CAPITOLO 4 - TRASFORMATA DI LAPLACE

INTRODUZIONE

La trasformata di Laplace è un metodo matematico molto potente applicato, di regola, a sistemi dinamici lineari invarianti.

La caratteristica fondamentale del metodo consiste nel trattare in modo algebrico gli operatori di derivazione e di integrazione nel tempo.

L'analisi che si avvale della trasformata di Laplace viene anche chiamata analisi nel dominio delle frequenze (o brevemente analisi in frequenza).

La trasformata di Laplace ricorre diffusamente nella Teoria dei Sistemi ed in Automatica, principalmente attraverso il concetto di funzione di trasferimento, fondamentale per l'analisi classica della dinamica e stabilità dei sistemi.

Il metodo è particolarmente adatto a trattare discontinuità e andamenti impulsivi. Può essere efficacemente utilizzato nella risoluzione di regime e in transitorio delle reti lineari invarianti.

Nel seguito si introdurranno solamente le nozioni direttamente utili per le più usuali applicazioni alle reti elettriche. Si introdurranno anche in questo ambito le nozioni di funzioni generalizzate e di funzioni cisoidali, argomenti in linea di principio indipendenti dalla trasformata di Laplace.

DISCONTINUITÀ E FUNZIONI GENERALIZZATE

Per rappresentare e trattare analiticamente andamenti discontinui si introducono alcune funzioni particolari. Queste non fanno parte della teoria della trasformata di Laplace, ma sono particolarmente utili in questo ambito, per le proprietà e le potenzialità di quest'ultima.

Le definizioni che seguono sono riferite all'origine dei tempi (t_0=0) come istante caratteristico. La traslazione nel tempo consente di generalizzarle ad istanti caratteristici generici.

Gradino unitario

Si definisce gradino unitario nell'origine la funzione del tempo $u(t)$ nulla per t<0, uguale ad 1 per t>0 ed indeterminata per t =0.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & per\ t > 0 \\ 0 & per\ t < 0 \end{cases}$$

Il gradino unitario all'istante generico t_0 si indica con $u(t - t_0)$.

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 & per\ t > t_0 \\ 0 & per\ t < t_0 \end{cases}$$

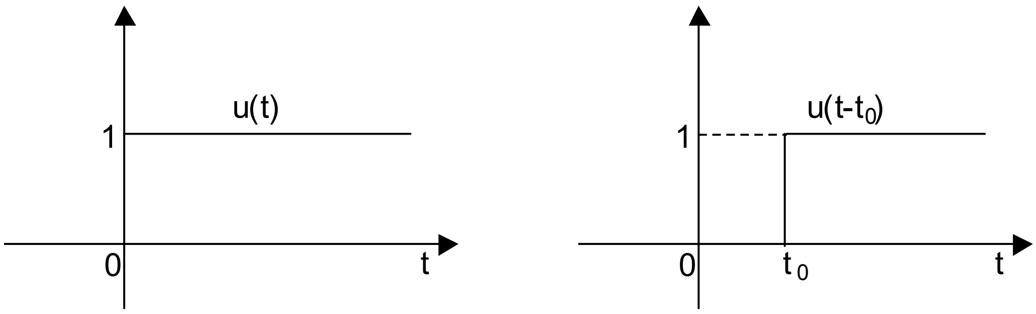

Fig. 4.1. Gradino unitario.

Rampa unitaria

La rampa unitaria nell'origine è l'integrale del gradino unitario nell'origine.

$$rampa(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t)dt = \begin{cases} t & per\ t \geq 0 \\ 0 & per\ t < 0 \end{cases}$$

La rampa unitaria all'istante generico t_0 si indica con $rampa(t - t_0)$.

$$rampa(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t} u(t - t_0)dt = \begin{cases} t - t_0 & per\ t \geq t_0 \\ 0 & per\ t < t_0 \end{cases}$$

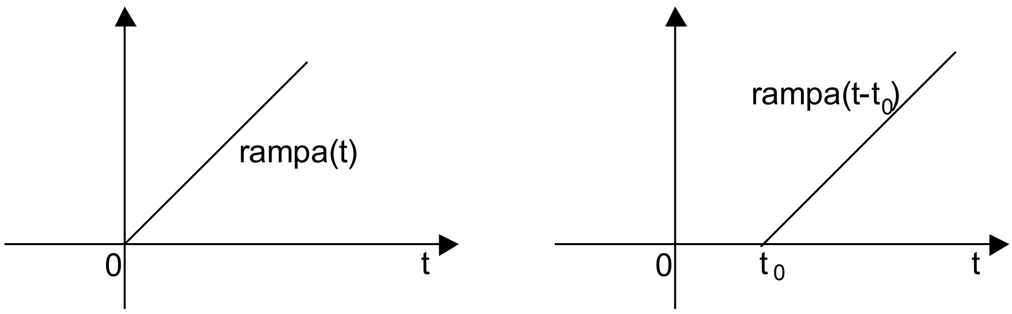

Fig. 4.2. Rampa unitaria.

Mediante ulteriori integrazioni si ottengono altre funzioni sempre nulle per $t<0$ o $t<t_0$

Impulso unitario

L'impulso unitario o funzione *Delta di Dirac* si definisce formalmente come la derivata del gradino unitario.

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \qquad (4.1)$$

o come la 'funzione' tale che, integrata, ricostruisce il gradino unitario.

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt \qquad (4.2)$$

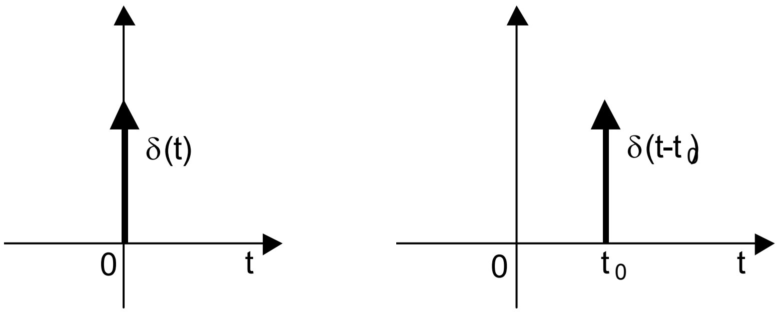

Fig. 4.3. Impulso unitario.

