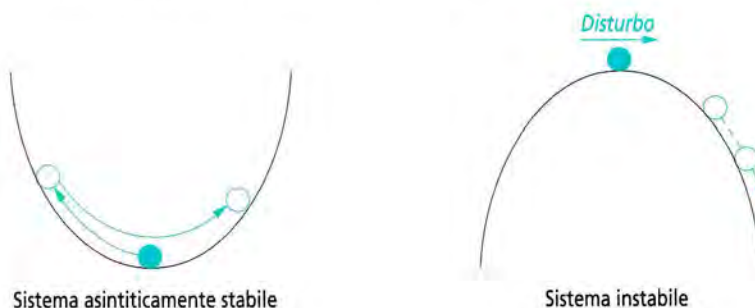


# Stabilità

Uno dei requisiti più importanti richiesti a un sistema di controllo è la **stabilità**, ossia la capacità del sistema di raggiungere uno stato di equilibrio dopo la fase iniziale transitoria. Una semplice definizione di stabilità può essere definita nel seguente modo:

**un generico sistema è stabile se sollecitato con un segnale d'ingresso limitato, anche l'uscita è limitata nel tempo.**

L'esempio di **figura 3.1** chiarisce, in modo intuitivo, il concetto di stabilità disponendo una sfera su un supporto con profilo concavo o convesso.



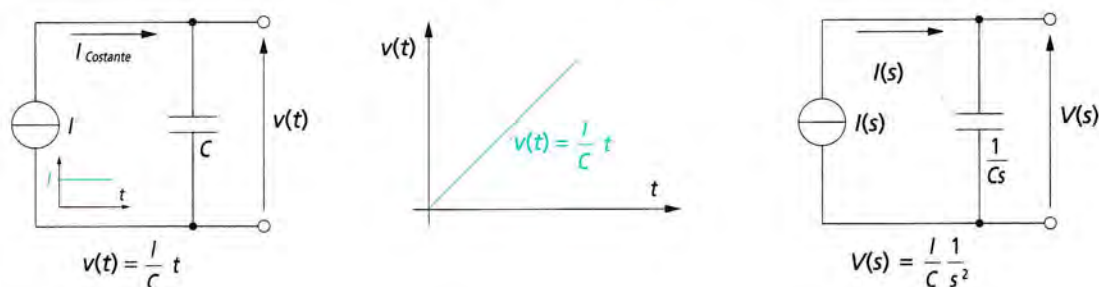
**figura 3.1** Sistema asintoticamente stabile

Sistema instabile

Nel caso del supporto concavo spostando la sfera dalla sua posizione di equilibrio, acquista energia. Successivamente la sfera si muove con oscillazioni sempre decrescenti perdendo energia e dopo un tempo limitato riacquista la posizione iniziale (**condizione di stabilità**).

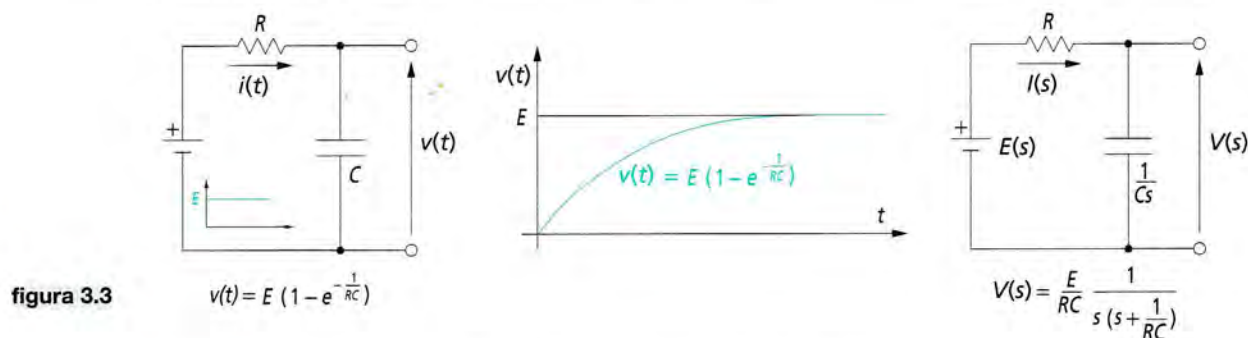
Nel caso di supporto convesso una qualsiasi perturbazione (come ad esempio il vento) sposta la sfera dalla posizione iniziale che acquista sempre più energia e non torna più nella posizione iniziale (**condizione di instabilità**).

Si consideri il sistema rappresentato in **figura 3.2**, costituito da componenti elettrici: un condensatore e un generatore di corrente costante (sollecitazione limitata). Il sistema è instabile perché la tensione ai capi del condensatore (risposta) non è limitata ma tende all'infinito quando  $t \rightarrow \infty$  (si ricorda che un condensatore è sottoposto a una scarica distruttiva quando la tensione ai suoi capi supera la tensione di lavoro).



**figura 3.2**

Il sistema rappresentato in **figura 3.3**, invece, è stabile quando è sollecitato da un gradino di tensione di ampiezza minore della tensione di lavoro del condensatore. Al termine della fase transitoria, infatti, la tensione ai capi del condensatore è uguale al valore della sollecitazione applicata.



Dagli esempi fatti si trae la seguente definizione di stabilità:

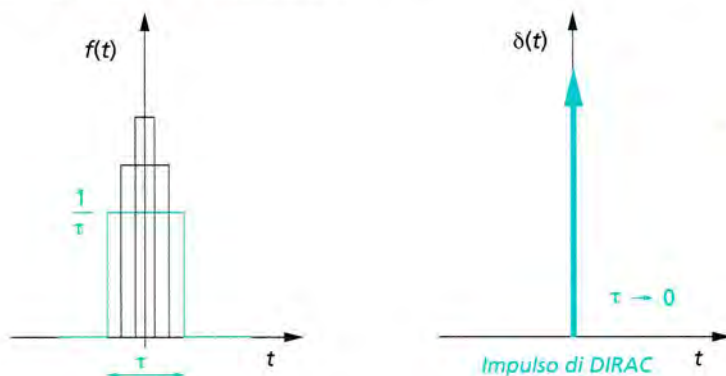
**un sistema lineare, invariante nel tempo e con condizioni iniziali nulle, è stabile se la sua risposta è limitata in corrispondenza di una qualsiasi sollecitazione limitata, altrimenti è instabile (stabilità BIBO, bounded input- bounded output, ingresso limitato - uscita limitata).**

La stabilità di un sistema può essere studiata, come si vedrà, nel dominio del tempo o in quello della frequenza:

- nel primo caso la stabilità del sistema si ricava osservando la risposta nel dominio del tempo o, più semplicemente, la posizione dei poli nel piano complesso  $s$ ;
- nel secondo caso è sufficiente tracciare i diagrammi di Nyquist e/o di Bode della funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema.

### 3.1 Posizione dei poli nel piano complesso $s$

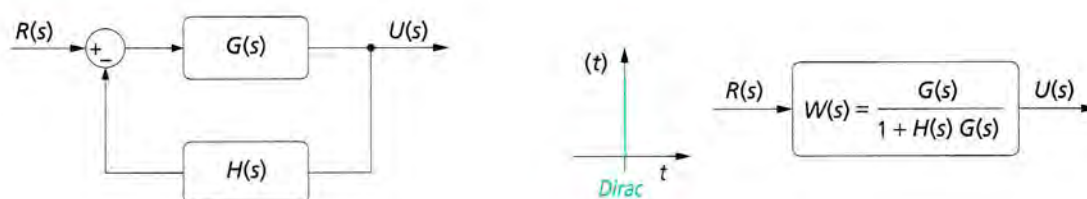
La stabilità dipende solo dal tipo di sistema e non dal tipo di segnale d'ingresso. Si può quindi definire la stabilità in modo più completo con riferimento a una sollecitazione impulsiva definita **impulso di Dirac**  $\delta(t)$ . Si ricorda che tale funzione è di durata  $\tau$ , ampiezza  $1/\tau$  e area unitaria per  $\tau \rightarrow 0$  (**figura 3.4**).



**Un sistema lineare, invariante nel tempo e con condizioni iniziali nulle, è stabile o asintoticamente stabile se la sua risposta è limitata o tende a zero in corrispondenza di una qualsiasi sollecitazione di durata limitata, altrimenti è instabile.**

Sebbene sia possibile dimostrare che la risposta di un sistema lineare e invariante nel tempo non dipenda dall'ampiezza dell'impulso né dall'istante in cui esso viene applicato, di seguito si riporta un esempio di un sistema retroazionato sollecitato da un impulso di Dirac (figura 3.5).

figura 3.5



Si dimostra che la trasformata della risposta di un sistema lineare (figura 3.5) dipende solo dalla funzione di trasferimento quando esso è sollecitato da un impulso \$\delta(t)\$ di Dirac la cui trasformata di Laplace è \$L[\delta(t)] = 1\$:

$$U(s) = W(s) \cdot 1 = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)} \quad [3.1]$$

Considerato che la funzione di trasferimento ad anello chiuso \$W(s)\$ dipende solo dalla natura del sistema in esame e non dalla forma della sollecitazione a esso applicata, si può affermare che la stabilità è una caratteristica intrinseca della struttura del sistema. Per verificare se un sistema è stabile o meno, dunque, è necessario ricavare le radici dell'equazione ottenuta eguagliando a zero il denominatore della [3.1]:

$$1 + G(s) \cdot H(s) = 0 \quad [3.2]$$

La [3.2] è detta **equazione caratteristica** e la sua soluzione fornisce i poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso.

Posto \$G(s) = \frac{N\_G(s)}{D\_G(s)}\$ e \$H(s) = \frac{N\_H(s)}{D\_H(s)}\$ la funzione caratteristica \$F(s)\$ assume la forma:

$$F(s) = 1 + G(s) \cdot H(s) \quad F(s) = \frac{D_G(s) \cdot D_H(s) + N_G(s) \cdot N_H(s)}{D_G(s) \cdot D_H(s)}$$

dove \$N\_G(s)\$, \$N\_H(s)\$, \$D\_G(s)\$, \$D\_H(s)\$ sono i polinomi in \$s\$.

Essendo la F.d.T. ad anello chiuso \$W(s)\$ di figura 3.5:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)} = \frac{G(s)}{F(s)}$$

si ottiene:

$$W(s) = \frac{N_G(s) \cdot D_H(s)}{D_G(s) \cdot D_H(s) + N_G(s) \cdot N_H(s)}$$



Ricordando che la F.d.T. ad anello aperto  $G(s) \cdot H(s)$  è:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{N_G(s) \cdot N_H(s)}{D_G(s) \cdot D_H(s)}$$

si può fare lo schema riportato in **tabella 3.1**.

**tabella 3.1**

$W(s)$	$F(s)$	$G(s) \cdot H(s)$
$\frac{N_G(s) \cdot D_H(s)}{D_G(s) \cdot D_H(s) + N_G(s) \cdot N_H(s)}$	$\frac{D_G(s) \cdot D_H(s) + N_G(s) \cdot N_H(s)}{D_G(s) \cdot D_H(s)}$	$\frac{N_G(s) \cdot N_H(s)}{D_G(s) \cdot D_H(s)}$

Dall'analisi della **tabella 3.1** si ricava che:

- i poli della F.d.T. ad anello chiuso  $W(s)$  sono uguali agli zeri della funzione caratteristica  $F(s)$ ;
- i poli della funzione caratteristica  $F(s)$  sono anche i poli della F.d.T. ad anello aperto  $G(s) \cdot H(s)$ .

Quindi, per trovare i poli della F.d.T. ad anello chiuso  $W(s)$ , basta trovare le soluzioni dell'equazione caratteristica  $F(s) = 1 + G(s) \cdot H(s) = 0$ .

Si dimostra che un sistema sollecitato da un impulso  $\delta(t)$  di Dirac è **stabile** (**tabella 3.2**) o **instabile** (**tabella 3.3**) a seconda del valore dei poli della F.d.T. ad anello chiuso  $W(s)$ .

Nella **tabella 3.4** è riportato un quadro riassuntivo sulla stabilità o meno dei sistemi.

