

Data un funzione $f(t)$ reale o complessa si definisce la sua trasformata di Fourier, TF, la funzione $F(j\omega)$ che soddisfa:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Qualora l'integrale esista. In tale caso vale la corrispondenza inversa, teorema:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Vale a dire che esiste una corrispondenza biunivoca tra le 2 funzioni:

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

Da queste proprietà scendono un sacco di conseguenze.

Prima di tutto l'aspetto 'fisico'. Si ricorda che:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

Quindi: $f(t)$ può essere considerata come una somma di funzioni sinusoidali $\exp(j\omega t)$ pesate ognuna con peso $F(j\omega)/2\pi$. Per questa ragione $F(j\omega)$ è spesso detta 'spettro di $f(t)$ '.

Noi siamo interessati a segnali nel campo reale. Le nostre funzioni $f(t)$ apparterranno al campo reale. Abbiamo subito la seguente proprietà che segue dal fatto che $f^*(t) = f(t)$ (f^* = complesso coniugato di f):

$$F^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt = F(-j\omega)$$

Inoltre se $f(-t) = f(t)$ risulta:

$$F^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \stackrel{u=-t}{=} - \int_{+\infty}^{-\infty} f(-u) e^{-j\omega u} du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(j\omega)$$

Ovvero $F(j\omega)$ è reale.

Viceversa se $f(-t) = -f(t)$ $F(j\omega)$ risulta puramente immaginaria.

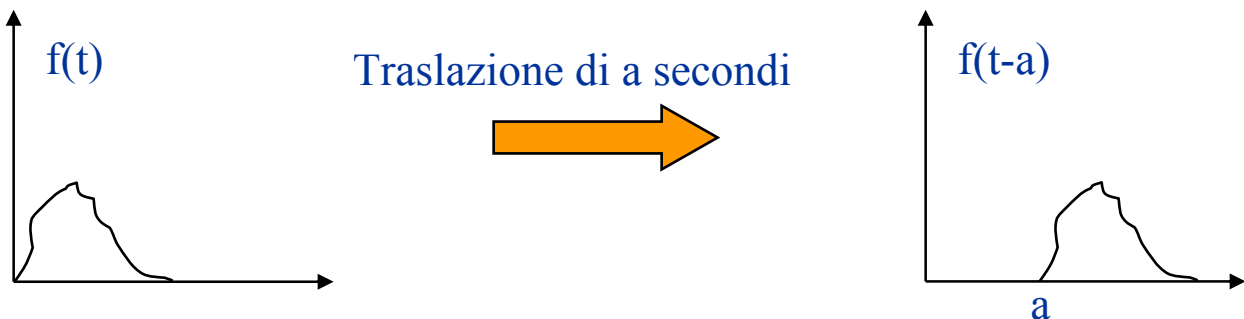
Per ogni numero a reale vale che:

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

Infatti:

$$f(at) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt \stackrel{x=at}{=} \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} f(x) e^{-j\omega x/a} dx & \text{per } a < 0 \\ \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x/a} dx & \text{per } a > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

Proprietà importante: traslazione temporale:



$$f(t-a) \leftrightarrow F(j\omega) e^{-j\omega a} \quad e^{j\omega a} f(t) \leftrightarrow F(j(\omega-a))$$

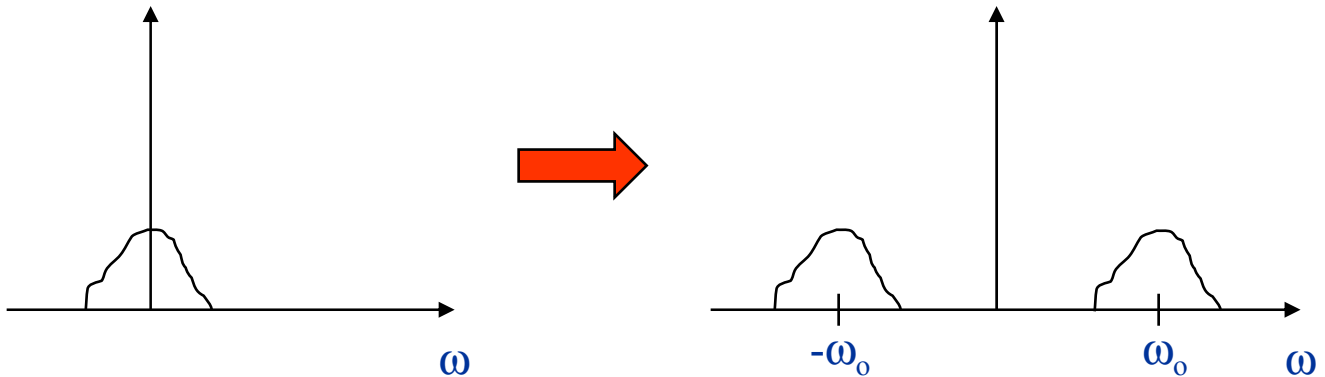
Infatti:

$$\begin{aligned} f(t-a) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a) e^{-j\omega t} dt &\stackrel{x=t-a}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega(x+a)} dx = \\ &= e^{-j\omega a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx = F(j\omega) e^{-j\omega a} \end{aligned}$$

Applicazione la modulazione:

Sfruttando il fatto che $e^{jat}f(t) \leftrightarrow F(j(\omega - a))$ si ha:

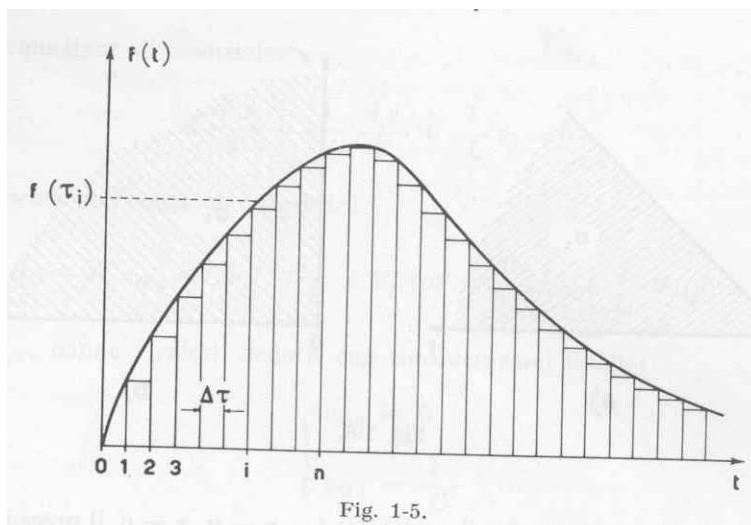
$$f(t)\cos(\omega_0 t) = f(t)\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \leftrightarrow \frac{1}{2}[F(j(\omega + \omega_0)) + F(j(\omega - \omega_0))]$$



Proprietà importante: il teorema di CONVOLUZIONE

Supponiamo che la risposta di sistema ad una eccitazione $\delta(t)$ sia rappresentabile con la funzione $h(t)$.

Quale potrebbe essere la risposta ad una generica eccitazione $f(t)$?



Possiamo supporre la $f(t)$ divisa in tanti rettangolini larghi ognuno $\Delta\tau$. Se $\Delta\tau$ è sufficientemente piccolo possiamo pensare che $f(\tau)\Delta\tau$ sia approssimabile con una $\delta(t)$, ovvero:

$$f(\tau)\Delta\tau\delta(t-\tau).$$

La risposta del sistema sarà perciò:

$$f(\tau)\Delta\tau h(t-\tau).$$

Quindi la risposta del sistema $U(t)$ all'eccitazione $f(t)$ risulta:

$$U(t) = \sum_i f(\tau_i) \Delta\tau_i h(t - \tau_i) \xrightarrow{\Delta\tau_i \rightarrow 0} \int_{-\infty}^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

(assumiamo qui che $f(t)$ sia definita in $(-\infty, \infty)$, mentre $h(t)$ sia definita in $(0, \infty)$)

La quantità:

$$f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

è detta convoluzione di $f(t)$ con $h(t)$.

Ebbene vale che:

$$f(t) * h(t) \leftrightarrow F(j\omega)H(j\omega)$$

Infatti:

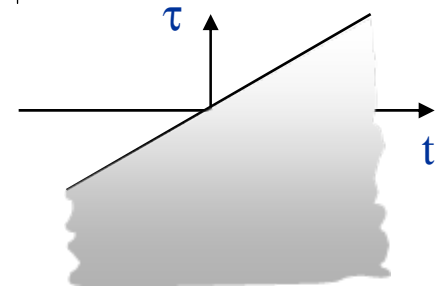
$$f(t) * h(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

Facciamo la sostituzione:
$$\begin{cases} t = x + y \\ \tau = y \end{cases}$$

Da cui otteniamo subito:

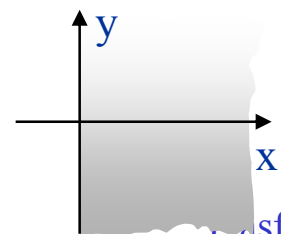
$$dt d\tau = \text{abs} \left(\det \begin{vmatrix} dt/dx & dt/dy \\ d\tau/dx & d\tau/dy \end{vmatrix} \right) dx dy = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} dx dy = dx dy$$

Inoltre:

$$\{(t, \tau) | -\infty \leq t \leq +\infty, -\infty \leq \tau \leq t\} \rightarrow$$


Si trasforma in:

$$\begin{aligned} &\{(x, y) | -\infty \leq x + y \leq +\infty, -\infty \leq y \leq x + y\} = \\ &\{(x, y) | -\infty \leq x + y \leq +\infty, -\infty \leq y, 0 \leq x\} \end{aligned}$$



$$f(t) * h(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \stackrel{\substack{t=y+x \\ \tau=y}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_0^{+\infty} h(x) e^{-j\omega(y+x)} dx dy =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-j\omega y} dy \int_0^{+\infty} h(x) e^{-j\omega x} dx = F(j\omega) H(j\omega)$$

La cosa sarebbe stata più semplice se avessimo ammesso $-\infty \leq h(t) \leq +\infty$. In questo caso la ‘mappatura’ avrebbe riguardato due insiemi definiti entrambi sul piano reale:

$$f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Ciò ha una conseguenza fisica importantissima:

Se conosciamo la risposta ad una percossa di un sistema, ovvero la risposta alla $\delta(t)$, possiamo ricavare la risposta ad una qualsiasi eccitazione semplicemente facendo il prodotto nel dominio delle frequenze.

Altro teorema importantissimo: il teorema della derivata

Da:
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Segue che:
$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (j\omega) F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Ovvero che:
$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (j\omega)^n F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

In modo equivalente:

$$\frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-jt)^n f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ovvero:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega) \quad e \quad \frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n} \leftrightarrow (-jt)^n f(t)$$

Metodo alternativo per la dimostrazione: calcoliamo la trasformata della derivata:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt & \quad u = e^{-j\omega t}, du = -j\omega e^{-j\omega t} dt \\ & \quad = \quad f(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \\ & \quad dv = \frac{df(t)}{dt} dt, v = f(t) \\ & \quad = f(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j\omega F(j\omega) \end{aligned}$$

Si presentano 3 casi: $f(t)$ è integrabile e continua o comunque tende a zero all'infinito e la trasformata esiste (vedi $1/t$). In tale caso il primo termine si annulla e la cosa è dimostrata. $f(t)$ potrebbe avere un limite finito all'infinito (vedi $1(t)$ o $\text{sign}(t)$). In tale caso:

$$f(t)e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{a,b \rightarrow \infty} f(t)e^{-j\omega t} \Big|_{-b}^a = \lim_{a \rightarrow \infty} f(a)e^{-j\omega a} - \lim_{b \rightarrow \infty} f(b)e^{j\omega b}$$

Supposto di fissare a e b molto grandi le 2 funzioni sopra di cui si sta considerando il limite hanno come anti-trasformate:

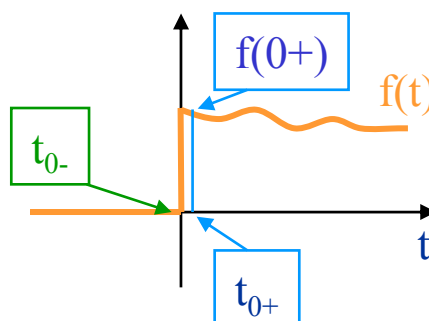
$$\left(\text{Teo., vedi poi: } \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega \right) \quad f(a)\delta(t-a) - f(b)\delta(t+b)$$

Ovvero, se prendiamo a e b via, via più grandi:

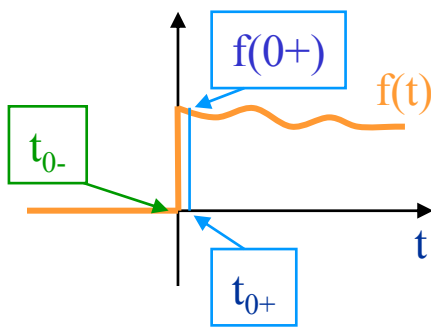
$$f(\infty)\delta(t-\infty) - f(-\infty)\delta(t+\infty)$$

Quindi si ha una traslazione all'infinito dei due valori limite. Ovvero per a e b grandi la funzione in considerazione è la trasformata di una funzione identicamente nulla, che non può che risultare nulla.

Il terzo caso interessante si ha quando la funzione è nulla per $t < 0$, ma discontinua in 0 e continua per $t > 0$. In tale circostanza la derivata nell'origine esiste come distribuzione.



[Supponiamo per semplicità che $f(\infty)=0$]



$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{0+} = \frac{f(0+) - f(0-)}{t_{0+} - t_{0-}}$$

$$\xrightarrow{t_{0+} \rightarrow t_{0-}} \frac{f(0+)}{0} = f(0+)\delta(t)$$

Possiamo quindi scrivere che:

$$\frac{df(t)}{dt} = \begin{cases} f(0+)\delta(t) & \text{per } t = 0 \\ \frac{\Delta f}{\Delta t} & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

Considerando le proprietà della $\delta(t)$ si può certamente scrivere che:

$$\frac{df(t)}{dt} = f(0+)\delta(t) + \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

Questa funzione si può con più comodità scrivere:

$$g(t) = f(t)1(t) \quad (=f(t))$$

Vale che: $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)1(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = F(\omega)$

Abbiamo che: $\frac{dg(t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt}1(t) + f(0)\delta(t) \quad \left(= \frac{df(t)}{dt} \right)$

In definitiva:

$$\begin{aligned} \frac{dg(t)}{dt} \left(= \frac{df(t)}{dt} \right) &\rightarrow \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt + f(0) \quad \begin{matrix} u = e^{-j\omega t}, du = -j\omega e^{-j\omega t} dt \\ dv = \frac{df(t)}{dt} dt, v = f(t) \end{matrix} \\ &= f(t)e^{-j\omega t} \Big|_0^{+\infty} + j\omega \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt + f(0) \\ &= -f(0) + j\omega G(\omega) + f(0) = j\omega G(\omega) = j\omega F(\omega) \end{aligned}$$

Considerazioni sulle funzioni fondamentali:

$$\delta(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} d\omega \equiv 1$$

Importantissimo: la funzione ‘difficile’ $\delta(t)$ viene trasformata in una funzione costante su tutto l’asse delle frequenze. Fisicamente la cosa è coerente, infatti la $\delta(t)$ è definita per avere un valore solo in $t=0$, per cui ci si aspetta che sia rappresentata in tutto il campo delle frequenze.

Come conseguenza è valida la proprietà: $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega$

Ma se: $\delta(t) \leftrightarrow 1$ ne consegue che:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} e^{j\omega t} d\omega = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{j\omega t}}{jt} \right]_{-a}^{+a} =$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{jta} - e^{-jta}}{jt} \right] = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(ta)}{t}$$

Ovvero:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin(ta)}{t} = \pi \delta(t) \quad (A)$$

Es.: A che cosa è uguale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$?

Se (A) è una $\delta(t)$ ne consegue che:

$$\begin{aligned} \pi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin(ta)}{t} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^{+b} \frac{\sin(ta)}{t} dt \right] \quad \begin{matrix} x=ta \\ = \end{matrix} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-ba}^{+ba} \frac{\sin(x)}{x} dx \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \end{aligned}$$

ES.: $\frac{1}{j\omega} \leftrightarrow ?$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t\omega)}{j\omega} + \frac{\sin(t\omega)}{\omega} d\omega \stackrel{\text{simmetria}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t\omega)}{\omega} d\omega =$$

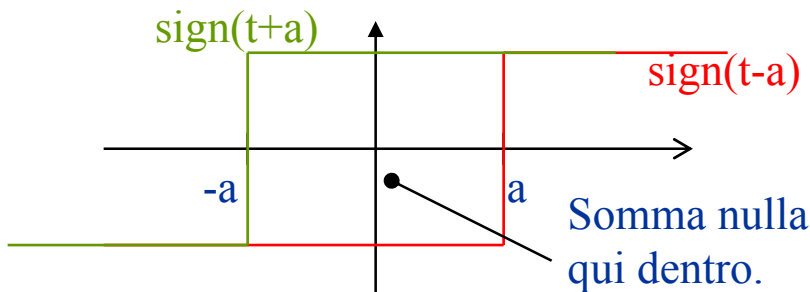
$$\stackrel{x=\omega t}{=} \frac{1}{2} \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ -1 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Quindi: $\frac{1}{j\omega} \leftrightarrow \frac{\text{sign}(t)}{2}$

ES.: $1(t) \leftrightarrow ?$

$$\begin{aligned} 1(t) \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} dt &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega a}}{j\omega} \right] = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{j\omega} - \frac{\cos(\omega a)}{j\omega} + \frac{\sin(\omega a)}{\omega} \right] = \\ &= \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} - \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\cos(\omega a)}{j\omega} \end{aligned}$$

Ma:
$$\frac{\cos(\omega a)}{j\omega} = \frac{e^{j\omega a}}{2j\omega} + \frac{e^{-j\omega a}}{2j\omega} \leftrightarrow \frac{\text{sign}(t+a)}{4} + \frac{\text{sign}(t-a)}{4}$$



Per a grandi la funzione in questione risulta essere la trasformata di una funzione identicamente nulla, che non può che essere nulla.

Il contenuto fisico è evidente: la $1(t)$ ha un forte contenuto a basse frequenze, giacché si estende all' ∞ . Ma ha anche un contributo che si estende a frequenze elevate visto che ha una transizione netta a $t=0$.

ES.: metodo alternativo per ricavare la $1(t)$:

$$1(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign}(t))$$

Considerato che:

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad \text{e} \quad \frac{\text{sign}(t)}{2} \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}$$

Scende subito per il principio di sovrapposizione che:

$$1(t) \rightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Teorema dell'integrale:

$$\int_{-\infty}^t f(t) dt \leftrightarrow \pi F(0) \delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

Possiamo vederlo così:

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \stackrel{\tau < t \Rightarrow l(t-\tau)=1}{=} \int_{-\infty}^t f(\tau) l(t-\tau) d\tau = f(t) * l(t)$$

Quindi:

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = f(t) * l(t) \leftrightarrow F(j\omega) l(j\omega) = F(j\omega) \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = \pi F(0) \delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

Oppure:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow \int_{-\infty}^t f(t) dt = \int_{-\infty}^t \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \int_{-\infty}^t e^{j\omega t} dt d\omega$$

Dove:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t e^{j\omega t} dt &= \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} \Big|_{-\infty}^t = \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} = \\ &= \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\cos(\omega t)}{j\omega} + \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\sin(-\omega t)}{\omega} \\ &= \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\cos(\omega t)}{j\omega} + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} = \pi \delta(\omega) \end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$\int_{-\infty}^t f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \left(\frac{e^{j\omega t}}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right) d\omega \quad \text{cvd} \left(\text{visto che } \delta(\omega) = \delta(\omega) e^{j\omega t} \right) !!!$$


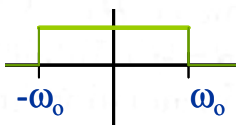
Riassumendo le proprietà della Trasformata di Fourier:

TABLE 2.3. Key Properties of the Fourier Transformation

Time Function	Fourier Transform
$f(t)$	$F(j\omega)$
$df(t)/dt$	$j\omega F(j\omega)$
$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$
$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(j\omega) F_2(j\omega)$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) ^2 d\omega$
$f(t - t_0)$	$F(j\omega) e^{-j\omega t_0}$
$f(t) e^{j\omega_0 t}$	$F(j\omega - j\omega_0)$
$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$	$k_1 F_1(j\omega) + k_2 F_2(j\omega)$

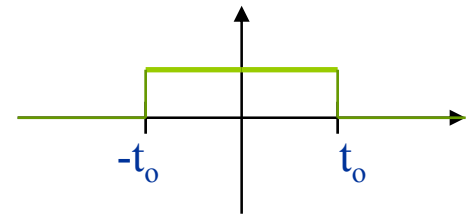
Qualche esempio:

TABLE 2.4. Some Commonly Used Fourier-Transform Pairs

$f(t)$	$F(j\omega)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
 $\left. \begin{array}{l} 1, \quad t < t_0 \\ 0, \quad t > t_0 \end{array} \right\}$	$(2/\omega) \sin \omega t_0$
$\frac{\sin \omega_0 t}{\pi t}$	 $\left\{ \begin{array}{l} 1, \quad \omega < \omega_0 \\ 0, \quad \omega > \omega_0 \end{array} \right.$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$
$\sin \omega_0 t$	$-j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0)$

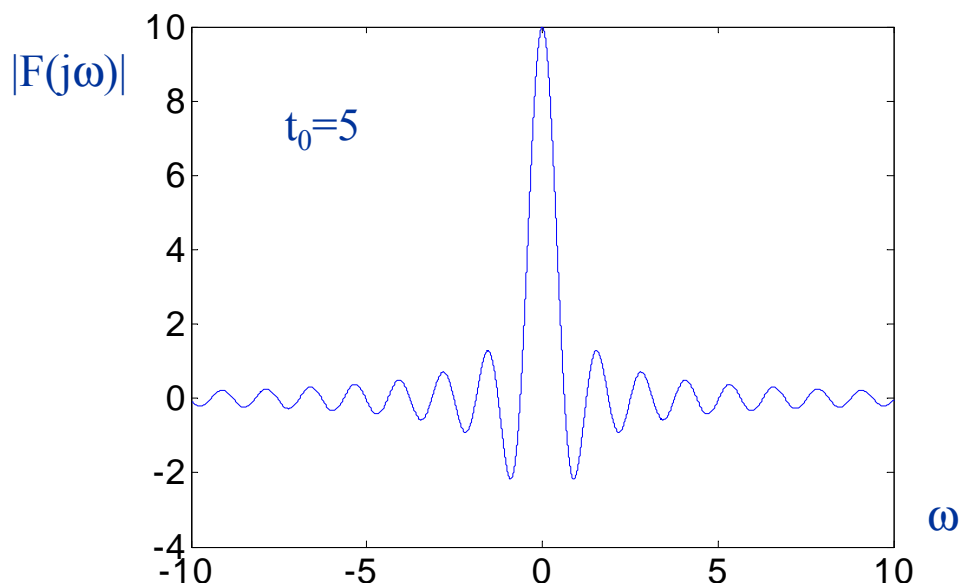
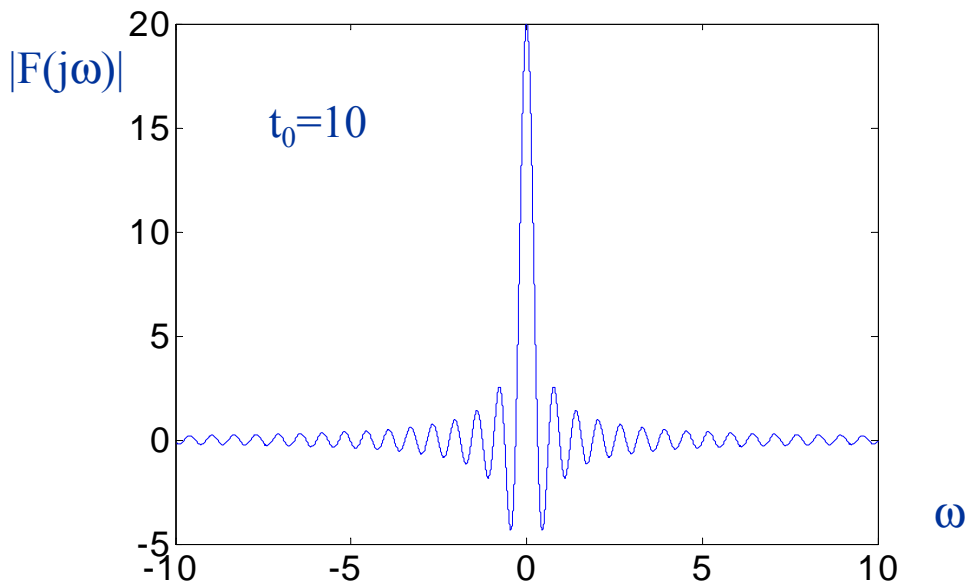
Es.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -t_0 < t < t_0 \\ 0 & \text{se } t > t_0 \text{ oppure } t < -t_0 \end{cases}$$



Ovvero $f(t)$ è meglio esprimibile come: $g(t)=[1(t+t_0)-1(t-t_0)]$

$$F(j\omega) = \int_{-t_0}^{t_0} e^{-j\omega t} dt = -\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \Big|_{-t_0}^{t_0} = 2 \frac{e^{j\omega t_0} - e^{-j\omega t_0}}{2j\omega} = 2 \frac{\sin(\omega t_0)}{\omega}$$



Es.