Dal punto di vista matematico, il gradino *u(t)* ha derivata nulla ovunque, tranne che nell'origine, in cui non è derivabile. Pertanto, come funzione, l'impulso nell'origine è nullo in tutti gli istanti, tranne che per t=0 in cui non è definito.

L'impulso va considerato matematicamente una *funzione generalizzata* o *distribuzione*. Nella teoria delle distribuzioni, generalizzazioni delle funzioni ordinarie, l'operazione di derivazione è sempre definita, anche nelle discontinuità. Le distribuzioni sono sempre ovunque illimitatamente derivabili e le loro derivate sono ancora distribuzioni.

Più intuitivamente, l'impulso è rappresentabile da un andamento diverso da zero in un intervallo molto piccolo e di ampiezza molto elevata, tale che la propria area sia unitaria. Il limite, facendo tendere a zero l'intervallo ed all'infinito l'ampiezza con area sempre unitaria, definisce l'impulso unitario.

In sintesi, l'impulso generico $A\delta(t-t_0)$ è caratterizzato dall'istante di tempo t_0 in cui si presenta e dalla propria area A.

L'impulso unitario presenta la seguente importante proprietà (detta a volte proprietà di campionamento). Considerato l'istante t_0 all'interno di un intervallo a-b, vale la

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \qquad (4.3)$$

Impulsi di ordine superiore

Derivando (nel senso delle distribuzioni) ulteriormente l'impulso di Dirac (impulso del primo ordine) si ottengono impulsi di ordine superiore.

La derivata n-esima del gradino unitario definisce l'impulso di ordine n:

$$\delta^{(n)}(t) = \frac{d^n u(t)}{dt^n}$$

TRASFORMATA DI LAPLACE

Si introducono nel seguito le definizioni formali e le proprietà principali della trasformata, limitandosi a quanto è di interesse per le reti elettriche, senza approfondirne gli aspetti matematici né i limiti di applicabilità, in quanto ininfluenti per le applicazioni proposte.

La trasformata di Laplace è applicabile anche alle distribuzioni (funzioni generalizzate). In particolare le funzioni impulsive (impulsi del primo ordine e di ordini superiori) possiedono trasformate particolarmente significative.

La trasformata di Laplace di una funzione del tempo *f*(*t*) è per definizione la seguente funzione della variabile complessa $s = \sigma + j\omega$:

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt \qquad (4.4)$$

e si indica con la simbologia $F(s) = \mathbf{L}[f(t)]$.

Si noti che l'integrale di definizione opera da un istante iniziale, assunto di regola come istante zero, in avanti. Quindi la trasformata non dipende dai valori della funzione prima dell'istante zero.

Segue che funzioni uguali tra loro dall'istante zero (compreso) in poi, sono indistinguibili nel dominio di Laplace.

Nella (4.4) e in molte formule che seguiranno il simbolo 0^- indica il limite sinistro dell'istante iniziale. In tal modo si comprendono anche le eventuali discontinuità di tipo impulsivo presenti nella funzione (generalizzata) all'istante iniziale.

Dalla formula (4.4) si nota che la variabile di Laplace *s* è dimensionalmente l'inverso di un tempo, cioè una frequenza o pulsazione. La relazione tra la variabile di Laplace e le usuali pulsazioni è, in realtà, ancora più stretta, come si vedrà in seguito. Da ciò il nome di analisi in frequenza alle formule e ai metodi che si basano sulla trasformata di Laplace.

La trasformata *F*(*s*) di una variabile *f*(*t*) ha le dimensioni fisiche della *f*(*t*) moltiplicate per un tempo.

L'antitrasformata si indica con la simbologia $f(t) = \mathbf{L}^{-1}[F(s)]$.

La formula generale di antitrasformazione ha interesse puramente teorico:

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

La definizione data implica che sussiste corrispondenza biunivoca tra funzioni del tempo e corrispondenti trasformate solo per le funzioni del tempo nulle per tempi negativi.

Proprietà principali della trasformata di Laplace

Linearità

La (4.4) e le proprietà dell'integrale assicurano la linearità della trasformazione. Segue che la trasformata di una combinazione lineare di funzioni del tempo è uguale alla stessa combinazione lineare delle rispettive trasformate:

$$\mathbf{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \ldots + c_n f_n(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) + \ldots + c_n F_n(s)$$

Ad esempio: la somma di funzioni ha come trasformata la somma delle trasformate; una costante moltiplicativa passa inalterata attraverso la trasformazione.

Si ricordano ora le principali proprietà della trasformata. Le dimostrazioni, non riportate, si ottengono facilmente dalla definizione (4.4).

Derivazione nel tempo

$$\mathbf{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-) \qquad (4.5)$$

Questa è la relazione fondamentale che giustifica l'utilità della trasformazione, in quanto trasforma relazioni differenziali in algebriche.

Integrazione nel tempo

$$\mathbf{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

$$\mathbf{L}\left[\int_0^t f(t)dt + f_0\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f_0}{s} \qquad (4.6)$$

E' l'inverso della proprietà (4.5). Si notino nella (4.5) e (4.6) le costanti aggiuntive legate ai valori iniziali. La congruenza di questi si può riconoscere applicando la (4.5) al risultato (4.6).