**tabella 3.2**

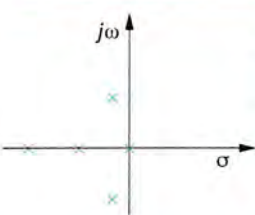
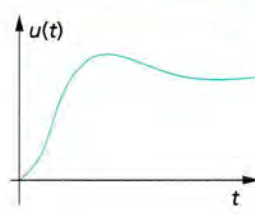
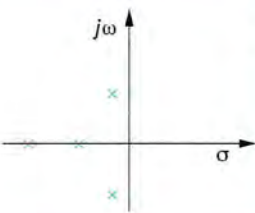
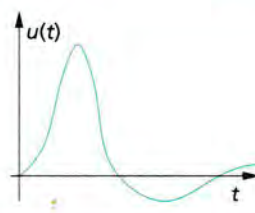
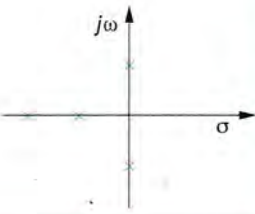
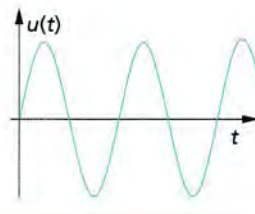
Sistema stabile		
Posizione poli	Definizione	Risposta temporale
	Un sistema è <b>stabile</b> (semplicemente) se la F.d.T. ad anello chiuso $W(s)$ ha un solo polo nell'origine e i rimanenti poli sono negativi (se reali) o a parte reale negativa (se complessi coniugati). In tal caso la risposta $u(t)$ tende a un valore costante quando $t \rightarrow \infty$ .	
	Un sistema è <b>stabile asintoticamente</b> se tutti i poli della F.d.T. ad anello chiuso $W(s)$ sono reali negativi o complessi coniugati a parte reale negativa. In tal caso la risposta $u(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ .	
	Un sistema è <b>stabile marginalmente</b> se la F.d.T. ad anello chiuso $W(s)$ ha una coppia di poli complessi coniugati a parte reale nulla e i rimanenti poli sono negativi (se reali) o a parte reale negativa (se complessi coniugati). In tal caso la risposta $u(t)$ è una oscillazione di ampiezza costante quando $t \rightarrow \infty$ .	

tabella 3.3


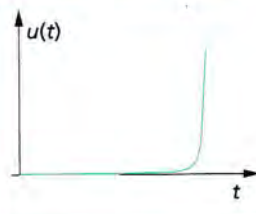
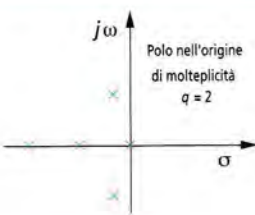
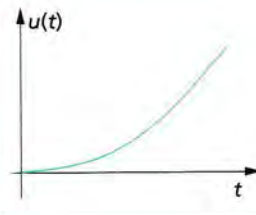
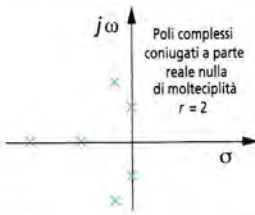
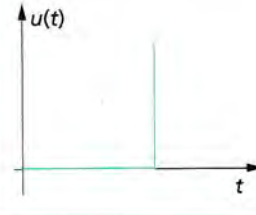
Sistema instabile		
Posizione poli	Definizione	Risposta temporale
	Un sistema è <b>instabile</b> se la F.d.T. ad anello chiuso $W(s)$ ha almeno un polo reale positivo o complesso coniugato a parte reale positiva. In tal caso la risposta $u(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ .	
	Un sistema è <b>instabile</b> se la F.d.T. ad anello chiuso $W(s)$ ha poli nulli di molteplicità $q > 1$ . In tal caso la risposta $u(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ .	
	Un sistema è <b>instabile</b> se la F.d.T. ad anello chiuso $W(s)$ ha poli complessi coniugati a parte reale nulla di molteplicità $r > 1$ . In tal caso la risposta $u(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ .	

tabella 3.4

Sistema stabile asintoticamente	Sistema stabile marginalmente	Sistema instabile
Tutti i poli della F.d.T. ad anello chiuso $W(s)$ sono reali negativi o complessi coniugati a parte reale negativa.	La F.d.T. ad anello chiuso $W(s)$ ha un solo polo nell'origine o una coppia di poli complessi coniugati a parte reale nulla. Gli altri poli devono essere negativi (se reali) o a parte reale negativa (se complessi coniugati).	La F.d.T. ad anello chiuso $W(s)$ ha: <ul style="list-style-type: none"> <li>almeno un polo reale positivo o complesso coniugato a parte reale positiva;</li> <li>poli nulli di molteplicità <math>q \geq 1</math>;</li> <li>poli complessi coniugati a parte reale nulla di molteplicità <math>r &gt; 1</math>.</li> </ul>

La posizione dei poli (e degli zeri) nel piano complesso  $s$  di una qualsiasi F.d.T. può essere determinata con LabVIEW utilizzando il VI polizeri.vi presente nella sezione digitale del corso ( $\rightarrow$  Unità 2 nel presente Modulo). La **figura 3.6** mostra la mappa di posizione dello zero e dei poli della F.d.T. ad anello aperto  $H(s) \cdot G(s)$  indicata, in LabVIEW, con  $G(s)$ .

$$H(s) \cdot G(s) = \frac{s + 5}{s^3 + s^2 + 10 \cdot s + 40}$$

La F.d.T. contiene:

- un zero reale a parte reale negativa ( $-5,000$ );
- un polo reale a parte reale negativa ( $-2,72$ );
- due poli complessi coniugati a parte reale positiva ( $+0,86 \pm 3,73 i$ ).



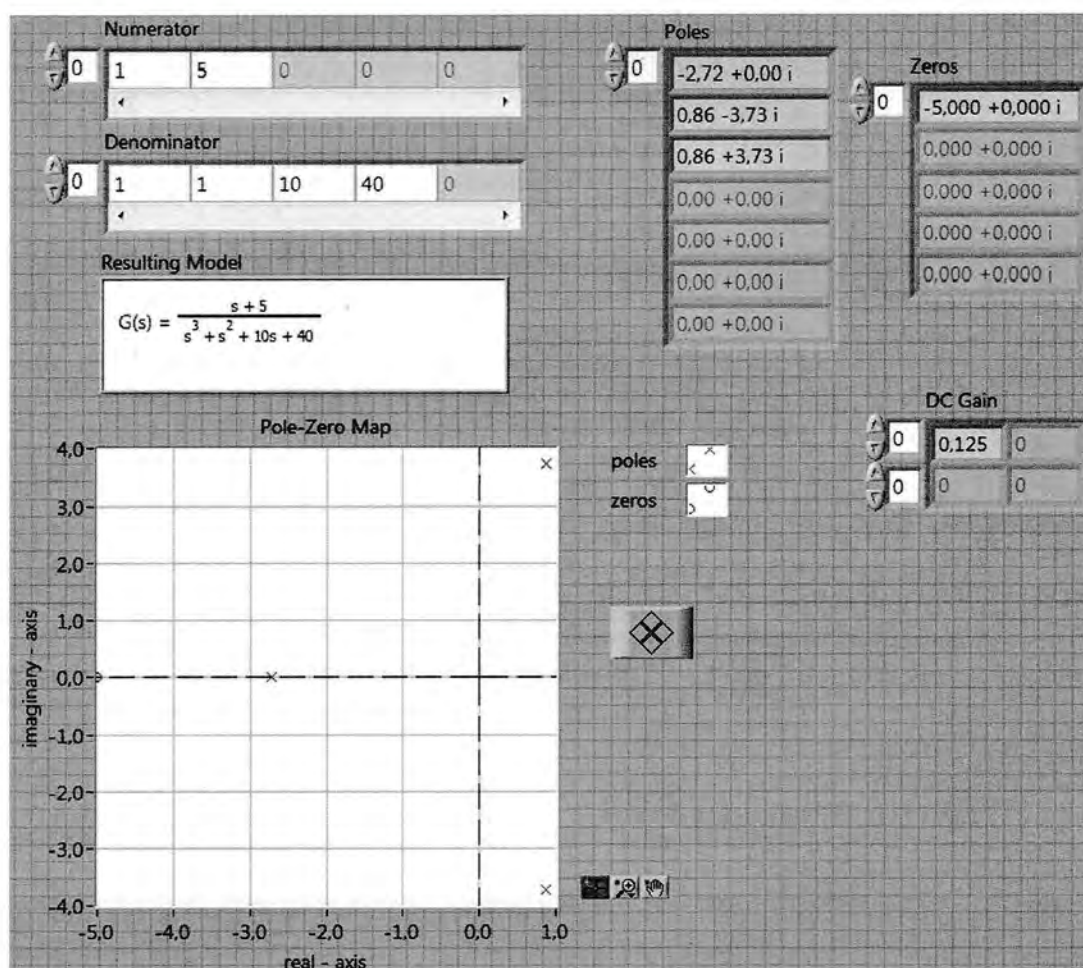


figura 3.6

## 3.2 Criteri di stabilità

Lo studio della stabilità dei sistemi nel dominio del tempo è lungo e laborioso, perché la risposta è la soluzione di equazioni integro-differenziali, oppure deriva da operazioni di trasformazione e di antitrasformazione. Per evitare le difficoltà di calcolo è preferibile studiare la stabilità di un sistema lineare e invariante utilizzando i criteri grafici di Nyquist (→ Volume 2, Modulo 1, Unità 2, par. 2.4) e di Bode (→ Volume 2, Modulo 1, Unità 2, paragrafo 2.1) che sono quelli più comunemente utilizzati. Altri criteri, come quello di Routh (matematico) e il luogo delle radici (grafico), non sono trattati.

### 3.2.1 Criterio di stabilità di Nyquist

Senza entrare nel merito della dimostrazione, per la quale si rimanda a testi specializzati, di seguito sono enunciati i criteri di stabilità di Nyquist, basati sull'analisi del diagramma polare della F.d.T. ad anello aperto  $G(s) \cdot H(s)$  per  $-\infty < \omega < +\infty$  (figura 3.7). Si traccia il diagramma polare ad anello aperto  $G(s) \cdot H(s)$  per  $0 < \omega < +\infty$  e per ribaltamento speculare si ottiene il diagramma di Nyquist completo per  $-\infty < \omega < +\infty$  (→ Volume 2, Modulo 1, Unità 2, paragrafo 2.4).

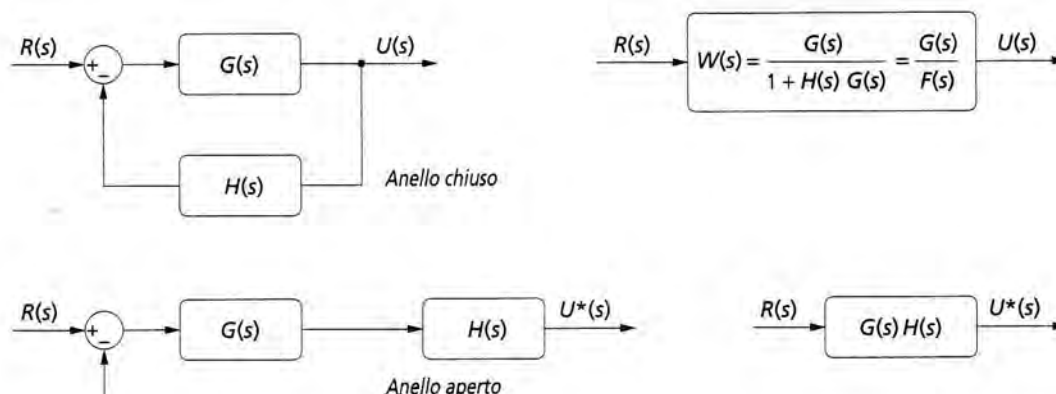


figura 3.7

Il **criterio di Nyquist** definisce se la F.d.T.  $W(s)$  di un sistema ad anello chiuso è stabile o meno analizzando la F.d.T. ad anello aperto  $G(s) \cdot H(s)$ . Il motivo è che la F.d.T. ad anello aperto  $G(s) \cdot H(s)$  è più semplice da analizzare e generalmente si presenta già sotto forma fattorizzata.

