \right] &= \\ = \left[ \frac{-1026,7}{0,1 + 12,1 + 1111,2} \right] &= -0,91 \end{aligned}$$

In base al criterio di Nyquist si deduce che il sistema è sicuramente stabile perché il valore trovato è inferiore a -1.

### Errore di posizione

Essendo il sistema di tipo zero, in caso di retroazione proporzionale risulta:

$$A(0)k = 8,4$$

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + A(0)k} = \frac{1}{1 + 8,4} = 0,106$$

In percentuale si ha un errore di posizione pari al 10,6%.

L'impianto di automazione di un'azienda vinicola per il riempimento e la chiusura delle bottiglie prevede l'impiego di un nastro trasportatore per convogliare le bottiglie verso le stazioni dove vengono svolte tali operazioni.

Il motore in corrente continua, preposto al movimento del nastro trasportatore è inserito in un sistema di controllo ad anello chiuso e presenta le seguenti caratteristiche:

- costante di tempo elettrica 0,125 ms;
- costante di tempo meccanica 1,25 ms;
- costante di macchina 0,02 Vs/rad.

La dinamo tachimetrica ha la caratteristica riportata in FIGURA 92.

Quando il motore gira a una velocità di 100 rad/s la tensione rilevata deve valere 5 V.

Il modulo di potenza ha costante di guadagno 3,2 e costante di tempo di 12,5 ms.

Dopo avere individuato la f.d.t. dei singoli blocchi e, per il motore, calcolati la pulsazione naturale e il coefficiente di smorzamento, si richiede di:

- individuare la f.d.t. d'anello e descrivere il sistema con uno schema a blocchi;
- verificare la stabilità del sistema;
- illustrare l'utilità dell'introduzione di un regolatore proporzionale a valle del nodo di confronto e dimensionarlo in modo opportuno;
- valutare l'errore di posizione in risposta a un segnale a gradino di ampiezza unitaria.

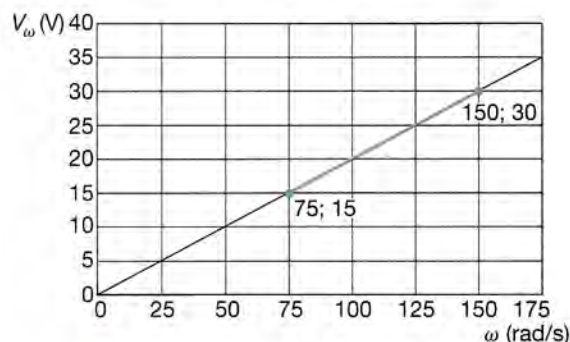


FIGURA 92

Caratteristica della dinamo tachimetrica.



**Soluzione**

Essendo  $\tau_m = 10\tau_e$ , la condizione  $\tau_m \gg 4\tau_e$  viene rispettata; pertanto la f.d.t. del motore assume la seguente forma semplificata:

$$G_m(s) = \frac{1}{C_m(1+s\tau_m)(1+s\tau_e)} = \frac{50}{(1+s0,00125)(1+s0,000125)}$$

Per la pulsazione naturale e per il coefficiente di smorzamento risulta:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\tau_e \tau_m}} = \frac{1}{\sqrt{0,00125 \cdot 0,000125}} = 2529,8 \text{ rad/s}$$

$$\xi = 0,5 \sqrt{\frac{\tau_m}{\tau_e}} = 0,5 \sqrt{\frac{0,00125}{0,000125}} = 1,58$$

La f.d.t. del modulo di potenza, essendo un blocco del primo ordine, assume la seguente forma:

$$G_{mp}(s) = \frac{3,2}{(1+s0,0125)}$$

Dalla caratteristica della dinamo tachimetrica si deduce che l'equazione della retta che individua la caratteristica della dinamo è:

$$V_\omega = \omega/5$$

Pertanto la f.d.t. della dinamo tachimetrica, blocco semplicemente proporzionale, assume la forma:

$$G_{dt}(s) = \frac{1}{5} = 0,2$$

Quando il motore gira a 100 rad/s la tensione prodotta dalla dinamo vale quindi 20 V.

