TRASFORMATA DI LAPLACE

La Trasformata di Laplace è un operatore funzionale che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra una funzione di variabile reale (tempo *t*), definita per $t \geq 0$, e una funzione di variabile complessa $s = \sigma + j\omega$.

Per definizione

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$

Il risultato della trasformazione della funzione *f(t)* è una funzione della variabile *s*.

La potenza dell'operatore consiste nella sua capacità di trasformare relazioni differenziali, integrali o integro-differenziali, mediante le quali si descrive il comportamento di sistemi dinamici, in relazioni di tipo algebrico, più facili da manipolare e risolvere.

Dunque, vediamo subito questa capacità di trasformazione:

$$\mathcal{L}[\frac{d}{dt} f(t)] = s\, F(s) - f(0^-)$$

cioè, la trasformata della derivata di una funzione è uguale alla trasformata della funzione moltiplicata per la variabile *s*, alla quale bisogna sottrarre il valore della funzione all'istante iniziale $t=0$. $f(0^-)$ esplicita il fatto che, se c'è una discontinuità in $t=0$, si intende il valore della funzione immediatamente prima di tale istante.

Analogamente

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)\, d\tau] = \frac{F(s)}{s}$$

cioè, la trasformata dell'integrale di una funzione a partire all'istante iniziale $t=0$ è uguale alla trasformata della funzione divisa per la variabile *s*.

Tralascio le dimostrazioni, che si trovano un po' ovunque: non è necessario, né utile, interrompere il discorso solo per cavarsi lo sfizio di capire subito <u>il perché</u> delle cose, rischiando però di smarrire la comprensione della sua <u>utilità</u> (questo piacere va perciò lasciato a quando il quadro delle cose sarà chiaro).

UTILITÀ DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

L'utilità della Trasformata di Laplace nella soluzione di equazioni differenziali, integro-differenziali, sistemi di tali equazioni e nel calcolo di funzioni integrali la lascio alla numerosa documentazione reperibile facilmente nel web e all'esempio seguente relativo a tale argomento [v. Es. Applicazione della trasformata alle equazioni differenziali; comunque, in prima lettura è buona cosa ignorare ogni rimando o collegamento]. Quindi, mi soffermerò unicamente sulla sua utilità nella soluzione delle reti elettriche dinamiche.

Le relazioni costitutive (ovvero i legami tensione-corrente) di un condensatore e di un induttore, nel dominio del tempo, sono di tipo differenziale o integrale, a seconda della variabile considerata indipendente. Cioè:

- per l'induttore $\quad v = L\dfrac{di}{dt} \qquad i = i_0 + \dfrac{1}{L}\int_0^t v\,dt$
- per il condensatore $\quad i = C\dfrac{dv}{dt} \qquad v = v_0 + \dfrac{1}{C}\int_0^t i\,dt$

L'applicazione della trasformata di Laplace alle relazioni differenziale e integrale, le modifica, nel dominio della frequenza, in forme algebriche equivalenti, che comprendono anche l'informazione sullo stato iniziale

- per l'induttore $\quad V(s) = sL\,I(s) - Li_0 \qquad I(s) = \dfrac{1}{sL}V(s) + \dfrac{i_0}{s}$
- per il condensatore $\quad I(s) = sC\,V(s) - Cv_0 \qquad V(s) = \dfrac{1}{sC}I(s) + \dfrac{v_0}{s}$

Le nuove relazioni, ottenute dalla trasformazione delle relazioni differenziale e integrale, sono interpretabili con circuiti equivalenti, di tipo serie o parallelo, che evidenziano lo stato iniziale mediante opportuni generatori (v. più avanti TRASFORMATE DI BIPOLI ELEMENTARI).

Si consideri, ora, una rete elettrica, contenente elementi dinamici, che, ad un certo istante (poniamo t=0), sia sollecitata da un evento (ad es. l'apertura o chiusura di un interruttore, l'applicazione o esclusione di un generatore…) e si voglia determinare l'evoluzione del sistema a partire dall'istante cruciale in cui si è verificata la causa che modificherà lo stato precedente e che, dopo un intervallo di tempo più o meno lungo, lo porterà verso una nuova situazione di regime.

Il comportamento della rete elettrica sarà descritto da un insieme di relazioni, alcune di tipo differenziale o integrale, che, combinate tra loro, conducono ad una equazione differenziale o integro-differenziale, la quale, tenendo conto dello stato iniziale del sistema (cioè dell'energia immagazzinata in quel preciso istante iniziale, istante zero), lega la grandezza che interessa (corrente o tensione) alla causa o alle cause della sua evoluzione [v. la prima pagina di ES2 ed ES3 relativi a reti dinamiche del secondo ordine].

La soluzione dell'equazione differenziale fornisce l'evoluzione di tale grandezza in funzione del tempo.

L'applicazione della Trasformata di Laplace alla relazione differenziale o integro-differenziale trasforma il problema in uno più semplice di tipo algebrico, nel dominio della frequenza.