Per analizzare la stabilità di un sistema si consideri una curva chiusa giacente sul piano complesso  $s$  costituita dall'asse immaginario, con  $\omega$  variabile da  $-\infty$  a  $+\infty$ , e da una semicirconferenza di raggio  $R \rightarrow \infty$  (figura 3.8a). La curva così definita è detta **cammino di Nyquist** e racchiude l'intero semipiano destro o semipiano al quale appartiene il semiasse  $\sigma$  positivo. Se la F.d.T. ad anello chiuso  $W(s)$  o la funzione caratteristica  $F(s) = 1 + G(s) \cdot H(s)$  hanno zeri e/o poli reali a parte reale positiva e/o poli complessi coniugati a parte reale positiva questi sono situati nel semipiano destro del piano complesso  $s$ .

Al variare del punto  $P_i$  sulla curva cammino di Nyquist, il punto  $M_i$ , estremità del vettore  $OM_i$  rappresentativo della funzione caratteristica  $F(s)$  descrive una curva chiusa (figura 3.8b) nel piano complesso  $F(s) = 1 + G(s) \cdot H(s)$ .

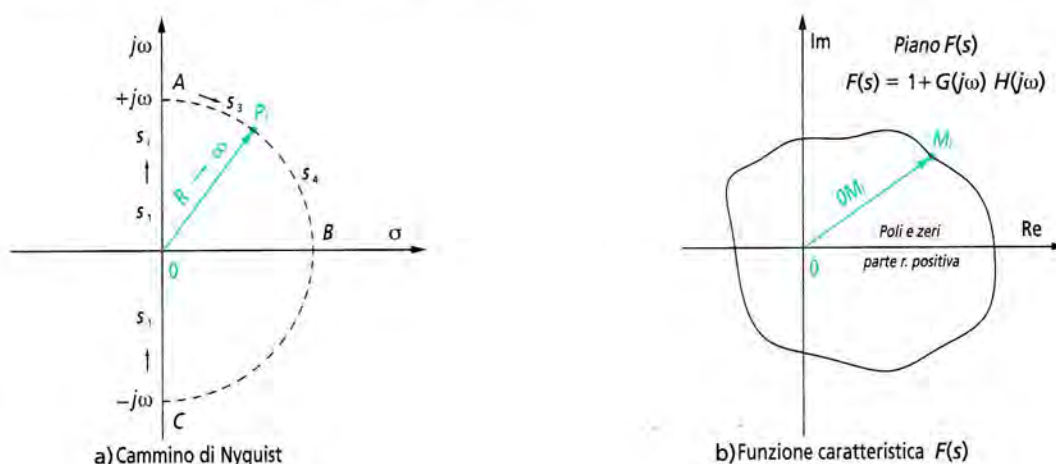


figura 3.8

Considerando che l'origine del piano  $1 + G(s) \cdot H(s)$  coincide con il punto di coordinate  $-1 + j0$  del piano  $G(s) \cdot H(s)$ , è possibile rappresentare il diagramma della F.d.T. ad anello aperto  $G(j\omega) \cdot H(j\omega)$  al posto di quello della funzione caratteristica. Infatti, il vettore  $1 + G(j\omega) \cdot H(j\omega)$ , considerato come somma ottenuta addizionando il vettore unitario e il vettore  $G(j\omega) \cdot H(j\omega)$ , è identico al vettore che ha come punto iniziale il punto  $-1 + j0$  e come punto terminale quello del vettore  $G(j\omega) \cdot H(j\omega)$  (figura 3.9).



In tal modo, anziché tener conto del numero delle rotazioni compiute dal vettore  $OM_i$  attorno all'origine del piano  $1 + G(s) \cdot H(s)$ , si prendono in considerazione le rotazioni compiute dal vettore  $OQ_i$  attorno al punto  $-1 + j0$  appartenente al piano  $G(s) \cdot H(s)$ .

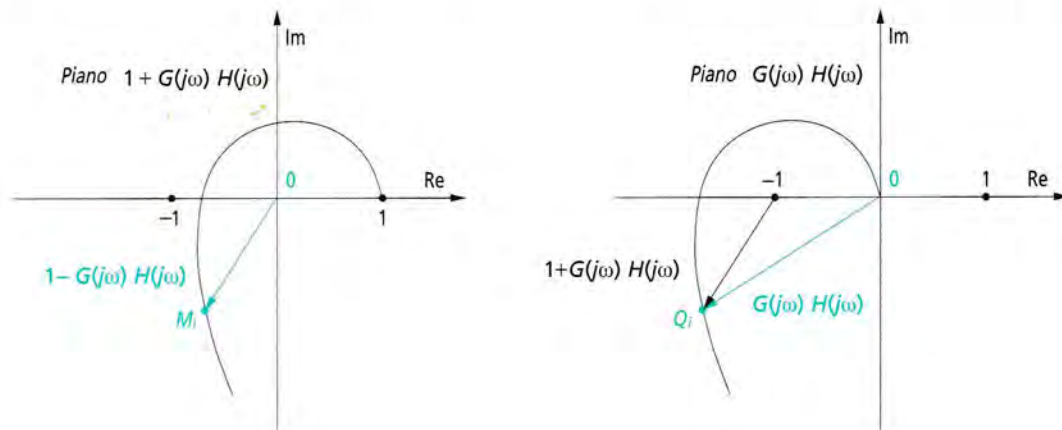


figura 3.9

Il numero di rotazioni  $N$  del vettore  $OM_i$  attorno all'origine, è dato dalla differenza  $Z$  (numero di zeri con parte reale positiva) e  $P$  (numero di poli con parte reale positiva) dell'equazione caratteristica  $F(s) = 1 + G(s) \cdot H(s)$ :

$$N = Z - P \quad [3.3]$$

La F.d.T. ad anello chiuso  $W(s)$  **non ha poli a parte reale positiva se la funzione caratteristica  $F(s)$  non ha zeri a parte reale positiva**. Se dunque è  $Z = 0$  dalla [3.3] si ricava:

$$N = -P \quad [3.4]$$

che permette definire la stabilità o meno di un sistema ad anello chiuso partendo da quello ad anello aperto.

### ■ Criterio generalizzato di stabilità

Il criterio generalizzato di stabilità si riferisce ai sistemi instabili ad anello aperto, ovvero ai sistemi la cui funzione di trasferimento ad anello aperto  $G(s) \cdot H(s)$  ha almeno un polo a parte reale positiva.

Un sistema con F.d.T.  $G(s)$  figura 3.10 instabile è stabile ad anello chiuso se il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento ad anello aperto  $G(s) \cdot H(s)$  compie un numero  $N$  di rotazioni attorno al punto  $-1 + j0$  uguale al numero  $P$  dei poli a parte reale positiva della medesima funzione:

$$N = -P$$

dove il segno meno indica che le rotazioni devono essere compiute in verso antiorario.

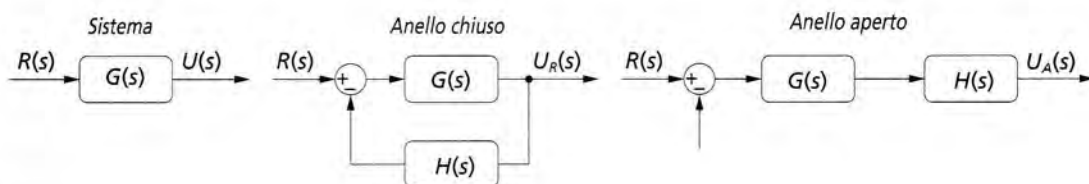


figura 3.10



Il diagramma di **figura 3.11** rappresenta un sistema instabile ad anello aperto in quanto la funzione di trasferimento  $G(s) \cdot H(s)$  ha un polo a parte reale positiva, ma stabile ad anello chiuso perché il diagramma di Nyquist compie una rotazione in verso antiorario attorno al punto  $-1 + j0$ .

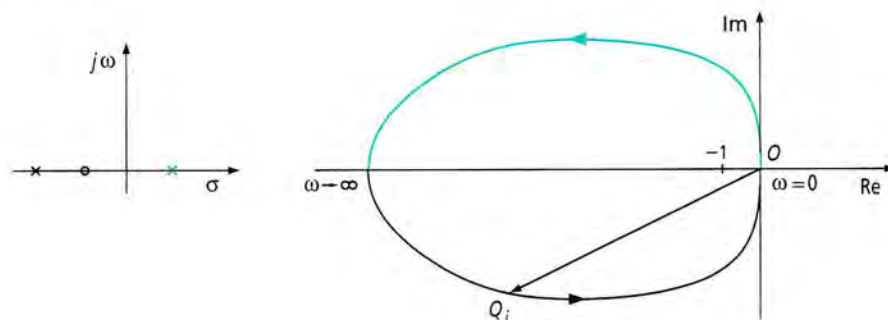


figura 3.11

### ■ Criterio ristretto di stabilità

Il criterio ristretto di stabilità si riferisce ai sistemi stabili ad anello aperto, ovvero ai sistemi la cui funzione di trasferimento ad anello aperto  $G(s) \cdot H(s)$  non ha poli a parte reale positiva ( $P = 0$ ).

**Un sistema con F.d.T.  $G(s)$  (figura 3.10) stabile è stabile anche ad anello chiuso se il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento ad anello aperto  $G(s) \cdot H(s)$  non compie alcuna rotazione attorno al punto  $-1 + j0$ :**

$$P = 0 \quad N = 0$$

Il diagramma di **figura 3.12** rappresenta un sistema stabile ad anello aperto in quanto la funzione di trasferimento  $G(s) \cdot H(s)$  non ha poli a parte reale positiva, e stabile ad anello chiuso perché il diagramma di Nyquist non compie alcuna rotazione attorno al punto  $-1 + j0$ .

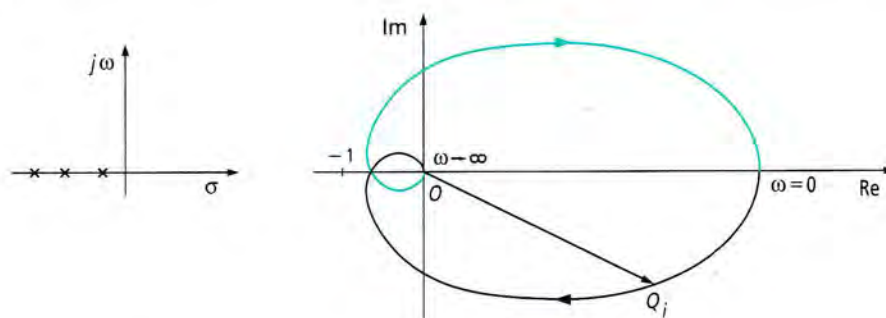


figura 3.12

**Si dimostra, inoltre, che poli nulli o complessi coniugati a parte reale nulla non devono essere computati quando si verifica la stabilità di un sistema.**

In riferimento al verso di percorrenza del diagramma di Nyquist si possono dedurre le seguenti considerazioni:

- ▶ la **rotazione antioraria** migliora la stabilità del sistema;
- ▶ la **rotazione oraria** peggiora la stabilità del sistema.

## esempio 3.1

Si verifichi la stabilità del sistema retroazionato di figura 3.13a.

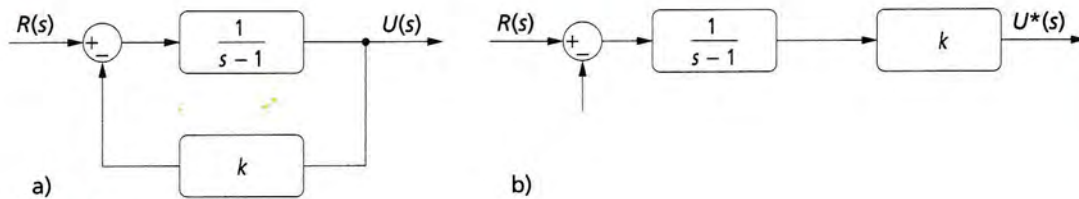


figura 3.13

## Svolgimento

La F.d.T. ad anello aperto (figura 3.13b) risulta:

$$G(s) \cdot H(s) = k \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{k}{s-1}$$

con il polo a parte reale positiva (+1) e guadagno  $k$ . A seconda del valore del guadagno  $k$  il diagramma di Nyquist assume dimensioni diverse.