Derivazione di ordine generico

Applicando iterativamente la (4.5) si ottiene la trasformata della derivata *n*-esima

$$\mathbf{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2}\frac{df(0^-)}{dt} - s^{n-3}\frac{d^2 f(0^-)}{dt^2} - \ldots - \frac{d^{n-1} f(0^-)}{dt^{n-1}} =$$
$$= s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}\frac{d^{k-1} f(0^-)}{dt^{k-1}} \qquad (4.7)$$

Traslazione nel tempo

$$\mathbf{L}\left[f(t-t_0)\right] = e^{-t_0 s}F(s) \qquad (4.8)$$

La (4.8) è valida per funzioni tali che $f(t)=0$ per $t<0$, quindi, traslando, $f(t-t_0)=0$ per $t<t_0$.

Traslazione nelle frequenze

$$\mathbf{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a) \qquad (4.9)$$

Limiti iniziale e finale

Se i limiti indicati esistono (attenzione, vi sono importanti eccezioni), valgono le

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s) \qquad (4.10)$$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s) \qquad (4.11)$$

Tabelle di trasformate comuni

Come detto, la trasformata opera su $t \geq 0$. La tabella si riferisce quindi, indifferentemente, alle funzioni indicate e alle stesse moltiplicate per il gradino unitario nell'origine (che annulla tutti i valori per tempi negativi).

Le funzioni sono indicate di ampiezza unitaria. Per la linearità, è immediato considerare l'eventuale costante moltiplicativa.

Trasformate di funzioni

f(t) ***f(t)u(t)***	***F(s)***
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
t^n (n intero positivo)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$t^n e^{at}$ (n intero positivo)	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\mathrm{sen}\, \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$\mathrm{senh}\, \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$

Trasformate di distribuzioni

f(t)	*F(s)*
$\delta(t)$	1
$\delta^{(n)}(t)$	s^{n-1}

Le tabelle date e le proprietà della trasformata consentono di ottenere molte altre corrispondenze.

La formula (4.8) di traslazione nel tempo consente la generalizzazione ad istanti generici delle funzioni in tabella. Si riportano alcuni risultati significativi.

Trasformate di traslazioni nel tempo

f(t)	*F(s)*
$\delta(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}$
$\delta^{(n)}(t-t_0)$	$s^{n-1}\, e^{-t_0 s}$
$u(t-t_0)$	$\dfrac{e^{-t_0 s}}{s}$
$\cos(\omega t+\varphi)\; u(t+\dfrac{\varphi}{\omega})$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}\, e^{\frac{\varphi}{\omega}s}$
$\mathrm{sen}(\omega t+\varphi)\; u(t+\dfrac{\varphi}{\omega})$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\, e^{\frac{\varphi}{\omega}s}$

Come detto, le trasformate di una funzione o della stessa moltiplicata per il gradino unitario coincidono, in quanto le funzioni coincidono sul semiasse positivo dei tempi. Ciò non è più vero per le loro derivate: esse possono differire per l'eventuale discontinuità al tempo zero. Per comprendere come operare e verificare la proprietà di derivazione (4.5), si considerino seguenti esempi.

Esempio 1.

Sia $f(t)=\cos\omega t$ per $-\infty < t < +\infty$. Notare che $f(0^-)=1$

Sappiamo che $\dfrac{d}{dt}\left(\cos\omega t\right) = -\omega \,\mathrm{sen}\,\omega t$

Trasformati ambo i membri della uguaglianza, per la (4.5) si ha

$$s\mathbf{L}\left[\cos\omega t\right]-1=-\omega\mathbf{L}\left[sen\omega t\right]$$

La sostituzione con le trasformate di Tabella verifica l'uguaglianza.

Esempio 2.

Sia $f(t)=u(t)\cos\omega t$. Notare che $f(0^-)=0$

La derivazione deve tenere conto della discontinuità al tempo zero. Infatti, con le regole di derivazione del prodotto e ricordate le (4.1) e (4.3), si ottiene:

$$\frac{d}{dt}\left[u(t)\cos\omega t\right] = \delta(t)\cos\omega t - \omega u(t)\,\mathrm{sen}\,\omega t = \delta(t) - \omega u(t)\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

Trasformati ambo i membri della uguaglianza, per la (4.5) si ha

$$s\mathbf{L}\left[\cos\omega t\right] = 1 - \omega\mathbf{L}\left[sen\omega t\right]$$

La sostituzione con le trasformate di Tabella verifica l'uguaglianza.

Trasformata di Laplace ed equazioni differenziali

Si illustra in modo diretto con esempi la relazione tra equazioni differenziali ed espressioni trasformate.

Esempio 1.

Sia data la equazione differenziale nella funzione incognita $y(t)$:

$$\frac{d^3y}{dt^3} + a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = f(t)$$

E' noto che per la integrazione di una equazione differenziale è richiesta la conoscenza delle condizioni iniziali. Nel caso specifico devono essere dati i valori all'istante zero dell'incognita e delle sue derivate fino al secondo ordine:

$$y(0) = y_0 \quad \frac{dy(0)}{dt} = y_0' \quad \frac{d^2y(0)}{dt^2} = y_0''$$

Si trasformano ambo i termini della uguaglianza e si sfruttano le regole di derivazione (4.5), (4.7):

$$s^3Y(s) - s^2y_0 - sy_0' - y_0'' + s^2aY(s) - say_0 - ay_0' + sbY(s) - by_0 + cY(s) = F(s)$$

Risolvendo nella variabile incognita in funzione della forzante e delle condizioni iniziali si ottiene la espressione risolvente da antitrasformare

$$Y(s) = \frac{F(s) + (s^2 + sa + b)y_0 + (s+a)y_0' + y_0''}{s^3 + s^2a + sb + c}$$

Esempio 2.

Sia data la relazione tra variabili trasformate

$$Y(s) = \frac{sc + e}{s^2 + sa + b}F(s)$$

Si moltiplicano ambo i termini per il denominatore. Si ottiene

$$s^2Y(s) + saY(s) + bY(s) = scF(s) + eF(s)$$

Si antitrasforma tenendo presente la proprietà (4.5) di derivazione

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = c\frac{df(t)}{dt} + ef(t)$$

Si noti dagli esempi che la sostituzione formale $\frac{d}{dt} = s$ consente rapidamente la trasformazione e la antitrasformazione, purché le condizioni iniziali siano tutte nulle (o a meno delle condizioni iniziali).