Alla soluzione trovata nel dominio della frequenza corrisponde la soluzione voluta nel dominio del tempo, ricavabile, quasi immediatamente, tramite l'operazione di antitrasformazione [v. il seguito degli es. citati].

Senza passare attraverso la scrittura delle relazioni nel dominio del tempo, è possibile risolvere il problema, in modo più semplice e diretto, trasformando immediatamente la rete assegnata nel dominio di Laplace (trasformazione di Laplace dei generatori e circuito equivalente completo dei componenti dinamici, che includono le condizioni iniziali mediante opportuni generatori).

Quindi si applicano le USUALI TECNICHE DI RISOLUZIONE CIRCUITALE (come nell'es. 1 ed es. 3 pag. 4), evitando di risolvere un sistema costituito da un insieme di equazioni, che coinvolgono tutte le incognite della rete .

Le usuali tecniche di soluzione delle reti lineari in continua consentono di applicare LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI per valutare separatamente la RISPOSTA LIBERA e quella FORZATA.

Si può effettuare la TRASFORMAZIONE DEI GENERATORI (da serie a parallelo e viceversa), si possono comporre IMPEDENZE SERIE o PARALLELO, applicare i PARTITORI DI TENSIONE e CORRENTE, i TEOREMI DI THEVENIN E NORTON , ecc.

Alla fine, trovata la soluzione nel dominio della frequenza, si determina la soluzione nel dominio del tempo, mediante l'operazione di antitrasformazione, in modo analogo a quanto viene effettuato per la soluzione delle reti elettriche in regime sinusoidale, attraverso il cd. metodo dei fasori o Trasformata di Steinmetz.

APPLICAZIONE della trasformata di Laplace ALLE RETI ELETTRICHE

Consideriamo una rete elettrica costituita da componenti lineari ed invarianti.

Questa è governata da relazioni lineari invarianti: relazioni di Kirchhoff e relazioni costitutive. A tutte le variabili e alle relazioni corrispondenti si può applicare la Trasformata di Laplace, ottenendo così la rete trasformata (o rete nel dominio della frequenza).

Tensioni, correnti ed altre variabili di rete, quali funzioni del tempo, sono trasformabili secondo Laplace.

Le trasformate si indicano con la simbologia V(s), I(s), ecc.

Le dimensioni fisiche di V(s) sono [Vs] (voltxsecondo), le dimensioni del flusso concatenato.

Le dimensioni fisiche di I(s) sono [As] (amperexsecondo), le dimensioni della carica elettrica.

Per la linearità della trasformazione, le relazioni di Kirchhoff continuano a valere nella stessa forma sulla rete trasformata. Ciò assicura la validità delle formule di composizione degli elementi di rete e di tutti i teoremi che si fondano sulla linearità.

Le trasformate delle relazioni costitutive assumono i nomi di impedenze generalizzate e ammettenze generalizzate (o simboliche o anche operatoriali).

Osservazione importante. La linearità della trasformata conserva le relazioni formali solo tra variabili legate da relazioni lineari. Le funzioni quadratiche, come le potenze, energie, forze, non hanno un corrispettivo nel dominio di Laplace, ma sono valutabili unicamente dalle grandezze nel dominio del tempo.

- Per la linearità della trasformazione, la relazione costitutiva del resistore $v = R\,i$ si traduce nella identica relazione nelle variabili trasformate

$$V(s) = R\,I(s)$$

- La relazione in forma differenziale dell'induttore $v = L\dfrac{di}{dt}$ per la regola di derivazione diventa

$$V(s) = sL\,I(s) - Li_0 = sL\,I(s) - \psi_0$$

dove i_0 e $\psi_0 = Li_0$ sono rispettivamente la corrente ed il flusso all'istante iniziale. Nella relazione trasformata appaiono esplicitamente le condizioni iniziali (o, meglio, lo stato iniziale) dell'induttore.

La relazione in forma integrale $i = \Gamma\int_0^t v\,dt + i_0$ per la regola di integrazione diventa

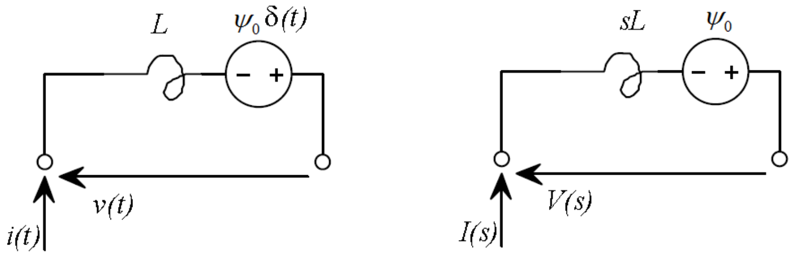
$$I(s) = \frac{\Gamma}{s}V(s) + \frac{i_0}{s} = \frac{1}{sL}V(s) + \frac{i_0}{s}$$

La relazione in forma differenziale è la relazione in forma integrale risolta nella corrente.