Tenendo conto che alla medesima velocità la tensione inviata al nodo di confronto deve essere di 5 V, si evidenzia la necessità di interporre tra dinamo e nodo di confronto un condizionatore di segnale che riduca la tensione rilevata dalla dinamo del fattore 1/4; la f.d.t. del condizionatore deve pertanto valere:

$$G_{cs}(s) = \frac{1}{4} = 0,25$$

**F.d.t. d'anello e schema a blocchi**

Lo schema a blocchi del sistema di controllo viene riportato in FIGURA 93.

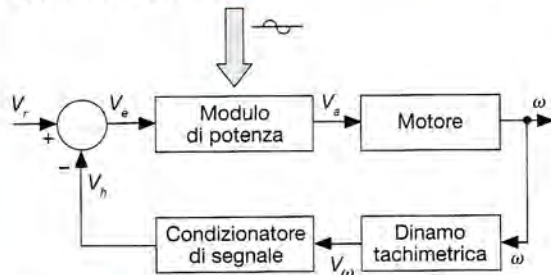


FIGURA 93  
Schema a blocchi del sistema.

Per la f.d.t. d'anello risulta

$$AB(s) = G_m(s)G_{mp}(s)G_{dt}(s)G_{cs}(s)$$

e di conseguenza

$$AB(s) = \frac{8}{(1+s0,00125)(1+s0,000125)(1+s0,0125)}$$

**Studio della stabilità**

Un modo molto rapido di studiare la stabilità del sistema è di rappresentare il diagramma delle ampiezze della f.d.t. d'anello espressa nel dominio della frequenza:

$$AB(j\omega) = \frac{8}{(1+j\omega0,00125)(1+j\omega0,000125)(1+j\omega0,0125)}$$

Essa ha costante di guadagno 8 (18,1 dB) e, in corrispondenza dei tre poli, le seguenti pulsazioni:

$$\omega_1 = 1/\tau_1 = 1/0,0125 = 80 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 1/\tau_2 = 1/0,00125 = 800 \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = 1/\tau_3 = 1/0,000125 = 8000 \text{ rad/s}$$

Il diagramma delle ampiezze viene riportato in FIGURA 94.

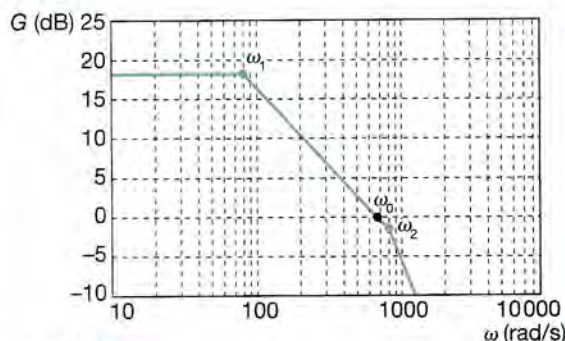


FIGURA 94  
Diagramma delle ampiezze.

Il punto di attraversamento a 0 dB avviene a una pulsazione  $\omega_0$  di circa 640 rad/s; poiché la pendenza corrispondente vale chiaramente  $-1$ , il sistema è pertanto sicuramente stabile.

Per il calcolo del margine di fase si ha dunque:

$$\varphi_1 = \arctan(\omega_0/\omega_1) = \arctan 640/80 = 83^\circ$$

$$\varphi_2 = \arctan(\omega_0/\omega_2) = \arctan 640/800 = 39^\circ$$

$$\varphi_3 = \arctan(\omega_0/\omega_3) = \arctan 640/8000 = 5^\circ$$

$$\Sigma\varphi_i = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 83^\circ + 39^\circ + 5^\circ = 127^\circ$$

$$m.d.f. = 180^\circ - \Sigma\varphi_i = 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ$$

Il margine di fase, risultando di poco superiore a  $45^\circ$ , si può considerare al limite della sufficienza.