APPLICAZIONE ALLE RETI ELETTRICHE

Consideriamo una rete elettrica costituita da componenti lineari ed invarianti. Questa è governata da relazioni lineari invarianti: relazioni di Kirchhoff e relazioni costitutive. A tutte le variabili e alle relazioni corrispondenti si può applicare la Trasformata di Laplace, ottenendo così la rete trasformata (o rete nel dominio della frequenza).

Tensioni, correnti ed altre variabili di rete, quali funzioni del tempo, sono trasformabili secondo Laplace. Le trasformate si indicano con la simbologia $V(s)$, $I(s)$, ecc.

Le dimensioni fisiche di $V(s)$ sono $[Vs]$ (volt×secondo), le dimensioni del flusso concatenato.

Le dimensioni fisiche di $I(s)$ sono $[As]$ (ampere×secondo), le dimensioni della carica elettrica.

Per la linearità della trasformazione, le relazioni di Kirchhoff continuano a valere nella stessa forma sulla rete trasformata. Ciò assicura la validità delle formule di composizione degli elementi di rete e di tutti i teoremi che si fondano sulla linearità.

Le trasformate delle relazioni costitutive assumono i nomi di impedenze generalizzate e ammettenze generalizzate (o simboliche o anche operatoriali).

Osservazione importante. La linearità della trasformata conserva le relazioni formali solo tra variabili legate da relazioni lineari. Le funzioni quadratiche, come le potenze, energie, forze, non hanno un corrispettivo nel dominio di Laplace, ma sono valutabili unicamente dalle grandezze nel dominio del tempo.

TRASFORMATE DI BIPOLI E MULTIPORTA ELEMENTARI

Variabili o parametri in forma vettoriale o genericamente matriciale sono trasformati in vettori e matrici corrispondenti di dimensioni invariate: ogni termine della matrice trasformata è la trasformata di Laplace del corrispondente termine della matrice originaria.

Si esaminano ora i componenti elementari. Per i limiti di applicabilità della trasformata di Laplace, è necessaria l'ipotesi di linearità ed invarianza.

Multiporta resistivi

E' ovvio, per la linearità della trasformazione, che la relazione costitutiva del resistore $v=Ri$ si traduce nella identica relazione nelle variabili trasformate

$$V(s) = RI(s) \qquad (4.12)$$

La relazione matriciale del multiporta resistivo $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{Ri}$ si traduce nella relazione matriciale trasformata

$$\boldsymbol{V}(s) = \boldsymbol{RI}(s) \qquad (4.13)$$

Analogamente per le altre forme algebriche matriciali.

Multiporta induttivi

La relazione in forma differenziale dell'induttore $v = L\dfrac{di}{dt}$ per la regola di derivazione (4.5) diventa

$$V(s) = sLI(s) - LI_0 = sLI(s) - \Psi_0 \qquad (4.14)$$

dove I_0 e $\Psi_0 = LI_0$ sono rispettivamente la corrente ed il flusso all'istante iniziale. Nella (4.14) appaiono esplicitamente le condizioni iniziali (o, meglio, lo stato iniziale) dell'induttore.

La relazione in forma integrale $i = \Gamma\int_0^t v dt + I_0$ per la regola di integrazione (4.6) diventa

$$I(s) = \frac{\Gamma}{s}V(s) + \frac{I_0}{s} = \frac{1}{sL}V(s) + \frac{I_0}{s} \qquad (4.15)$$

La (4.15) è la (4.14) risolta nella corrente.

Si osservi la potenzialità della trasformazione di Laplace: le relazioni differenziale e integrale dell'induttore sono trasformate in due relazioni algebriche equivalenti, comprendenti anche l'informazione sullo stato iniziale.

La (4.14) è interpretabile circuitalmente come la serie di una impedenza sL e di un generatore di tensione impulsivo (costante nel dominio di Laplace) di ampiezza Ψ_0. Ciò dà luogo al seguente circuito equivalente dell'induttore carico, visualizzato nel dominio del tempo e delle frequenze (Fig. 4.4):

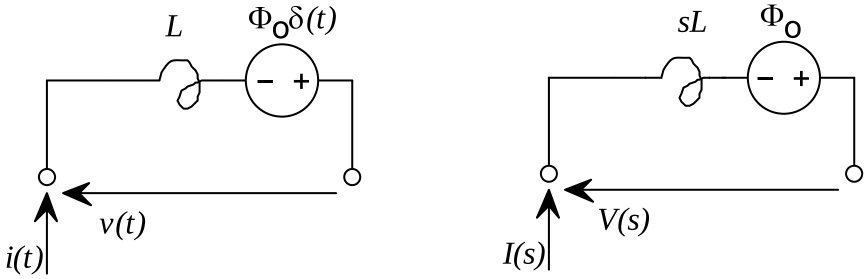

Fig. 4.4. Equivalente serie dell'induttore carico.

Analogamente la (4.15) è interpretabile come il parallelo della stessa impedenza con un generatore di corrente costante di ampiezza I_0 (Fig. 4.5).