Le relazioni differenziale e integrale dell'induttore sono trasformate in due relazioni algebriche equivalenti, comprendenti anche l'informazione sullo stato iniziale.

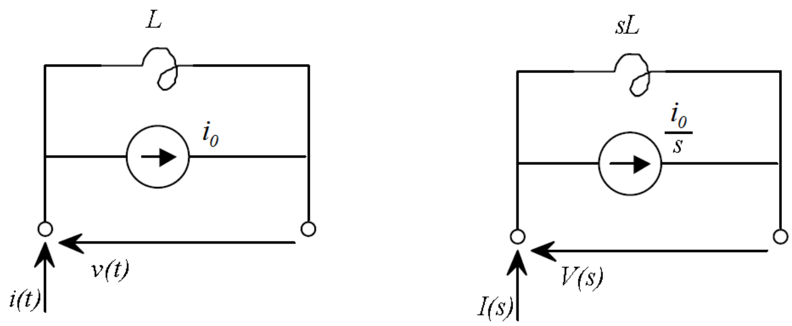
La relazione differenziale è interpretabile circuitalmente come la serie di una impedenza sL e di un generatore di tensione impulsivo (costante nel dominio di Laplace) di ampiezza ψ_0.

Ciò dà luogo al seguente circuito equivalente dell'induttore carico, visualizzato nel dominio del tempo e delle frequenze:



Equivalente serie dell'induttore carico

Analogamente la relazione integrale è interpretabile come il parallelo della stessa impedenza con un generatore di corrente costante di ampiezza i_0.



Equivalente parallelo dell'induttore carico.

- La relazione in forma differenziale del condensatore $i = C\dfrac{dv}{dt}$ per la regola di derivazione diventa

$$I(s) = sC\,V(s) - Cv_0 = sL\,I(s) - q_0$$

dove v_0 e $q_0 = Cv_0$ sono rispettivamente la tensione ed la carica all'istante iniziale. Nella relazione trasformata appaiono esplicitamente le condizioni iniziali (o, meglio, lo stato iniziale) dell'induttore.

La relazione in forma integrale $v = S\int_0^t i\,dt + v_0$ per la regola di integrazione diventa

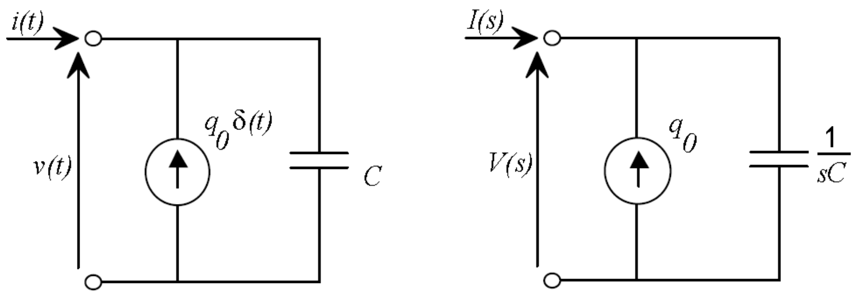
$$V(s) = \frac{S}{s}I(s) + \frac{v_0}{s} = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v_0}{s}$$

La relazione in forma differenziale è la relazione in forma integrale risolta nella tensione.

Le relazioni differenziale e integrale dell'induttore sono trasformate in due relazioni algebriche equivalenti, comprendenti anche l'informazione sullo stato iniziale.

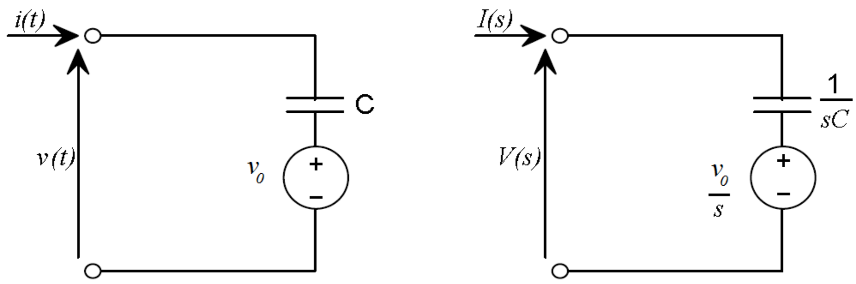
La relazione differenziale è interpretabile circuitalmente come il parallelo di una impedenza 1/sC e di un generatore di corrente impulsivo (costante nel dominio di Laplace) di ampiezza q_0.

Ciò dà luogo al seguente circuito equivalente del condensatore carico, visualizzato nel dominio del tempo e delle frequenze:



Equivalente parallelo del condensatore carico

Analogamente la relazione integrale è interpretabile come la serie della stessa impedenza con un generatore di tensione costante di ampiezza v_0.



Equivalente serie del condensatore carico.