

Trasformate di Laplace delle seguenti funzioni

FUNZIONE $f(t)$	TRASFORMATA $F(s)$	RIFERIMENTI
$\delta(t)$	1	Pag 9 b) Trasformata dell'impulso di Dirac
$1(t)$	$1/s$	Pag 8 a) Trasformata della funzione gradino unitario
$r(t)$	$1/s^2$	Pag 9 c) Trasformata della funzione rampa unitaria
$p(t)$	$1/s^3$	Pag 9 d) Trasformata della funzione rampa parabolica
e^{-t}	$1/(s+1)$	Pag 9 e) Trasformata della funzione esponenziale
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	Pag 10 f) Trasformata delle funzioni sinusoidali
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	Pag 10 f) Trasformata delle funzioni sinusoidali
t	$1/s^2$	Pag 13 I) Trasformata della potenza: $g(t) = t^n 1(t)$
t^2	$2/s^3$	Pag 13 I) Trasformata della potenza: $g(t) = t^n 1(t)$
t^3	$6/s^4$	Pag 13 I) Trasformata della potenza: $g(t) = t^n 1(t)$
$t e^{-3t}$	$\frac{1}{(s+3)^2}$	Pag 12 d) Teorema della traslazione complessa oppure Pag 13 f) Teorema della moltiplicazione per t^n
$e^{-2t} \cos(5t)$	$\frac{s+2}{(s+2)^2 + 5^2} = \frac{s+2}{s^2 + 4s + 29}$	Pag 12 d) Teorema della traslazione complessa
$e^{-2t} \sin(5t)$	$\frac{5}{(s+2)^2 + 5^2} = \frac{5}{s^2 + 4s + 29}$	Pag 12 d) Teorema della traslazione complessa

Risolvere i seguenti problemi facendo uso della trasformata di Laplace

- (a) $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy(0)}{dt} = -1$
 (b) $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 2, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy(0)}{dt} = 1$
 (c) $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = \delta(t-1), \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy(0)}{dt} = -1$
 (d) $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad \frac{dy(0)}{dt} = y'(0)$

Applicando il Teorema della trasformata della derivata [\[Pag 13 g\]](#)

$$L\{f^{(1)}(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$L\{f^{(2)}(t)\} = s^2 F(s) - s f(0) - f^{(1)}(0)$$

$$a) \quad s^2 Y(s) - s y(0) - y^{(1)}(0) + 2[sY(s) - y(0)] + 2 Y(s) = 0$$

$$s^2 Y(s) + 2 sY(s) + 2 Y(s) = s y(0) + y^{(1)}(0) + 2 y(0)$$

$$[s^2 + 2 s + 2] Y(s) = s y(0) + y^{(1)}(0) + 2 y(0)$$

$$Y(s) = \frac{s y(0) + y^{(1)}(0) + 2 y(0)}{s^2 + 2 s + 2} = \frac{s \cdot 1 + y^{(1)}(0) + 2 y(0)}{s^2 + 2 s + 2} = \frac{s \cdot 1 + (-1) + 2 \cdot 1}{s^2 + 2 s + 2} = \frac{s - 1 + 2}{s^2 + 2 s + 2} = \frac{s + 1}{s^2 + 2 s + 2}$$

$$b) \quad s^2 Y(s) - s y(0) - y^{(1)}(0) + 2[sY(s) - y(0)] + 2 Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$\left(\frac{2}{s} \quad \text{Pag 11 b) Proprietà di linearità} \right)$$

$$s^2 Y(s) + 2 sY(s) + 2 Y(s) = \frac{2}{s} + s y(0) + y^{(1)}(0) + 2 y(0)$$

$$[s^2 + 2 s + 2] Y(s) = \frac{2}{s} + s y(0) + y^{(1)}(0) + 2 y(0)$$

$$Y(s) = \frac{\frac{2}{s}}{s^2 + 2 s + 2} + \frac{s y(0) + y^{(1)}(0) + 2 y(0)}{s^2 + 2 s + 2} = \frac{2}{s[s^2 + 2 s + 2]} + \frac{s \cdot 0 + 1 + 2 \cdot 0}{s^2 + 2 s + 2} = \frac{2}{s[s^2 + 2 s + 2]} + \frac{1}{s^2 + 2 s + 2}$$

$$c) \quad s^2 Y(s) - s y(0) - y^{(1)}(0) + 2[sY(s) - y(0)] + 2 Y(s) = e^{-s}$$

$$\left(e^{-s} \quad \text{Pag 12 c) Teorema della traslazione nel tempo} \right)$$

$$s^2 Y(s) + 2 sY(s) + 2 Y(s) = e^{-s} + s y(0) + y^{(1)}(0) + 2 y(0)$$

$$[s^2 + 2 s + 2] Y(s) = e^{-s} + s y(0) + y^{(1)}(0) + 2 y(0)$$

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 2 s + 2} + \frac{s y(0) + y^{(1)}(0) + 2 y(0)}{s^2 + 2 s + 2} = \frac{e^{-s}}{s^2 + 2 s + 2} + \frac{s \cdot 1 + (-1) + 2 \cdot 1}{s^2 + 2 s + 2} = \frac{e^{-s}}{s^2 + 2 s + 2} + \frac{s + 1}{s^2 + 2 s + 2}$$

$$d) \quad s^2 Y(s) - s y(0) - y^{(1)}(0) + 2[sY(s) - y(0)] + 2 Y(s) = F(s)$$

$$s^2 Y(s) + 2 sY(s) + 2 Y(s) = F(s) + s y(0) + y^{(1)}(0) + 2 y(0)$$

$$[s^2 + 2 s + 2] Y(s) = F(s) + s y_0 + y'(0) + 2 y_0$$

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + 2 s + 2} + \frac{s y_0 + y'(0) + 2 y_0}{s^2 + 2 s + 2}$$