Il multiporta induttivo trasformato è governato dalle relazioni in forma matriciale

$$\boldsymbol{V}(s) = s\boldsymbol{L}\boldsymbol{I}(s) - \boldsymbol{L}\boldsymbol{I}_0 = s\boldsymbol{L}\boldsymbol{I}(s) - \Psi_0 \qquad (4.16)$$

$$\boldsymbol{I}(s) = \frac{1}{s}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{V}(s) + \frac{1}{s}\boldsymbol{I}_0 \qquad (4.17)$$

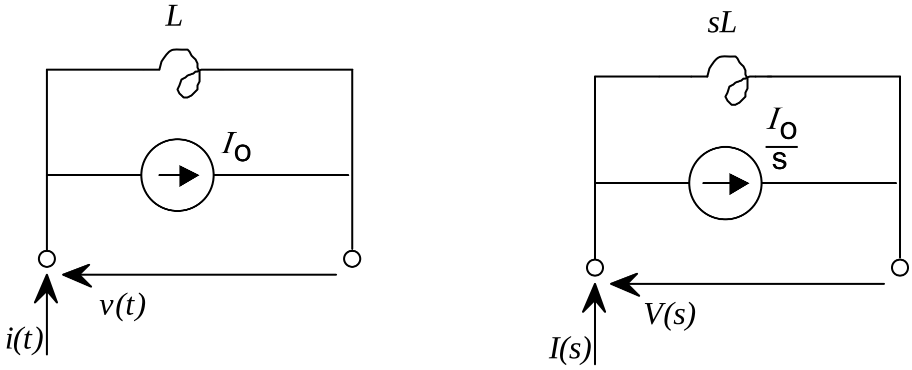

Fig. 4.5. Equivalente parallelo dell'induttore carico.

In modo analogo al bipolo, le costanti iniziali non nulle nel multiporta induttivo sono rappresentabili da un insieme di generatori indipendenti in serie o in parallelo ad ogni porta.

Il mutuo induttore, doppio bipolo induttivo, presenta le seguenti relazioni esplicite ed i circuiti equivalenti di Fig. 4.6.

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_1 & sL_M \\ sL_M & sL_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi_{10} \\ \Phi_{20} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{bmatrix} \Phi_{10} \\ \Phi_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_M \\ L_M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{10} \\ I_{20} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} L_1 & L_M \\ L_M & L_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} + \frac{1}{s} \begin{bmatrix} I_{10} \\ I_{20} \end{bmatrix}$$

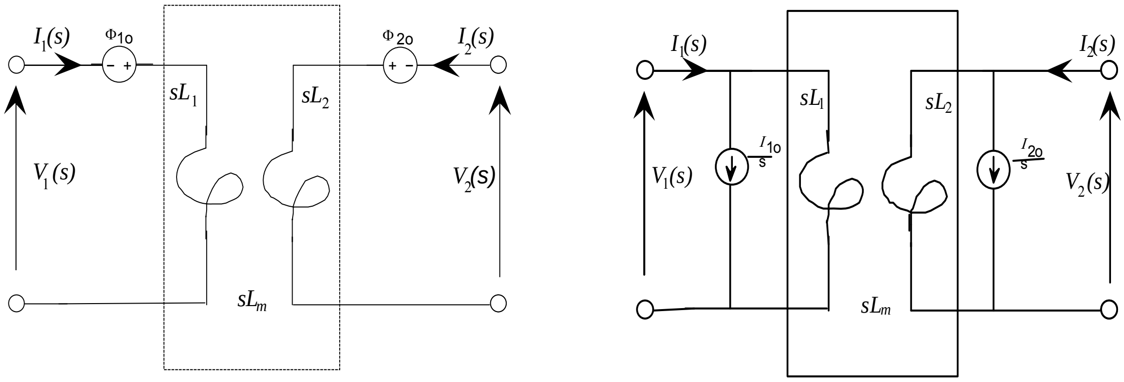

Fig. 4.6. Equivalenti del mutuo induttore.

Multiporta capacitivi

La relazione in forma differenziale del condensatore $i = C\dfrac{dv}{dt}$ per la regola di derivazione (4.5) diventa

$$I(s) = sCV(s) - CV_0 = sCV(s) - q_0 \qquad (4.18)$$

dove V_0 e $q_0 = CV_0$ sono rispettivamente la tensione ed la carica all'istante iniziale. Nella (4.14) appaiono esplicitamente le condizioni iniziali (o, meglio, lo stato iniziale) del condensatore.

La relazione in forma integrale $v = S\int_0^t idt + V_0$ per la regola di integrazione (4.6) diventa

$$V(s) = \frac{S}{s}I(s) + \frac{V_0}{s} = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{V_0}{s} \qquad (4.19)$$

La (4.19) è la (4.18) risolta nella tensione.

La (4.18) è interpretabile circuitalmente come il parallelo di una impedenza $1/sC$ e di un generatore di corrente impulsivo di ampiezza q_0. Ciò dà luogo al seguente circuito equivalente del condensatore carico, visualizzato nel dominio del tempo e delle frequenze (Fig. 4.7):

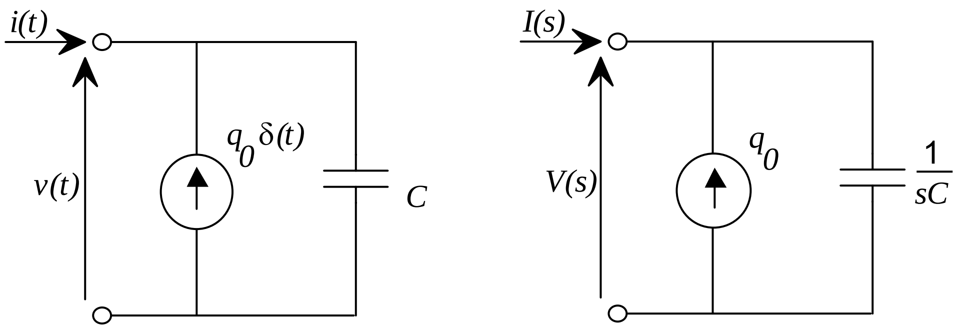

Fig. 4.7. Equivalente parallelo del condensatore carico.

Analogamente la (4.19) è interpretabile come la serie della stessa impedenza con un generatore di tensione costante di ampiezza V_0 (Fig. 4.8).