Costruzione del diagramma con guadagno  $k$ 

Essendo  $s = \sigma + j\omega$ , si costruisce il diagramma di Nyquist della F.d.T. ad anello aperto  $G(s) \cdot H(s)$  (figura 3.14) con  $\sigma = 0$  ed  $s = j\omega$ . Utilizzando la parte reale e quella immaginaria della  $G(j\omega) \cdot H(j\omega)$  si ha:

$$G(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{k}{j\omega - 1} = k \cdot \frac{-1 - j\omega}{1 + \omega^2} = k \cdot \left( \frac{-1}{1 + \omega^2} + j \frac{-\omega}{1 + \omega^2} \right)$$

dalla quale si ricava la tabella 3.5.

tabella 3.5

$\omega$ [rad/s]	$Re = k \cdot \frac{-1}{1 + \omega^2}$	$Im = k \cdot \frac{-\omega}{1 + \omega^2}$
0	$-k$	0
1	$-k/2$	$-k/2$
3	$-0,1 k$	$-0,3 k$
$\infty$	0	0

Utilizzando modulo e fase della F.d.T.  $G(j\omega) \cdot H(j\omega)$  si perviene allo stesso risultato (tabella 3.6):

$$|G(j\omega) \cdot H(j\omega)| = \frac{k}{|j\omega - 1|} = \frac{k}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \quad \phi = -\arctg \frac{\omega}{-1}$$

tabella 3.6

$\omega$ [rad/s]	$ G(j\omega) \cdot H(j\omega) $	$\phi$
0	$k$	$-180^\circ$
1	$k / \sqrt{2}$	$-135^\circ$
3	$k / \sqrt{10}$	$-109^\circ$
10	$k / \sqrt{101}$	$-96^\circ$
$\infty$	0	$-90^\circ$



Il diagramma polare della F.d.T. ad anello aperto  $G(s) \cdot H(s)$  (figura 3.14a) è un semicerchio (raggio  $k/2$ ). Il diagramma di Nyquist della F.d.T. ad anello aperto  $G(s) \cdot H(s)$  è un cerchio (piano sinistro) percorso in senso antiorario (figura 3.14b).

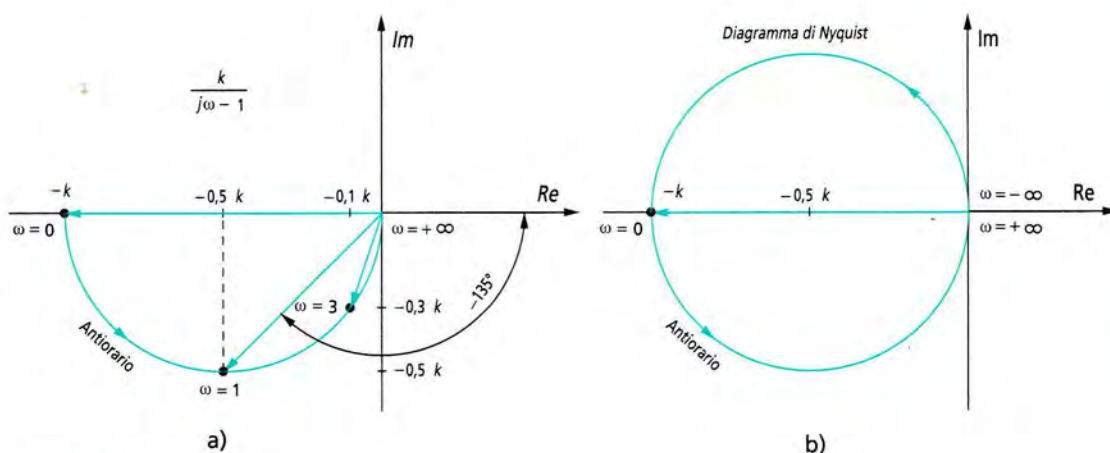


figura 3.14

#### a) $k = 0,6 < 1$

La F.d.T. ad anello aperto  $G(s) \cdot H(s)$  con  $k = 0,6$  diviene  $0,6/(s - 1)$ . Il diagramma di Nyquist ad anello aperto  $G(s) \cdot H(s)$  (figura 3.15) non circonda il punto  $-1 + j0$ . Poiché  $N = 0$  (rotazioni nulle attorno al punto  $-1 + j0$ ) e  $P = 1$  (un polo a parte reale positiva) risulta  $P \neq -N$  per cui il sistema è **instabile** (per il criterio di Nyquist il diagramma non circonda il punto  $-1 + j0$ ).

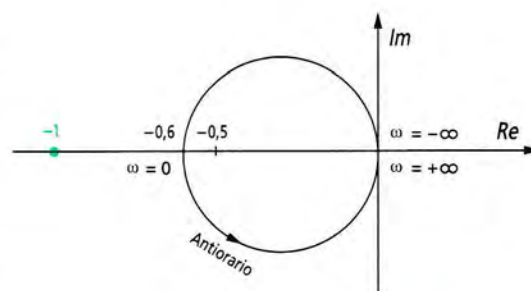


figura 3.15

#### ■ Utilizzando LabVIEW

La figura 3.16 mostra il diagramma di Nyquist tracciato con LabVIEW che conferma la instabilità del sistema ad anello chiuso.

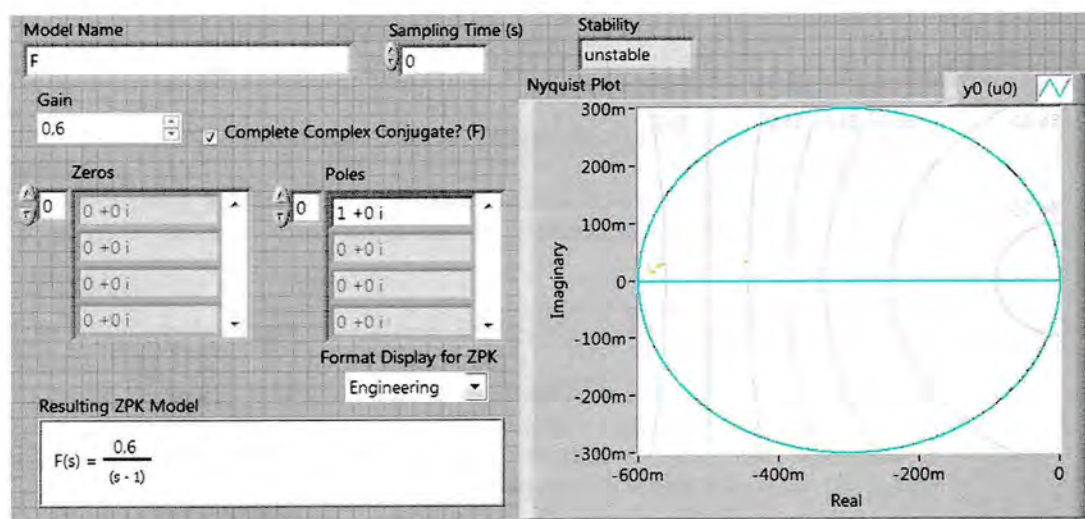


figura 3.16

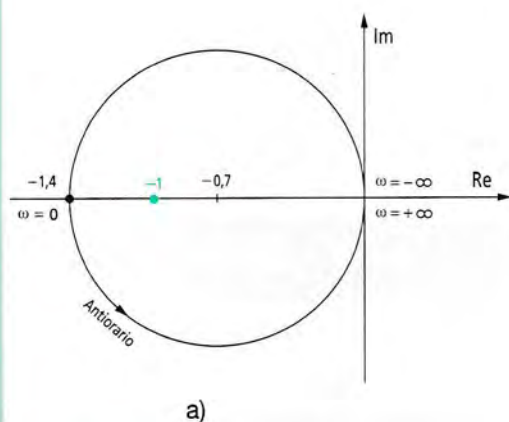
Infatti la F.d.T. ad anello chiuso  $W(s)$  è:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s) \cdot G(s)} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1 + k \cdot \frac{1}{s-1}} = \frac{1}{s-1+k} = \frac{1}{s-1+0,6} = \frac{1}{s-0,4}$$

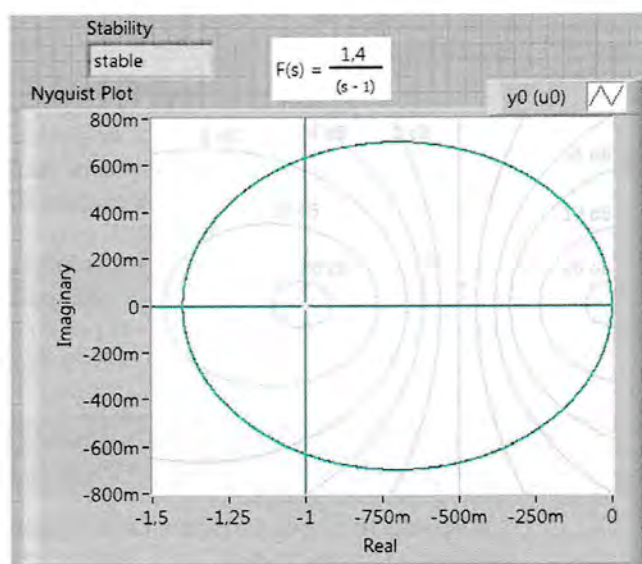
con un polo a parte reale positiva (+0,4). Il sistema, come già detto, è instabile.

### b) $k = 1,4 > 1$

Il diagramma di Nyquist ad anello aperto  $G(s) \cdot H(s)$  con  $k = 1,4$  diviene  $1,4/(s-1)$ . Il grafico del diagramma è riportato in **figura 3.17a**. Come si può osservare il diagramma di Nyquist circonda, in senso antiorario, il punto  $-1 + j0$ . Risulta  $N = 1$  con  $P = 1$  (polo a parte reale positiva) e quindi  $P = -N$  (si ricorda che il segno meno indica la rotazione antioraria). Il sistema  $W(s)$  è **stabile** per il criterio generalizzato di Nyquist. La **figura 3.17b** mostra il diagramma di Nyquist tracciato con LabVIEW che conferma la stabilità del sistema ad anello chiuso.



a)



b)

**figura 3.17**

In questo caso ( $k > 1$ ) si ha un sistema ad anello chiuso stabile partendo da un sistema ad anello aperto instabile ( $p = +1$ ).

La F.d.T. ad anello chiuso  $W(s)$  diviene:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s) \cdot G(s)} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1 + k \cdot \frac{1}{s-1}} = \frac{1}{s-1+k} = \frac{1}{s-1+1,4} = \frac{1}{s+0,4}$$

La retroazione trasla il polo dal semipiano destro a quello sinistro rendendo il polo a parte reale negativa (-0,4). Il sistema è stabile (criterio generalizzato di Nyquist).



### 3.2.2 Criterio di stabilità di Bode

Molto spesso è necessario studiare il comportamento di sistemi definiti da una funzione di trasferimento ad anello aperto che **non ha poli e zeri a parte reale positiva**.

Lo studio grafico della stabilità di questi sistemi, detti a **sfasamento minimo** (la F.d.T. è priva di poli a parte reale positiva), può essere eseguita applicando il **criterio di stabilità di Bode**.

A tal fine si consideri la **figura 3.18** e la pulsazione in corrispondenza della quale il diagramma del modulo in dB della F.d.T. ad anello aperto interseca l'asse delle ascisse.

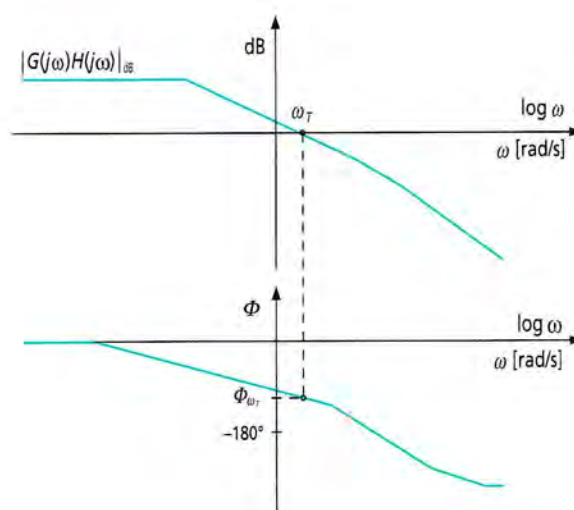


figura 3.18

In corrispondenza di tale pulsazione, detta pulsazione di **attraversamento**  $\omega_T$ , il modulo in dB della F.d.T. ad anello aperto è:

$$\left| G(j\omega_T) \cdot H(j\omega_T) \right|_{\text{dB}} = 20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Tenendo presente il criterio ristretto di Nyquist, il **criterio di stabilità di Bode** afferma quanto segue:

**un sistema a sfasamento minimo, è stabile ad anello chiuso se in corrispondenza di  $\omega_T$  il valore assoluto della fase  $\phi_{\omega_T}$  della F.d.T. ad anello aperto è minore di  $180^\circ$ .**

In particolare il sistema è stabile se è  $|\Phi_{\omega_T}| < 180^\circ$ , instabile se è  $|\Phi_{\omega_T}| > 180^\circ$  e marginalmente stabile se è  $|\Phi_{\omega_T}| = 180^\circ$ .