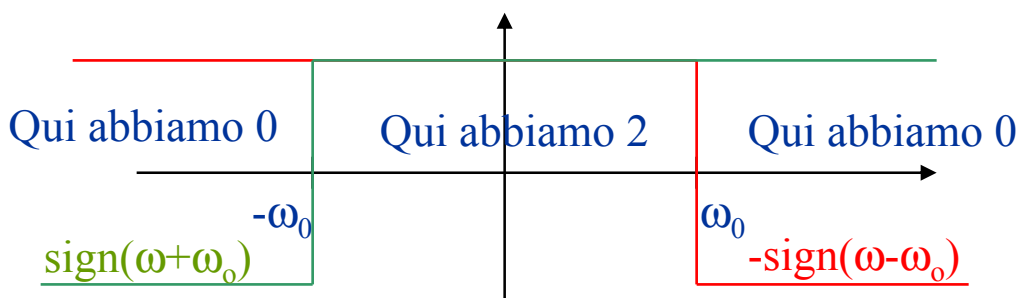
$$f(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t} = \frac{e^{j\omega_0 t}}{2j} \frac{1}{\pi t} - \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2j} \frac{1}{\pi t}$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2j} \text{Trasf.} \left(\frac{1}{\pi t} \right) \Big|_{\omega - \omega_0} - \frac{1}{2j} \text{Trasf.} \left(\frac{1}{\pi t} \right) \Big|_{\omega + \omega_0}$$

Ma: $\text{Trasf.} \left(\frac{1}{\pi t} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\omega t}}{\pi t} dt = -j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\pi t} dt = -j \text{sign}(\omega)$

Quindi:

$$F(j\omega) = -\frac{1}{2} \text{sign}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \text{sign}(\omega + \omega_0)$$



$$F(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\omega_0 < \omega < \omega_0 \\ 0 & \text{se } \omega > \omega_0 \text{ oppure } \omega < -\omega_0 \end{cases}$$

Ovvero:

$$F(j\omega) = 1(\omega + \omega_0) - 1(\omega - \omega_0)$$

Es.

$$f_1(t) = 1(t)e^{-at} \quad \text{e} \quad f_2(t) = e^{-a|t|} \quad \text{con } a > 0$$

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} 1(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(j\omega+a)t} dt = - \left. \frac{e^{-(j\omega+a)t}}{j\omega+a} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{j\omega+a}$$

Invece:

$$F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at} 1(-t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} 1(t) e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{-(j\omega-a)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(j\omega+a)t} dt =$$

$$= - \left. \frac{e^{-(j\omega-a)t}}{j\omega-a} \right|_{-\infty}^0 - \left. \frac{e^{-(j\omega+a)t}}{j\omega+a} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{-j\omega+a} + \frac{1}{j\omega+a} =$$

$$= \frac{(j\omega+a) + (-j\omega+a)}{(a^2 + \omega^2)} = \frac{2a}{(a^2 + \omega^2)}$$

O anche:

$$1(-t)e^{at} = f_1(-t) \Rightarrow \text{Tras.} \left(1(-t)e^{at} \right) = F_1(-j\omega) = F_1^*(j\omega) = \frac{1}{-j\omega+a}$$

Es.

$$f(t) = \sin(\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega_0 t}}{2j} e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2j} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{\pi \delta(\omega - \omega_0)}{2j} - \frac{\pi \delta(\omega + \omega_0)}{2j} \end{aligned}$$

Ma:

$$f(t) = \sin(\omega_0 t) l(t) = \frac{e^{j\omega_0 t}}{j2} l(t) - \frac{e^{-j\omega_0 t}}{j2} l(t)$$

Equivalente alla traslazione nel dominio delle f:

(Detta $1(\omega)$ la trasformata di $l(t)$)

$$\begin{aligned} f(t) \rightarrow \frac{1}{j2} l(\omega - \omega_0) - \frac{1}{j2} l(\omega + \omega_0) &= \frac{1}{j2} \left[\pi \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j(\omega - \omega_0)} \right] - \\ &- \frac{1}{j2} \left[\pi \delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{j(\omega + \omega_0)} \right] = \frac{\pi}{j2} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\omega + \omega_0} - \frac{1}{\omega - \omega_0} \right\} = \frac{\pi}{j2} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

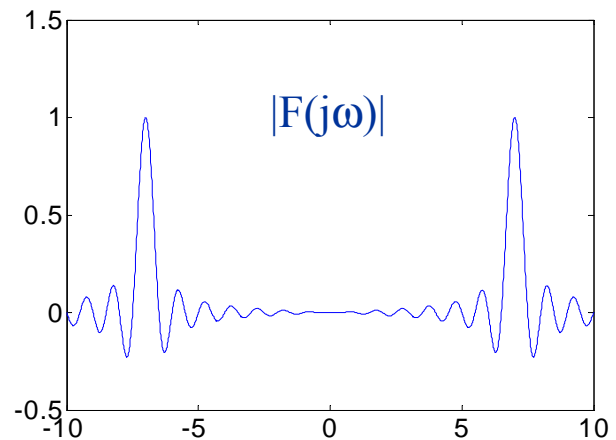
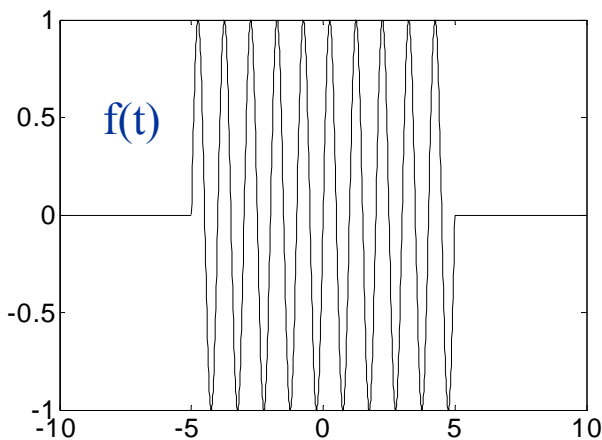
Se:

$$f(t) = \sin(\omega_0 t) \{1(t+a) - 1(t-a)\}$$

Succede che:

$$\begin{aligned} f(t) &\rightarrow \int_{-a}^a \sin(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-a}^a \left(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{j2} \right) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{j2} \left[\frac{e^{-j(\omega - \omega_0)t}}{-j(\omega - \omega_0)} \right]_{-a}^a - \frac{1}{j2} \left[\frac{e^{-j(\omega + \omega_0)t}}{-j(\omega + \omega_0)} \right]_{-a}^a = \\ &= \frac{1}{j2} \left\{ \left[\frac{2 \sin[(\omega - \omega_0)a]}{(\omega - \omega_0)} \right] - \left[\frac{2 \sin[(\omega + \omega_0)a]}{(\omega + \omega_0)} \right] \right\} \end{aligned}$$

Vale a dire che la funzione seno si ‘sparpaglia’ quando viene limitata.



Es.:

Valutiamo la trasformata di Fourier del segnale Gaussiano:

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \longleftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - st} dt$$

Innanzitutto osserviamo che $f(t)$ è una funzione pari. Per le proprietà viste sulla trasformata di Fourier deve essere verificato che $F(s) \in \mathfrak{R}$.

vediamo di semplificare:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t^2 + 2\sigma^2 st + \sigma^4 s^2 - \sigma^4 s^2)} dt = e^{-\frac{\sigma^2}{2}\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t + \sigma^2 s)^2} dt$$

Ora applichiamo la proprietà che $F(s) \in \mathfrak{R}$. Deve anche $\in \mathfrak{R}$ la funzione:

$$G(s) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t + \sigma^2 s)^2} dt$$

A questo punto basta porre $u = t + \sigma^2 s$, ovvero $du = dt$:

$$G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}u^2} du = \sigma\sqrt{2\pi}$$

In definitiva:

$$F(s) = \sigma \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\omega^2}$$

La proprietà della funzione Gaussiana rimane inalterata nel passaggio al dominio delle frequenze: la forma della funzione non cambia.

Al sola particolarità è che essendo un cambiamento della variabile t nella variabile $\omega=1/(2\pi t)$, il coefficiente moltiplicativo di t nell'esponenziale diviene il reciproco nel dominio delle frequenze.

Questo indica che la funzione gaussiana è così regolare che lo spettro delle sue componenti in frequenza sono distribuite con la stessa modalità del segnale temprale nel dominio del tempo.

Il teorema del campionamento

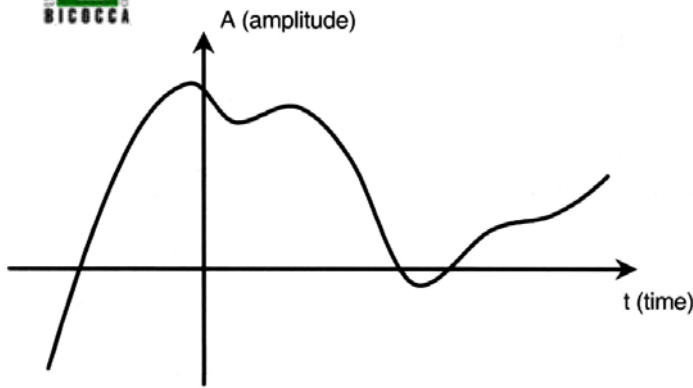


FIGURE 3.7a. Analog signal to be sampled

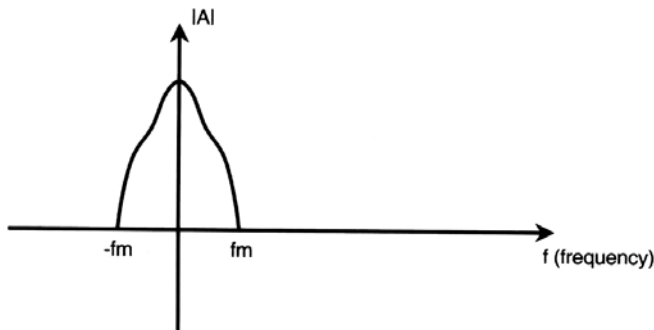


FIGURE 3.7b. Frequency spectrum of analog signal

Quanto dovrà essere il minimo intervallo di tempo a cui campionare il segnale per poterlo ricostruire?

Nell'ipotesi che il segnale abbia una larghezza di banda finita, ovvero che il suo spettro di frequenza non si estende all' ∞ , è possibile stabilire un criterio ben preciso.

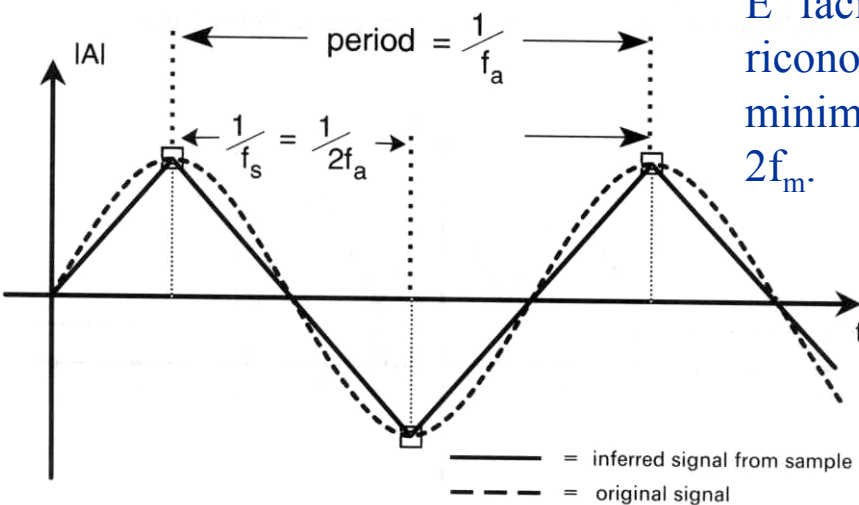
La dimostrazione del criterio può essere svolta in modo rigoroso.

In modo empirico possiamo ragionare considerando lo spettro di frequenza sovrapposto da molte sinusoidi. Sia f_m la massima frequenza.

E' facile intuire che per potere riconoscere in modo completo f_m il minimo passo di campionamento è $2f_m$.

$1/2f_m$ è il più grande passo di campionamento che consente di riconoscere f_m senza ambiguità.

Ovviamente un campionamento più fitto consentirebbe una risoluzione migliore.


FIGURE 3.8b. Sampling at $f_s = 2f_a$

Di fatto il teo del campionamento stabilisce che è possibile ricostruire in modo completo il segnale a partire dalla funzione:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x(nT_s) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T_s}(t - nT_s)\right)}{\frac{\pi}{T_s}(t - nT_s)} \right], \quad T_s = \text{intervallo di campionamento}$$

Nel dominio delle frequenze la funzione considerata corrisponde al prodotto della trasformata di Fourier del segnale con la funzione filtro costante da $-2f_m$ a $2f_m$, nulla al di fuori. Vale a dire che è come se si fosse passato il segnale per il blocco:

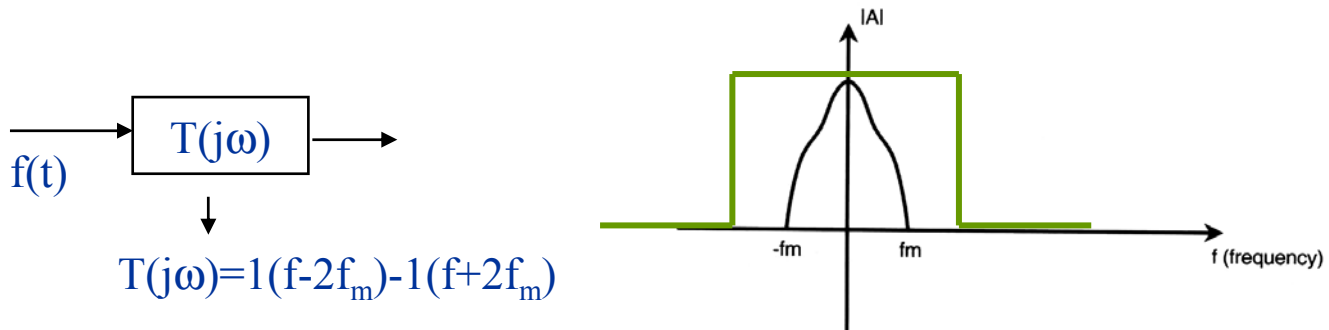


FIGURE 3.7b. Frequency spectrum of analog signal

Il problema si pone anche per l'estremo opposto. Quanto tempo dobbiamo campionare per non perdere le informazioni di bassa frequenza?

Agiamo per induzione: campionando a intervalli regolari T_s si riconosce la frequenza $1/2T_s$. Campionando a $2T_s$ si riconosce la frequenza $1/4T_s, \dots$

Campionando a $T=nT_s$, riconoscerà la frequenza $\Delta f=1/2T$. Quindi se T è il tempo di acquisizione del segnale, nel dominio della frequenza si ottiene una sensibilità minima Δf :

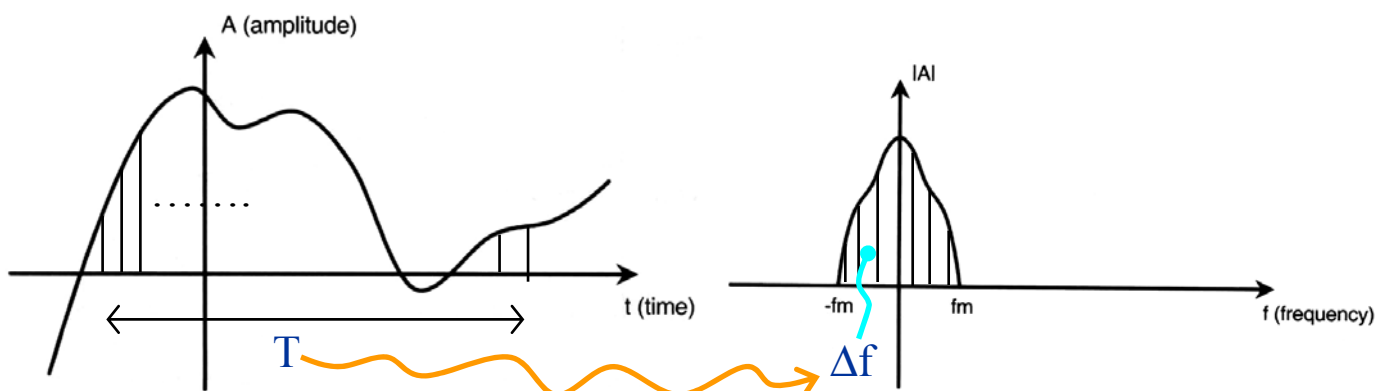


FIGURE 3.7a. Analog signal to be sampled

FIGURE 3.7b. Frequency spectrum of analog signal

L'acquisizione di un segnale deve perciò seguire un compromesso tra campionamento fitto e tempi lunghi di acquisizione. Le 2 cose sono in contrasto con la pratica perché si richiederebbe un grande consumo di memoria acquisire tanti campioni per un tempo lungo.

Cosa non abbiamo trattato e non tratteremo della Analisi di Fourier:

- La serie di Fourier;
- L'analisi dei segnali periodici e delle funzioni troncate;
- La FFT, ovvero la Fast Fourier Transform.

Cosa non abbiamo trattato e tratteremo della Analisi di Fourier:

- L'analisi del rumore, teorema di Parseval, ecc.

Sebbene le funzioni che si riescano a studiare con Fourier siano molte resta comunque limitato il campo delle funzioni per cui esista la trasformata. Un modo che si usa per ovviare a questo inconveniente è quello di limitare la funzione nel tempo, cosa che si fa nei sistemi di acquisizione.

Un altro metodo è quello di ‘filtrare’ la funzione in considerazione in modo da lasciare inalterata la parte di interesse.

Sicuramente l’insieme delle funzioni analizzabili cresce enormemente se, ad esempio, per una funzione nulla per $t < 0$ consideriamo la nuova funzione:

$$f(t)e^{-\alpha t} \quad \text{dove } \alpha \text{ sia opportuno.}$$

Es. $f(t) = x^n 1(t) \xrightarrow{\text{green arrow}} x^n e^{-\alpha t}$ risulta assolutamente integrabile per qualsiasi $\alpha > 0$.

Possiamo considerare la trasformata di Fourier di $f(t)e^{-\alpha t}$

$$f(t)e^{-\alpha t} \rightarrow \int_0^{\infty} f(t)e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j(\omega + \alpha)t} dt = F(\alpha + j\omega) = F(s)$$

$$s = \alpha + j\omega$$

 $F(s)$ è detta trasformata di LAPLACE di $f(t)$

Infatti:

$$f(t)e^{-\alpha t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \stackrel{s = \alpha + j\omega}{=} \frac{1}{j2\pi} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(s) e^{st} e^{-\alpha t} ds$$

 $f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(s) e^{st} ds$ L’integrale non dipende da α .

TRASFORMATA DI LAPLACE, 2

Per essere più rigorosi:

Data una $f(t)$ genericamente continua in $(0, +\infty)$ si dice trasformata di LAPLACE $F(p)$ della variabile complessa $p = \alpha + j\omega$ la funzione per la quale sia possibile trovare un valore α_c di α per cui esiste:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

La quantità α_c è detta ‘ascissa di convergenza’ ed è il minimo valore di α per cui l’integrale esista.

Sotto tali condizioni vale la relazione inversa:

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(p) e^{pt} dp \quad \alpha > \alpha_c$$
$$0 \quad \text{per } t < 0$$

L’integrale non dipende dalla scelta di α , purché $\alpha > \alpha_c$

Fortunatamente la grande parte delle proprietà godute dalla Trasformata di Fourier restano valide anche per la Trasformata di LAPLACE, con anche meno restrizioni.

La traslazione temporale rimane valida:

$$f(t - T)l(t - T) \rightarrow e^{-pT}F(p) \quad e \quad f(t)l(t)e^{ct} \rightarrow F(p - c)$$

Il teorema di derivazione:

$$\frac{df}{dt} \rightarrow pF(p) - f(0^+) \quad \text{ma :} \quad \frac{d(f(t)l(t))}{dt} \rightarrow pF(p)$$

E così pure per le derivate di ordine superiore.

Il teorema dell'integrale:

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \rightarrow \frac{1}{p}F(p)$$

Il teorema di convoluzione resta valido pur di limitare a t il limite superiore dell'integrale:

$$f(t) * h(t) = \int_0^t f(\tau)h(t - \tau)d\tau \rightarrow F(p)H(p)$$

Interessante:

$$f(t) * h(t) \rightarrow F(p)H(p) = H(p)F(p) \rightarrow h(t) * f(t)$$

Inoltre abbiamo il teorema dei limiti:

$$\begin{array}{ll} \text{Caso 1} & \left\{ \begin{array}{l} f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) \\ f(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \end{array} \right. \text{ se } \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} dt \text{ esiste} \\ \text{Caso 2} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad \text{per parti} = -f(t) \frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{p} f(0^+) + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} e^{-pt} dt \end{aligned}$$

Quindi:

$$\text{Caso 1} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0^+) + \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} e^{-pt} dt = f(0^+)$$

$$\text{Caso 2} \quad \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = f(0^+) + \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} e^{-pt} dt = f(0^+) + \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} dt =$$

se l'integrale
esiste

$$= f(0^+) + f(+\infty) - f(0^+) = f(+\infty)$$

Proprietà importante:

Vale che: $\frac{d^n(f(t)l(t))}{dt^n} \rightarrow p^n F(p)$ ma anche che:

$$\frac{d^n F(p)}{dp^n} \rightarrow (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-pt} dt$$

Di conseguenza:

$$t^n f(t)l(t) \rightarrow (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}$$

IMPORTANTISSIMO:

$$f(t) = e^{-t/\tau} l(t), \tau > 0 \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-(p+1/\tau)t} dt \Rightarrow F(p) = \frac{1}{p + 1/\tau}$$

$$te^{-t/\tau} l(t) \rightarrow (-1)^1 \frac{-1}{(p + 1/\tau)^2}$$

$$t^2 e^{-t/\tau} l(t) \rightarrow (-1)^2 \frac{2}{(p + 1/\tau)^3}$$

$$t^3 e^{-t/\tau} l(t) \rightarrow (-1)^3 \frac{-6}{(p + 1/\tau)^4}$$

...

$$t^n e^{-t/\tau} l(t) \rightarrow (-1)^n \frac{(-1)^n n!}{(p + 1/\tau)^{n+1}}$$

$$t^n e^{-t/\tau} l(t) \rightarrow \frac{n!}{(p + 1/\tau)^{n+1}}$$

Impedenza complessa di un condensatore:

$$V(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' \quad \longrightarrow \quad V(s) = \frac{1}{sC} i(s)$$

Per questa ragione nel dominio delle frequenze si definisce per il condensatore l'impedenza complessa:

$$Z = \frac{1}{sC}$$

Impedenza complessa di un induttore:

$$V(t) = L \frac{di}{dt} \quad \longrightarrow \quad V(s) = sL i(s)$$

Per questa ragione nel dominio delle frequenze si definisce per l'induttore l'impedenza complessa:

$$Z = sL$$



Siccome i circuiti elettronici ed i modelli dei componenti elettronici sono basati sull'impiego di Resistenze, Condensatori ed Induttanze, le soluzioni delle reti di nostro interesse coinvolgono derivate ed integrali.

Operando nel dominio delle frequenze queste equazioni differenziali vengono tutte trasformate in equazioni algebriche che forniscono come risultato rapporto tra polinomi.

Gradino:

$$f_1(t) = 1(t) \quad \text{ed anche } f_2(t) = 1(t - T)$$

$$F_1(p) = \int_0^{+\infty} 1(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p} \quad \alpha_c > 0$$

$$F_2(p) = e^{-pT} F_1(p) = \frac{e^{-pT}}{p}$$

Quindi:

$$f_3(t) = 1(t - T_1) - 1(t - T_2)$$

fornisce:

$$F_3(p) = \frac{1}{p} (e^{-pT_1} - e^{-pT_2})$$

In particolare:

$$f_4(t) = at 1(t) \quad \text{è l'f di } a 1(t)$$

quindi:

$$F_4(p) = \frac{1}{p} \text{Tras}(a 1(t)) = \frac{1}{p} \frac{a}{p} = \frac{a}{p^2}$$

Da: $f_S(t) = \sin(\omega_0 t)l(t)$

Otteniamo:

$$\begin{aligned} F_S(p) &= \int_0^{+\infty} \sin(\omega_0 t)l(t)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{j\omega_0 t} e^{-pt}}{j2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-j\omega_0 t} e^{-pt}}{j2} dt = \\ &= \frac{1}{j2} \left[-\frac{e^{-(p-j\omega_0)t}}{p-j\omega_0} + \frac{e^{-(p+j\omega_0)t}}{p+j\omega_0} \right]_0^{+\infty} = \alpha_c > 0 \\ &= \frac{1}{j2} \left[\frac{1}{p-j\omega_0} - \frac{1}{p+j\omega_0} \right] = \frac{1}{j2} \left[\frac{p+j\omega_0 - (p-j\omega_0)}{p^2 + \omega_0^2} \right] = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

In particolare:

$f_C(t) = \cos(\omega_0 t)l(t)$ lo deriviamo da:

$$\begin{aligned} \frac{d(\sin(\omega_0 t)l(t))}{dt} &= \omega_0 \cos(\omega_0 t)l(t) + \sin(0)\delta(t) \Rightarrow \\ \cos(\omega_0 t)l(t) &= \frac{1}{\omega_0} \frac{d(\sin(\omega_0 t)l(t))}{dt} \end{aligned}$$

E quindi:

$$F_C(p) = \frac{1}{\omega_0} p F_S(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$$

NB: Le proprietà che vedremo d'ora in poi sono fondamentali nello studio del comportamento degli amplificatori reazionati.

Riassumendo:

$$(\tau > 0) \quad e^{-t/\tau} 1(t) \leftrightarrow \frac{1}{p + 1/\tau} \quad \text{polo } a : -\frac{1}{\tau} < 0 \text{ Negativo, reale}$$

$$(\tau > 0) \quad e^{t/\tau} 1(t) \leftrightarrow \frac{1}{p - 1/\tau} \quad \text{polo } a : \frac{1}{\tau} > 0 \text{ polo positivo, divergenza}$$

$$\cos(\omega_0 t) 1(t) \leftrightarrow \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} = \frac{p}{(p + j\omega_0)(p - j\omega_0)} \quad \begin{array}{l} \text{2 poli complessi puri } a: \pm j\omega_0. \\ \text{La risposta prosegue} \\ \text{all'infinito se non ci sono} \\ \text{termini dissipativi.} \end{array}$$

Ora consideriamo: $f(t) = \cos(\omega_0 t) e^{-\gamma t} 1(t)$, $\gamma > 0$:

(risposta oscillatoria smorzata)

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-\gamma t} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(j\omega_0 - \gamma)t} e^{-pt}}{2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-j\omega_0 - \gamma)t} e^{-pt}}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{e^{(j\omega_0 - \gamma)t} e^{-pt}}{p + \gamma - j\omega_0} - \frac{e^{(j\omega_0 + \gamma)t} e^{-pt}}{p + \gamma + j\omega_0} \right\}_0^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{p + \gamma - j\omega_0} + \frac{1}{p + \gamma + j\omega_0} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{p + \bar{p}_0} + \frac{1}{p + p_0} \right\} = \frac{1}{2} \frac{p + \gamma + j\omega_0 + p + \gamma - j\omega_0}{p^2 + 2 \operatorname{Re}(p_0)p + |p_0|^2} = \\ &= \frac{p + \gamma}{p^2 + 2 \operatorname{Re}(p_0)p + |p_0|^2} : \end{aligned}$$

poli $a: \pm j\omega_0 - \gamma$. I poli sono complessi e coniugati con parte reale negativa.

TRASFORMATATA DI LAPLACE, 10

Quindi: $f(t) = \cos(\omega_0 t) e^{-\gamma t} 1(t)$ dà luogo a 2 poli complessi coniugati:

$$p_1 = -\gamma + j\omega_0 = p_0 \quad p_2 = \bar{p}_1 = \bar{p}_0$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{p + \gamma - j\omega_0} + \frac{1}{p + \gamma + j\omega_0} \right\} = \frac{p + \gamma}{p^2 + 2 \operatorname{Re}(p_0)p + |p_0|^2}$$

La parte complessa è responsabile della condizione oscillatoria, mentre la parte reale del termine esponenziale. Se il termine esponenziale è negativo la funzione è limitata all'infinito, in caso contrario diverge.

È usuale interpretare l'effetto della parte oscillatoria rispetto a quella esponenziale in termini del rapporto tra parte reale del polo ed il suo modulo:

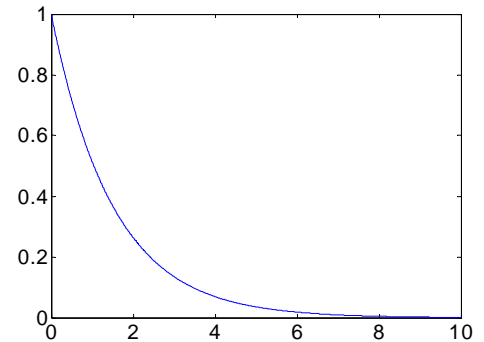
$$\frac{\operatorname{Re}(p_0)}{|p_0|}$$

Se il rapporto è unitario abbiamo solo parte esponenziale, se è nullo abbiamo esclusivamente la parte oscillatoria.