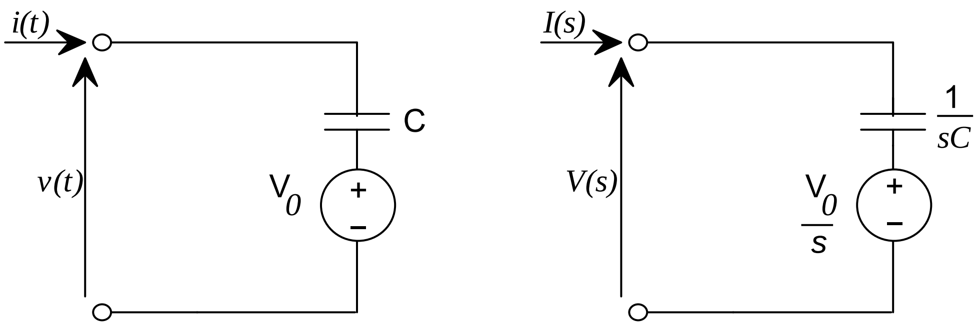

Fig. 4.8. Equivalente serie del condensatore carico.

Il multiporta capacitivo trasformato è governato dalle relazioni in forma matriciale

$$\boldsymbol{I}(s) = s\boldsymbol{CV}(s) - \boldsymbol{CV}_0 = s\boldsymbol{CV}(s) - \boldsymbol{q}_0 \qquad (4.20)$$

$$\boldsymbol{V}(s) = \frac{1}{s}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{I}(s) + \frac{1}{s}\boldsymbol{V}_0 \qquad (4.21)$$

In modo analogo al bipolo, le costanti iniziali non nulle nel multiporta capacitivo sono rappresentabili da un insieme di generatori indipendenti in serie o in parallelo ad ogni porta.

RETE TRASFORMATA

Per quanto visto, la rete trasformata è costituita da un insieme di impedenze od ammettenze (funzioni di s) soggette alle usuali regole di composizione.

La rete elettrica costituisce un sistema dinamico, pertanto alla rete si applicano la terminologia e le proprietà dei sistemi dinamici.

Le forzanti (ingressi del sistema dinamico costituito dalla rete) sono di due tipi: forzanti esterne e condizioni iniziali. Le forzanti esterne sono le trasformate dei generatori indipendenti. Ad essi vanno aggiunti generatori di tensione o corrente (di tipo impulsivo o gradino), che rappresentano le condizioni iniziali degli elementi dinamici.

Nella Teoria dei Sistemi il rapporto (funzione di s) fra la trasformata di una uscita e la trasformata di un ingresso prende il nome di *funzione di trasferimento* (f. di t.). Nel nostro caso l'uscita è una qualsiasi tensione o corrente di interesse, l'ingresso è un generatore indipendente (forzante esterna o condizione iniziale).

Dato l'ingresso *U(s)* e l'uscita *Y(s),* vale la

$$Y(s) = F(s) \cdot U(s) \qquad (4.22)$$

La *F(s)* è chiamata funzione di trasferimento (f. di t.) tra la coppia ingresso-uscita considerata.

Dato che l'impulso unitario ha per trasformata l'unità, per ingresso impulsivo unitario la (4.20) si riduce alla $Y(s) = F(s)$. Ciò rivela il seguente importante significato fisico: la f. di t. è la trasformata della risposta all'impulso unitario.

Per la linearità del sistema, la risposta a più forzanti simultanee si ottiene per sovrapposizione dalla somma di termini del tipo (4.22) con differenti f. di t.

Nelle reti le funzioni di trasferimento sono di quattro tipi: impedenze, ammettenze, rapporti di tensione, rapporti di corrente. Le impedenze/ammettenze a loro volta si distinguono in autoimpedenze/autoammettenze quando mettono in relazione variabili della stessa porta elettrica, mutue impedenze/mutue ammettenze in caso contrario.

Proprietà delle f. di t. di reti a parametri concentrati

In reti lineari tempo-invarianti e a parametri concentrati (cioè costituite da multiporta resistivi, induttivi, capacitivi dei tipi visti) valgono le seguenti proprietà:

- le f. di t. sono funzioni razionali in s a coefficienti costanti (cioè rapporti di due polinomi in s a coefficienti costanti);
- le autoimpedenze e autoammettenze sono rapporti tra due polinomi in s il cui grado differisce al massimo di una unità.

Poli e zeri delle f. di t.

Consideriamo le f. di t. costituite dal rapporto tra due polinomi in s.

- Le radici del denominatore (cioè i valori di *s* che annullano il denominatore) sono chiamati *poli*. L'uscita valutata per questi valori di *s* tende all'infinito.
- Le radici del numeratore (cioè i valori di *s* che annullano il numeratore) sono chiamati *zeri* della f. di t. L'uscita valutata per questi valori di *s* si annulla.

Dato che i coefficienti delle f. di t. sono reali, i poli e gli zeri sono reali o a coppie complessi coniugati.

La parte immaginaria di una coppia di poli complessi coniugati corrisponde ad una pulsazione di risonanza della rete.

I poli sono particolarmente importanti. Sono una caratteristica del sistema dinamico dato (quindi della rete completa data). Infatti tutte le f. di t. di un dato sistema dinamico presentano lo stesso insieme di poli (lo stesso denominatore a meno di una costante moltiplicativa), mentre gli zeri dipendono dalla coppia ingresso-uscita considerata. I poli determinano le caratteristiche dinamiche ed in particolare la stabilità del sistema. Prendono il nome di modi propri o modi caratteristici della rete (o anche frequenze proprie o frequenze caratteristiche in senso generalizzato).

Reti algebriche

Grazie alla trasformata, le relazioni costitutive dei componenti di rete sono relazioni algebriche, analogamente alle reti resistive e alle reti nei fasori in regime sinusoidale. Pertanto tutti i componenti sono algebrici (con parametri funzioni di *s* anziché costanti).

Reti di questo tipo sono chiamate reti algebriche. Per esse valgono le proprietà ed i teoremi per reti resistive lineari tempo-invarianti. Tra i principali si ricordano:

- sovrapposizione
- teorema di sostituzione
- teorema di Thevenin-Norton
- reciprocità.