Secondo il criterio di Bode, dunque, è possibile valutare la stabilità di un sistema ad anello aperto e a sfasamento minimo, osservando i diagrammi di Bode del modulo e della fase della F.d.T. ad anello aperto.

## esempio 3.2

Si verifichi la stabilità di un sistema la cui F.d.T. ad anello aperto è  $G(s) \cdot H(s)$ :

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{20 \cdot 1000}{(s + 10) \cdot (s + 100)}$$

## Svolgimento

La F.d.T. non ha poli a parte reale negativa e pertanto è applicabile il criterio di Bode. Essendo  $s = \sigma + j \cdot \omega$ , si costruisce il diagramma con  $\sigma = 0$  e  $s = j \cdot \omega$ . Si ha:

$$G(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{20}{(1 + 0,1j\omega) \cdot (1 + 0,01j\omega)}$$

Le pulsazioni d'angolo dei due poli, l'angolo  $\Phi$  e l'ampiezza in dB sono:

$$\omega_{c1} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ rad/s} \quad \omega_{c2} = \frac{1}{0,01} = 100 \text{ rad/s} \quad \phi = -\arctg \frac{\omega}{10} - \arctg \frac{\omega}{100}$$

$$|H(j\omega) \cdot G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log 20 - 20 \cdot \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2} - 20 \cdot \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{100}\right)^2}$$

I diagrammi di Bode in ampiezza e fase sono riportati nella **figura 3.19**.

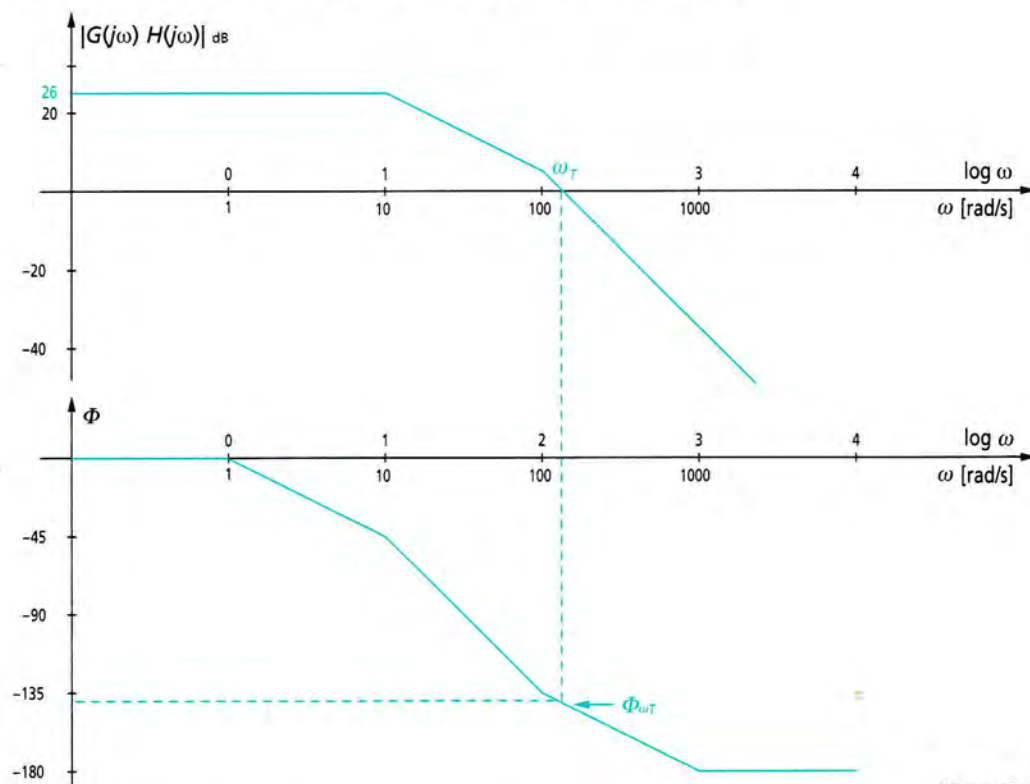


figura 3.19

La frequenza  $\omega_T$  per 0 dB del sistema ad anello aperto è:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{20 \cdot 1000}{(s + 10) \cdot (s + 100)} \Rightarrow G(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{20}{(1 + 0,1j\omega) \cdot (1 + 0,01j\omega)}$$



a) Calcolo di  $\omega_T$ :

$$20 \cdot \log 20 - 20 \cdot \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_T}{10}\right)^2} - 20 \cdot \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_T}{100}\right)^2} = 20 \cdot \log 1$$

Utilizzando le regole dei logaritmi e passando da questi ai numeri, con semplici calcoli, si ha:

$$\left[1 + \left(\frac{\omega_T}{10}\right)^2\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{\omega_T}{100}\right)^2\right] = 400$$

$$\omega_T^4 + 10100 \cdot \omega_T^2 - 399 \cdot 10^6 = 0$$

$$\omega_T^2 = \frac{101 \cdot 10^2 \pm \sqrt{10 \cdot 201 \cdot 10^4 + 1 \cdot 596 \cdot 10^6}}{2} = \frac{101 \cdot 10^2 + 412,06 \cdot 10^2}{2} = 155,53 \cdot 10^2$$

$$\omega_T = \pm \sqrt{155,53 \cdot 10^2} = +10 \cdot \sqrt{155,53} = 124,71 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Verifica:

$$20 \cdot \log 20 - 20 \cdot \log \sqrt{1 + \left(\frac{124,71}{10}\right)^2} - 20 \cdot \log \sqrt{1 + \left(\frac{124,71}{100}\right)^2} =$$

$$= 20 \cdot \log 20 - 20 \cdot \log \sqrt{156,50} - 20 \cdot \log \sqrt{2,53} = 26,02 - 21,93 - 4,02 = 26,02 - 25,95 \cong 0 \text{ dB}$$

b) Calcolo di  $\phi$ :

$$\phi = -\arctg \frac{\omega}{10} - \arctg \frac{\omega}{100} = -\arctg \frac{124,71}{10} - \arctg \frac{124,71}{100} =$$

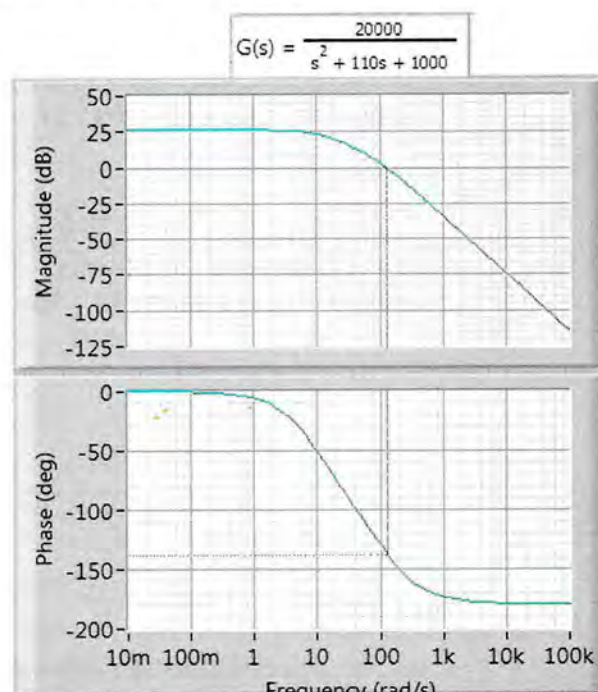
$$= -\arctg 12,471 - \arctg 1,2471 = -85,41^\circ - 51,27^\circ = -136,68^\circ$$

La pulsazione  $\omega_T$  in corrispondenza della quale il diagramma del modulo in dB interseca l'asse delle ascisse da un angolo  $|\phi_{\omega_T}|$  di poco superiore a  $135^\circ < 180^\circ$ . Il sistema è stabile.

## ■ Utilizzando LabVIEW

Il diagramma di Bode tracciato con LabVIEW conferma la stabilità del sistema. Infatti la curva dell'ampiezza interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza di un angolo di poco superiore a  $135^\circ$  (figura 3.20).

figura 3.20



### 3.3 Margine di fase e margine di guadagno

Nelle applicazioni pratiche è necessario valutare sia la stabilità teorica di un sistema, sia definire i margini di sicurezza affinché un sistema rimanga stabile anche quando compaiono disturbi non desiderati e/o variazioni di uno o più parametri che provocano, ad esempio, un aumento del guadagno. I parametri che consentono di valutare il grado di stabilità di un sistema sono il margine di fase e il margine di guadagno.

#### 3.3.1 Margine di fase (Nyquist)

Il margine di fase definisce il grado di stabilità di un sistema ed è l'angolo  $m_\phi$  che può essere tollerato perché il sistema continui a essere stabile. Tale angolo è definito dalla posizione del vettore unitario dato dalla intersezione tra il cerchio di raggio unitario e il diagramma di Nyquist (figura 3.21).

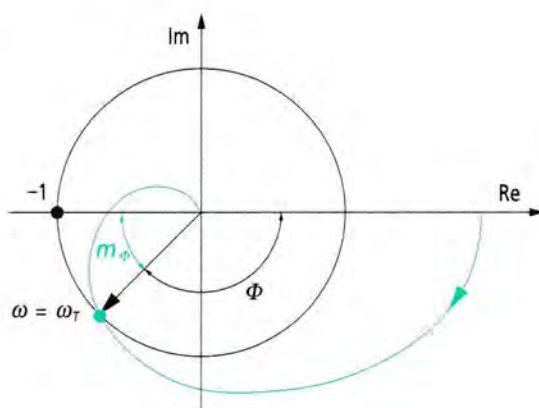


figura 3.21

Il margine di fase  $m_\phi$  è l'angolo ottenuto sottraendo a  $180^\circ$  il valore assoluto della fase della F.d.T.  $G(s) \cdot H(s)$  ad anello aperto:

$$m_\phi = 180^\circ - \phi$$

Si considerino i diagrammi di Nyquist di sistemi stabili e siano  $\phi_1$  e  $\phi_2$  gli angoli di fase delle F.d.T. ad anello aperto  $G(s) \cdot H(s)$  calcolati rispettivamente in corrispondenza delle pulsazioni  $\omega_1$  e  $\omega_2$  (figura 3.22 e figura 3.23).

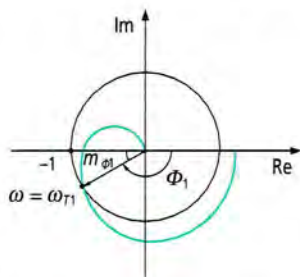


figura 3.22

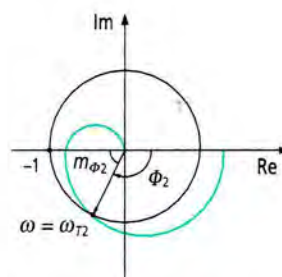


figura 3.23

Il sistema rappresentato in figura 3.23 ha un grado di stabilità maggiore di quello rappresentato in figura 3.22 in quanto  $|\Phi_2| < |\Phi_1|$ .



Un sistema è sufficientemente stabile se il margine di fase è maggiore di  $30^\circ$ , mentre è instabile se  $m_\phi$  è negativo.

Si dimostra che un sistema, stabile ad anello aperto e a sfasamento minimo, è instabile ad anello chiuso se il diagramma di Nyquist circonda il punto  $-1 + j0$  (figura 3.24), al contrario il sistema è stabile se il diagramma di Nyquist non circonda il punto  $-1 + j0$  (figura 3.25) ed è al limite della stabilità quando esso passa per il punto  $-1 + j0$  (figura 3.26).