**Dimensionamento del regolatore**

Un regolatore proporzionale può essere utilizzato per migliorare il margine di fase che si ottiene abbassando la costante di guadagno del sistema; pertanto la costante di guadagno del regolatore deve essere inferiore all'unità.



Provando con 0,5 la costante di guadagno del sistema si riduce a 4 (12 dB).

Per la f.d.t. del sistema risulta quindi:

$$AB(j\omega) = \frac{4}{(1 + j\omega 0,00125)(1 + j\omega 0,000125)(1 + j\omega 0,0125)}$$

Il diagramma delle ampiezze diventa quindi quello riportato in FIGURA 95.

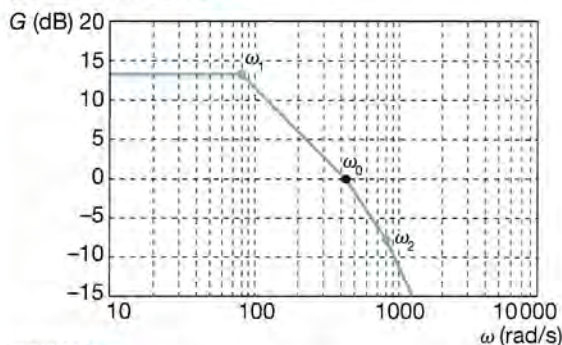


FIGURA 95

Diagramma delle ampiezze con regolatore.

Il punto di attraversamento a 0 dB avviene a una pulsazione  $\omega_0$  di circa 310 rad/s.

Per il calcolo del margine di fase si ha dunque:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \arctan(\omega_0/\omega_1) = \arctan 310/80 = 75^\circ \\ \varphi_2 &= \arctan(\omega_0/\omega_2) = \arctan 310/800 = 21^\circ \\ \varphi_3 &= \arctan(\omega_0/\omega_3) = \arctan 310/8000 = 2^\circ \\ \Sigma\varphi_i &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 75^\circ + 21^\circ + 2^\circ = 98^\circ \\ m.d.f. &= 180^\circ - \Sigma\varphi_i = 180^\circ - 98^\circ = 82^\circ\end{aligned}$$

Il valore risulta evidentemente migliorato.

### Errore di posizione

Essendo il sistema di tipo zero, in caso di retroazione proporzionale risulta

$$A(0)k = 8$$

e quindi

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + A(0)k} = \frac{1}{1 + 8} = 0,11$$

In percentuale si ha un errore di posizione pari all'11%.

In uno stabilimento di prodotti dolciari si utilizza un sistema di automazione costituito da:

- un forno (che deve fornire una temperatura costante di 200 °C);
- un nastro trasportatore (sul quale si chiudono le porte del forno);
- un dispositivo che automaticamente deposita le merendine sul nastro e le preleva al termine della cottura.

Si hanno a disposizione i seguenti dati che ne consentono lo studio sistemico:

- la f.d.t. del forno è tipica di un sistema del primo ordine con costante di tempo 500 s e costante di guadagno 2 (espressa come rapporto tra temperatura del forno e portata di combustibile immessa nel bruciatore);
- un dispositivo di comando che regola l'immissione del combustibile nel bruciatore (tipicamente una elettrovalvola) deve essere rappresentato con un sistema di ordine zero avente costante di guadagno pari a 7,5 (espressa come rapporto tra portata di combustibile immessa nel bruciatore e tensione uscente dal dispositivo regolatore situato immediatamente a valle del nodo di confronto);
- il dispositivo regolatore ha una caratteristica proporzionale con costante di guadagno 10.