Una importante conseguenza della trasformazione in algebriche delle relazioni differenziali è che in tal modo i bipoli e i multiporta dinamici sono controllabili sia in tensione che in corrente (contrariamente alle formulazioni nel dominio del tempo che presentano una sola forma di controllo). Ciò consente di trattare anche le configurazioni di tipo degenere.

Teorema di Thevenin-Norton

Ha le stesse proprietà formali e le stesse regole di calcolo delle reti resistive ed in regime alternato sinusoidale nei fasori. I generatori equivalenti e le impedenze/ammettenze sono funzioni di *s*. Nei generatori equivalenti sono compresi i generatori rappresentativi delle condizioni iniziali. Valgono le usuali formule di trasformazione serie-parallelo (Fig. 4.9).

Si noti che le coppie delle Fig. 4.4-4.5 e delle Fig. 4.7-4.8 si corrispondono nella trasformazione serie-parallelo.

Reciprocità

Vale il teorema di reciprocità applicato alle f. di t. Una rete composta unicamente da elementi reciproci è reciproca.

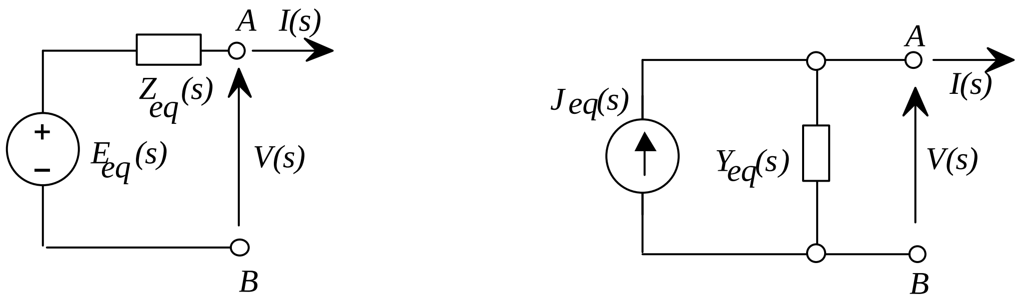

Fig. 4.9. Equivalenti di Thevenin e di Norton.

Trasformata e algebra fasoriale. Risposta in frequenza

Si osservi la analogia formale tra le relazioni costitutive a condizioni iniziali nulle e le corrispondenti dell'algebra fasoriale, se si opera la sostituzione $s = j\omega$. Si può dimostrare che tale relazione ha validità generale e vale la seguente importante proprietà:

Una funzione di trasferimento tra variabili di rete, se valutata per $s = j\omega$, fornisce, in regime sinusoidale alla pulsazione data, la relazione complessa tra i fasori corrispondenti alle stesse variabili.

In regime sinusoidale alla pulsazione ω siano $\overline{U}$ e $\overline{Y}$ i fasori dell'ingresso e dell'uscita. Allora la (4.22) si traduce nella

$$\overline{Y} = \overline{F}(j\omega) \cdot \overline{U} \qquad (4.23)$$

La relazione tra fasori (4.23), se considerata funzione della pulsazione variabile, fornisce la risposta in frequenza. Ovvero l'andamento, in modulo e fase, del fasore $\overline{Y}$ al variare della frequenza del segnale sinusoidale $\overline{U}$ di ingresso.

FUNZIONI CISOIDALI

La proprietà vista per il regime sinusoidale si generalizza nel modo seguente.

Le funzioni cisoidali sono del tipo (γ costante reale o complessa):

$$u(t) = Ue^{\gamma t}$$

Comprendono le costanti e, mediante l'operatore Parte Reale, le sinusoidi.

Si hanno i casi particolari:

$\gamma = 0$ funzione costante $u(t) = U$

$\gamma = \alpha$ (α costante positiva) esponenziale crescente $u(t) = Ue^{\alpha t}$

$\gamma = -\alpha$ (α costante positiva) esponenziale decrescente $u(t) = Ue^{-\alpha t}$

$\gamma = j\omega$ vettore rotante (funzione complessa) $u(t) = Ue^{j\omega t}$

Le funzioni sinusoidali sono combinazioni lineari di funzioni cisoidali, specificamente di due vettori rotanti controruotanti. Per la formula di Eulero:

$u(t) = U_M \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\overline{U}e^{j\omega t} + \underline{U}e^{-j\omega t}]$ dove $\overline{U} = U_M e^{j\varphi} / \sqrt{2}$ è il fasore

Più semplicemente, mediante l'operatore Parte Reale, anche la sinusoide si considera una cisoide:

$\gamma = j\omega$ funzione sinusoidale $u(t) = U_M \cos(\omega t + \varphi) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}[\overline{U}e^{j\omega t}]$

$\gamma = -\alpha + j\omega$ funzione sinusoidale smorzata

$$u(t) = U_M e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}[\overline{U}e^{(-\alpha + j\omega)t}]$$

L'importanza delle funzioni cisoidali risiede nella proprietà di derivazione.

$$\frac{d}{dt}Ue^{\gamma t} = \gamma U e^{\gamma t}$$

La derivata di una funzione cisoidale è pari alla funzione stessa moltiplicata per la costante caratteristica γ.

Si vedrà più dettagliatamente nel capitolo dedicato ai transitori, che l'andamento completo nel tempo di una variabile è la somma di un termine forzato, dello stesso tipo della forzante, più il transitorio proprio (o risposta libera).

Per termine forzato si intende l'integrale particolare dell'equazione differenziale che governa la dinamica e coincide con il regime per forzanti periodiche.

Il termine forzato dovuto a una funzione cisoidale si ottiene dalla f. di t. valutata per s=γ, ovvero riferendosi alla (4.22)

$$y(t) = F(\gamma)Ue^{\gamma t} \qquad (4.24)$$

La (4.24) è valida purchè γ non coincida con alcun polo della f. di t.