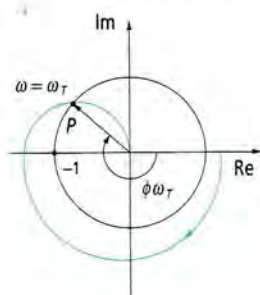


figura 3.24

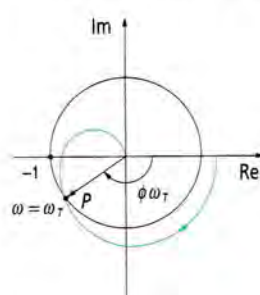


figura 3.25

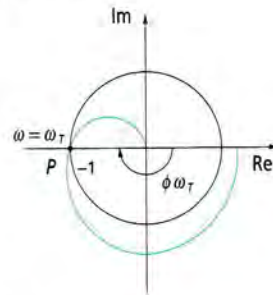


figura 3.26

Si consideri, per esempio, una circonferenza con il centro nell'origine del piano  $G(s) \cdot H(s)$  e raggio unitario, e siano  $\omega_T$  il valore della pulsazione in corrispondenza della quale la circonferenza interseca il diagramma di Nyquist, e  $\Phi_{\omega_T}$  la fase della funzione di trasferimento ad anello aperto calcolata quando  $\omega = \omega_T$ . Il sistema è:

- instabile se  $|\Phi_{\omega_T}| > 180^\circ$  (figura 3.24);
- stabile se  $|\Phi_{\omega_T}| < 180^\circ$  (figura 3.25);
- al limite della stabilità se  $|\Phi_{\omega_T}| = 180^\circ$  (figura 3.26).

### 3.3.2 Margine di fase (Bode)

Si ricorda che il criterio di Bode si applica solo per i sistemi con F.d.T. ad anello aperto  $H(s) G(s)$  con poli a parte reale negativa (sfasamento minimo). Per calcolare il margine di fase occorre tracciare sia il diagramma del modulo sia quello della fase (figura 3.27).

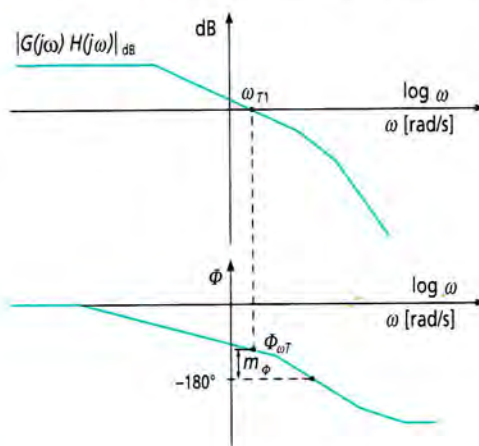


figura 3.27

Il **margine di fase**  $m_\phi$  è l'angolo ottenuto sottraendo a  $180^\circ$  il valore assoluto  $|\Phi_{\omega_T}|$  della fase della F.d.T. ad anello aperto (figura 3.27):

$$m_\phi = 180^\circ - |\Phi_{\omega_T}|$$

Un sistema è sufficientemente stabile se il margine di fase è maggiore di  $30^\circ$ , mentre è instabile se  $m_\phi$  è negativo.

### 3.3.3 Margine di guadagno (Nyquist)

Per definire il margine di guadagno si consideri il valore del modulo della funzione di trasferimento ad anello aperto di un sistema calcolato quando è  $\Phi = -180^\circ$ . Il **margine di guadagno  $m_g$**  è il rapporto tra il modulo del vettore unitario  $\overline{OA}$  e il modulo della funzione  $G(j\omega) \cdot H(j\omega)$  calcolato quando la sua fase è uguale a  $-180^\circ$  (figura 3.28):

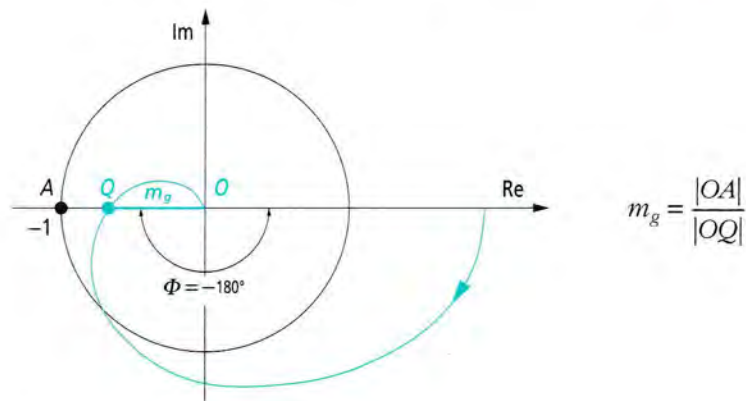


figura 3.28

**I sistemi instabili hanno un margine di guadagno negativo** perché  $|OA| = 1$  e  $|OQ| > 1$ . Dalla figura 3.29 si ha che il margine di guadagno in dB è:

$$m_{g \text{ dB}} = 20 \log |OA| - 20 \log |OQ_1| = -20 \log |OQ_1| < 0$$

**I sistemi stabili, invece, hanno un margine di guadagno positivo** perché  $|OA| = 1$  e  $0 < |OQ| < 1$ . Dalla figura 3.30 si ricava:

$$m_{g \text{ dB}} = 20 \log |OA| - 20 \log |OQ_2| = -20 \log |OQ_2| > 0$$

In definitiva si può affermare che un sistema è:

- instabile se  $|G(j\omega) \cdot H(j\omega)|_{\phi = -180^\circ} > 1$  (figura 3.29);
- stabile se  $|G(j\omega) \cdot H(j\omega)|_{\phi = -180^\circ} < 1$  (figura 3.30);
- marginalmente stabile se  $|G(j\omega) \cdot H(j\omega)|_{\phi = -180^\circ} = 1$  (figura 3.31);

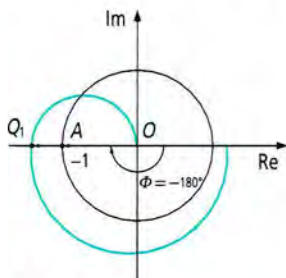


figura 3.29

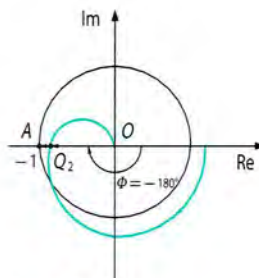


figura 3.30

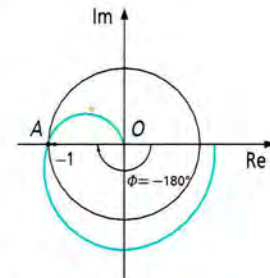


figura 3.31

Un sistema è sufficientemente stabile se il margine di guadagno è almeno  $10 \text{ dB} + 20 \text{ dB}$ .

### 3.3.4 Margine di guadagno (Bode)

Il secondo parametro che definisce il grado di stabilità di un sistema è il margine di guadagno.

Il **margine di guadagno** in dB è la differenza tra il modulo in dB della F.d.T. ad anello aperto calcolato in corrispondenza dell'intersezione con l'asse delle ascisse e il modulo in dB della F.d.T. ad anello aperto calcolato quando la sua fase è uguale a  $-180^\circ$  (figura 3.32):

$$m_{\text{gdB}} = 20 \cdot \log 1 - 20 \cdot \log |G(j\omega) \cdot H(j\omega)|_{\phi = -180^\circ}$$

Un sistema è tanto più stabile quanto minore è il modulo della funzione di trasferimento ad anello aperto calcolato quando la fase della funzione di trasferimento ad anello aperto  $G(j\omega) \cdot H(j\omega)$  è uguale a  $-180^\circ$ .

Si dimostra che un sistema è:

- **instabile** se in corrispondenza di  $\Phi = -180^\circ$  il modulo della funzione di trasferimento ad anello aperto è  $|G(j\omega) \cdot H(j\omega)|_{\phi = -180^\circ} > 1$ . In tal caso il margine di guadagno è negativo;
- **stabile** se in corrispondenza di  $\Phi = -180^\circ$  il modulo della funzione di trasferimento ad anello aperto è  $|G(j\omega) \cdot H(j\omega)|_{\phi = -180^\circ} < 1$ . In tal caso il margine di guadagno è positivo;
- **marginalmente stabile** se in corrispondenza di  $\Phi = -180^\circ$  il modulo della funzione di trasferimento ad anello aperto è  $|G(j\omega) \cdot H(j\omega)|_{\phi = -180^\circ} = 1$ . In tal caso il margine di guadagno è uguale a zero.

Un sistema è sufficientemente stabile se il margine di guadagno è almeno 10 dB + 20 dB. Nella pratica il margine di fase e il margine di guadagno sono calcolati direttamente dai diagrammi di Bode (figura 3.33).

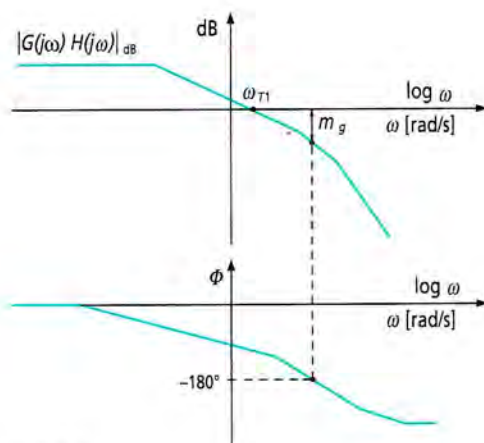


figura 3.32

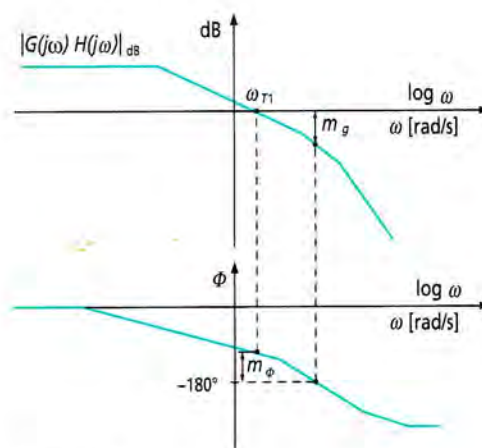


figura 3.33



## esercizi

1 Si verifichi la stabilità di un sistema con il criterio di Nyquist la cui F.d.T. ad anello aperto è:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{1}{s + 0,1}$$

## Svolgimento

Il sistema è stabile ad anello aperto perché la F.d.T. ad anello aperto ha un polo a parte reale negativa ( $p = -0,1$ ). Per verificare, invece, la stabilità del medesimo sistema ad anello chiuso si deve costruire il diagramma di Nyquist della sua funzione di trasferimento.

Essendo  $s = \sigma + j\omega$  si costruisce il diagramma con  $\sigma = 0$  e  $s = j\omega$ . Si ha:

$$G(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 0,1} \quad |G(j\omega) \cdot H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 0,1^2}} \quad \phi = -\arctg \frac{\omega}{0,1}$$

$$\omega = 0 \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega) \cdot H(j\omega)| = 1 \\ \phi = 0^\circ \end{cases} \quad \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega) \cdot H(j\omega)| \rightarrow 0 \\ \phi = -90^\circ \end{cases}$$

Nella **tabella 3.7** sono riportati i valori del modulo e della fase in funzione di  $\omega$ .

tabella 3.7

$\omega$ [rad/s]	$ G(j\omega) \cdot H(j\omega) $	$\phi$
0	$\infty$	$0^\circ$
0,1	7,07	$-45^\circ$
0,3	3,16	$-71^\circ$
0,5	1,96	$-78^\circ$
1	0,99	$-84^\circ$
5	0,199	$-88^\circ$
10	0,0999	$-89,4^\circ$
50	0,0199	$-89,8^\circ$
$\infty$	0	$-90^\circ$

Il **diagramma polare** ha origine nel punto di coordinate  $(10, 0^\circ)$  del semiasse positivo e la fase della funzione è negativa per  $\omega > 0^+$ . Pertanto il vettore  $OQ_i$  ruota in verso orario e il diagramma descritto, tangente nell'origine al semiasse immaginario negativo perché  $\phi \rightarrow -90^\circ$  quando  $\omega \rightarrow \infty$ , si rappresenta interamente nel quarto quadrante (**figura 3.34**).