Dopo aver descritto mediante uno schema a blocchi il sistema di controllo della temperatura all'interno del forno (tenendo conto anche della presenza di un disturbo sull'uscita che simula eventi non desidera-

ti come l'apertura del forno o l'introduzione di corpi freddi) si richiede di:

- determinare la f.d.t. del blocco di retroazione (costituito da termocoppia e condizionatore di segnale), sapendo che la termocoppia ha costante di guadagno 40  $\mu\text{V}/^\circ\text{C}$  e costante di tempo 50 s e che la tensione fornita dal circuito di condizionamento vale 10 V a 200°C di temperatura;
- individuare la f.d.t. del sistema nel suo complesso;
- analizzare la stabilità del sistema utilizzando il criterio di Bode.

### Soluzione

Il sistema proposto può essere rappresentato con lo schema a blocchi riportato in FIGURA 96.

Sulla linea di andata sono presenti nell'ordine il regolatore, il dispositivo di comando e il forno.

Il *regolatore* manipola il segnale errore in modo da ottenere le prestazioni desiderate in termini di velocità, precisione e stabilità.

Il *dispositivo di comando* è un attuatore costituito da una elettrovalvola che modula la sua apertura in funzione della tensione di pilotaggio  $V$ , così da ottenere una portata di combustibile  $p_c$  proporzionale alla tensione stessa.

Il *forno* è l'impianto da controllare, costituito dall'insieme del bruciatore (in cui viene immesso il combustibile) e del forno vero e proprio.



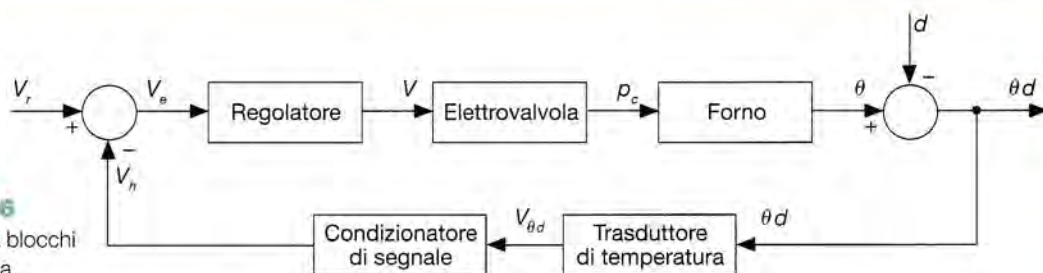


FIGURA 96  
Schema a blocchi  
del sistema.

Sulla linea di ritorno sono presenti nell'ordine il trasduttore (*termocoppia*) e il condizionatore di segnale.

Quest'ultimo ha la funzione di adattare i valori di tensione generati dalla termocoppia ai valori di tensione accettabili dal circuito di regolazione.

Il segnale che simula il disturbo  $d$  viene posto, come richiesto, sull'uscita; il segnale  $\theta$  rappresenta la temperatura all'interno del forno in assenza di disturbi, il segnale  $\theta d$  la temperatura del forno in presenza di eventuali disturbi.

#### F.d.t. del blocco di retroazione

Avendo la termocoppia costante di guadagno  $40 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$  e un polo con costante di tempo  $50 \text{ s}$ , la sua f.d.t. è tipica di un sistema del primo ordine e viene espressa dalla seguente relazione:

$$G_{tc}(s) = \frac{40 \cdot 10^{-6}}{(1 + s50)}$$

La termocoppia, alla temperatura di  $200^\circ\text{C}$ , fornisce la tensione

$$V_{\theta d} = 40 \cdot 10^{-6} \cdot 200 = 0,008 \text{ V} = 8 \text{ mV}$$

Poiché si richiede che la tensione all'uscita del regolatore sia di  $10 \text{ V}$  quando la temperatura vale  $200^\circ\text{C}$ , la costante di guadagno del condizionatore di segnale vale:

$$G_{cs}(s) = \frac{10\,000}{8} = 1250$$

La f.d.t. del blocco di retroazione assume quindi la seguente forma:

$$B(s) = G_{cs}(s)G_{tc}(s) = 1250 \frac{40 \cdot 10^{-6}}{(1 + s50)} = \frac{0,05}{(1 + s50)}$$