Come caso particolare il regime per ingresso costante è $y(t) = Y = F(0)U$.

La (4.24) rende ragione del metodo dei fasori in regime sinusoidale. Infatti le forzanti sinusoidali sono combinazioni lineari di due funzioni cisoidali coniugate:

Dalla sinusoide $u(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\overline{U}e^{j\omega t} + \underline{U}e^{-j\omega t}]$ per sovrapposizione l'uscita è $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\overline{F}(j\omega)\overline{U}e^{j\omega t} + \overline{F}(-j\omega)\underline{U}e^{-j\omega t}]$. Poiché *F(s)* è funzione analitica reale di variabile complessa, $\overline{F}(-j\omega) = \underline{F}(j\omega)$, quindi $y(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}[\overline{F}(j\omega)\overline{U}e^{j\omega t}]$.

Per la definizione di fasore si ritrova la (4.23).

USO DELLA RETE TRASFORMATA

Quanto discusso finora ha fornito l'inquadramento teorico della Trasformata di Laplace applicata alle reti elettriche.

Operativamente il metodo va visto quasi come un insieme di regole pratiche per gestire in modo semplice relazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

La rete trasformata inerte consiste in un insieme di relazioni costitutive da comporre per formulare rapidamente relazioni tra le variabili di interesse (f. di t.). Nel caso di bipoli elementari si hanno le impedenze generalizzate R, sL, $1/sC$ da comporre.

Le trasformate delle variabili di ingresso e di uscita quasi mai necessitano di essere esplicitate, almeno per le usuali forme delle forzanti.

Le f. di t. nelle reti sono utilizzate principalmente nelle tre applicazioni seguenti. Per le prime due si richiedono le f. di t. dai soli ingressi esterni. Il terzo caso richiede di considerare anche i generatori equivalenti alle condizioni iniziali.

A) *F. di t. del sistema.* Le f. di t. della rete come sistema dinamico sono uno strumento importante per l'analisi sintetica delle caratteristiche dinamiche, la stabilità e la messa a punto del controllo. Questi aspetti trovano applicazione in altri corsi.

B) *Analisi di regime.* Per l'analisi di regime, ed in generale dei termini forzati con ingressi cisoidali, si opera, come visto, direttamente sulle espressioni delle f. di t. ponendo s=0 in continua, $s = j\omega$ in sinusoidale, $s = \gamma$ in generale. Grazie alla linearità, il regime dovuto a qualsiasi forzante periodica sviluppabile in serie di Fourier è calcolabile nello stesso modo per sovrapposizione di funzioni sinusoidali.

C) *Studio di transitori.* L'andamento transitorio completo di una variabile di rete si ottiene in linea di principio per antitrasformazione del prodotto (4.22) tra la f. di t. e l'ingresso, compresi i generatori corrispondenti alle condizioni iniziali. Ciò richiede la trasformazione delle forzanti, la moltiplicazione per le f. di t. appropriate, indi la antitrasformazione dei prodotti. Nei casi di interesse le trasformazioni/antitrasformazioni si possono ottenere con semplici regole standard e utilizzando la tabella delle trasformate.

Calcolo simbolico (operatoriale)

Come si è visto, le espressioni chiave sono le f. di t. Nelle reti elettriche queste sono le funzioni di rete (impedenze, ammettenze, rapporti di tensione, rapporti di corrente) già note nell'algebra dei fasori, con la variabile s al posto di $j\omega$.

Si considera quindi la seguente Trasformazione Simbolica. Sia una rete inerte lineare invariante dinamica con relazioni di tipo integro-differenziale usuali. La rete si trasforma in rete simbolica con la sostituzione dell'operatore derivata rispetto al tempo con il simbolo s, dell'operatore integrale nel tempo con il simbolo $1/s$.

In altre parole, sugli induttori e condensatori si considerano, rispettivamente, le impedenze sL e $1/sC$ (ammettenze $1/sL$ e sC) e analoghe forme matriciali per i multiporta induttivi e capacitivi.

La rete simbolica e tutti i componenti risultano algebrici, anziché con relazioni integro-differenziali. Il simbolo s va considerato variabile algebrica e manipolabile come tale.

Dopo di che le funzioni di rete richieste si ottengono dalla rete con i metodi usuali di analisi e composizione di impedenze/ammettenze.

Da notare che la trasformazione simbolica si applica alla rete inerte. I generatori indipendenti non sono trasformati.

Le relazioni ottenute si chiamano impedenze, ammettenze, ecc. simboliche (o anche operatoriali), e il relativo calcolo, calcolo simbolico o calcolo operatoriale.

In realtà in metodo si potrebbe chiamare trasformazione di Laplace. Ma si preferisce la dizione 'simbolico' in quanto non si vuole implicare tutta la teoria di Laplace, soprattutto per quanto riguarda le condizioni di trasformabilità dipendenti dalla forma delle forzanti.
Rimangono valide le limitazioni della trasformata di Laplace: il calcolo simbolico è applicabile a relazioni lineari e tempo-invarianti. La rete simbolica è quindi lineare, invariante, non dinamica.

Le relazioni simboliche sono di validità generale:
- Con la sostituzione $s = j\omega$ si ottengono le relazioni in sinusoidale nei fasori.
- Con la sostituzione banale $s = 0$ si ottengono le relazioni in regime costante (in continua).
- Forniscono l'integrale forzato con forzanti cisoidali.
- Sono le funzioni di trasferimento, utilizzabili nei controlli.
- Contengono l'informazione delle frequenze caratteristiche della rete (radici del denominatore).
- Sono utilizzabili per l'analisi completa di transitorio (si richiedono gli ingressi trasformati).

Il calcolo simbolico perde l'informazione delle condizioni iniziali delle variabili di stato. Per tenerne conto si possono aggiungere i generatori equivalenti alle condizioni iniziali.