Riassumendo:

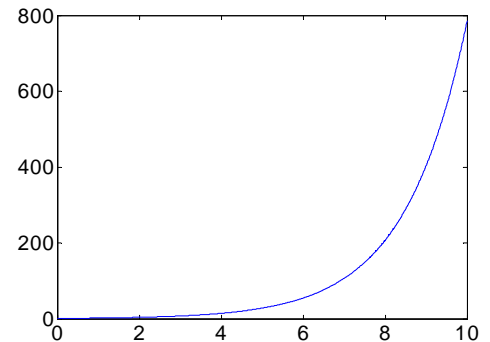
Polo negativo:

$$(\tau > 0) \quad e^{-t/\tau} 1(t) \leftrightarrow \frac{1}{p + 1/\tau} \quad p_0 = -\frac{1}{\tau}$$



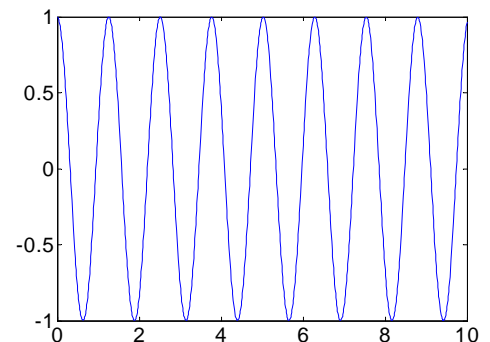
Polo positivo:

$$(\rho < 0) \quad e^{-t/\rho} 1(t) \leftrightarrow \frac{1}{p + 1/\rho} \quad p_0 = -\frac{1}{\rho}$$



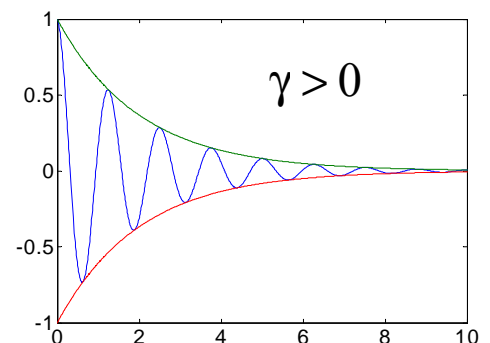
Poli immaginari puri:

$$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} = \frac{p}{(p + j\omega_0)(p - j\omega_0)}$$

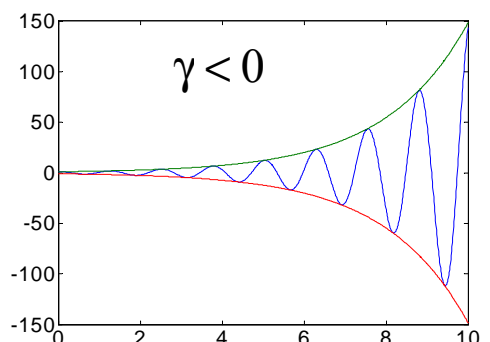


Poli complessi coniugati:

$$f(t) = \cos(\omega_0 t) e^{-\gamma t} 1(t) \leftrightarrow \frac{p + \gamma}{p^2 + 2\text{Re}(p_0)p + |p_0|^2}$$



$$f(t) = \sin(\omega_0 t) e^{-\gamma t} 1(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{p^2 + 2\text{Re}(p_0)p + |p_0|^2}$$



$$p_1 = -\gamma + j\omega_0 = p_0$$

$$p_2 = \overline{p_1} = \overline{p_0}$$

Teorema dei Residui

Abbiamo visto che sappiamo convertire facilmente la funzione di trasferimento o il segnale presente all'uscita della rete se è composta di poli semplici reali o complessi coniugati. Anche nel caso i poli siano multipli siamo in grado di svolgere la conversione.

Per potere ricondurci a questa situazione dobbiamo quindi potere riformulare la funzione di trasferimento o il segnale presente all'uscita della rete ad una somma di termini elementari.

Sappiamo che la funzione che otterremo sarà un rapporto tra polinomi. Nel caso reale si ottiene poi quasi esclusivamente che il grado del numeratore è minore o uguale a quello del denominatore.

Il nostro obiettivo è perciò quello di arrivare a:

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_n}{(p-p_n)^\gamma} \quad \text{con } \text{Grado}(N) < \text{Grado}(D)$$

I caso) I poli siano tutti semplici, reali o complessi coniugati.

$$(p-p_1) \frac{N(p)}{D(p)} = A_1 + \frac{A_2}{p-p_2} (p-p_1) + \dots + \frac{A_n}{(p-p_n)^\gamma} (p-p_1)$$

Per cui:

$$A_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} (p-p_1) \frac{N(p)}{D(p)}$$

In genere:

$$A_i = \lim_{p \rightarrow p_i} (p-p_i) \frac{N(p)}{D(p)}$$

II Caso) Presenza di poli multipli:

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_k)(p-p_m)^\gamma} \quad \gamma + k = \text{Grado}(D)$$

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \cdots + \frac{A_k}{p-p_k} + \frac{B_1}{(p-p_m)^1} + \frac{B_2}{(p-p_m)^2} + \cdots + \frac{B_\gamma}{(p-p_m)^\gamma}$$

Quindi:

$$(p-p_m)^\gamma \frac{N(p)}{D(p)} = \left[\frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \cdots + \frac{A_k}{p-p_k} \right] (p-p_m)^\gamma + \left[\frac{B_1}{(p-p_m)^1} + \frac{B_2}{(p-p_m)^2} + \cdots \right] (p-p_m)^\gamma + B_\gamma$$

Ovvero:

$$B_\gamma = \lim_{p \rightarrow p_m} (p-p_m)^\gamma \frac{N(p)}{D(p)}$$

Ma:

$$(p-p_m)^\gamma \frac{N(p)}{D(p)} = \left[\frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \cdots + \frac{A_k}{p-p_k} \right] (p-p_m)^\gamma + B_1(p-p_m)^{\gamma-1} + B_2(p-p_m)^{\gamma-2} + \cdots + B_{\gamma-1}(p-p_m) + B_\gamma$$

Deriviamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \left[(p - p_m)^\gamma \frac{N(p)}{D(p)} \right] &= \left[\sum_{i=1}^k \frac{A_i}{p - p_i} \right] \gamma (p - p_m)^{\gamma-1} + (p - p_m)^\gamma \frac{d}{dp} \left[\sum_{i=1}^k \frac{A_i}{p - p_i} \right] \\ &\quad + (\gamma - 1) B_1 (p - p_m)^{\gamma-2} + (\gamma - 2) B_2 (p - p_m)^{\gamma-3} + \dots \\ &\quad + B_{\gamma-1} \end{aligned}$$

Quindi:

$$B_{\gamma-1} = \lim_{p \rightarrow p_m} \frac{d}{dp} \left[(p - p_m)^\gamma \frac{N(p)}{D(p)} \right]$$

Ovvero, per induzione:

$$B_k = \lim_{p \rightarrow p_m} \frac{1}{(\gamma - k)!} \frac{d^{(\gamma-k)}}{dp^{(\gamma-k)}} \left[(p - p_m)^\gamma \frac{N(p)}{D(p)} \right]$$

Ricordiamo che: i poli, e zeri, possono essere complessi. Essendo i poli e zeri radici di equazioni polinomiali a coefficienti reali, non possono che essere complessi e coniugati.

Non solo, mai coefficienti delle razionalizzazioni che si ottengono con il teorema dei residui devono essere anche loro complessi e coniugati.

Richiamo sui poli multipli reali e cc

Per un polo multiplo reale vale la regola già vista:

$$t^n e^{-t/\tau} 1(t) \leftrightarrow \frac{n!}{(p + 1/\tau)^{n+1}}$$

Per un polo multiplo complesso coniugato si ripete sostanzialmente lo stesso procedimento. Per esso avremo che:

$$\begin{aligned} \frac{N(p)}{D(p)} = & \dots + \frac{B_1}{(p - p_c)^1} + \frac{B_2}{(p - p_c)^2} + \dots + \frac{B_\gamma}{(p - p_c)^\gamma} \dots + \\ & + \frac{\bar{B}_1}{(p - \bar{p}_c)^1} + \frac{\bar{B}_2}{(p - \bar{p}_c)^2} + \dots + \frac{\bar{B}_\gamma}{(p - \bar{p}_c)^\gamma} + \dots \end{aligned}$$

Consideriamo il k-esimo elemento:

$$\frac{B_k}{(p - p_c)^k} + \frac{\bar{B}_k}{(p - \bar{p}_c)^k}$$

Ma:

$$\frac{B_k}{(p - p_c)^k} \leftrightarrow \frac{B_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_c t} \quad \frac{\overline{B_k}}{(p - \overline{p_c})^k} \leftrightarrow \frac{\overline{B_k}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\overline{p_c} t}$$

Posto: $p_c = \alpha + j\beta$

$$\begin{aligned} \frac{B_k}{(p - p_c)^k} + \frac{\overline{B_k}}{(p - \overline{p_c})^k} &\leftrightarrow |B_k| e^{j\Theta_B} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\alpha t} e^{j\beta t} + \\ &+ |B_k| e^{-j\Theta_B} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\alpha t} e^{-j\beta t} = \\ &= |B_k| e^{\alpha t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \left[e^{j(\beta t + \Theta_B)} + e^{-j(\beta t + \Theta_B)} \right] \frac{2}{2} = \\ &= 2|B_k| e^{\alpha t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \cos(\beta t + \Theta_B) \end{aligned}$$

Considerazioni:

Per potere trasformare il rapporto nella forma:

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_n}{(p-p_n)^k} \quad \text{con } \text{Grado}(N) < \text{Grado}(D)$$

(Questa rappresentazione prevede che valga che: $\text{Grado}(N) \leq \text{Grado}(D) - 1$)

Nel caso $\text{Grado}(N) < \text{Grado}(D)$:

$$\begin{aligned} \frac{N(p)}{D(p)} &= \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0} = \\ &= \frac{a_m}{b_n} \frac{p^m + (a_{m-1}/a_m) p^{m-1} + \dots + (a_0/a_m)}{p^n + (b_{n-1}/b_n) p^{n-1} + \dots + (b_0/b_n)} = \\ &= \frac{a_m}{b_n} \frac{(p-z_m)(p-z_{m-1}) \dots (p-z_1)}{(p-p_n)(p-p_{n-1}) \dots (p-p_1)} \end{aligned}$$

Inoltre se $\text{Grado}(N) = \text{Grado}(D)$ bisogna isolare in qualche modo un termine in p al numeratore:

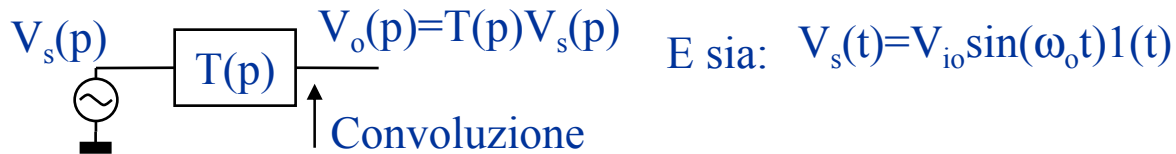
Caso 1)

$$\begin{aligned} \frac{N(p)}{D(p)} &= \frac{p N_R(p)}{(p-p_n)(p-p_{n-1}) \dots (p-p_1)} = \\ &= p \frac{N_R(p)}{(p-p_n)(p-p_{n-1}) \dots (p-p_1)} \quad \text{con } \text{Gra.}(N_R) < \text{Gra.}(D) \end{aligned}$$

Caso 2)

$$\begin{aligned} \frac{N(p)}{D(p)} &= \frac{(p-z_n) N_R(p)}{(p-p_n)(p-p_{n-1}) \dots (p-p_1)} = \\ &= (p-z_n) \frac{N_R(p)}{(p-p_n)(p-p_{n-1}) \dots (p-p_1)} \quad \text{con } \text{Gra.}(N_R) < \text{Gra.}(D) \end{aligned}$$

Regime sinusoidale



$$V_o(p) = T(p)V_s(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \text{Tras.}(\sin(\omega_o t)V_{io}) = \frac{N(p)}{D(p)} \frac{V_{io}\omega_o}{p^2 + \omega_o^2}$$

Consideriamo il caso in cui $T(p)$ mostri una risposta finita alla $\delta(t)$, ovvero che non presenti poli con parte Reale >0 e, possibilmente, non abbia poli puramente immaginari.

$$V_o(p) = T(p) \frac{V_{io}\omega_o}{(p + j\omega_o)(p - j\omega_o)} = \left[\begin{array}{l} \text{Termini t.c. la} \\ \text{risposta} \rightarrow 0 \\ \text{per } t \rightarrow \infty \end{array} \right] + \left[\frac{A}{(p - j\omega_o)} + \frac{\bar{A}}{(p + j\omega_o)} \right]$$

$$\text{Dove: } A = \lim_{p \rightarrow j\omega_o} \frac{V_{io}T(p)\omega_o}{(p + j\omega_o)} = \frac{V_{io}T(j\omega_o)}{2j}$$

$$\bar{A} = \lim_{p \rightarrow -j\omega_o} \frac{V_{io}T(p)\omega_o}{(p - j\omega_o)} = \frac{V_{io}T(-j\omega_o)}{-2j}$$

Quindi:

$$V_o(p) = \frac{V_{io}}{2j} \left[-\frac{T(-j\omega_o)}{(p + j\omega_o)} + \frac{T(j\omega_o)}{(p - j\omega_o)} \right]$$

Ovviamente ci aspettiamo che i 2 coefficienti siano CC, infatti:

$$T(\bar{p}) = \bar{T}(p) \text{ da cui segue che :}$$

$$T(-j\omega_o) = T^*(j\omega_o) \text{ e } T^*(-j\omega_o) = T(j\omega_o)$$

$$T(j\omega_o) = |T(j\omega_o)|e^{j\phi(T(j\omega_o))}$$

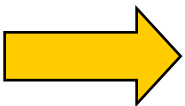
$$T(-j\omega_o) = T^*(j\omega_o) = |T(j\omega_o)|e^{-j\phi(T(j\omega_o))}$$

$$V_o(p) = \frac{V_{io}}{2j} \left[-\frac{T(-j\omega_o)}{(p + j\omega_o)} + \frac{T(j\omega_o)}{(p - j\omega_o)} \right] =$$

$$= \frac{V_{io}}{2j} |T(-j\omega_o)| \left[-\frac{e^{-j\phi(T(j\omega_o))}}{(p + j\omega_o)} + \frac{e^{j\phi(T(j\omega_o))}}{(p - j\omega_o)} \right] =$$

$$V_o(t) = V_{io} |T(j\omega_o)| \left[-\frac{e^{-j\phi(T(j\omega_o))} e^{-j\omega_o t} - e^{j\phi(T(j\omega_o))} e^{j\omega_o t}}{2j} \right]$$

$$V_o(t) = V_{io} |T(j\omega_o)| \sin(\omega_o t + \phi(T(j\omega_o)))$$



Fatto fondamentale. Eccitando un sistema avente trasformata $T(p)$ con un segnale sinusoidale puro, di frequenza ω_o , si ottiene come risposta un segnale sinusoidale avente la stessa frequenza, ma con uno sfasamento che dipende dalla fase di $T(p)$, valutata a $j\omega_o$, ed ampiezza che diviene proporzionale al modulo di $T(j\omega)$.

Abbiamo ottenuto la ‘proiezione’ di $T(p)$ sulla sinusoide alla frequenza ω_o .

In sostanza si possono desumere tutte le informazioni sui poli e sugli zeri.

Questa proprietà è importantissima perché consente di fare una ‘radiografia’ della funzione di trasferimento utilizzando il regime sinusoidale.

Regime sinusoidale se $T(p)$ ha poli con parte reale > 0 :

In questo caso la risposta alla sinusoide a regime divergerà comunque verso una delle tensioni di alimentazione dell'amplificatore.

Regime sinusoidale se $T(p)$ ha una coppia di poli CC immaginari puri:

In questo caso $T(p)$ possiamo esprimerla come:

$$T(p) = f(p) + \frac{B}{p + j\omega_p} + \frac{\bar{B}}{p - j\omega_p}$$

Quindi:

$$V_o(p) = \left\{ f(p) + \frac{B}{p + j\omega_p} + \frac{\bar{B}}{p - j\omega_p} \right\} \frac{V_{i0} \omega_o}{(p - j\omega_o)(p + j\omega_o)}$$

Perciò la risposta globale sarà data da dei termini (contenuti in $f(p)$) che si annulleranno a regime e la sovrapposizione di 2 sinusoidi alle frequenze ω_p e ω_o .

TRASFORMATA DI LAPLACE, 21

RAPPRESENTAZIONE DI BODE

Supponiamo la $T(p)$ espressa da poli e e zeri semplici, per iniziare:

$$T(p) = \frac{\prod_{i=1}^n (p - z_i) \prod_{k=1}^m (p^2 - 2 \operatorname{Re}(z_k)p + |z_k|^2)}{\prod_{i=1}^r (p - p_i) \prod_{k=1}^q (p^2 - 2 \operatorname{Re}(p_k)p + |p_k|^2)}$$

Che può essere razionalizzata in:

$$T(p) = \frac{\prod_{i=1}^n z_i \prod_{k=1}^m |z_k|^2 \prod_{i=1}^n (p/z_i - 1) \prod_{k=1}^m (p^2/|z_k|^2 + 2\xi_k/|z_k|p + 1)}{\prod_{i=1}^r p_i \prod_{k=1}^q |p_k|^2 \prod_{i=1}^r (p/p_i - 1) \prod_{k=1}^q (p^2/|p_k|^2 + 2\chi_k/|p_k|p + 1)}$$

dove:
$$\begin{cases} \xi_k = -\frac{\operatorname{Re}(z_k)}{|z_k|} \\ \chi_k = -\frac{\operatorname{Re}(p_k)}{|p_k|} \end{cases}$$

Chiamiamo g il numero reale:
$$g = \frac{\prod_{i=1}^n z_i \prod_{k=1}^m |z_k|^2}{\prod_{i=1}^r p_i \prod_{k=1}^q |p_k|^2}$$

E' utile e pratica la seguente rappresentazione, che parte dalla notazione:

$$T(j\omega) = |T(j\omega)| e^{j \arg(T(j\omega))}$$

$$\begin{aligned} 20 \log_{10}(|T(j\omega)|) = & 20 \log_{10}|g| + 20 \sum_{i=1}^n \log_{10}|j\omega/z_i - 1| + \\ & + 20 \sum_{k=1}^m \log_{10} \left| 1 - \omega^2/|z_k|^2 + 2\xi_k/|z_k|j\omega \right| - \\ & - 20 \sum_{i=1}^r \log_{10}|j\omega/p_i - 1| - \\ & - 20 \sum_{k=1}^q \log_{10} \left| 1 - \omega^2/|p_k|^2 + 2\chi_k/|p_k|j\omega \right| \end{aligned}$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} 20 \log_{10}(|T(j\omega)|) = & 20 \log_{10}|g| + 20 \sum_{i=1}^n \log_{10} \sqrt{\omega^2/z_i^2 + 1} + \\ & + 20 \sum_{k=1}^m \log_{10} \sqrt{\left[1 - \omega^2/|z_k|^2\right]^2 + [2\xi_k/|z_k|\omega]^2} - \\ & - 20 \sum_{i=1}^r \log_{10} \sqrt{\omega^2/p_i^2 + 1} - \\ & - 20 \sum_{k=1}^q \log_{10} \sqrt{\left[1 - \omega^2/|p_k|^2\right]^2 + [2\chi_k/|p_k|\omega]^2} \end{aligned}$$

Naturalmente l'informazione sul solo modulo non basta. La fase completa le conoscenze necessarie:

$$\begin{aligned}\Phi(T(j\omega)) = & \arg(g) + \sum_{i=1}^n \arg(j\omega/z_i - 1) + \\ & + \sum_{k=1}^m \arg\left(1 - \omega^2/|z_k|^2 + 2\xi_k/|z_k|j\omega\right) - \\ & - \sum_{i=1}^r \arg(j\omega/p_i - 1) - \\ & - \sum_{k=1}^q \arg\left(1 - \omega^2/|p_k|^2 + 2\chi_k/|p_k|j\omega\right)\end{aligned}$$

Ovvero:

$$\begin{aligned}\Phi(T(j\omega)) = & \arg(g) - \sum_{i=1}^n \arctg(\omega/z_i) + \\ & + \sum_{k=1}^m \arctg\left(2\xi_k/|z_k|\omega / \left(1 - \omega^2/|z_k|^2\right)\right) - \\ & + \sum_{i=1}^r \arctg(\omega/p_i) - \\ & - \sum_{k=1}^q \arctg\left(2\chi_k/|p_k|\omega / \left(1 - \omega^2/|p_k|^2\right)\right)\end{aligned}$$

(Attenzione: sia gli Z_i che i p_i hanno segno.)

Comportamento di una funzione avente un polo semplice reale, senza zeri:

$$F(p) = \frac{1}{p/p_i - 1} \quad p_i < 0, \quad p_i \in \mathfrak{R}$$

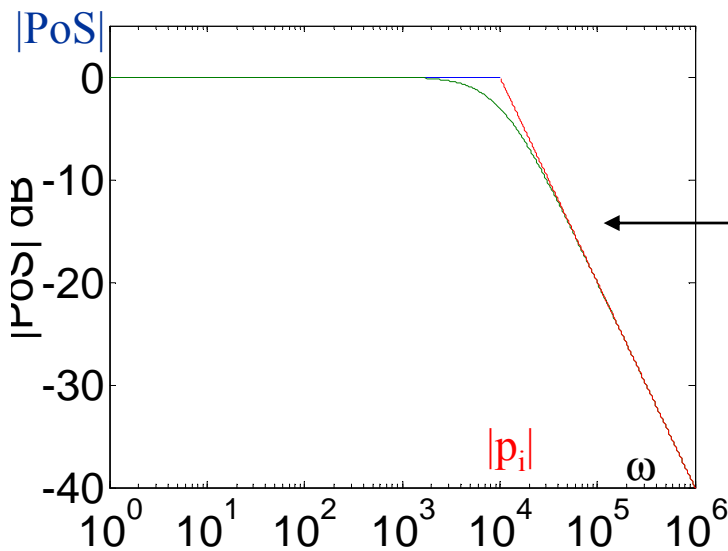
$$PoS = -20 \log_{10} \sqrt{\omega^2/p_i^2 + 1} \quad \Phi PoS = \arctg(\omega/p_i)$$

Punti importanti:

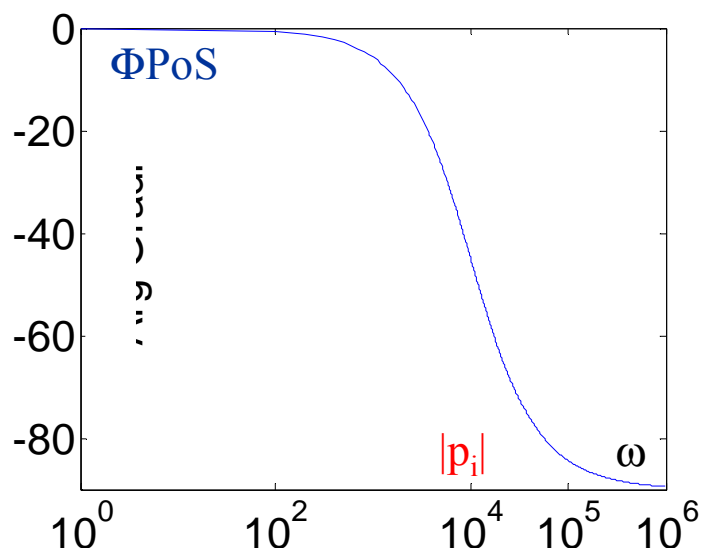
$$\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} PoS = 0 \text{ dB} & (\text{o } 1) \\ \Phi PoS = 0 \end{cases}$$

$$\omega = p_i (< 0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} PoS = -3 \text{ dB} & (\text{o } 0.7 \text{ volte il valore originale}) \\ \Phi PoS = -45^\circ \text{ o } \pi/4 \end{cases}$$

$$\omega = \infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} PoS = -\infty \text{ dB} \\ \Phi PoS = -90^\circ \text{ o } \pi/2 \end{cases}$$



Pendenza:
20 db/dec

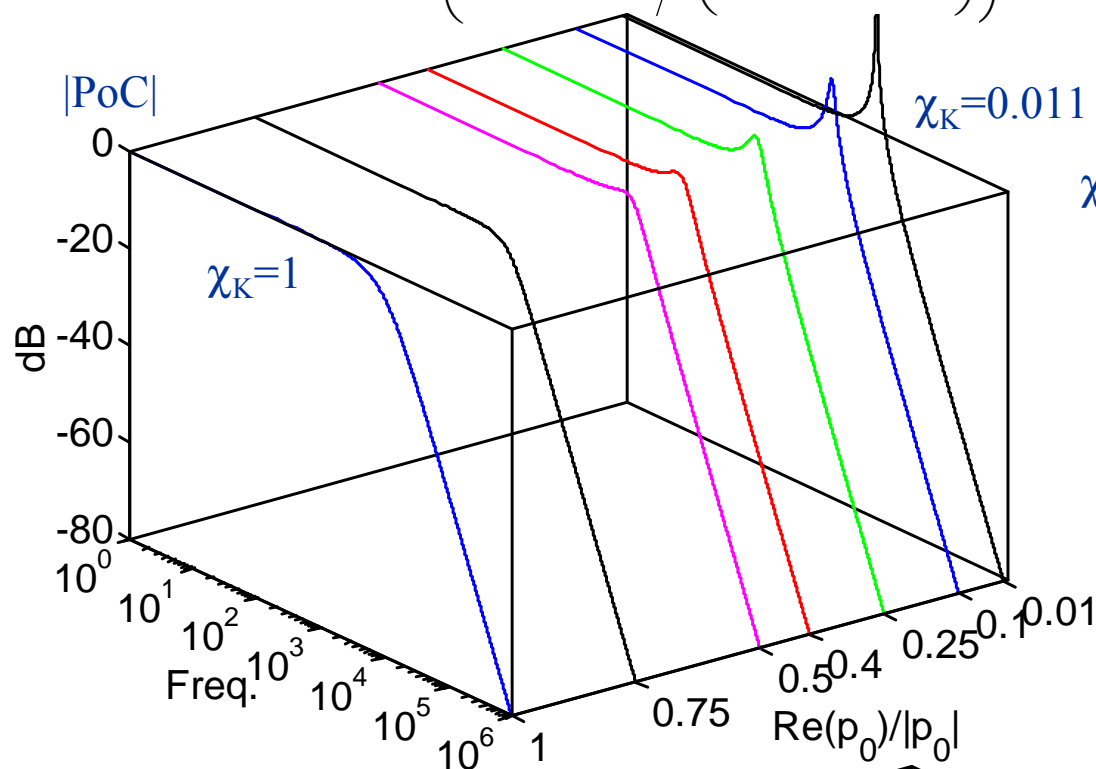


Comportamento di una funzione avente 2 poli CC semplici, senza zeri:

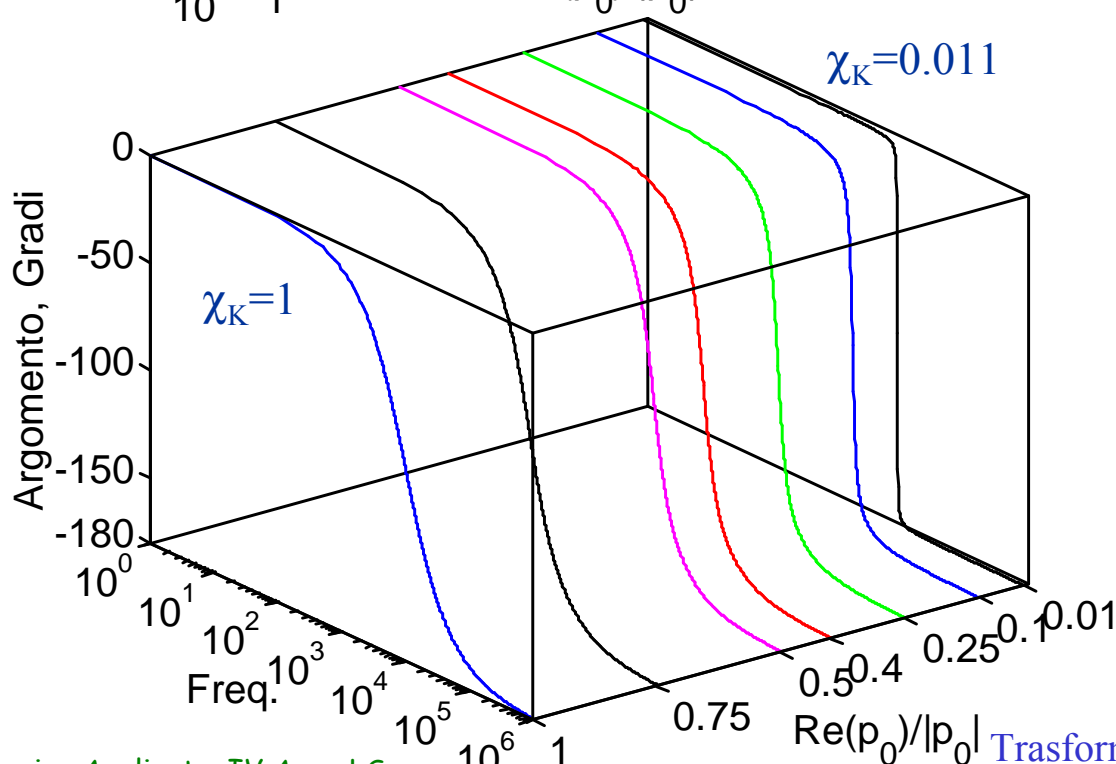
$$PoC = -20 \log_{10} \sqrt{\left[1 - \omega^2 / |p_k|^2\right]^2 + \left[2\chi_k \omega / |p_k|\right]^2}$$

$$\Phi PoC = -\arctg \left(2\chi_k \omega / |p_k| / \left(1 - \omega^2 / |p_k|^2\right) \right)$$

$$\chi_k = -\frac{\text{Re}(p_k)}{|p_k|}$$



χ_k	$PoC(p_k)$
1	-6
.75	-3.5
.5	0
.4	1.9
.25	6
.1	14
.01	34



Torniamo alla risposta di un amplificatore reazionato. Ora dobbiamo pensare che A_R e β possano dipendere dalla frequenza:

$$A_f(p) = \frac{A_R(p)}{1 + \beta(p)A_R(p)}$$

Osserviamo un fatto fondamentale. Sebbene sia $A_R(p)$ che $\beta(p)$ possano avere poli reali e negativi, non è assolutamente detto che:

$$\frac{1}{1 + \beta(j\omega)A_R(j\omega)}$$

soddisfi le stesse condizioni. Anzi, i poli di questa funzione potrebbero essere CC, o anche avere parte reale positiva, se la reazione non fosse adeguatamente progettata.