#### F.d.t. del sistema

In relazione ai dati a disposizione le f.d.t. dei blocchi del ramo di andata forno, elettrovalvola e regolatore assumono rispettivamente le espressioni:

$$G_r(s) = \frac{2}{(1 + s500)}$$

$$G_{ev}(s) = 7,5$$

$$G_f(s) = 10$$

La f.d.t. del blocco di andata assume pertanto la seguente espressione:

$$A(s) = G_r(s)G_{ev}(s)G_f(s) = \frac{150}{(1 + s500)}$$

La f.d.t. ad anello aperto risulta pertanto dalla relazione:

$$\begin{aligned} AB(s) &= A(s)B(s) = \frac{150}{(1 + s500)} \cdot \frac{0,05}{(1 + s50)} \\ &= \frac{7,5}{(1 + s500)(1 + s50)} \end{aligned}$$

La f.d.t. complessiva del sistema retroazionato è quindi la seguente:

$$G(s) = \frac{A(s)}{1 + AB(s)} = \frac{\frac{150}{1 + s500}}{1 + \frac{7,5}{(1 + s500)(1 + s50)}}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$G(s) = \frac{\frac{150}{(1 + s500)}}{\frac{(1 + s500)(1 + s150) + 7,5}{(1 + s500)(1 + s50)}}$$

$$G(s) = \frac{150(1 + s500)(1 + s50)}{(1 + s500)[(1 + s500)(1 + s50) + 7,5]}$$

$$G(s) = \frac{150(1 + s50)}{1 + s50 + s500 + s^2 25\,000 + 7,5}$$

$$G(s) = \frac{150(1 + s50)}{25\,000s^2 + 550s + 8,5}$$

Risolviendo l'equazione al denominatore si hanno le due soluzioni seguenti:

$$s_1 = -0,011 + j\,0,015$$

$$s_2 = -0,011 - j\,0,015$$

Si ottiene quindi:

$$G(s) = \frac{150(1 + s50)}{(s + 0,011 - j\,0,015)(s + 0,011 + j\,0,015)}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per  $50$  si esplicita la  $s$  anche al numeratore rendendo omogenea l'espressione; in conclusione risulta:

$$G(s) = \frac{7\,500(s + 0,02)}{(s + 0,011 - j\,0,015)(s + 0,011 + j\,0,015)}$$

#### Stabilità

Per analizzare la stabilità del sistema si utilizza il criterio di Bode.

Si deve pertanto tenere conto dei diagrammi di risposta in frequenza della f.d.t. ad anello aperto che è la seguente:

$$AB(j\omega) = \frac{7,5}{(1 + j\omega 500)(1 + j\omega 50)}$$

In corrispondenza dei due poli si hanno le pulsazioni:

$$\omega_1 = 1/\tau_1 = 1/500 = 0,02 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 1/\tau_2 = 1/50 = 0,02 \text{ rad/s}$$

Per la costante di guadagno dell'anello espressa in dB risulta:

$$A(0)B(0) = 20\log 7,5 = 17,5 \text{ dB}$$

Il diagramma delle ampiezze viene riportato in FIGURA 97.

Si evidenzia il fatto che il punto di attraversamento a 0 dB avviene a circa 0,015 rad/s e con pendenza -1; il sistema è pertanto sicuramente stabile.

Per il calcolo del margine di fase si ha dunque:

$$\varphi_1 = \arctan(\omega_0/\omega_1) = \arctan 0,015/0,02 = 37^\circ$$

$$\varphi_2 = \arctan(\omega_0/\omega_2) = \arctan 0,015/0,002 = 82^\circ$$

$$\Sigma\varphi_i = \varphi_1 + \varphi_2 = 37^\circ + 82^\circ = 119^\circ$$

$$m.d.f. = 180^\circ - \Sigma\varphi_i = 180^\circ - 119^\circ = 61^\circ$$

Il margine di fase, risultando superiore a  $45^\circ$ , si può ritenere sufficiente.

FIGURA 97  
Diagramma  
delle  
ampiezze.