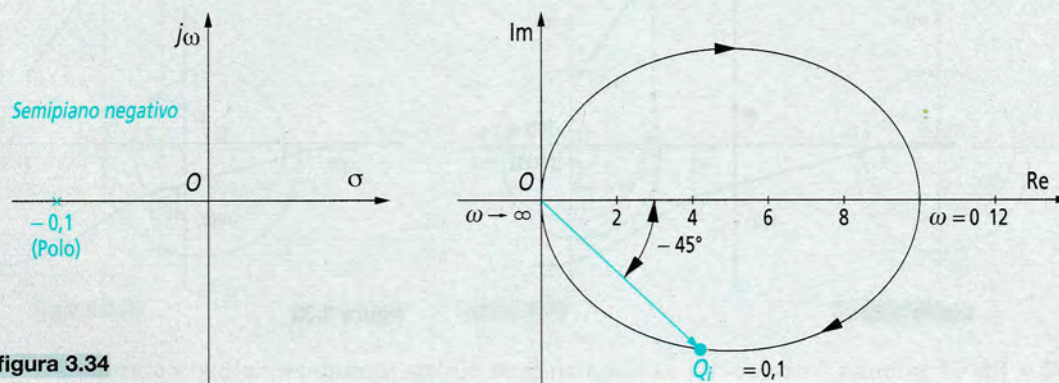


figura 3.34



Osservando il diagramma di Nyquist si rileva che il vettore  $OQ_i$  non compie alcuna rotazione attorno al punto  $-1 + j0$  ( $N = 0$ ) quando la pulsazione  $\omega$  varia nell'intervallo  $-\infty < \omega < +\infty$ . Inoltre la F.d.T.  $G(s) \cdot H(s)$  ha il polo a parte reale negativa  $(-0,1)$  e pertanto risulta anche  $P = 0$ .

Il sistema è stabile per il criterio ristretto di Nyquist:

$$P = 0 \quad N = 0$$

### Utilizzando LabVIEW

Il grafico di **figura 3.35**, tracciato con LabVIEW, mostra che diagramma di Nyquist per  $-\infty < \omega < +\infty$  non circonda il punto  $-1 + j0$ . Il sistema è stabile per il criterio di Nyquist ristretto.

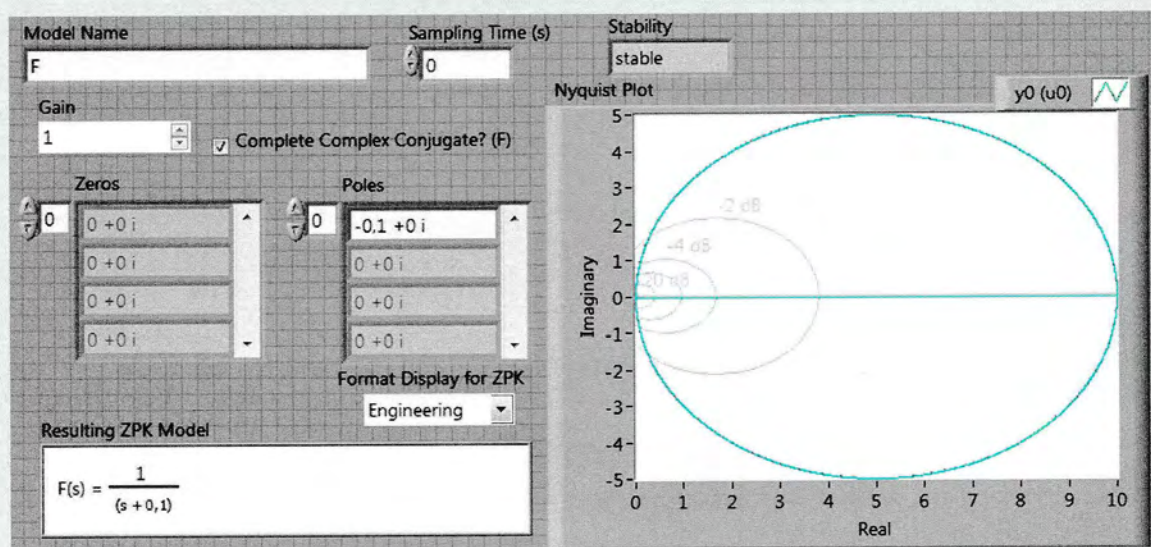


figura 3.35

**2** Si verifichi la stabilità con il criterio di Nyquist della F.d.T.  $G(s) \cdot H(s) = \frac{10^5}{(s + 10)^4}$

### Svolgimento

I 4 poli della F.d.T.  $G(s) \cdot H(s)$  sono tutti a parte reale negativa. Posto  $s = j\omega$ , si ha:

$$G(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{10^5}{(j\omega + 10)^4}$$

$$|G(j\omega) \cdot H(j\omega)| = \frac{10^5}{(\omega^2 + 10^2)^2}$$

$$\phi = -4 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{10}$$

Nella **tabella 3.8** sono riportati i valori del modulo e della fase in funzione di  $\omega$ .



tabella 3.8

$\omega$ [rad/s]	$ G(j\omega) \cdot H(j\omega) $	$\phi$
0	10	$0^\circ$
1	9,80	$-23^\circ$
2	9,24	$-45^\circ$
2,5	8,85	$-56^\circ$
5	6,4	$-106^\circ$
7,5	4,09	$-147^\circ$
10	2,5	$-180^\circ$
12,5	1,52	$-205^\circ$
14	1,14	$-218^\circ$
14,7	1,00087	$-223^\circ$
20	0,4	$-253^\circ$
25	0,19	$-272^\circ$
50	0,014	$-314^\circ$
100	0,00098	$-337^\circ$
50	0,075	$-236^\circ$
$\infty$	0	$-360^\circ$

La **figura 3.36** mostra il diagramma polare tracciato per  $0 < \omega < \infty$  con riferimento alla **tabella 3.8**.

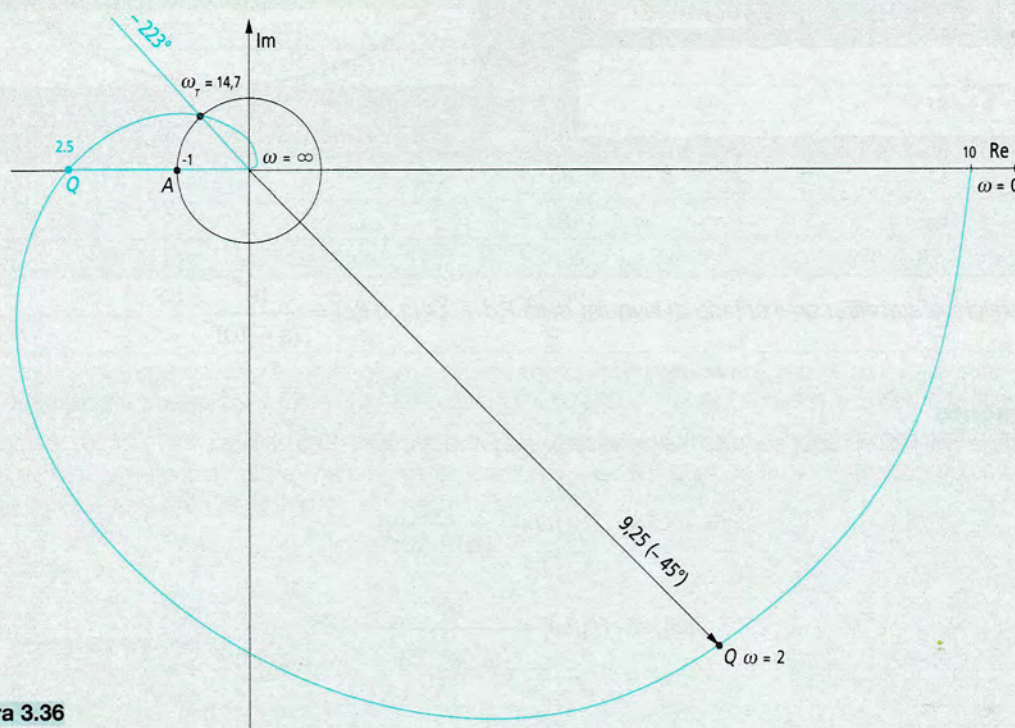


figura 3.36

Dalla **tabella 3.8** e dal diagramma polare di **figura 3.36** si ha:

$$\omega_T = 14,7 \text{ rad/s per } |G(j\omega) \cdot H(j\omega)| = 1 \quad \phi = 223^\circ$$

$$|G(j\omega) \cdot H(j\omega)| = \frac{10^5}{(\omega^2 + 10^2)^2} = 1 \quad \omega^4 + 200 \cdot \omega^2 - 90\,000 = 0 \quad \omega_T = 14,70 \text{ rad/s}$$



Il margine di fase e il margine di guadagno sono:

$$m_\phi = 180^\circ - 223^\circ = -43^\circ < 0 \quad m_g = \frac{1}{0,4} = \frac{1}{0,4} = 2,5 \quad (-7,95 \text{ dB} < 0)$$

Essendo entrambi negativi indicano l'**instabilità** del **sistema ad anello chiuso**.  
La **figura 3.37** ottenuta con LabVIEW conferma la stabilità.

### Utilizzando LabVIEW

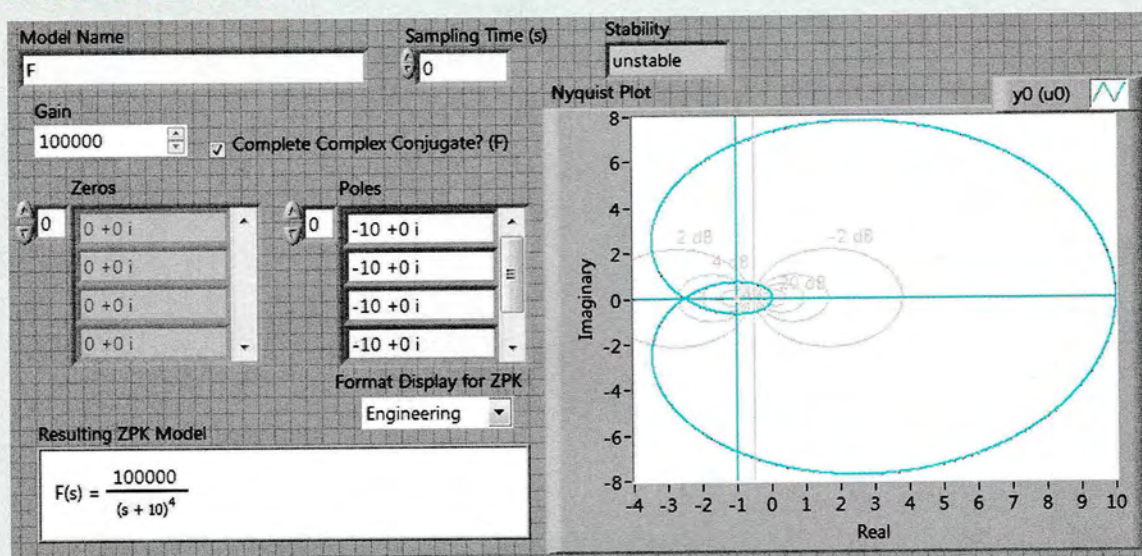


figura 3.37

Il sistema ad anello chiuso è instabile (criterio ristretto di Nyquist) perché il diagramma circonda il punto  $-1$ .

**3** Si verifichi la stabilità con il criterio di Nyquist della F.d.T. ad anello aperto  $G(s) \cdot H(s) = \frac{10}{s^2 \cdot (1 + 0,5 \cdot s)}$

### Svolgimento

La F.d.T.  $G(s) \cdot H(s)$  non ha poli a parte reale positiva. Posto  $s = j\omega$ , si ha:

$$G(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{10}{(j\omega)^2 \cdot (1 + j \cdot 0,5 \cdot \omega)}$$

$$|G(j\omega) \cdot H(j\omega)| = \frac{10}{\omega^2 \cdot \sqrt{1 + (0,5 \cdot \omega)^2}} \quad \phi = -180^\circ - \arctg \frac{0,5 \cdot \omega}{1}$$

Nella **tabella 3.9** sono riportati i valori del modulo e della fase in funzione di  $\omega$ .

tabella 3.9

$\omega$ [rad/s]	$ G(j\omega) \cdot H(j\omega) $	$\phi$
0	$\infty$	$-180^\circ$
1	8,94	$-206^\circ$
1,5	3,55	$-217^\circ$
2	1,76	$-225^\circ$
3	0,625	$-236^\circ$
4	0,279	$-243^\circ$
$\infty$	0	$-270^\circ$



La figura 3.38 mostra il diagramma polare tracciato per  $0 < \omega < \infty$  con riferimento alla tabella 3.9.