Possiamo scrivere:

$$\frac{1}{1 + \beta(j\omega)A_R(j\omega)} = \frac{1}{1 + |\beta(j\omega)A_R(j\omega)|e^{j\vartheta(j\omega)}}$$

La tipica condizione critica che si riscontra si ha quando vengono contemporaneamente soddisfatte le 2 condizioni, per una certa frequenza ω_{OS} :

$$|\beta(j\omega_{OS})A_R(j\omega_{OS})| = 1 \quad e \quad \vartheta(j\omega_{OS}) = \pi$$

Infatti in questo caso abbiamo che:

$$1 + |\beta(j\omega)A_R(j\omega)|e^{j\vartheta(j\omega)} = 1 + 1(\cos(\pi) + j\sin(\pi)) = 1 - 1 = 0$$

Questa condizione implica che $A_f(j\omega_{OS}) = \infty$.

L'interpretazione precedente dei possibili effetti del comportamento in frequenza sulla struttura reazionate è la più ovvia.

Però c'è anche un'altra considerazione da tenere in conto, basata sulla conseguenza del contenuto complesso dei poli.

La funzione:

$$1 + \beta(j\omega)A_R(j\omega)$$

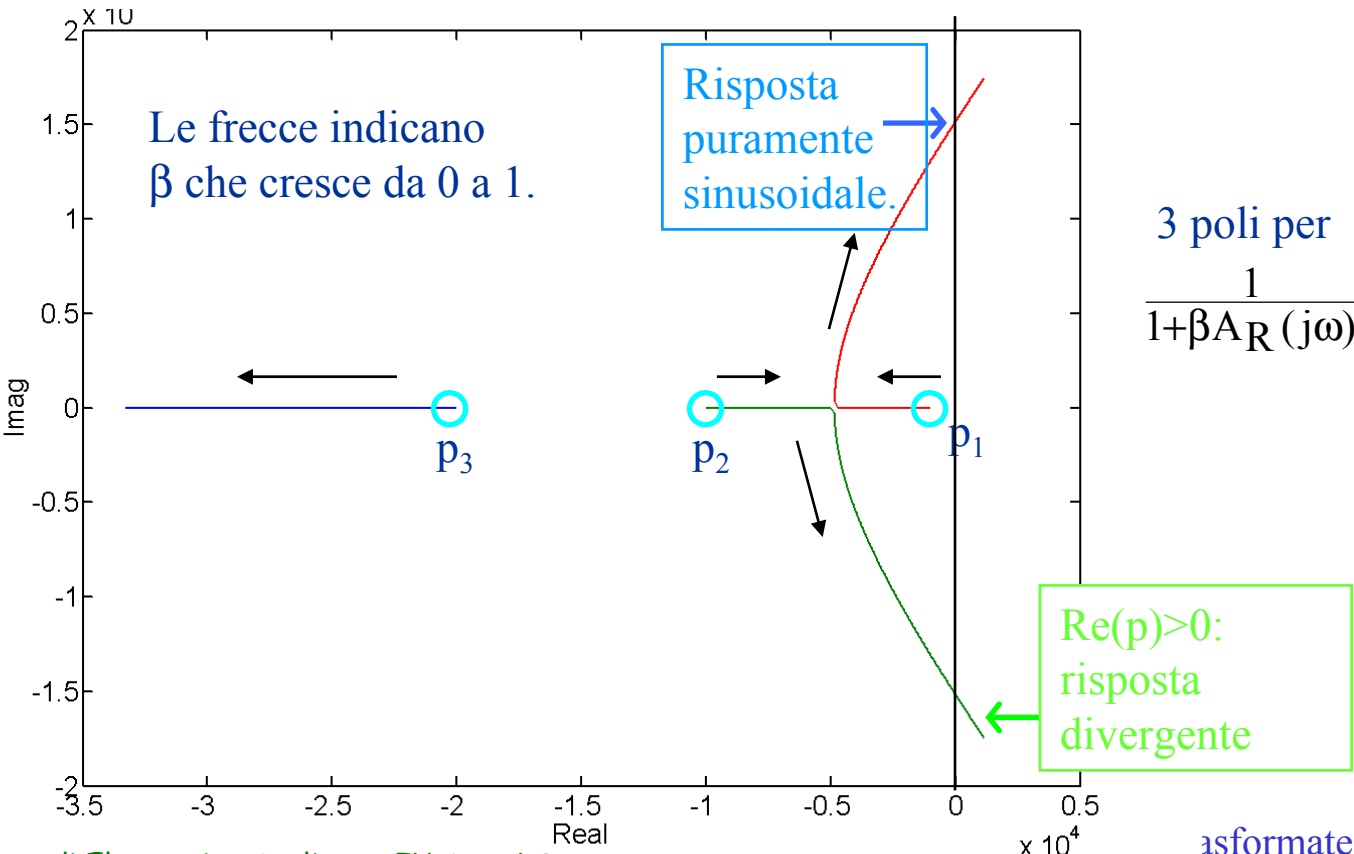
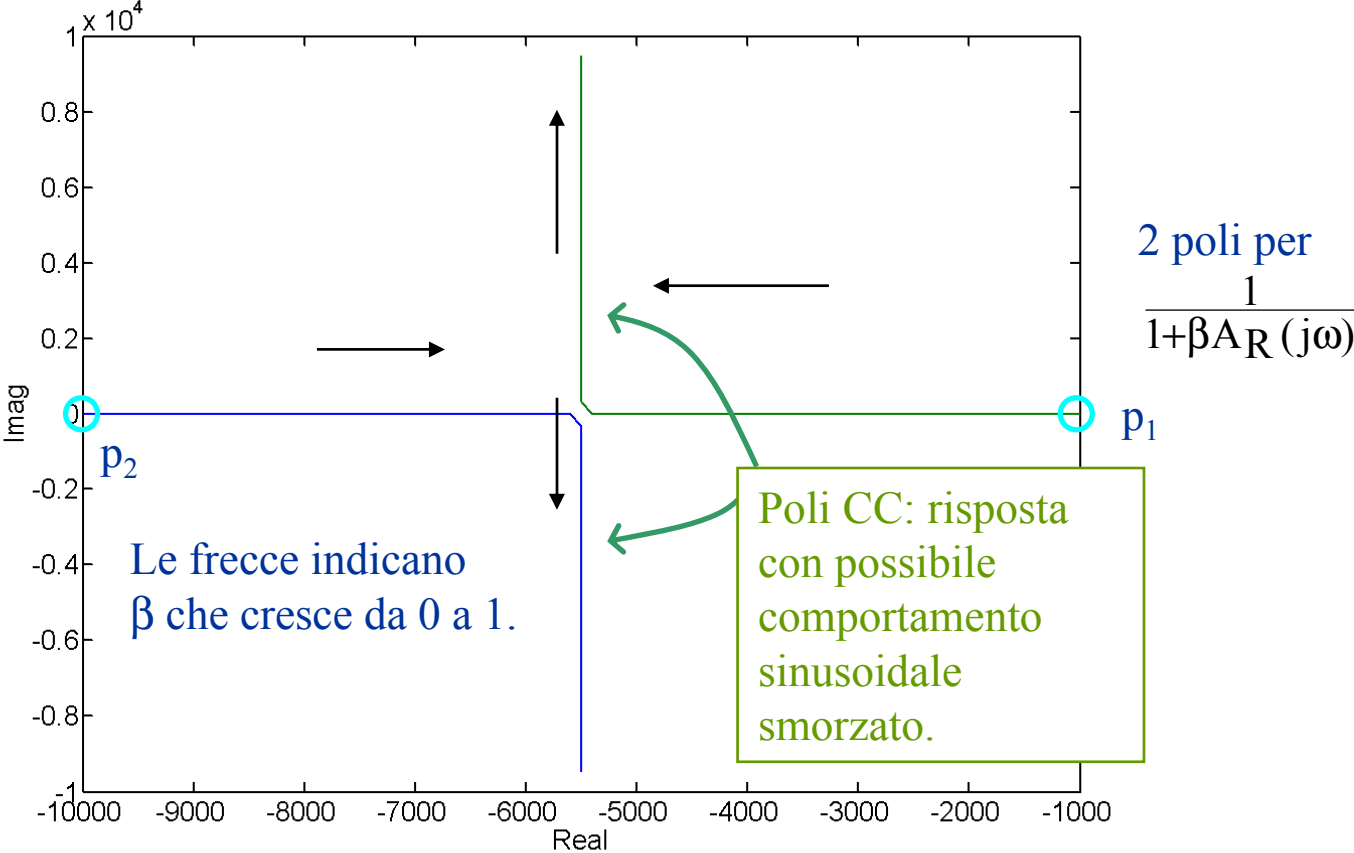
Dopo tutto non è altro che un rapporto tra polinomi. Dal punto di vista della stabilità quello che conta sono i suoi zeri (infatti la funzione in considerazione è a denominatore).

Pertanto, alla luce di quanto visto è fondamentale che la parte reale degli zeri sia negativa, e che la parte complessa sia la più contenuta possibile, in modo da evitare la presenza di effetti oscillatori smorzati accentuati ed indesiderati.

In definitiva, anche se il comportamento in frequenza della rete non fosse l'aspetto fondamentale del progetto, occorre studiare comunque in frequenza il comportamento del denominatore di $A_f(p)$. Essendo il suo denominatore "composto" a priori non si può essere sicuri della regolarità della risposta.

Al riguardo si possono applicare criteri adeguati per costringere il sistema alla risposta desiderata, se non fosse possibile disporre di un AO di caratteristiche dinamiche adeguate ad inizio progetto.

Lo studio dei punti critici di $A_f(j\omega)$ è legato allo studio di $1/[1+\beta(j\omega)A_R(j\omega)]$. Supponiamo, per cominciare, che $\beta \in \mathbb{R}$ e consideriamo i 2 casi in cui $\beta A_R(j\omega)$ abbia 2 o 3 poli reali e negativi. Supponiamo di variare β da valori poco diversi da 0, ovvero quando il sistema comincia ad essere reazionato, ad 1.



Vediamo la corrispondenza nel dominio del tempo dei poli CC:

$$A_f(p) = \frac{1}{\beta} \frac{1}{(p/p_o + 1)(p/\bar{p}_o + 1)}$$

con: $p_o = -\gamma + j\omega_o$ ($\gamma < 0$) (NB: Il polo è a $p = -p_o$)

Consideriamo la risposta alla 1(t) in ingresso: $V_i(t) = 1(t)V_{io}$:

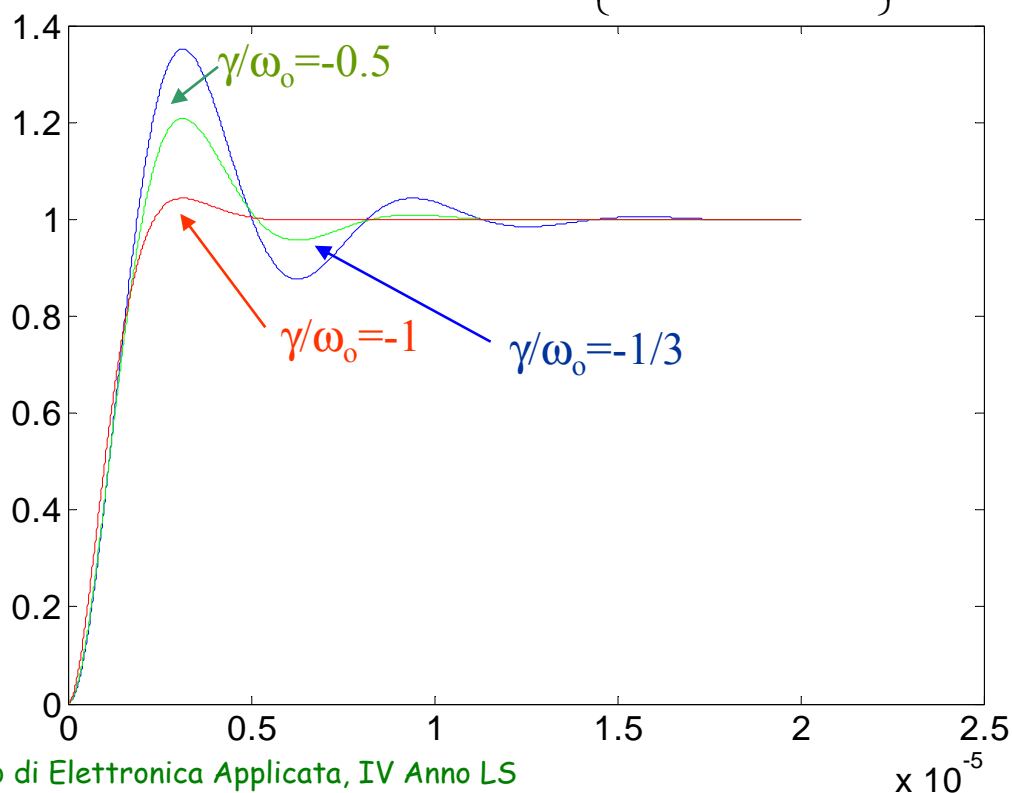
$$V_o(p) = \frac{1}{p} A_f(p) V_{io}$$

L'antitrasformata di questa funzione fornisce un segnale (vedi pag. seguente):

$$V_o(t) = \frac{1}{\beta} \left\{ 1 + \frac{\gamma}{\omega_o} \sin(\omega_o t) e^{\gamma t} - \cos(\omega_o t) e^{\gamma t} \right\} 1(t)$$

Che ha massimo per $\omega_o t = \pi, 3\pi, \dots$ dove si presenta il così detto l'overshot, o sovraelongazione:

$$(a) \quad V_o(\pi/\omega_o) = \frac{1}{\beta} \left\{ 1 + e^{\frac{\gamma}{\omega_o} \pi} \right\} = \frac{1}{\beta} \left\{ 1 + e^{-\frac{\chi}{\sqrt{1-\chi^2}} \pi} \right\} \quad \left(\chi_k = -\frac{\text{Re}(p_k)}{|p_k|} \right)$$



Dimostrazione della relazione **(a)** della pagina precedente:

$$V_o(p) = \frac{1}{\beta} \frac{1}{p} \frac{1}{(p/p_o + 1)(p/\bar{p}_o + 1)} V_{io} = \frac{p_o \bar{p}_o}{\beta} \frac{1}{p} \frac{1}{(p + p_o)(p + \bar{p}_o)}$$

$$= \frac{A}{p} + \frac{B}{p + p_o} + \frac{\bar{B}}{p + \bar{p}_o}$$

$$A = \lim_{p \rightarrow 0} p V_o(p) = \frac{1}{\beta}$$

$$B = \lim_{p \rightarrow -p_o} (p + p_o) V_o(p) = \frac{p_o \bar{p}_o}{\beta} \left(-\frac{1}{p_o} \right) \frac{1}{\bar{p}_o - p_o} = \frac{1}{\beta} \frac{\bar{p}_o}{p_o - \bar{p}_o}$$

$$\bar{B} = \frac{1}{\beta} \frac{p_o}{\bar{p}_o - p_o}$$

Quindi:

$$V_o(p) = \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{p_o - \bar{p}_o} \left[\frac{\bar{p}_o}{p + p_o} - \frac{p_o}{p + \bar{p}_o} \right] \right\} V_{io}$$

Posto:

$$p_o = -\gamma + j\omega_o = |p_o| e^{j\vartheta}, \quad \vartheta = \arctg\left(-\frac{\omega_o}{\gamma}\right) = -\arctg\left(\frac{\omega_o}{\gamma}\right)$$

Nel dominio del tempo è:

$$V_o(t) = \frac{1}{\beta} \left\{ 1 + \frac{|p_o|}{2j\omega_o} e^{\gamma t} \left[e^{-j(\omega_o t + \vartheta)} - e^{j(\omega_o t + \vartheta)} \right] \right\} 1(t) V_{io}$$

$$= \frac{1}{\beta} \left\{ 1 - \frac{|p_o|}{\omega_o} e^{\gamma t} \sin(\omega_o t + \vartheta) \right\} 1(t) V_{io}$$

$$= \frac{1}{\beta} \left\{ 1 - \frac{|p_o|}{\omega_o} e^{\gamma t} [\cos(\vartheta) \sin(\omega_o t) + \sin(\vartheta) \cos(\omega_o t)] \right\} 1(t) V_{io}$$

$$= \frac{1}{\beta} \left\{ 1 - e^{\gamma t} \left[-\frac{\gamma}{\omega_o} \sin(\omega_o t) + \cos(\omega_o t) \right] \right\} 1(t) V_{io}$$

E.Gatti, P.F.Manfredi, A.Rimini Elementi di teoria delle reti lineari
Casa Editrice Ambrosiana 1966

A.Papoulis Signal Analysis
Mc Graw Hill 1984

J.A.Stratton
Teoria dell'Elettromagnetismo
Edizioni Scientifiche Einaudi, 1952, 537.STRJ.TEO/1952BS

L.P.Huelsman
An Introduction to Active and Passive Analog Filter Design
McGraw Hill, 1993, 621.3815324.HUel.ACT/1993

P.H.Horowitz, W.Hill
The Art of Electronics
Cambridge University Press, 1991

La carica immagazzinata in un condensatore è legata alla tensione presente ai suoi capi:

$$Q = CV$$

Essendo la corrente la derivata della carica:

$$I = C \frac{dV}{dT}$$

Nel dominio delle trasformate questa espressione è rappresentata da:

$$I = sCV$$



Stante la proporzionalità si assegna al condensatore un'impedenza complessa:

$$Z_C = \frac{1}{sC}$$

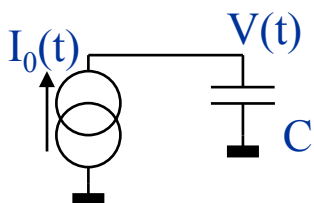
Però abbiamo che:

$$V(t) = V(0) + \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt$$

Come tenere conto della condizione iniziale nel campo delle trasformate?

Consideriamo la funzione:

$$I_0(t) = Q(0^-) \delta(t) = CV(0^-) \delta(t) \Rightarrow I_0(s) = CV(0^-)$$



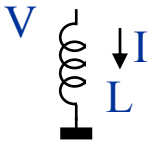
$$V(s) = \frac{1}{sC} I_0(s) = \frac{1}{sC} CV(0^-) = \frac{V(0^-)}{s}$$

Quindi:

$$V(t) = V(0^-) l(t)$$

Per il principio di sovrapposizione ogni altro segnale presente nella rete si aggiungerà alla condizione iniziale considerata.

Il flusso di campo magnetico immagazzinato in un induttore è legato alla corrente che vi circola:



$$\Phi = LI$$

Essendo la forza elettromotrice indotta la derivata del flusso:

$$V = L \frac{dI}{dT}$$

Nel dominio delle trasformate questa espressione è rappresentata da:

$$V = sLI$$



Stante la proporzionalità si assegna all' induttore un' impedenza complessa:

$$Z_L = sL$$

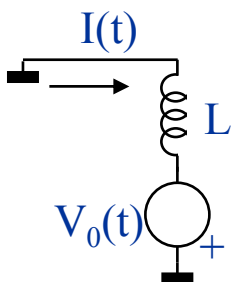
Però abbiamo che:

$$I(t) = I(0) + \frac{1}{L} \int_0^t V(t) dt$$

Come tenere conto della condizione iniziale nel campo delle trasformate?

Consideriamo la funzione:

$$V_0(t) = \Phi(0^-) \delta(t) = LI(0^-) \delta(t) \Rightarrow V_0(s) = LI(0^-)$$

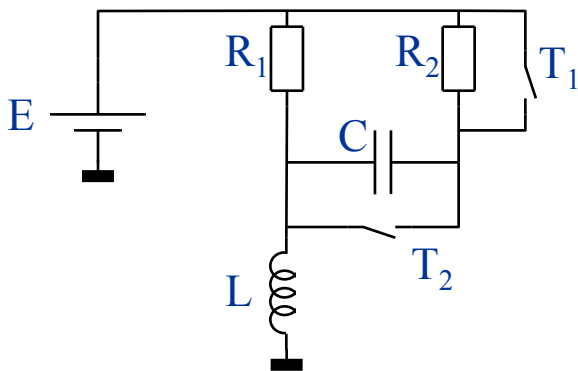


$$I(s) = \frac{1}{sL} V_0(s) = \frac{1}{sL} LI(0) = \frac{I(0^-)}{s}$$

Quindi:

$$I(t) = I(0^-) 1(t)$$

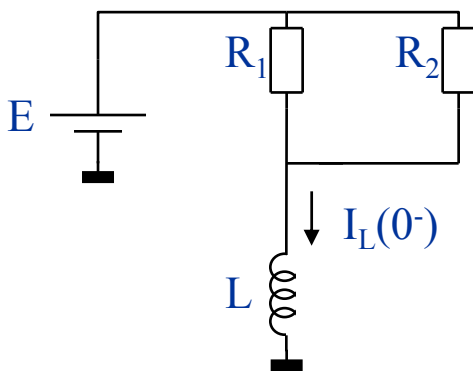
Per il principio di sovrapposizione ogni altro segnale presente nella rete si aggiungerà alla condizione iniziale considerata.



$$\begin{cases} t \leq 0: & T_1 \text{ aperto e } T_2 \text{ chiuso} \\ t > 0: & T_1 \text{ chiuso e } T_2 \text{ aperto} \end{cases}$$

Valutare: $I_L(s)$, $I_L(0^+)$, $I_L(\infty)$ e $V_C(0^+)$.

Per prima cosa dobbiamo valutare le condizioni iniziali, di regime, presenti prima dell'istante chiamato $t=0$. Il circuito da considerare è:

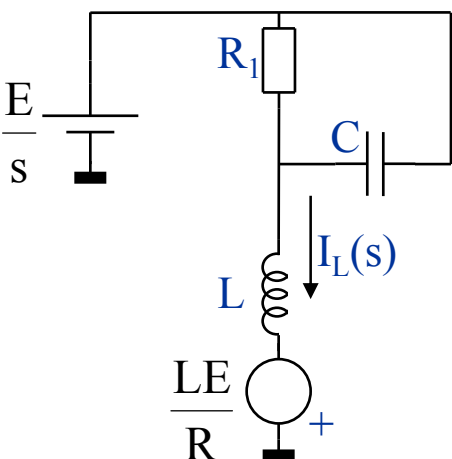


Detto $R=R_1 \parallel R_2$ si ottiene che la corrente che scorre nell'induttanza prima della commutazione dei 2 interruttori è:

$$I_L(0^-) = \frac{E}{R}$$

Mentre la ddp ai capi del condensatore è banalmente: $V_C(0^-)=0$ V.

Di conseguenza in serie all'induttanza va posto un generatore di tensione avente intensità: $V_L(t)=LE/R\delta(t)$, mentre in parallelo al condensatore va posto un generatore di corrente identicamente nullo: $I_C(t)=C0\delta(t)=0$.

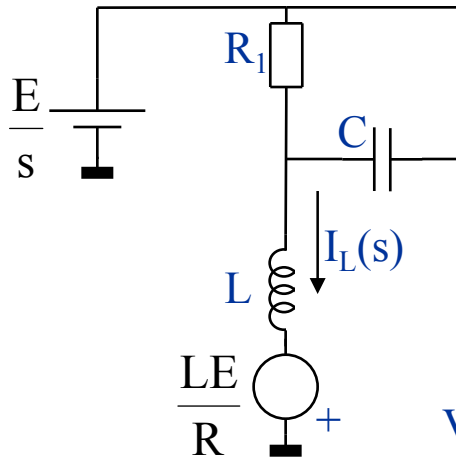


Detta: $Z=R_1 \parallel C$, risulta che:

$$I_L(s) = \left(\frac{E}{s} + \frac{LE}{R} \right) \frac{1}{(Z + sL)}$$

Ma:

$$Z = \frac{R_1}{1 + sCR_1}$$



Quindi:

$$I_L(s) = \left(\frac{E}{s} + \frac{LE}{R} \right) \frac{1 + sCR_1}{R_1 + sL + s^2 LCR_1}$$

Vediamo i limiti:

$$I_L(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left(\frac{E}{s} + \frac{LE}{R} \right) \frac{1 + sCR_1}{R_1 + sL + s^2 LCR_1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{LE}{R} \frac{s^2 CR_1}{s^2 LCR_1} = \frac{E}{R}$$

$$I_L(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{E}{s} + \frac{LE}{R} \right) \frac{1 + sCR_1}{R_1 + sL + s^2 LCR_1} = \frac{E}{R_1}$$

Inoltre ai capi di C abbiamo:

$$V_C(s) = \frac{R_1}{1 + sCR_1} I_L(s) = \left(\frac{E}{s} + \frac{LE}{R} \right) \frac{R_1}{R_1 + sL + s^2 LCR_1}$$

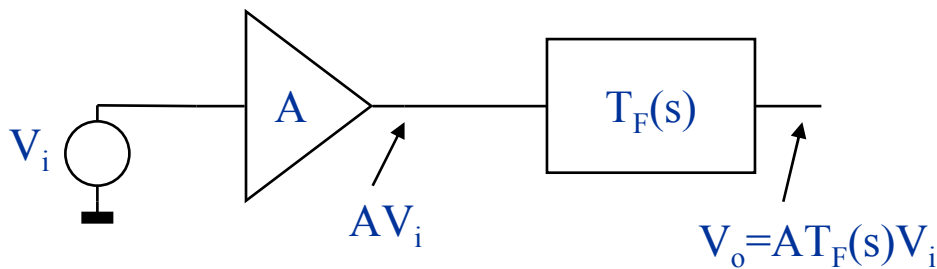
Di conseguenza:

$$V_C(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left(\frac{E}{s} + \frac{LE}{R} \right) \frac{R_1}{R_1 + sL + s^2 LCR_1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{LE}{R} \frac{sR_1}{s^2 LCR_1} = 0$$

Come era da aspettarsi visto che in un tempo trascurabile non è possibile cambiare la ddp ai capi di un condensatore.

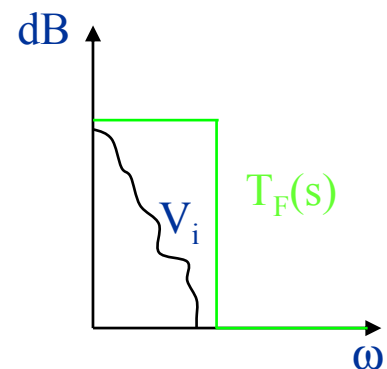
Si supponga di dovere elaborare un segnale di cui si conosce la larghezza di banda, ma non sia predeterminata la forma del segnale. Un esempio classico è il segnale audio, avente un'estensione di banda di circa 20 KHz, ma con tonalità non predeterminate.

Per questioni riguardanti soprattutto i disturbi che possono venire sovrapposti, non è mai conveniente trattare il segnale su di una banda di frequenza superiore a quella del segnale. E' opportuno aggiungere in cascata alla catena di amplificazione un filtro con caratteristiche opportune:

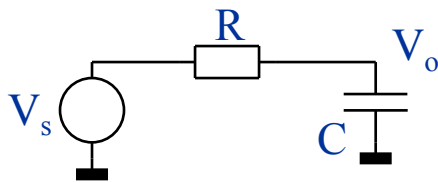


Idealmente il filtro posto in cascata dovrebbe avere una sagoma "squadrata". Sebbene con i filtri così detti attivi ci si riesce ad avvicinare, con i filtri così detti passivi ci si avvicina solo in forma asintotica.

Vale a dire che un filtro passivo applica una certa attenuazione nella banda utile del segnale, con una perdita di segnale.

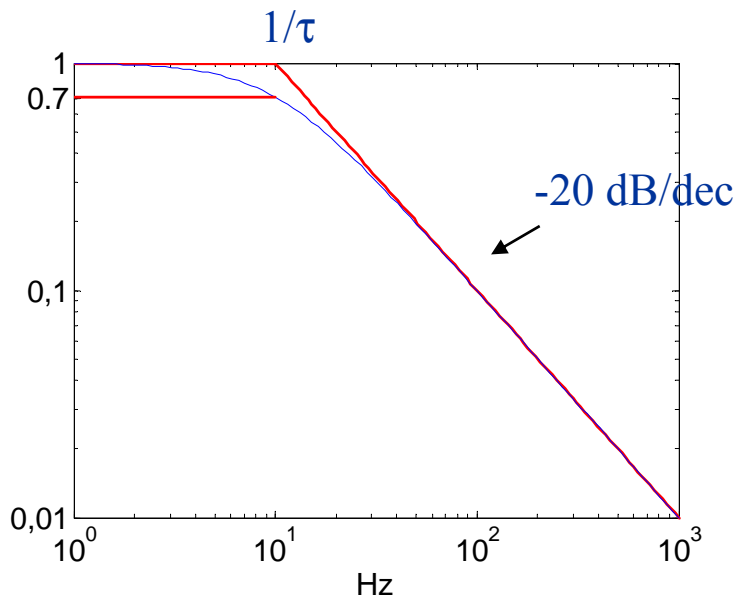


Il più semplice filtro passa-basso passivo che si possa realizzare è il filtro RC:



$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{1}{1 + sCR} = \frac{1}{1 + s\tau}$$

$$\left| \frac{V_o}{V_s} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$



Alla frequenza del polo, $1/\tau$, è:

$$\left| \frac{V_o}{V_s} \right|_{\omega=1/\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7 = -3 \text{ dB}$$

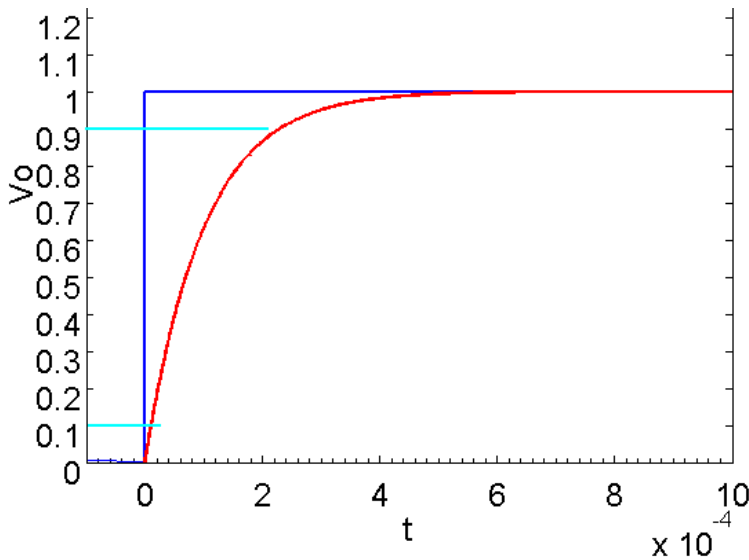
Proprietà importante utile per una caratterizzazione di un circuito:

Applichiamo al filtro un gradino $V_s(t) = V_A 1(t)$:

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{1}{1 + s\tau} \frac{V_A}{s} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{s} \frac{1}{s + 1/\tau} V_A \\ &= \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau} \right] V_A \Rightarrow V_o(t) = \left[1 - e^{-t/\tau} \right] 1(t) V_A \end{aligned}$$

Dalla curva ottenuta il valore di τ lo si ricava come soglia oltre la quale si ha il valore asintotico. Per esempio a $t = 5\tau$ V_o è uguale a V_A a meno dello 0.5 %.

Questo asproccio però non è sempre il più preciso, specialmente quando i segnali sono piccoli e la risoluzione dello strumento di misura potrebbe creare limitazioni.



Più semplice è trovare i punti in cui il segnale passa attraverso 2 valori ben definiti.

Un approccio standard è considerare la differenza temporale degli istanti a cui il segnale supera il 10 % ed il 90 % di tutta la sua ampiezza.

Supponiamo di volere trovare l'istante t_α in cui $V_O(t_\alpha) = \alpha V_A$, $\alpha \leq 1$:

$$t_\alpha = \tau \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$$

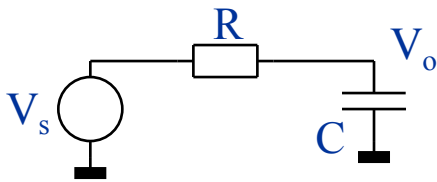
In particolare:

$$\begin{cases} t_{0.1} = 0.105\tau & \text{per } \alpha = 0.1 \\ t_{0.9} = 2.303\tau & \text{per } \alpha = 0.9 \end{cases}$$

Si definisce “**rise time**” la differenza $t_r = t_{0.9} - t_{0.1}$:

$$t_r = t_{0.9} - t_{0.1} \approx 2.2\tau = \frac{2.2}{\omega_{3dB}} = \frac{2.2}{2\pi f_{3dB}} \frac{1}{f_{3dB}} = \frac{0.35}{f_{3dB}}$$

Questa definizione ha un carattere più generale. Ogni volta che vogliamo fornire una caratterizzazione semplificata del comportamento in frequenza di una rete la modellizziamo con un polo dominante caratteristico a cui possiamo associare la misura di rise time sopra indicata.

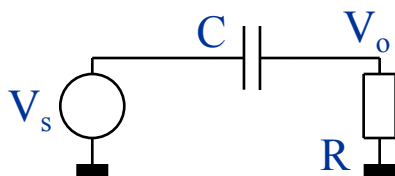


Se nel filtro passa basso indicato abbiamo che $\tau \gg$ di tutte le altre costanti di tempo della rete possiamo approssimare:

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{1}{1 + s\tau} \approx \frac{1}{s\tau}$$

Ovvero il circuito è approssimabile ad un quasi-integratore.

Equivalentemente, filtrare a basse frequenze un segnale significa farne un'integrazione.



Come controparte del quasi-integratore abbiamo il quasi-derivatore:

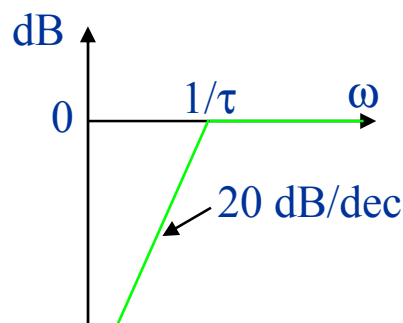
$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{sRC}{1 + sRC} = \frac{s\tau}{1 + s\tau}$$

In questa circostanza se la costante di tempo τ risultasse \ll di tutte le costanti di tempo della rete, potremmo approssimare:

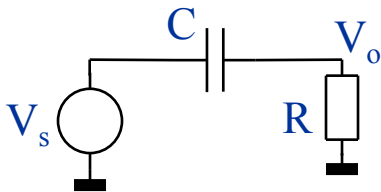
$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{s\tau}{1 + s\tau} \approx s\tau$$

La rete si comporterebbe pertanto come un quasi-derivatore.

Filtrare ad alta frequenza un segnale equivale a dire che lo si differenzia.

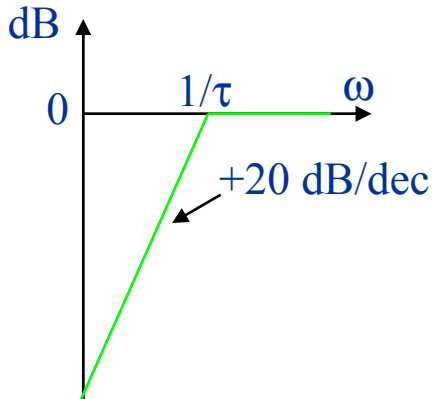


Il più semplice filtro passa-alto passivo che si possa realizzare è il filtro CR:



$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{sCR}{1 + sCR} = \frac{s\tau}{1 + s\tau}$$

$$\left| \frac{V_o}{V_s} \right| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$



Alla frequenza del polo, $1/\tau$, è:

$$\left| \frac{V_o}{V_s} \right|_{\omega=1/\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7 = -3 \text{ dB}$$

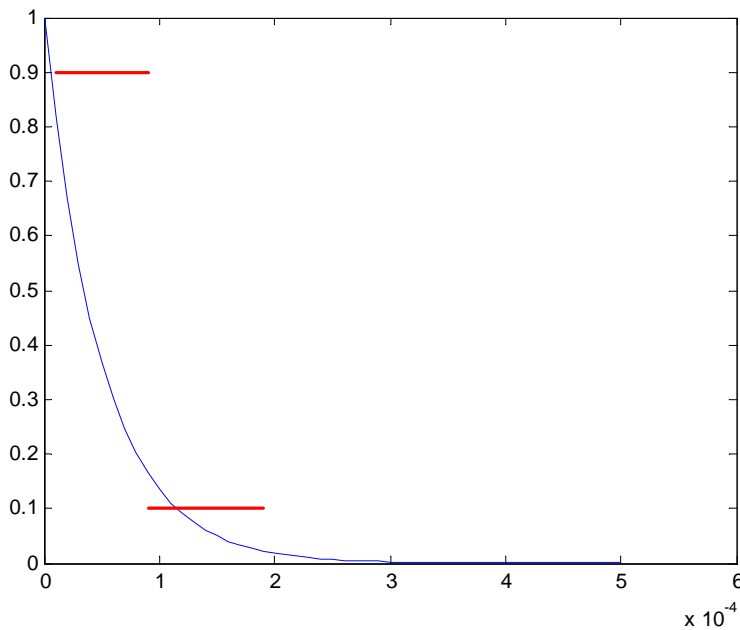
Proprietà importante utile per una caratterizzazione di un circuito:

Applichiamo al filtro un gradino $V_s(t) = V_A 1(t)$:

$$V_o = \frac{s\tau}{1 + s\tau} \frac{V_A}{s} = \frac{1}{s + 1/\tau} V_A$$

$$\Rightarrow V_o(t) = e^{-t/\tau} 1(t) V_A$$

Come nel caso precedente possiamo cercare di caratterizzare l'accoppiamento AC con la stessa tecnica.



Consideriamo ancora la differenza temporale degli istanti a cui il segnale scende da 90 % al 10 % della sua ampiezza.

Ancora avremo che l'istante t_α in cui $V_O(t_\alpha) = \alpha V_A$, $\alpha \leq 1$:

$$t_\alpha = \tau \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$$

In particolare:

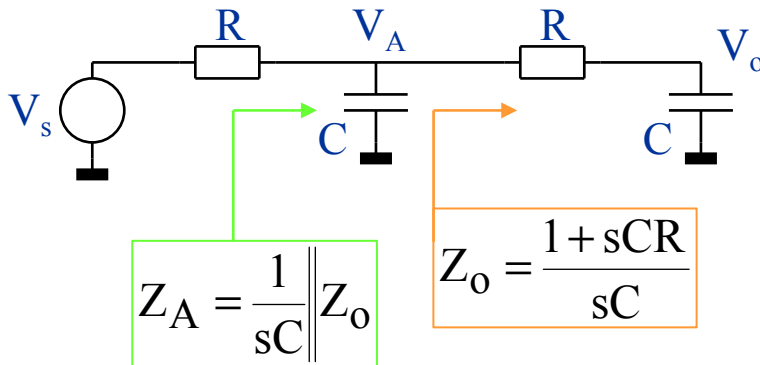
$$\begin{cases} t_{0.1} = 2.303\tau & \text{per } \alpha = 0.1 \\ t_{0.9} = 0.105\tau & \text{per } \alpha = 0.9 \end{cases}$$

Si definisce “fall time” la differenza $t_r = t_{0.1} - t_{0.9}$:

$$t_r = t_{0.1} - t_{0.9} \approx 2.2\tau = \frac{2.2}{\omega_{3dB}} = \frac{2.2}{2\pi f_{3dB}} \frac{1}{f_{3dB}} = \frac{0.35}{f_{3dB}}$$

In questa circostanza f_{3dB} rappresenta la frequenza di accoppiamento in AC.

I filtri a singolo polo hanno il difetto di mostrare un'attenuazione di 20 dB/dec, oltre alla frequenza del polo. E' ovviamente possibile garantire pendenze più ripide.



$$V_A = \frac{Z_A}{Z_A + R} V_s \quad V_o = \frac{1}{1 + sCR} V_A = \frac{1}{1 + sCR} \frac{Z_A}{Z_A + R} V_s$$

Da cui:

$$V_o = \frac{1}{s^2 C^2 R^2 + 3sCR + 1} V_s$$

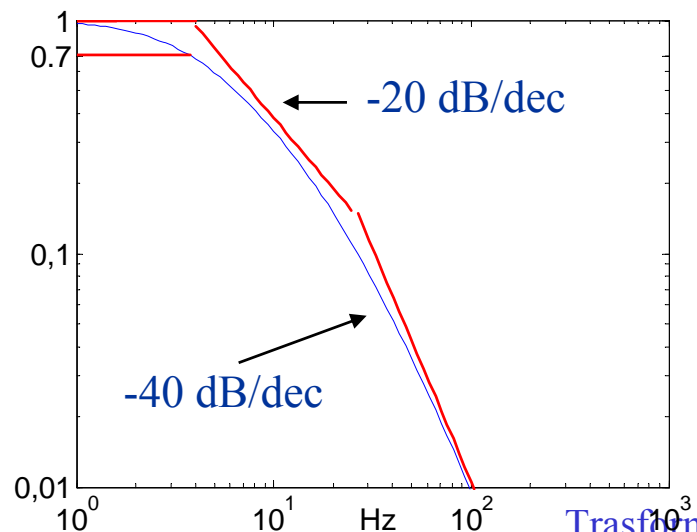
$$\left| \frac{V_o}{V_s} \right| = \frac{1}{\sqrt{9\omega^2 C^2 R^2 + (1 - \omega^2 C^2 R^2)^2}}$$

Va osservato che la funzione presenta 2 poli che non coincidono con $1/RC$. In particolare per $\omega=1/RC$ l'attenuazione risulta:

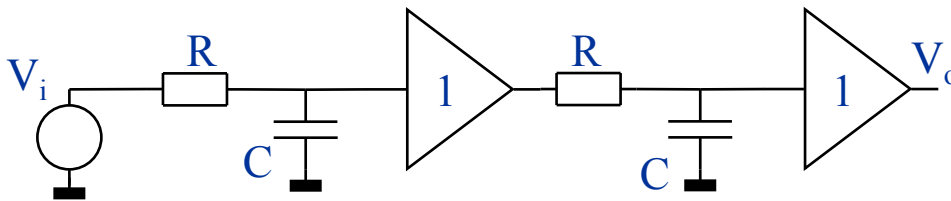
$$\left| \frac{V_o}{V_s} \right|_{\omega=1/RC} = \frac{1}{3} = 0.33 = -9.5 \text{ dB}$$

I 2 poli si trovano invero a:

$$p_{1,2} = \begin{cases} -\frac{0.381}{CR} \\ -\frac{2.618}{CR} \end{cases}$$



Poli doppi reali e coincidenti:

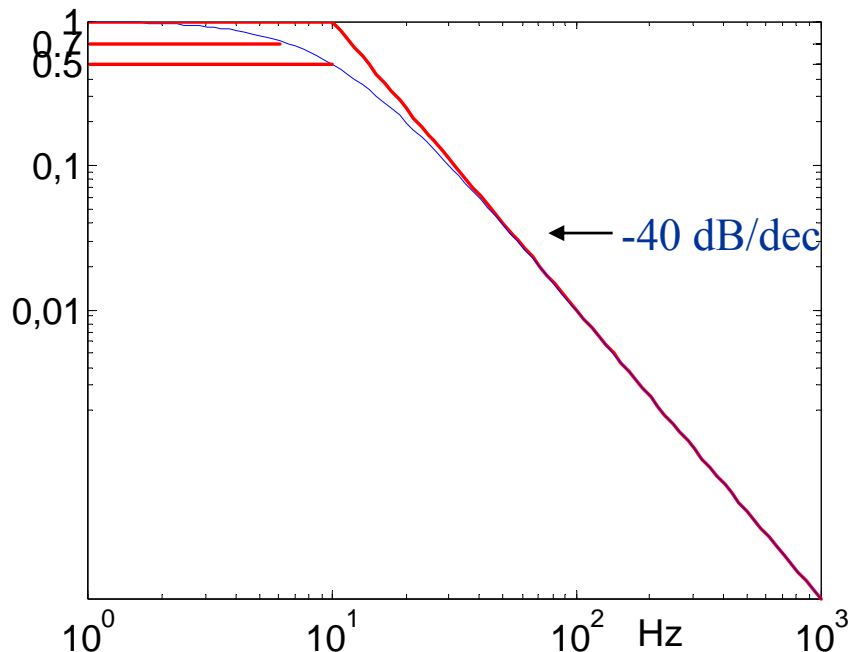


$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{(1 + sRC)^2} \Rightarrow \left| \frac{V_o}{V_i} \right| = \frac{1}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)}$$

I poli si trovano a:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{RC}$$

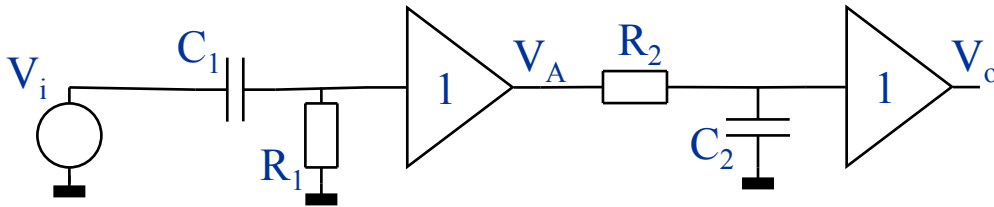
Ora per $\omega = 1/RC$ l'attenuazione risulta di 0.5, ovvero -6 dB.



La frequenza -3dB non coincide con la posizione dei 2 poli, ma con la frequenza:

$$\frac{1}{(1 + \omega_{3dB}^2 R^2 C^2)} = 0.7 \Rightarrow \omega_{3dB} = \frac{0.65}{\tau}$$

Consideriamo l'opportunità di implementare una rete che consenta di filtrare una banda di frequenza. Questo tipo di approccio si adotta spesso quando si sa che il segnale ha dei contenuti informativi definiti, di cui non si conosce a priori la forma.



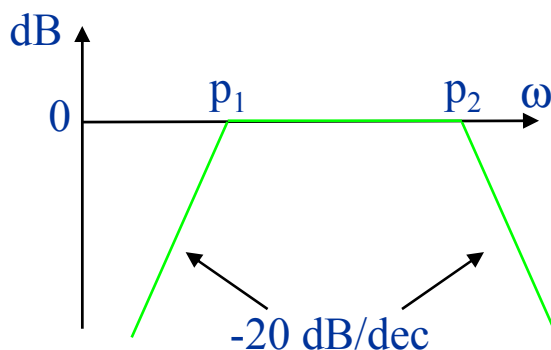
$$V_A = \frac{sC_1R_1}{1+sC_1R_1} V_i$$

V_A ha uno zero nell'origine. Quindi viene applicata una derivazione del segnale di ingresso: le componenti di bassa frequenza vengono perciò attenuate.

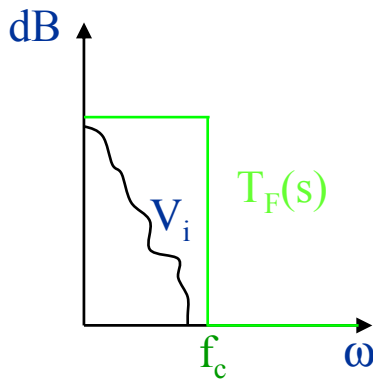
$$V_o = \frac{1}{1+sC_2R_2} V_A$$

$$V_o = \frac{1}{1+sC_2R_2} \frac{sC_1R_1}{1+sC_1R_1} V_i$$

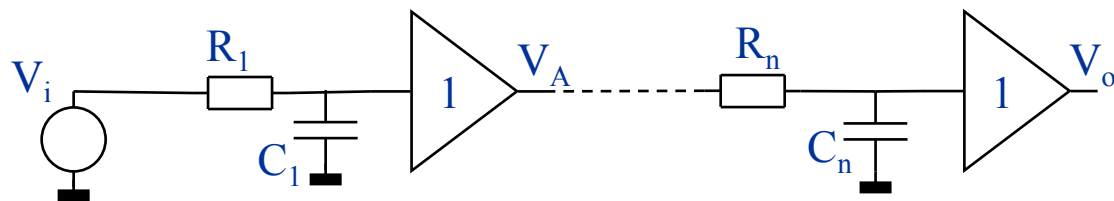
Supponiamo, come esempio, che la frequenza di taglio del filtro passa alto sia molto minore di quella del filtro passa basso: $1/C_2R_2 \gg 1/C_1R_1$. Il profilo che otteniamo presenta un'attenuazione di -3dB alle frequenze dei 2 poli, che verranno a coincidere con $1/C_1R_1$ e $1/C_2R_2$:



Ritorniamo sul problema di volere realizzare un filtro passa-basso con caratteristiche che si avvicinino il più possibile alla risposta quadrata.



Sulla base delle conoscenze maturate fino ad ora dovremmo porre in cascata n filtri passa-basso a singolo polo, dove, per comodità, $R_1 = \dots = R_n$ e $C_1 = \dots = C_n$:



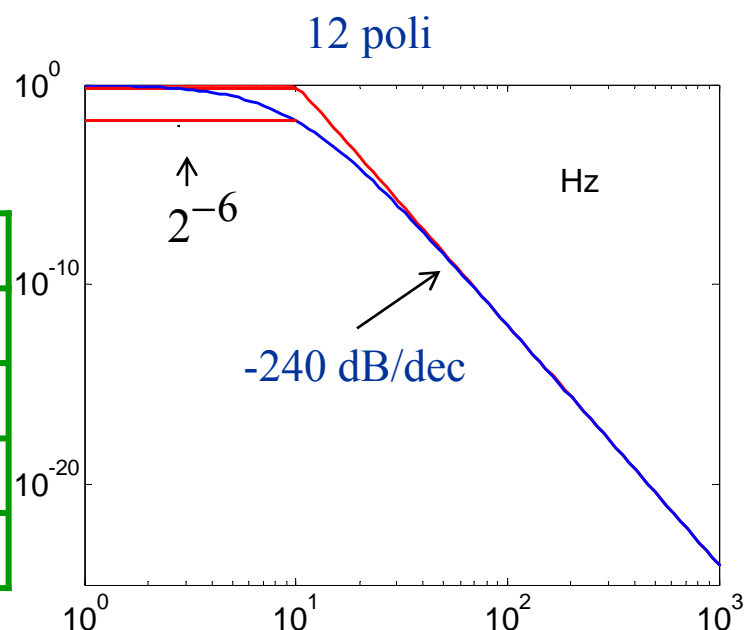
Se vogliamo che alla frequenza di taglio f_c l'attenuazione sia contenuta, diciamo il solito 30 % o -3 dB, dobbiamo imporre che la frequenza di tutti i poli coincidenti $1/RC = 2\pi f_0$ soddisfi:

$$\frac{1}{\sqrt{[1 + (f_c / f_0)^2]^n}} = 0.7 = \alpha$$

Da cui deriva che:

$$f_0 = \frac{f_c}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^{2/n}} - 1}}$$

n	f_0/f_c
2	1.52
4	2.26
8	3.27
12	4.04



Dovendo essere $f_0 > f_c$ si ha che l'ampiezza non ha un andamento asintotico a partire dal punto a -3 dB.

E' possibile realizzare filtri con funzioni di trasferimento che cercano di avvicinarsi alle condizioni ideali. Nella forma classica questi filtri sono composti da resistori, condensatori ed induttanze. Purtroppo le induttanze sono componenti "scomodi" perché occupano spazio, non sono precise, mostrano dipendenza dalla temperatura.

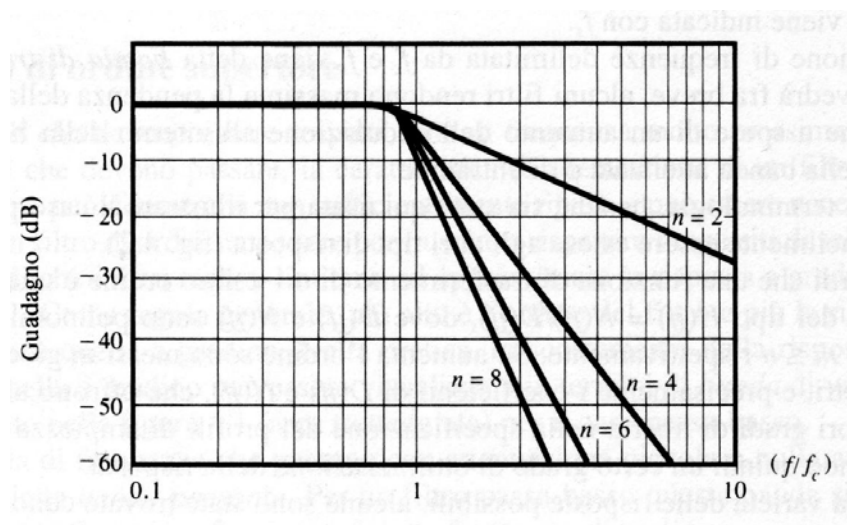
Nelle applicazioni coinvolgenti AO reazionati le induttanze possono essere comodamente sostituite dagli AO stessi, in grado di gestire l'energia assorbita dalle alimentazioni in modo analogo alle induttanze, se reazionati in modo opportuno.

I filtri che fanno uso degli AO in luogo delle induttanze vengono chiamati "filtri attivi", in contrapposizione con i filtri passivi che impiegano solo resistenze e condensatori.