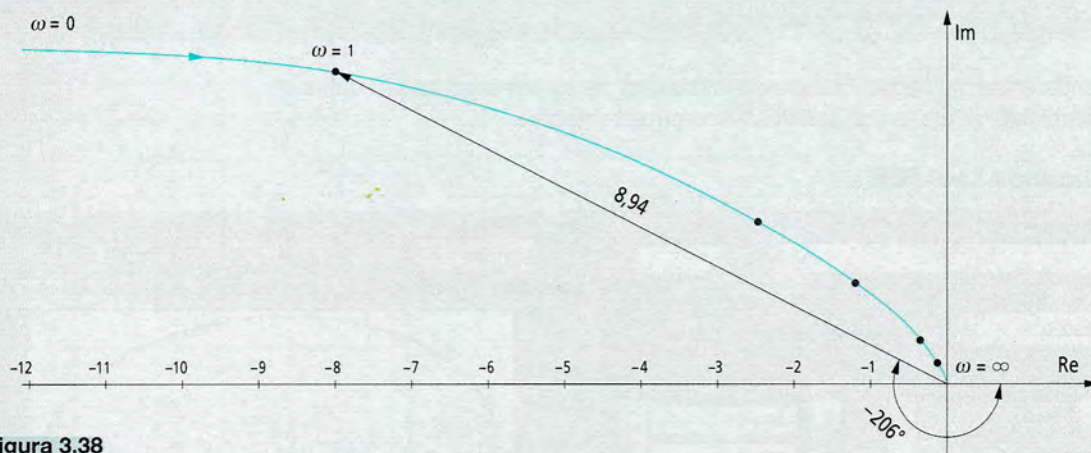


figura 3.38

Il sistema ad anello chiuso è **instabile** perché è  $N = 2$  e  $P = 0$ . Il diagramma di Nyquist per  $-\infty < \omega < \infty$  circonda il punto  $-1$  in verso *orario*. La figura 3.39 tracciata con LabVIEW mostra il diagramma completo per  $-\infty < \omega < \infty$  ed evidenzia che il sistema è instabile.

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{10}{s^2 \cdot (1 + 0,5 \cdot s)} = \frac{20}{s^2 \cdot (s + 2)}$$

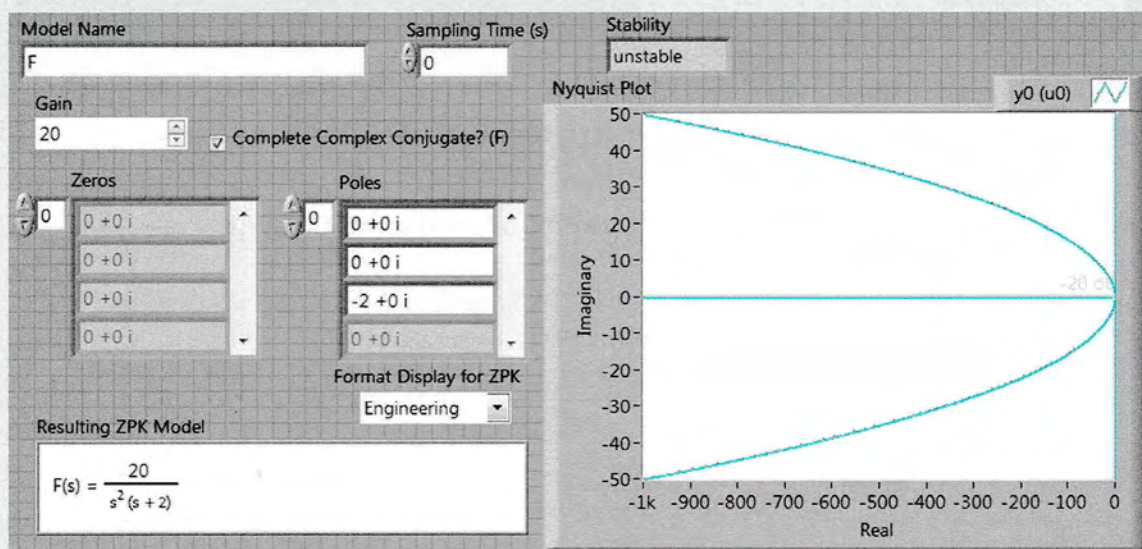


figura 3.39

**4** Si verifichi la stabilità con il criterio di Bode della F.d.T.  $G(s) \cdot H(s) = \frac{10^3}{(s + 10)^2}$  e si calcoli il margine di fase e il margine di guadagno.

#### Svolgimento

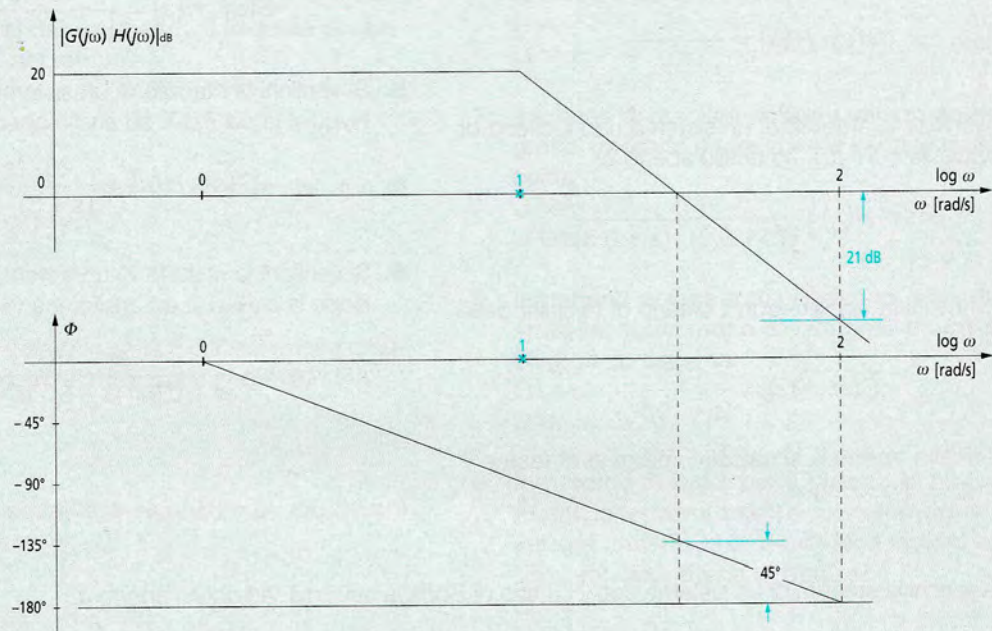
La F.d.T.  $G(s) \cdot H(s)$  ha i poli a parte reale negativa:  $p_1 = p_2 = -10$ . Posto  $s = j\omega$ , si ha:

$$G(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{10^3}{(j\omega + 10)^2} = \frac{10}{\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)^2}$$



$$|G(j\omega) \cdot H(j\omega)| = 20 \cdot \log 10 - 40 \cdot \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2} \quad \phi = -2 \arctg \frac{\omega}{10}$$

Il diagramma di Bode è riportato nella **figura 3.40**.



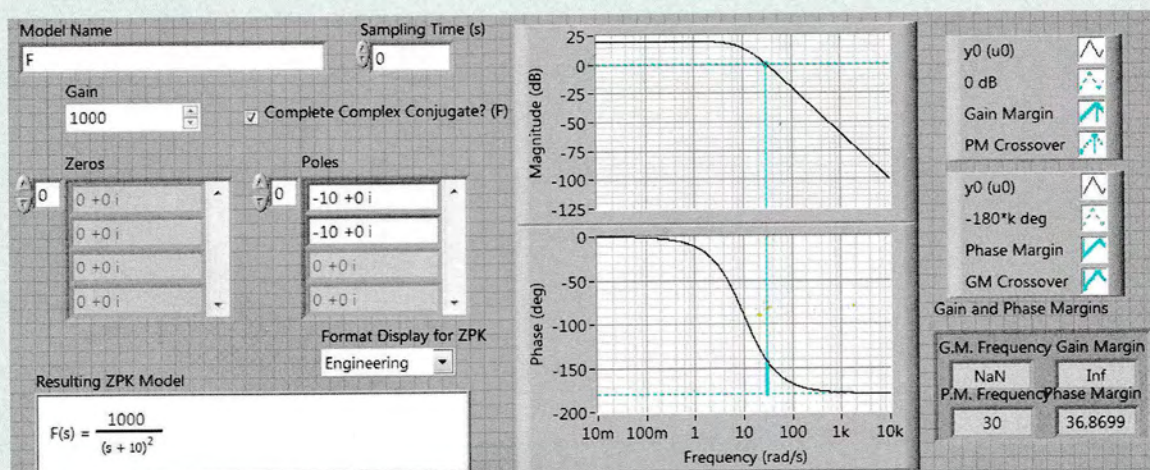
**figura 3.40**

Il sistema ad anello chiuso è stabile essendo  $m_\phi = 45^\circ$  e  $m_g = 21$  dB.

### Utilizzando LabVIEW

Nella **figura 3.41** è mostrato il diagramma di Bode tracciato con LabVIEW della F.d.T. ad anello aperto:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{10^3}{(s + 10)^2}$$



**figura 3.41**

Il sistema ad anello chiuso è stabile come mostrano il margine di fase e quello di guadagno.



## esercizi proposti

1. Si verifichi la stabilità del sistema con il criterio di Nyquist la cui funzione di trasferimento ad anello aperto è:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{10}{1 + 10 \cdot s}$$

2. Si verifichi la stabilità di un sistema con il criterio di Nyquist la cui F.d.T. ad anello aperto è:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{1}{(s + 0,2) \cdot (s + 0,5)}$$

3. Si verifichi la stabilità con il criterio di Nyquist della F.d.T.:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{10^3}{(s + 10)^2}$$

ad anello aperto e si calcoli il margine di fase e il margine di guadagno.

4. Si verifichi la stabilità con il criterio di Nyquist della F.d.T. ad anello aperto:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{(s + 2)}{(s + 3) \cdot (s - 1)}$$

5. Si verifichi la stabilità di un sistema con il criterio di Nyquist la cui F.d.T. ad anello aperto è:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{20 \cdot (s + 2)}{(s + 3) \cdot (s - 1)}$$

6. Si verifichi la stabilità di un sistema con il criterio di Bode la cui F.d.T. ad anello aperto è:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{1000}{(s + 0,5) \cdot (s + 5) \cdot (s + 10) \cdot (s + 20)}$$

7. Si verifichi la stabilità di un sistema con il criterio di Bode la cui F.d.T. ad anello aperto è:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{30}{(0,05 \cdot s + 1) \cdot (0,1 \cdot s + 1) \cdot (0,2 \cdot s + 1) \cdot (2 \cdot s + 1)}$$



## Test di verifica

■ Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1. Un sistema è stabile quando il segnale di uscita è limitato nel tempo.  
☐ vero  
☐ falso
2. La stabilità di un sistema dipende dal tipo di segnale d'ingresso.  
☐ vero  
☐ falso
3. Un sistema è stabile se la F.d.T. ad anello chiuso contiene poli a parte reale positiva.  
☐ vero  
☐ falso
4. Il criterio di stabilità di Nyquist è un metodo di tipo grafico.  
☐ vero  
☐ falso
5. Il criterio di stabilità generalizzato di Nyquist utilizza la F.d.T. ad anello aperto per la verifica della stabilità.  
☐ vero  
☐ falso
6. Il criterio di stabilità ristretto utilizza la F.d.T. ad anello aperto con poli a parte reale positiva per la verifica della stabilità.  
☐ vero  
☐ falso
7. Il criterio di stabilità di Bode utilizza entrambi i grafici (modulo e fase) per la verifica della stabilità.  
☐ vero  
☐ falso
8. Il margine di fase e di guadagno, nei criteri di stabilità, consentono di valutare il grado di stabilità di un sistema.  
☐ vero  
☐ falso
9. Il margine di fase, per il criterio di Nyquist, è riferito alla misura dell'angolo individuato dal vettore unitario quando diviene uguale al modulo del diagramma di Nyquist.  
☐ vero  
☐ falso
10. I sistemi stabili, per il criterio di Bode, hanno un margine di guadagno negativo.  
☐ vero  
☐ falso