I filtri di Butterworth

L'idea è quella di realizzare una funzione a più poli capace di mostrare la stessa attenuazione alla frequenza di taglio a -3 dB indipendente dal numero di poli impiegati:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^{2n}}}$$



Secondo questa ottica si ottimizza il modulo della funzione di trasferimento, non la fase.

Mettiamo in evidenza la differenza fondamentale tra un filtro attivo, che stiamo iniziando a studiare, ed un filtro a n poli in cascata che abbiamo visto:

$$|H_{\text{npoli}}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[1 + (f_c / f_0)^2]^n}}$$

$$|H_{\text{npoli}}(2\pi f_0)| = \frac{1}{\sqrt{2^n}}$$



Differenza fondamentale rispetto a sotto: l'attenuazione alla frequenza di taglio

$$|H_{\text{npoli}}(2\pi f)| \xrightarrow{f \rightarrow \infty} \frac{f_0^n}{f^n}$$



Il comportamento asintotico è invece il medesimo al filtro sotto

$$|H_{\text{attivo}}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[1 + (f / f_c)^2]^n}}$$

$$|H_{\text{attivo}}(2\pi f_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Differenza fondamentale rispetto a sopra: l'attenuazione alla frequenza di taglio

$$|H_{\text{attivo}}(2\pi f)| \xrightarrow{f \rightarrow \infty} \frac{f_c^n}{f^n}$$



Il comportamento asintotico è invece il medesimo al filtro sopra

Come ricavare la funzione matematicamente ed anche con una rete attiva?

Matematicamente si agisce algebricamente.

Es. a 2 poli.

Supponiamo di essere in grado di realizzare funzioni a 2 poli:

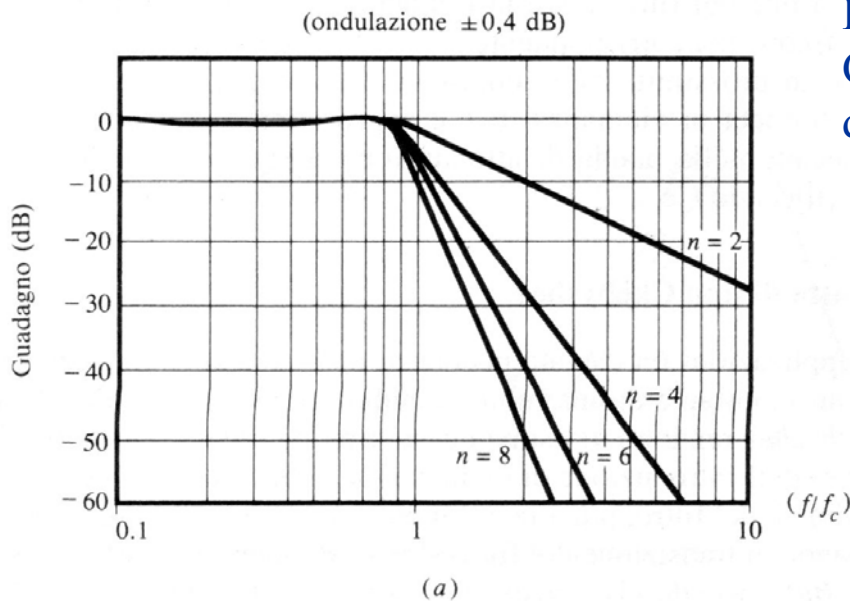
$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(s/\omega_{inc})^2 + 1/Q(s/\omega_{inc}) + 1} \right|^2 &= \left| \frac{1}{\left(1 - (f/f_{inc})^2\right) + jf/Qf_{inc}} \right|^2 \stackrel{\text{Tesi}}{=} \frac{1}{1 + (f/f_c)^4} \\ \frac{1}{\left(1 - (f/f_{inc})^2\right)^2 + (f/Qf_{inc})^2} &= \\ &= \frac{1}{1 + (f/f_{inc})^4 - 2(f/f_{inc})^2 + (f/Qf_{inc})^2} = \frac{1}{1 + (f/f_c)^4} \\ \Rightarrow \Rightarrow \quad \frac{1}{Q^2} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.707 \quad \text{e} \quad f_{inc} = f_c \end{aligned}$$

I polinomi di ordine superiore si possono ottenere considerandoli come prodotti di polinomi a 2 poli, ed uguagliando i coefficienti quando si impone l'uguaglianza dei moduli alla funzione di Butterworth.

Pur di complicare le cose è possibile realizzare filtri a caratteristica ancora più tendente all'idealità.

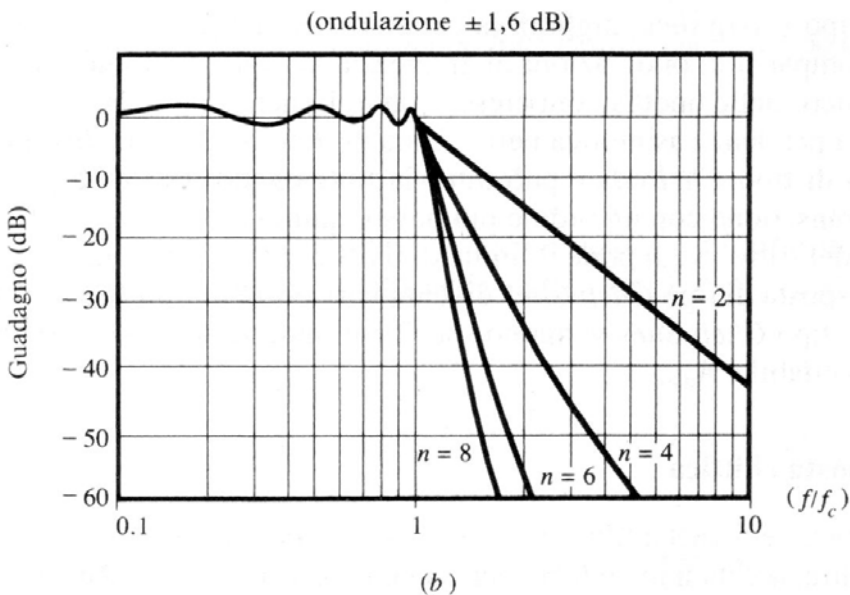
Un esempio sono i filtri di Chebyshev.

Nei filtri di Chebyshev si ottiene un risultato più consono con il modulo della funzione di trasferimento pur di tollerare una certa “ondulazione” nella parte piatta. L’ampiezza dell’ondulazione si può modellare agendo sui coefficienti dei polinomi.



La forma della funzione di Chebyshev è più complicata di quella di Butterworth:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 C_n^2(f/f_o)}}$$

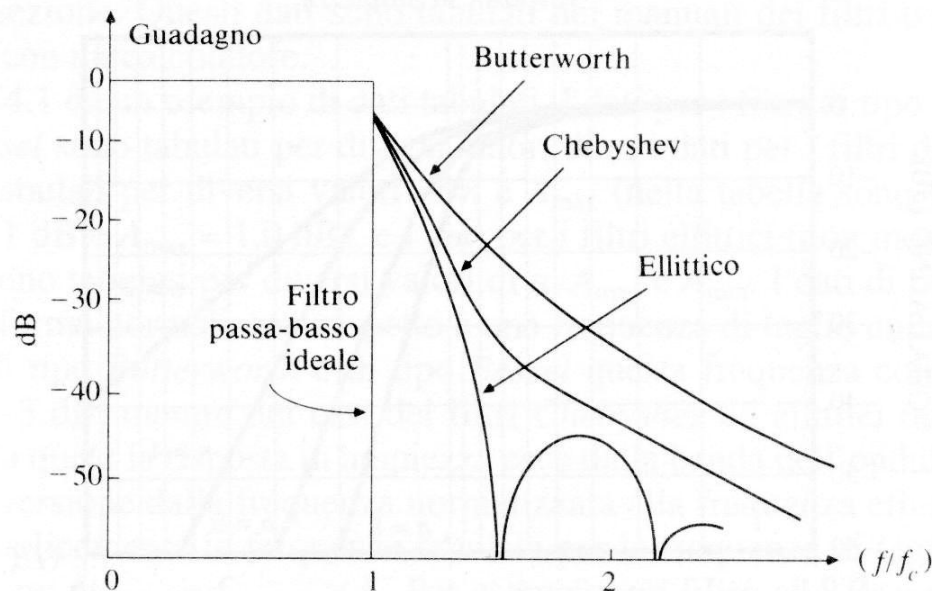


Dove ϵ tiene conto della ondulazione sulla parte piatta, mentre C_n sono dei polinomi.

Anche in questo caso la funzione di trasferimento è rappresentabile con il prodotto di polinomi di II grado.

I coefficienti da usare nei polinomi sono forniti da tabelle.

Ci sono filtri ancora più rispondenti alle caratteristiche ideali. Questi sono i filtri ellittici. In più dei filtri di Chebyshev inseriscono un'ondulazione anche nella parte attenuata.



I 3 tipi di filtri visti presentano una buona attenuazione oltre la frequenza di taglio a -3 dB. Tuttavia sono inadeguati nel filtrare segnali che non siano sinusoidali, perché introducono delle distorsioni che possono essere fastidiose e deformanti.

Per questa ragione sono stati introdotti i filtri di Bessel o Thomson che, a scapito di una peggiore caratteristica della parte attenuata, sono in grado di distorcere in modo impercettibile il segnale.

Siccome il modulo della funzione di trasferimento dei filtri di Thomson è confrontabile a quella dei 3 filtri visti, abbiamo che fa la differenza di comportamento sta nella variabile che non abbiamo ancora considerato: la fase.

Associato alla progettazione della matematica dei filtri di Bessel ci sta il concetto di ritardo.

Una funzione di trasferimento che non ha effetti sulla manipolazione del segnale è data da un coefficiente moltiplicativo ed un termine di ritardo:

$$H(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}$$

Abbiamo visto che l'applicazione di un segnale $f(t)$ ad una tale funzione ci fornisce la funzione traslata, ma non modificata:

$$v_o(t) = Kf(t - t_0)$$

Sappiamo che una generica funzione di trasferimento possiamo esprimerla come:

$$T(\omega) = |T(\omega)|e^{-j\Phi(T(\omega))}$$

Parafrasando quanto visto sopra ci aspettiamo che se lo sfasamento di $T(\omega)$ fosse proporzionale alla frequenza il suo effetto sulla distorsione del segnale sarebbe minimo, al più lo traslerebbe nel tempo attenuandone magari alcune componenti in frequenza.

In genere la dipendenza dalla frequenza della fase è una funzione complicata. Però possiamo considerare la sua espansione intorno all'origine:

$$\Phi(T(\omega)) \approx a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \dots$$

Se vogliamo costruire una funzione con sfasamento proporzionale alla frequenza, o almeno il più possibile tale nella banda di interesse, dobbiamo ottimizzare:

$$\frac{d\Phi(T(\omega))}{d\omega} \approx a_1 + 2a_2\omega + \dots$$

$$\frac{d\Phi(T(\omega))}{d\omega} \approx a_1 + 2a_2\omega + \dots$$

Thomson ha fatto proprio così. $\Phi(T(\omega))$ sarà l'atn() di qualche cosa e vale che:

$$\text{atn}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$$

Supponiamo che il filtro sia a 2 poli:

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + a_1s + a_0}$$

Vale che:

$$\Phi(T(\omega)) = -\text{atn}\left(\frac{1}{a_0} \frac{a_1\omega_0}{1-\omega^2/a_0}\right)$$

E quindi:

$$\Phi(T(\omega)) = -\frac{1}{a_0} \frac{a_1\omega_0}{1-\omega^2/a_0} + \frac{1}{3a_0^3} \left(\frac{a_1\omega_0}{1-\omega^2/a_0}\right)^3 - \dots$$

Con un po' di espansione binomiale:

$$\Phi(T(\omega)) = -\frac{a_1}{a_0} \omega + \left(-\frac{a_1}{a_0^2} + \frac{a_1^3}{3a_0^3}\right) \omega^3 - \dots$$

Ora, desiderando:

$$\Phi(T(\omega)) = -t_0\omega$$

Dovremo imporre che:

$$\begin{cases} \frac{a_1}{a_0} = t_0 \\ -\frac{a_1}{a_0^2} + \frac{a_1^3}{3a_0^3} = 0 \end{cases}$$

Cioè:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{3}{t_0^2} \\ a_1 = t_0 a_0 \end{cases}$$

Applicando lo stesso principio per un polinomio generico di grado n si ha:

$$a_k = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k} k! (n-k)!} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

E questi sono i coefficienti dei polinomi di Bessel.

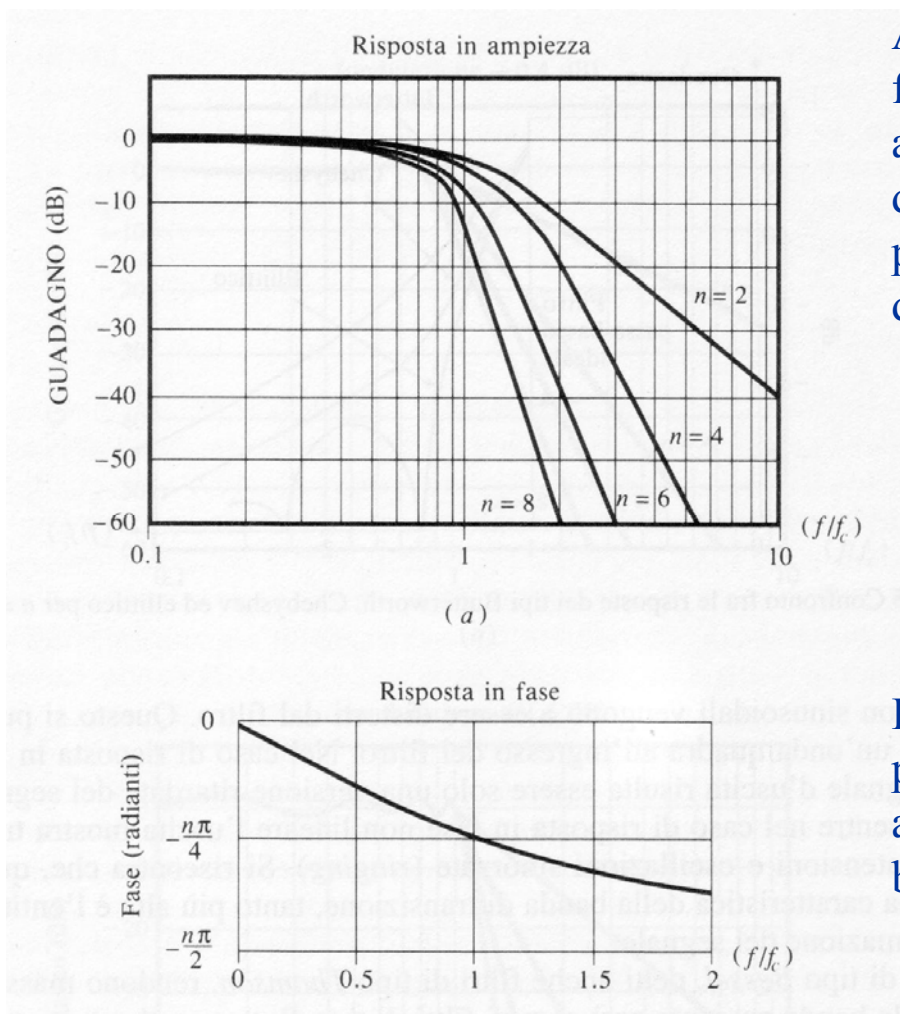
Da questi coefficienti si può costruire una tabella che soddisfi le celle di circuito che vogliamo implementare. Come si vedrà più avanti.

$$\frac{d\Phi(T(\omega))}{d\omega} \approx a_1 + 2a_2\omega + \dots$$

Perciò dobbiamo imporre che a_1 sia grande rispetto ad a_2, a_3, \dots

Questa è stata la filosofia di Thomson che ha cercato di realizzare una funzione simile alle precedenti, ma con in più la costrizione di avere una fase il più possibile lineare con la frequenza.

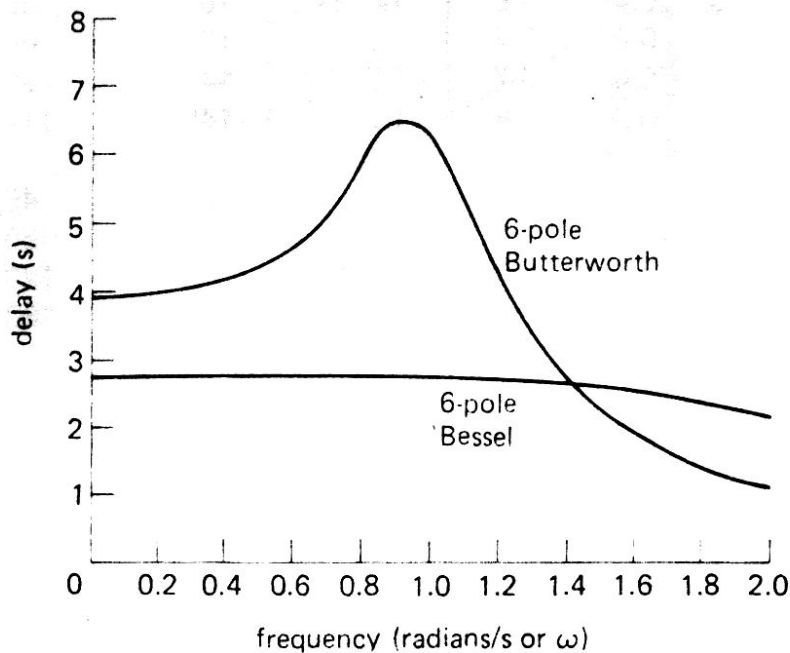
Il risultato è stato ottenuto sfruttando le funzioni di Bessel.



A differenza che nei 3 tipi di filtri precedenti la parte attenuata del filtro è più dolce. Però la parte piatta, precedente la frequenza a -3 dB è estremamente regolare.

La fase dei filtri di Bessel è praticamente proporzionale alla frequenza, almeno a basse frequenze.

Il confronto diretto tra il ritardo dei filtri di Bessel e di Butterworth è eloquente.



Il ritardo di un filtro di Chebyshev dà un'indicazione del fatto che l'ampiezza in questo tipo di filtri va a scapito della risposta.

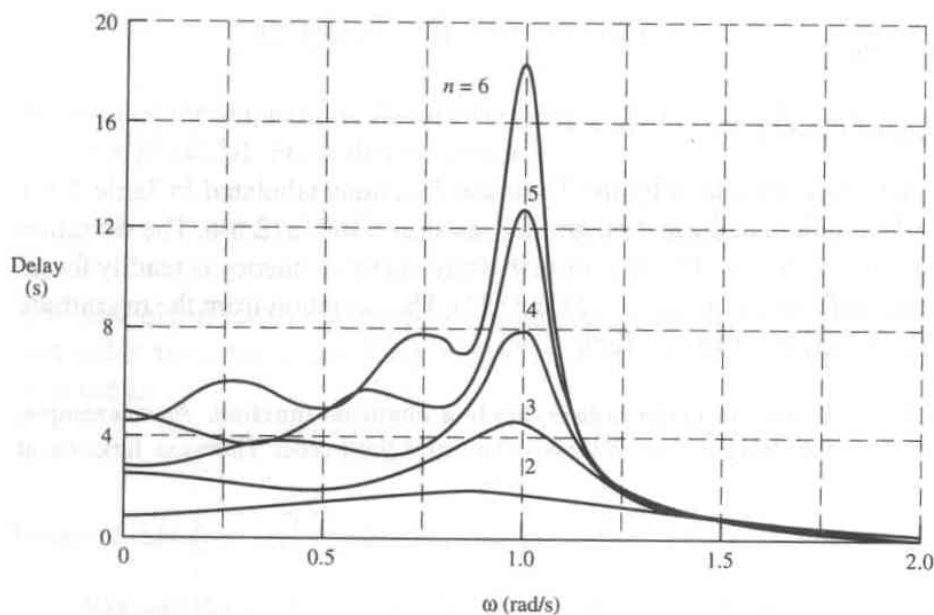


FIGURE 2.6-5
Delay of Chebyshev functions with 1-dB passband ripple.

La regolarità della fase si riflette direttamente nel comportamento nel dominio del tempo.

Il discostamento della fase dall'essere proporzionale alla frequenza porta ad una distorsione del segnale di uscita, se il segnale non è una sinusoide pura.

Tipico esempio significativo è la risposta del filtro al gradino.

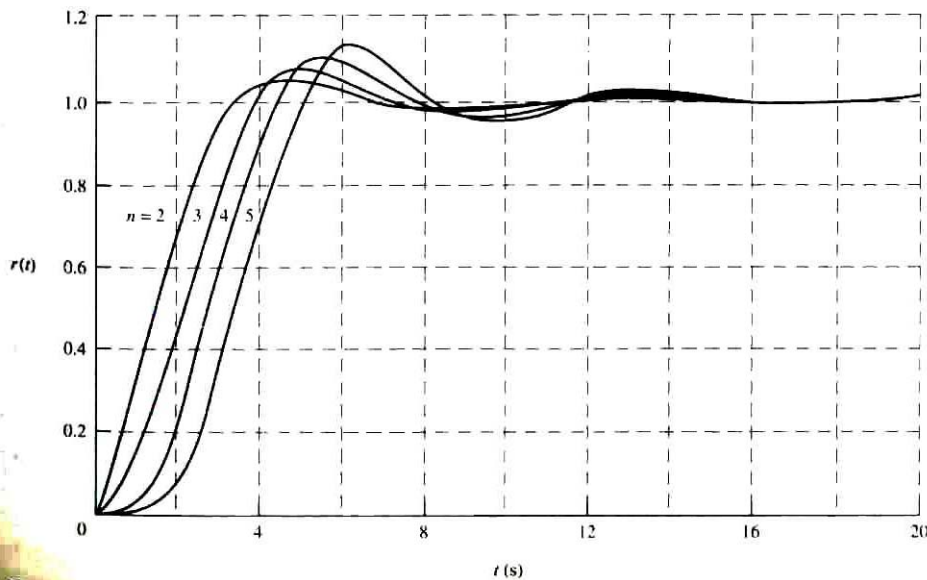


FIGURE 2.7-6
Step responses for Butterworth functions.

Abbiamo visto che nel filtro Chebyshev il ritardo si differenzia maggiormente che nel filtro Butterworth dall'essere costante.

A sua volta il filtro Butterworth non presenta un ritardo costante.

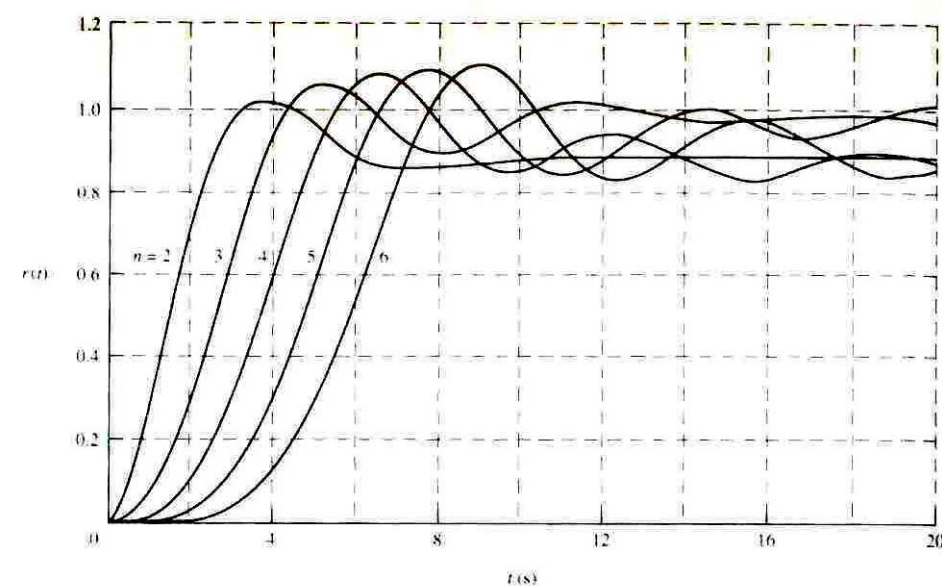


FIGURE 2.7-7
Step responses for 1-dB-ripple Chebyshev functions.

Il risultato è che nel filtro Chebyshev l'overshoot ed il ringing nella risposta al gradino è più pronunciato che nel Butterworth.

Il filtro Bessel presenta una risposta estremamente piatta all'eccitazione a gradino. La distorsione inserita al segnale è insignificante. Il risultato è la conseguenza diretta del mostrare un ritardo costante con la frequenza.

Nella risposta di Bessel il gradino appare come ritardato. Possiamo pensare al ritardo al punto dove il segnale è al 50 % del massimo.

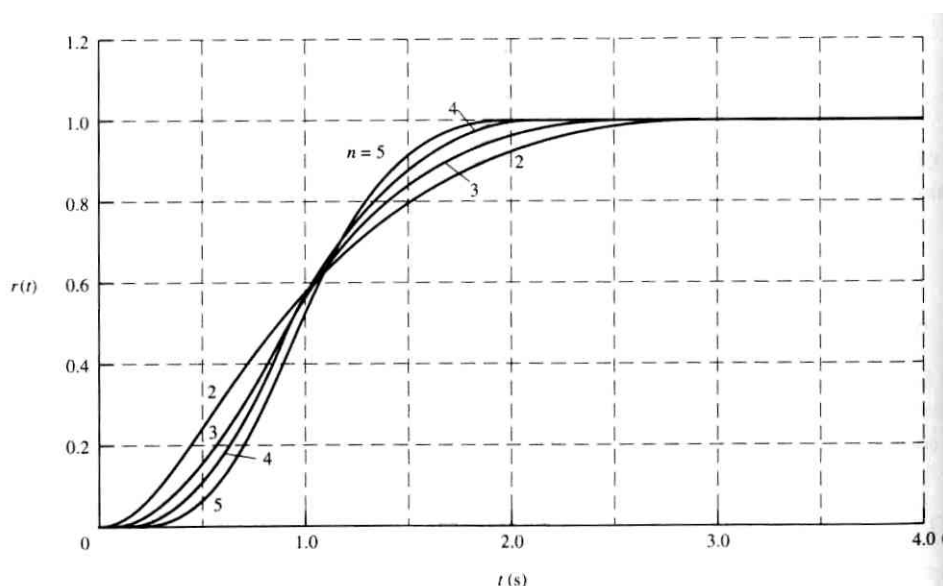
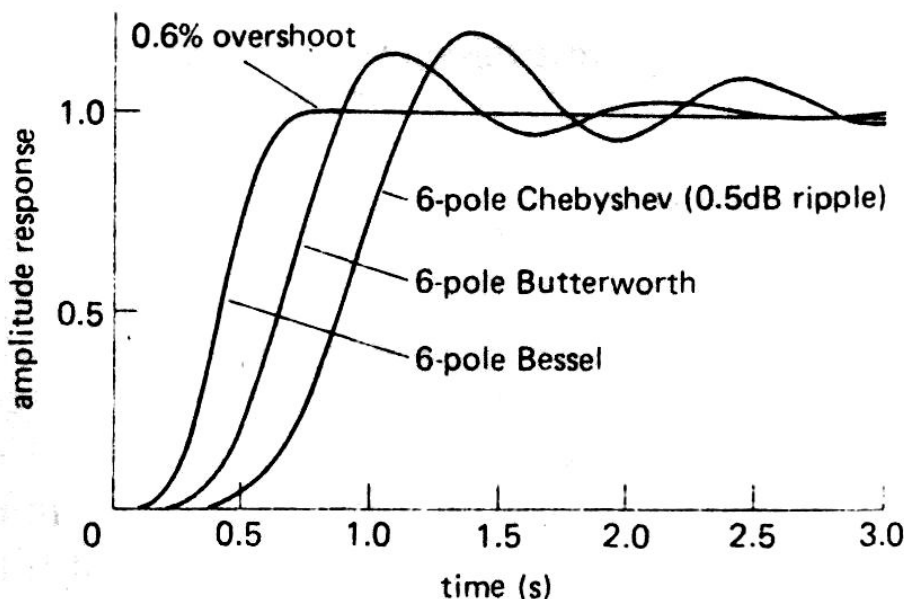
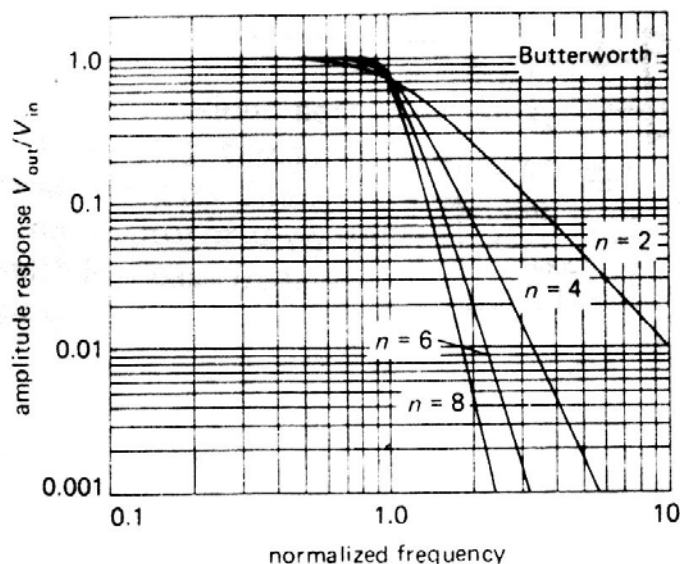


FIGURE 2.7-8
Step responses for Thomson functions.

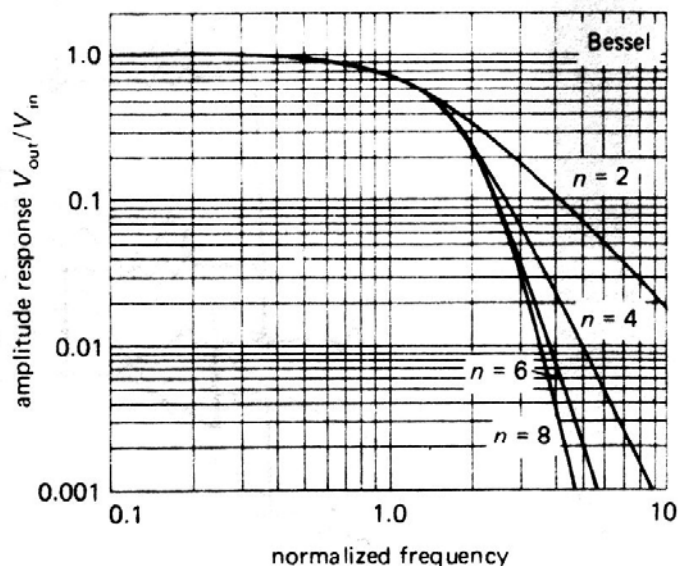


Il confronto nella risposta al gradino dei 3 filtri mostra quanto sia più fedele alla forma del segnale di ingresso la risposta del filtro Bessel.

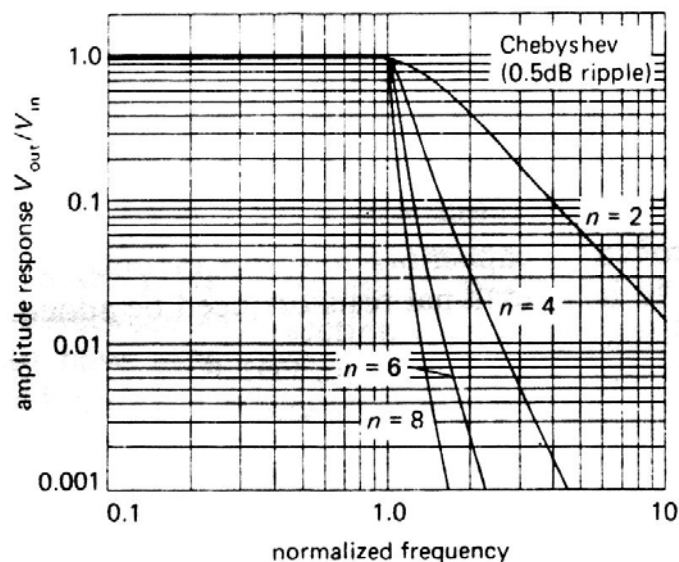
Il modulo della funzione di trasferimento dei 3 filtri studiati mostra che la risposta che presenta meno distorsioni nel dominio del tempo è accompagnata da una maggiore “dolcezza” nell’attenuazione oltre alla frequenza di taglio a -3 dB.



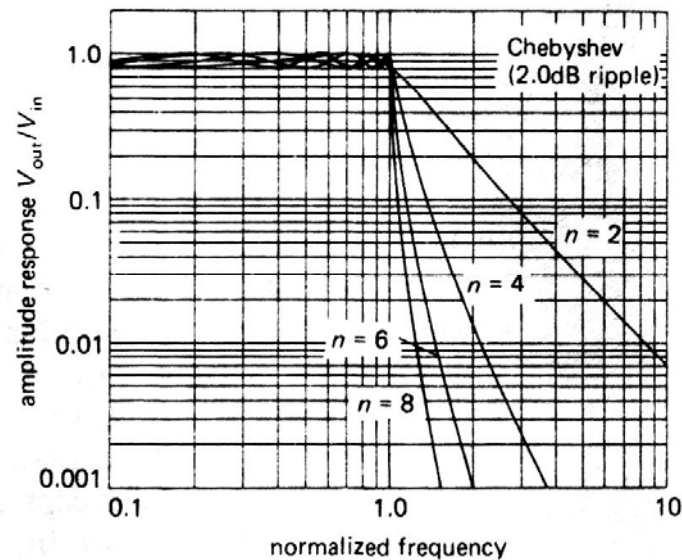
A



B



C



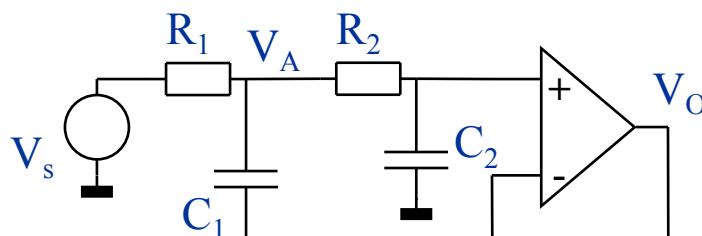
D

Figure 5.17. Normalized frequency response graphs for the 2-, 4-, 6-, and 8-pole filters in Table 5.2. The Butterworth and Bessel filters are normalized to 3dB attenuation at unit frequency, whereas the Chebyshev filters are normalized to 0.5dB and 2dB attenuations.

L'implementazione circuitale di un filtro attivo a $2n$ poli prevede la cascata di n reti a doppio polo. E' possibile implementare anche reti a $2n+1$ poli. In questo caso il polo "dispari" viene implementato con una rete standard a singolo polo.

Esistono 2 soluzioni per l'implementazione della rete a doppio polo. Le 2 soluzioni sono una conseguenza dell'altra.

La rete originale è il così detto filtro di Sallen-Key



Le equazioni che governano la rete sono:

$$\begin{cases} \frac{V_s - V_A}{R_1} = (V_A - V_O)sC_1 + \frac{sC_2}{1 + sC_2R_2} V_A \\ V_O = \frac{V_A}{1 + sC_2R_2} \end{cases}$$

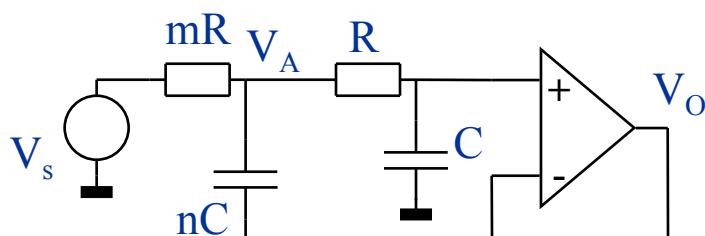
Risolvendo:

$$\begin{aligned} V_O &= \frac{1}{s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + s(R_1 + R_2)C_2 + 1} V_s \\ &= \frac{1}{1 + (s/\omega_0)^2 + \frac{1}{Q}(s/\omega_0)} V_s \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2} \\ \frac{1}{Q} &= \frac{(R_1 + R_2)C_2}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}} \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}{(R_1 + R_2)C_2} \end{aligned}$$

Nella forma più classica i parametri del filtro sono espressi come:



Da cui:

$$\omega_o = \frac{1}{CR\sqrt{nm}}$$

$$Q = \frac{\sqrt{nm}}{(m+1)}$$

e

$$V_o = \frac{1}{s^2 nm R^2 C^2 + s(m+1)RC + 1} V_s$$

$$= \frac{1}{1 + (s/\omega_o)^2 + \frac{1}{Q}(s/\omega_o)} V_s$$

Di conseguenza scegliendo opportunamente n , m , R e C si può fare soddisfare alla funzione di trasferimento trovata i parametri opportuni per fare soddisfare le funzioni descritte.

Nei casi in cui Q risulta essere > 1 (vedi pagine successive) non è possibile fissare n ad 1.

Tabella 4.1 – Esempi di tabelle dei filtri passa-basso

Filtro di tipo Butterworth passa-basso											
n	f_{01}	Q_1	f_{02}	Q_2	f_{03}	Q_3	f_{04}	Q_4	f_{05}	Q_5	Att. a $2f_c$
2	1	0,707									15
3	1	1,000	1								21
4	1	0,541	1	1,306							27
5	1	0,618	1	1,620	1						33
6	1	0,518	1	0,707	1	1,932					39
7	1	0,555	1	0,802	1	2,247	1				45
8	1	0,510	1	0,601	1	0,900	1	2,563			51
9	1	0,532	1	0,653	1	1,000	1	2,879	1		57
10	1	0,506	1	0,561	1	0,707	1	1,101	1	3,196	63

Filtro di tipo Bessel passa-basso										
n	f_{01}	Q_1	f_{02}	Q_2	f_{03}	Q_3	f_{04}	Q_4	f_{05}	Q_5
2	1,274	0,577								
3	1,453	0,691	1,327							
4	1,419	0,522	1,0591	0,806						
5	1,561	0,564	1,760	0,917	1,507					
6	1,606	0,510	1,691	0,611	1,907	1,023				
7	1,719	0,533	1,824	0,661	0,051	1,127	1,685			
8	1,784	0,506	1,838	0,560	1,958	0,711	2,196	1,226		
9	1,880	0,520	1,949	0,589	2,081	0,760	2,324	1,322	1,858	
10	1,949	0,504	1,987	0,538	2,068	0,620	2,211	0,810	2,485	1,415

Per ogni scelta nel numero di poli ogni polinomio di Il grado deve soddisfare i coefficienti indicati. Se il numero di poli fosse dispari occorrerebbe aggiungere un filtro ad un polo, anch'esso con i coefficienti dati. Nel filtro Bessel alla frequenza da imporre ad ω_0 è: $\omega_0 = 2\pi f_c$ se f_c è la effettiva frequenza di taglio che si intende conseguire. Questa è la conseguenza dell'adattamento dei coefficienti di Bessel alle celle.

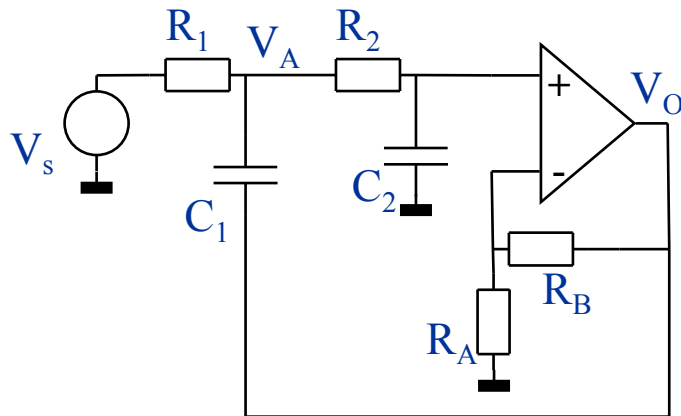
Tabella 4.1 (segue) – Esempi di tabelle dei filtri passa-basso

Filtro di tipo Chebyshev passa-basso con 0,1 dB di ondulazione									
n	f_{01}	Q_1	f_{02}	Q_2	f_{03}	Q_3	f_{04}	Q_4	f_{05}
2	1,820	0,767							
3	1,300	1,341	0,969						
4	1,153	2,183	0,789	0,619					
5	1,093	3,282	0,797	0,915	0,539				
6	1,063	4,633	0,834	1,332	0,513	0,599			
7	1,045	6,233	0,868	1,847	0,575	0,846	0,377		
8	1,034	8,082	0,894	2,453	0,645	1,183	0,382	0,593	
9	1,027	10,178	0,913	3,145	0,705	1,585	0,449	0,822	0,290
10	1,022	12,522	0,928	3,921	0,754	2,044	0,524	1,127	0,304
									0,590
									92,04
									80,60
									69,16
									57,72
									46,29
									34,85
									23,43
									12,24
									3,31
									Att. a $2f_c$

Filtro di tipo Chebyshev passa-basso con 1,00 dB di ondulazione									
n	f_{01}	Q_1	f_{02}	Q_2	f_{03}	Q_3	f_{04}	Q_4	f_{05}
2	1,050	0,957							
3	0,997	2,018	0,494						
4	0,993	3,559	0,529	0,785					
5	0,994	5,556	0,655	1,399	0,289				
6	0,995	8,004	0,747	2,198	0,353	0,761			
7	0,996	10,899	0,808	3,156	0,480	1,297	0,205		
8	0,997	14,240	0,851	4,266	0,584	1,956	0,265	0,753	
9	0,998	18,029	0,881	5,527	0,662	2,713	0,377	1,260	0,159
10	0,988	22,263	0,902	6,937	0,721	3,561	0,476	1,864	0,212
									0,749
									102,50
									91,06
									79,62
									68,18
									56,74
									45,31
									33,87
									22,46
									11,36
									Att. a $2f_c$

Anche per i polinomi di Chebyshev i filtri devono avere i parametri impostati in modo opportuno. I parametri sono differenti a seconda che l'ondulazione possa essere 0.1 dB o 1 dB.

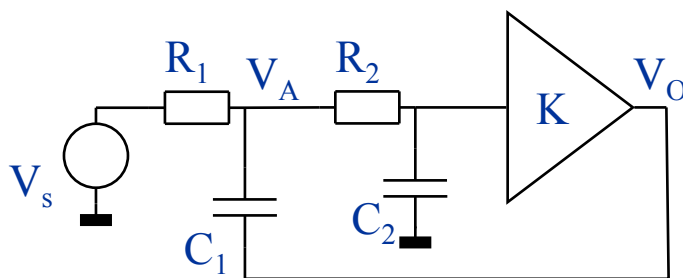
Una seconda soluzione, che aggiunge più libertà di scelta, l'abbiamo se consentiamo all'amplificatore di avere un guadagno > 1 :



Ora il guadagno dell'amplificatore è:

$$K = \frac{R_A + R_B}{R_A}$$

Il circuito equivalente diviene:



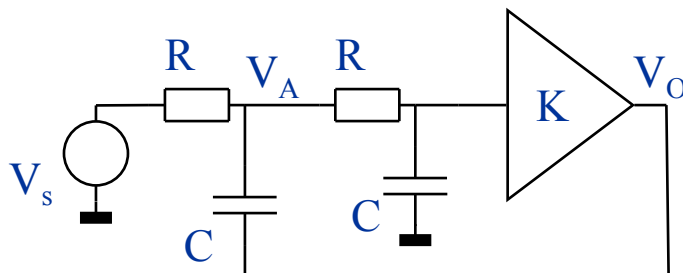
La rete si risolve a partire da:

$$\begin{cases} \frac{V_s - V_A}{R_1} = sC_1(V_A - V_O) + \frac{sC_2}{1 + sC_2R_2} V_A \\ V_O = K \frac{V_A}{1 + sC_2R_2} \end{cases}$$

La soluzione del sistema fornisce:

$$V_O = \frac{K}{s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + s[(R_1 + R_2)C_2 + (1 - K)R_1 C_1] + 1} V_s$$

In questo caso abbiamo una sorta di grado di libertà in più. Di solito si sfrutta questa opportunità ponendo: $R_1 = R_2 = R$ e $C_1 = C_2 = C$:



$$V_O = \frac{K}{s^2 C^2 R^2 + s(3 - K)RC + 1} V_s$$

$$= \frac{K}{1 + (s/\omega_o)^2 + \frac{1}{Q}(s/\omega_o)} V_s$$

Dove:

$$\omega_o = \frac{1}{CR}$$

$$\frac{1}{Q} = 3 - K \Rightarrow Q = \frac{1}{3 - K} \Rightarrow K = 3 - \frac{1}{Q}$$

Nei filtri di Butterworth, Thomson e Chebyshev Q è sempre $> 1/3$.

Pertanto questa configurazione si adatta a detti filtri ed a qualsiasi scelta del numero di poli.

In particolare risulta sempre che $K < 3$.

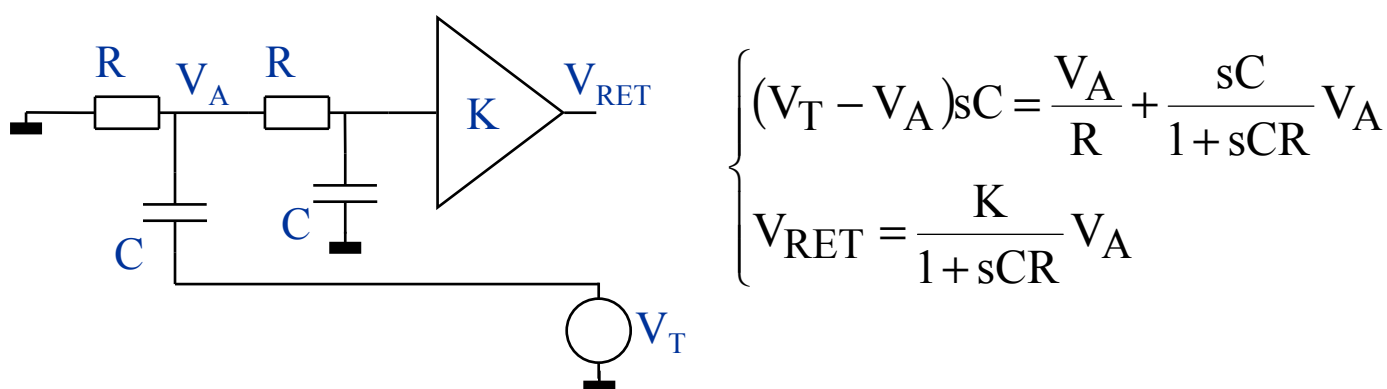
Osservazione: per tutti i tipi di filtro visti scambiando di posto le resistenze con le capacità e considerando il reciproco del coefficiente della frequenza delle tabelle si ottengono filtri passa alto.

Per ottenere un Q adeguato alla realizzazione dei filtri attivi si è reso necessario aggiungere una piccola reazione positiva al sistema. Infatti se si andasse a verificare, i filtri considerati hanno poli complessi e coniugati.

Di principio, la piccola reazione positiva potrebbe portare instabilità.

Sappiamo però che se T è < 1 a partire da una frequenza ben $<$ di 180° non vi sono problemi.

Per verificarlo, studiamo il guadagno di anello supponendo l'amplificatore ideale, nell'ipotesi semplificava che siano uguali le resistenze e le capacità:



Risolvendo si ricava:

$$T = \frac{V_{RET}}{V_T} = \frac{sCRK}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 3s/\omega_0}$$

Va da se che vale:

$$A_f = \frac{A_{RE}}{1 - T}$$

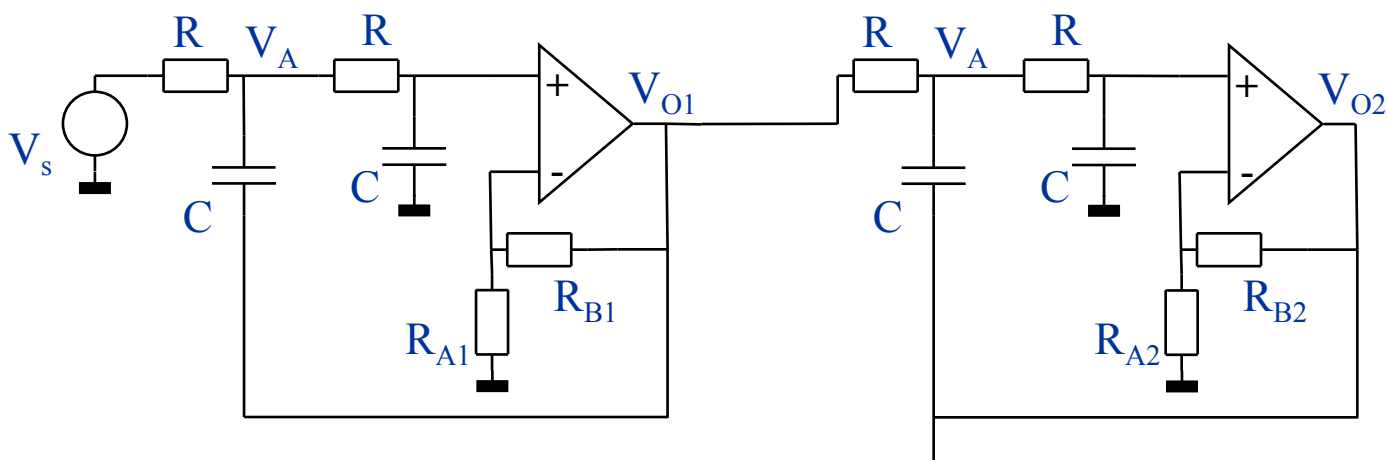
Visto che la reazione è positiva deve essere garantito che $|T| < 1 \quad \forall \omega$:

$$|T|^2 = \frac{(\omega/\omega_0)^2 K^2}{[1 - (\omega/\omega_0)^2]^2 + 9(\omega/\omega_0)^2} \stackrel{K < 3}{<} \frac{(\omega/\omega_0)^2 9}{[1 - (\omega/\omega_0)^2]^2 + 9(\omega/\omega_0)^2} < 1 \quad \forall \omega$$

Esempio: filtro Butterworth a 6 poli con frequenza di taglio a 1 kHz.

Tabella 4.1 – Esempi di tabelle dei

n	f_{01}	Q_1	f_{02}	Q_2	Filtro di tipo Butterworth pass	
					f_{03}	Q_3
2	1	0,707				
3	1	1,000	1			
4	1	0,541	1	1,306		
5	1	0,618	1	1,620	1	
6	1	0,518	1	0,707	1	1,932
7	1	0,555	1	0,802	1	2,247



Ognuno delle 3 celle deve soddisfare:

$$\omega_o = \frac{1}{CR} \quad K = 3 - \frac{1}{Q}$$

Scegliendo per tutte $C=100 \text{ nF}$ abbiamo che:

$$R = \frac{1}{2\pi 100 \text{ nF}} = 1592 \Omega$$

Poi, dalla tabella: $K_1=1.0695$, $K_2=1.5856$ e $K_3=2.4824$. Quindi, per esempio, scegliendo $R_{A1}=R_{A2}=R_{A3}=1 \text{ K } \Omega$:

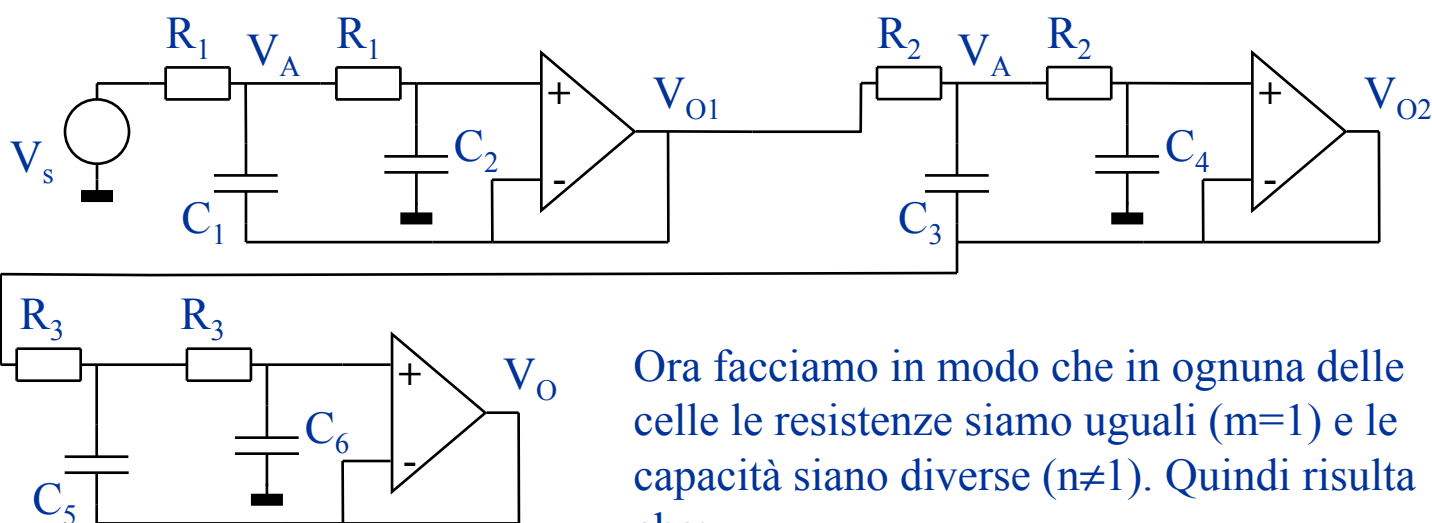
$$K = \frac{R_A + R_B}{R_A} = 1 + \frac{R_B}{R_A} \Rightarrow R_B = R_A(K - 1) \quad \text{è: } R_{B1}=695 \Omega, R_{B2}=585 \Omega, \text{ e } R_{B3}=1482 \Omega$$

Ora filtro di Thomson a 6 poli a frequenza di taglio $f_0 = 1 \text{ KHz}$

Filtro di tipo Bessel passa-t

n	f_{01}	Q_1	f_{02}	Q_2	f_{03}	Q_3
2	1,274	0,577				
3	1,453	0,691	1,327			
4	1,419	0,522	1,0591	0,806		
5	1,561	0,564	1,760	0,917	1,507	
6	1,606	0,510	1,691	0,611	1,907	1,023

Volendo soddisfare la condizione sulla fase abbiamo un parametro in più per ogni cella. Cerchiamo di soddisfare i coefficienti con celle a guadagno unitario.



Ora facciamo in modo che in ognuna delle celle le resistenze siano uguali ($m=1$) e le capacità siano diverse ($n \neq 1$). Quindi risulta che:

$$Q = \frac{\sqrt{nm}}{(m+1)} \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{n}}{2} \quad \text{quindi} \quad n = 4Q^2$$

Selezionate le 2 capacità sarà: $R = \frac{1}{2\pi f_0 f_{0i} C \sqrt{n}}$

Attenzione al vincolo: in ogni cella la frequenza da considerare non è f_0 ma f_0 moltiplicata per il coefficiente f_{0i} dato dalla tabella.

Filtro di tipo Bessel passa-t

n	f_{01}	Q_1	f_{02}	Q_2	f_{03}	Q_3
2	1,274	0,577				
3	1,453	0,691	1,327			
4	1,419	0,522	1,0591	0,806		
5	1,561	0,564	1,760	0,917	1,507	
6	1,606	0,510	1,691	0,611	1,907	1,023

$$n = 4Q^2 \quad R = \frac{1}{2\pi f_o f_{0i} C \sqrt{n}}$$

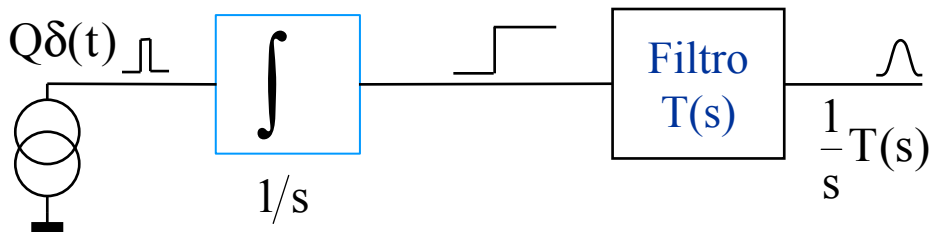
Per cui, se $C_1=C_3=C_5= 1 \text{ nF}$ otteniamo che: $C_2=1.04 \text{ nF}$, $C_4=1.4932 \text{ nF}$ e $C_6=4.186 \text{ nF}$.

$R_1=95300 \text{ } \Omega$, $R_2= 63060 \text{ } \Omega$ e $R_3=19947 \text{ } \Omega$

Un secondo tipo di applicazione, di cui esempio più evidente è la trattazione del segnale proveniente da un rivelatore di particelle, si ha quando il segnale ha forma predeterminata, la cui ampiezza è l'unica variabile in gioco.

Il segnale viene sagomato in modo che la forma finale abbia caratteristiche che soddisfino esigenze di rumore, di frequenza di ripetizione etc.

La tipica catena di acquisizione analogica di un segnale proveniente da un rivelatore nucleare standard segue le seguenti fasi:



La particella incidente genera un segnale molto veloce, approssimabile ad una $\delta(t)$.

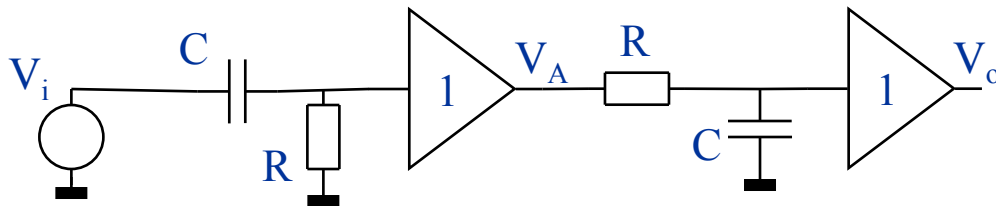
Il segnale viene integrato ed amplificato. Quindi filtrato per ottimizzare il rapporto Segnale/Rumore, S/N.

Vediamo come si possa realizzare un filtro.

Un secondo tipo di applicazione, di cui esempio più evidente è la trattazione del segnale proveniente da un rivelatore di particelle, si ha quando il segnale ha forma predeterminata, la cui ampiezza è l'unica variabile in gioco.

Il segnale viene sagomato in modo che la forma finale abbia caratteristiche che soddisfino esigenze di rumore, di frequenza di ripetizione etc.

La formatura più classica e semplice è la così detta CR-RC:



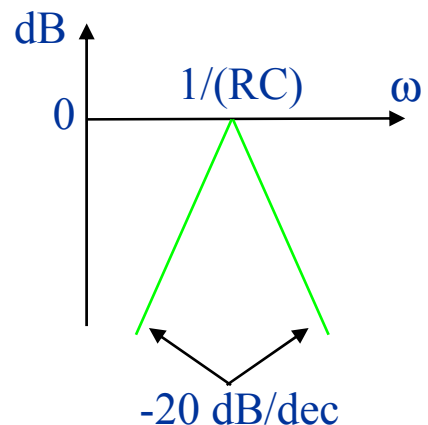
$$V_o = \frac{s\tau}{(1+s\tau)^2} V_i$$

Il modulo della funzione ha massimo per $\omega=1/\tau$ dove troviamo i 2 poli:

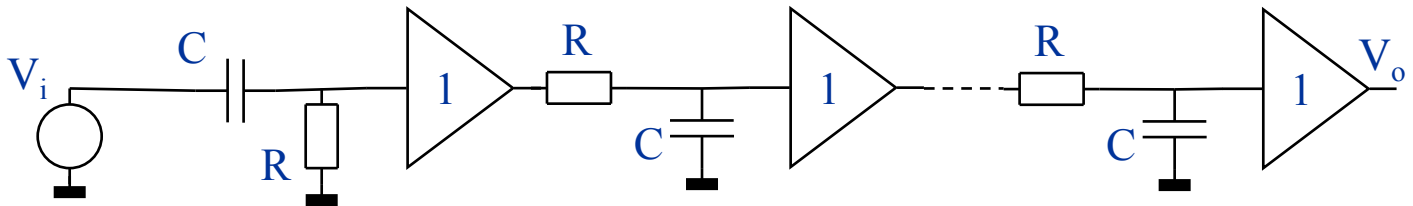
$$\left| \frac{V_o}{V_i} \right|_{\omega=1/\tau} = 0.5 = -6 \text{ dB}$$

Le 2 frequenze che stanno -3 dB sotto il punto di massimo sono:

$$\frac{\omega\tau}{(1+\omega^2\tau^2)} = 0.35 \Rightarrow \omega_{1,2} = \begin{cases} \frac{2.45}{\tau} \\ \frac{0.41}{\tau} \end{cases}$$



La formatura più generica si ha ponendo in cascata un filtro CR e n filtri RC, generando un rete detta CR-RCⁿ:



$$V_o = \frac{s\tau}{(1+s\tau)^{n+1}} V_i = T(s) V_i$$

Nel processo di amplificazione di un segnale proveniente da un rivelatore, il segnale tipicamente impulsivo viene quasi-integrato prima di essere posto all'ingresso del filtro. Di conseguenza è di interesse studiare la risposta del filtro ad una eccitazione a gradino:

$$V_i(t) = V_{io} 1(t) \Rightarrow V_o = \frac{1}{\tau^n} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^{n+1}} V_{io}$$

L'anti-trasformata nel dominio del tempo è un'applicazione della proprietà già vista della derivata:

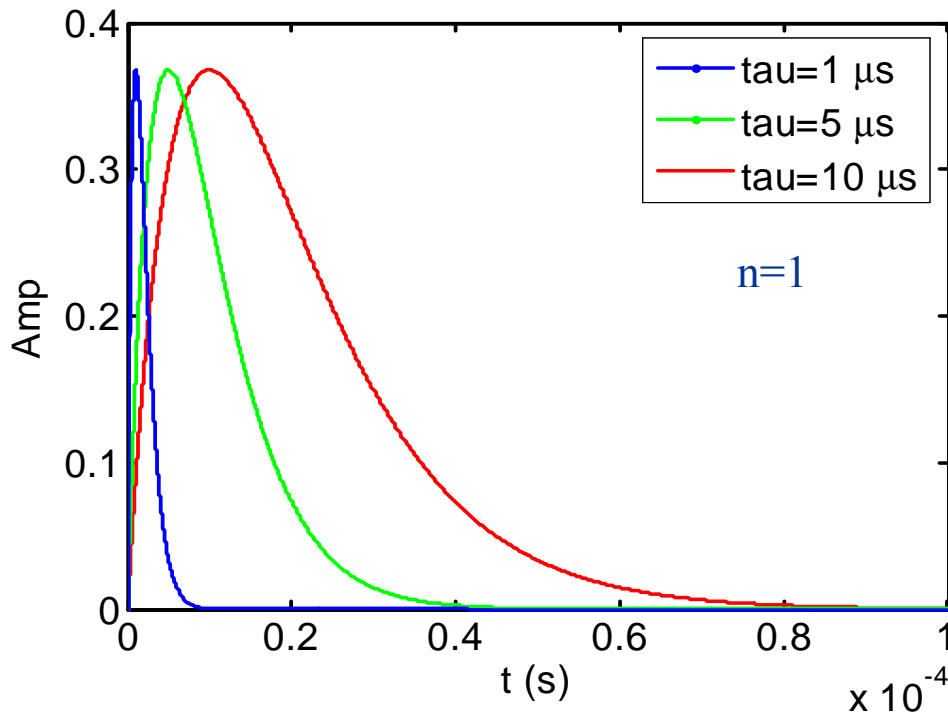
$$V_o(t) = \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^n \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) 1(t) V_{io}$$

Derivando $V_o(t)$ si ottiene che il massimo della funzione si trova per:

$$t_{\max} = n\tau$$

dove:
$$V_o(t_{\max}) = \frac{1}{n!} n^n \exp(-n) V_{io}$$

Per esempio per $n=1$ è:
$$V_o(t_{\max}) = \frac{1}{e} V_{io} = 0.37 V_{io}$$



Per qualsiasi valore di n , l'area di ognuna delle curve risulta:

$$\int_0^{\infty} V_O(t) dt = \tau V_{i0}$$

Siccome a V_{OMAX} si ha $t=n\tau$, il risultato ottenuto implica che all'aumentare di n si abbassa l'ampiezza del segnale, e si allarga la sua estensione temporale.

Si supponga di dovere sostenere un frequenza media di conteggi pari a λ conteggi al secondo (λ essendo governato dalla statistica di Poisson).

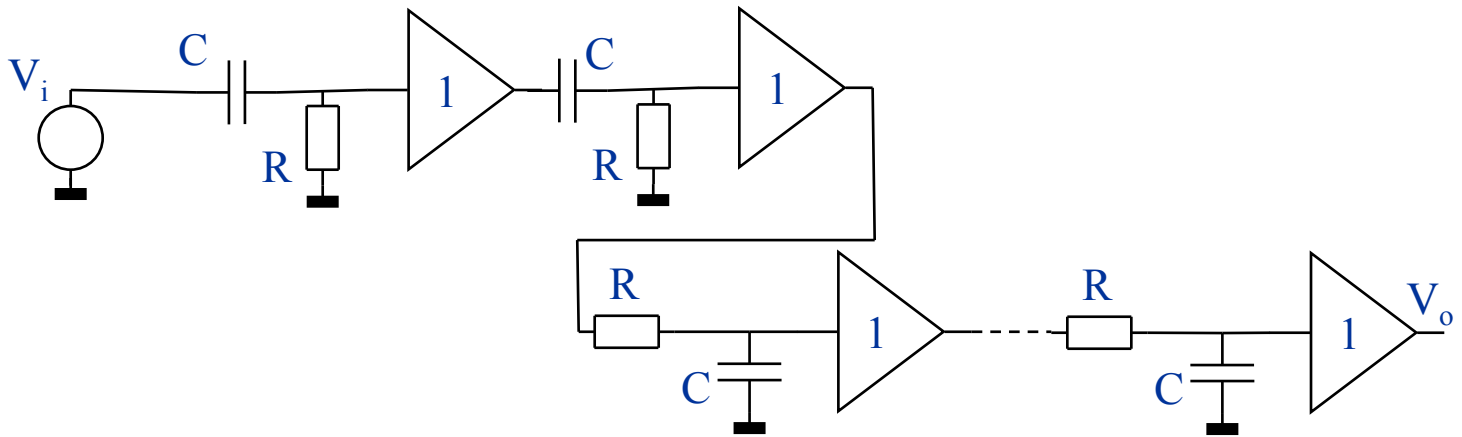
Il valore medio risultante sarà:

$$\bar{V}_O = \lambda \int_0^{\infty} V_O(t) dt = \lambda \tau V_{i0}$$

La linea di base del segnale si sposta della quantità $\lambda\tau$ quando si illumina il rivelatore con la sorgente. Se λ è elevato si è quindi costretti ad impiegare tempi di formatura τ piccoli, oppure ad usare una formatura che abbia valore medio nullo.

L'effetto del discostamento della linea di base è deleterio giacché l'ampiezza del picco del segnale risente dal valore di partenza.

Un tipo di formatura che consente di evitare il problema dello spostamento della linea di base si ottiene aggiungendo una differenziazione alla formatura CR-RCⁿ, ottenendo la formatura CR²-RCⁿ, o bipolare:



La funzione di trasferimento è:

$$V_o = \frac{s^2 \tau^2}{(1 + s\tau)^{n+2}} V_i$$

Mentre la risposta alla 1(t):

$$V_o = \tau s \frac{1}{\tau^{n+1}} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^{n+2}} V_{io}$$

Perciò:

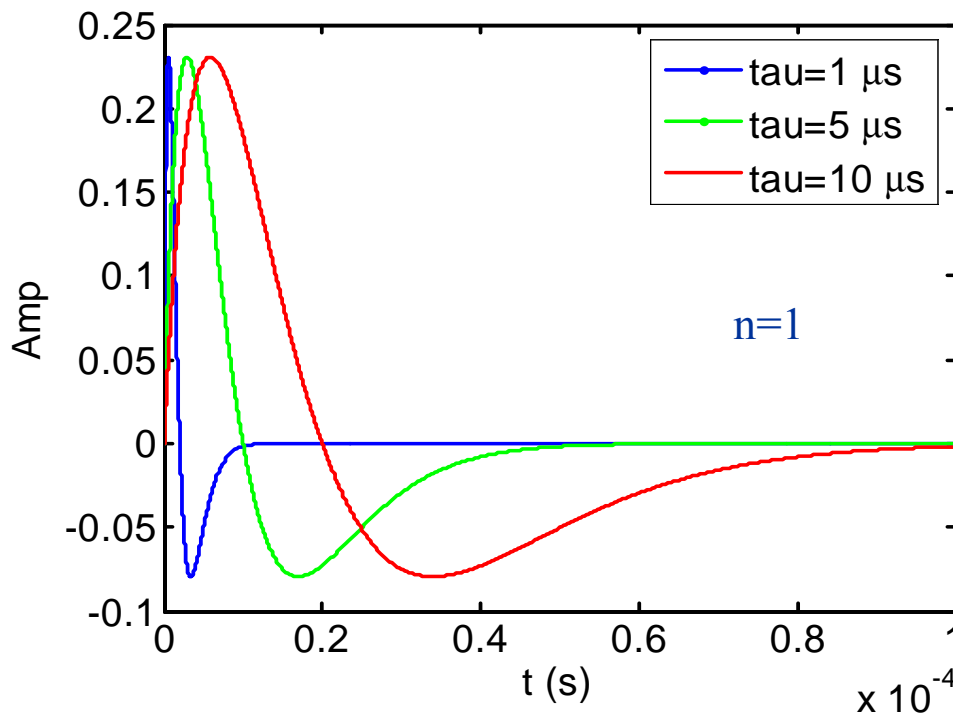
$$V_o(t) = \tau \frac{d}{dt} L^{-1} \left(\frac{1}{\tau^{n+1}} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^{n+2}} V_{io} \right)$$

$$V_o(t) = \tau \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{(n+1)} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) 1(t) \right)$$

$$= \left\{ \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^n \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{n+1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right\} V_{io} 1(t)$$

Per quanto visto nella pagina precedente l'integrale di V_o(t) è nulla visto che i 2 termini che la compongono hanno lo stesso integrale, a parte il segno.

La funzione ottenuta è la differenza tra 2 funzioni aventi lo stesso integrale. Perciò ora, come era da aspettarsi, la linea di base non viene inficiata dal tasso di conteggi.



La funzione ottenuta ha una massimo ed un minimo agli istanti:

$$t_{\max.\min} = \tau n(n+1) \left[\frac{1}{n} \pm \sqrt{\frac{1}{n^2(n+1)}} \right]$$

ad esempio, per n=1, formatura CR²-RC è:

$$t_{\max.\min} = 2\tau \left[1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

Nella formatura CR_RC^n si può fare una ulteriore considerazione. Ci si può chiedere se potrebbe essere considerata simile ad una formatura puramente gaussiana sotto qualche limite o ipotesi.

La formatura gaussiana essendo molto regolare è una delle più ambite, difficile però da implementare in pratica.

Consideriamo la formatura:

$$f(t) = e^{-\frac{(t-\text{ritardo})^2}{2\tau_0^2}}$$

Vale a dire un segnale gaussiano traslato.

La sua trasformata di fourrier risulta:

$$F(s) = \tau_0 \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\tau_0^2}{2} \omega^2} e^{-j\omega \text{ritardo}}$$

Supponiamo che per qualche n la formatura $CR-RC^n$ approssimi $f(t)$, quindi $F(s)$. Nel dominio delle frequenze questo deve verificarsi per modulo e fase:

$$\text{Da: } FF(s) = \frac{1}{s} \frac{s\alpha\tau}{(s\tau + 1)^{n+1}} \quad FF(s) = \text{risposta del filtro al segnale del preamplificatore.}$$

Ci aspettiamo che:

$$|FF(s)| \approx |F(s)| \quad \text{e} \quad \arg(FF(s)) \approx \arg(F(s))$$

Supposto che $\alpha\tau = \tau\sqrt{2\pi}$, abbiamo da dimostrare che:

$$\left((\omega\tau)^2 + 1\right)^{n+1} \approx e^{\omega^2 \tau_0^2}$$

Consideriamo il limite:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = [1]^\infty \quad \text{indecisione}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \exp\left[\frac{\ln\left(1 + \frac{x}{m}\right)}{1/m}\right] = \exp\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \exp\left[\frac{\ln\left(1 + \frac{x}{m}\right)}{1/m}\right] = \lim_{m \rightarrow \infty} \exp\left[\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{m}\right) - 1/m^2} \frac{-x/m^2}{1/m^2}\right] \rightarrow e^x$$

Scegliendo: $\tau = \tau_0 / \sqrt{n}$:

$$\left((\omega\tau)^2 + 1\right)^{n+1} = \left(\frac{(\omega\tau_0)^2}{n} + 1\right)^{n+1} \xrightarrow{n \text{ grande}} e^{\omega^2 \tau_0^2}$$

Perciò una candidata all'approssimazione gaussiana è:

$$FF(s) = \frac{\alpha \tau_0 / \sqrt{n}}{(s \tau_0 / \sqrt{n} + 1)^{n+1}}$$

Vediamo l'argomento che ora dovrà soddisfare:

$$\phi(FF(s)) = n \arctan(\omega\tau_0 / \sqrt{n}) \underset{\omega \text{ piccoli}}{\approx} \tau_0 \sqrt{n} \omega$$

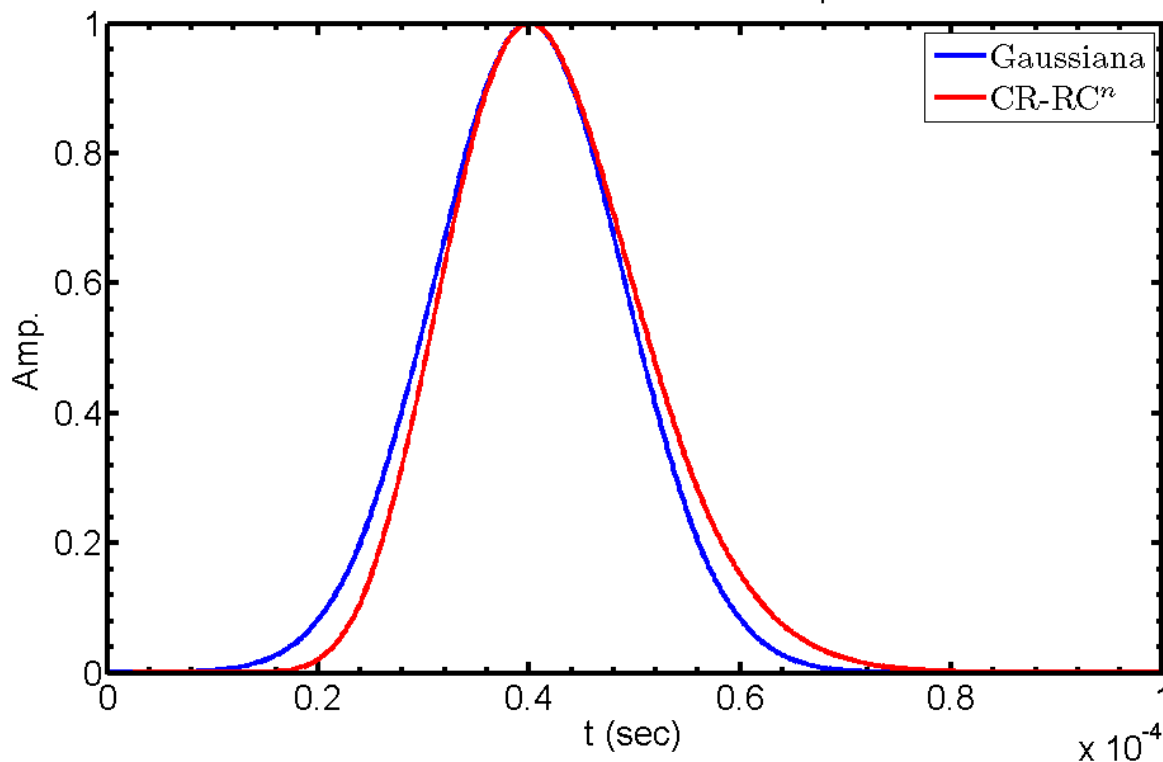
Per cui se nella gaussiana poniamo:

$$\text{ritardo} \approx \tau_0 \sqrt{n}$$

Abbiamo che:

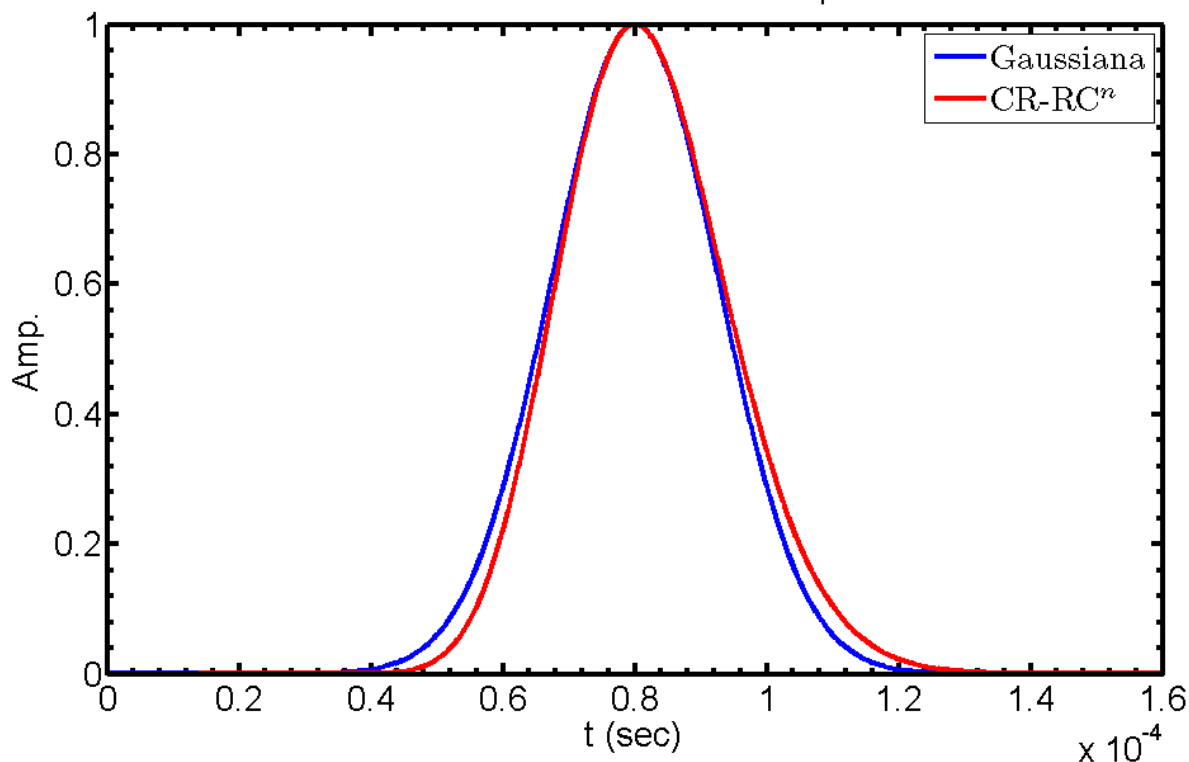
$$\frac{\alpha \tau_0 / \sqrt{n}}{(s \tau_0 / \sqrt{n} + 1)^{n+1}} \rightarrow \tau_0 \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\tau_0^2}{2} \omega^2} e^{-j\omega \tau_0 \sqrt{n}}$$

La formatura CR-RC ha 20 poli

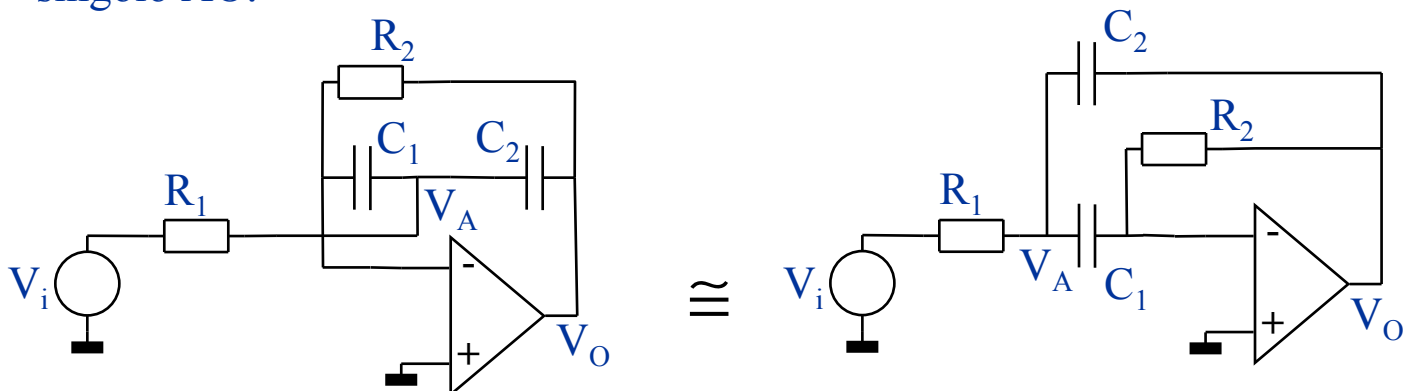


Esempi

La formatura CR-RC ha 40 poli



Vediamo un esempio di applicazione di filtro formatore basato sull'uso di un singolo AO.



$$\begin{cases} \frac{V_i - V_A}{R_1} = (V_A - V_O)sC_2 + V_A sC_1 \\ V_A sC_1 = -\frac{V_O}{R_2} \end{cases} \Rightarrow V_A = -\frac{V_O}{sC_1 R_2}$$

$$\begin{aligned} \frac{V_i}{R_1} &= V_A \left(\frac{1}{R_1} + s(C_1 + C_2) \right) - V_O sC_2 \\ &= -\left[\frac{1 + s(C_1 + C_2)R_1}{sC_1 R_1 R_2} + sC_2 \right] V_O \\ &= -\left[\frac{1 + s(C_1 + C_2)R_1 + s^2 C_1 C_2 R_1 R_2}{sC_1 R_1 R_2} \right] V_O \end{aligned}$$

Quindi:

$$V_O = -\frac{sC_1 R_2}{1 + s(C_1 + C_2)R_1 + s^2 C_1 C_2 R_1 R_2} V_i$$

Isoliamo il termine in s^2 al denominatore:

$$V_O = - \frac{s/C_2 R_1}{s^2 + s \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 R_2} + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}} V_i$$

Poniamo ora: $C_1 = C_2$ ed anche $R_1 = R_2$ e chiamiamo $\tau = R_1 C_1$:

$$\begin{aligned} V_O &= - \frac{s/\tau}{s^2 + s \frac{2}{\tau} + \frac{1}{\tau^2}} V_i \\ &= - \frac{s/\tau}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^2} V_i \\ &= - \frac{s\tau}{(s\tau + 1)^2} V_i \end{aligned}$$

Abbiamo implementato una formatura RC-CR impiegando un solo AO.

Formtaure semi-gaussiano vengono realizzate con l'ausilio dei filtri attivi. Di solito si realizza un filtro passa-alto CR “standard” seguito da un filtro ad n poli RC attivo.