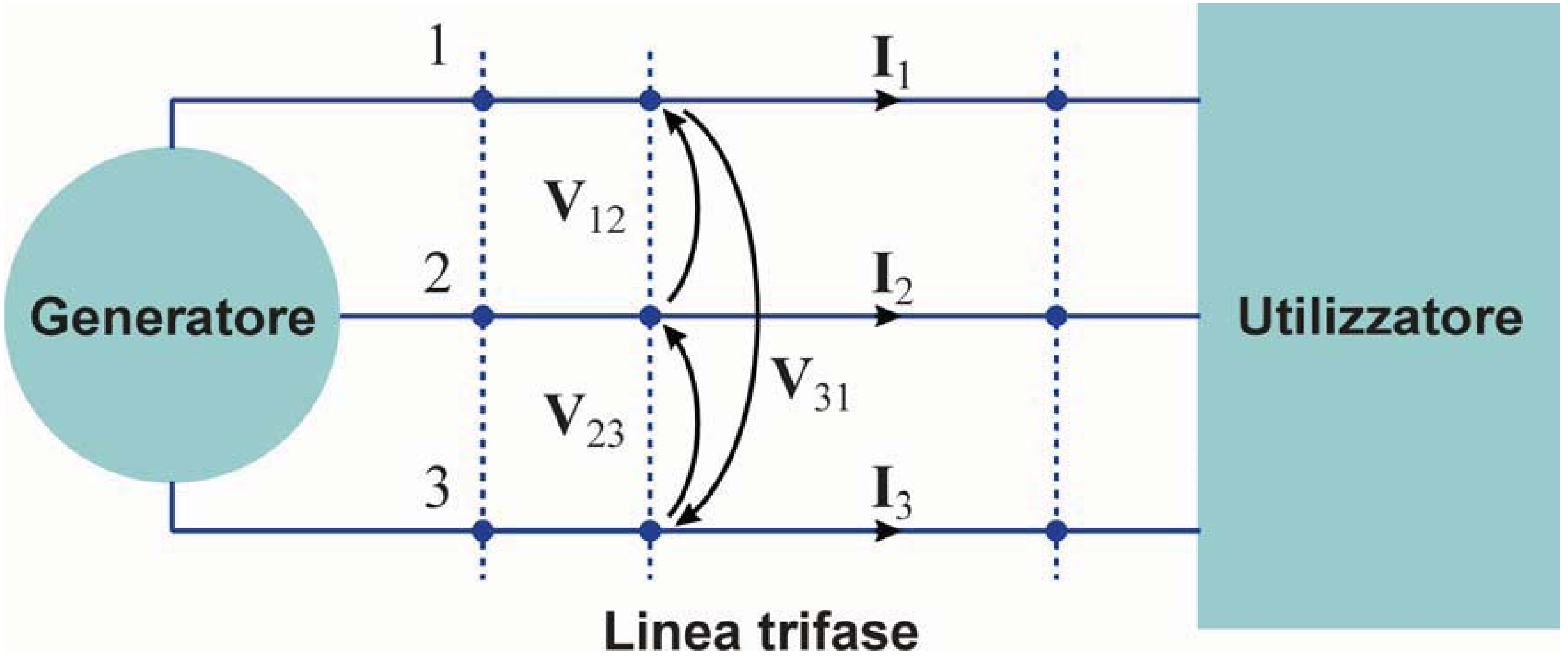
Sistemi Trifase

Sistemi trifase

- Il trasporto e la distribuzione di energia elettrica avvengono in prevalenza per mezzo di linee trifase
- Un sistema trifase è alimentato mediante generatori a tre terminali rappresentabili mediante terne di generatori sinusoidali isofrequenziali
- Il collegamento tre i generatori e gli utilizzatori è realizzato mediante linee di collegamento a tre fili



Correnti di linea e tensioni concatenate

- **Correnti di linea**
  - Correnti nei tre conduttori della linea
  - In ogni istante la LKI richiede che sia

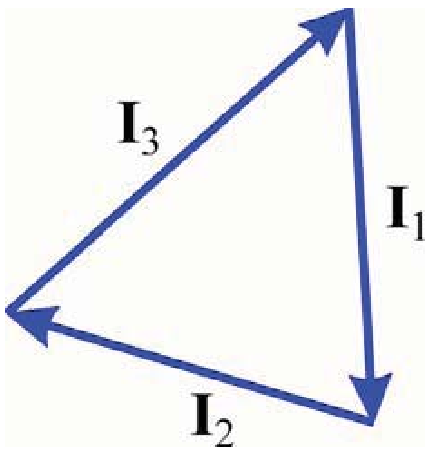
$$\mathrm{i}_1(t)+\mathrm{i}_2(t)+\mathrm{i}_3(t)=0 \qquad \mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2+\mathbf{I}_3=0$$

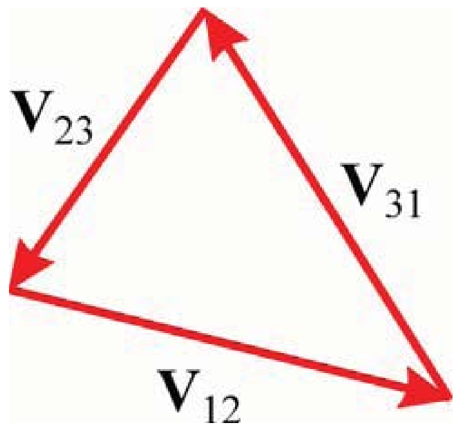
- **Tensioni concatenate**
  - Tensioni tra i conduttori in una generica sezione della linea
  - Se l'impedenza della linea è trascurabile le tensioni concatenate non dipendono dalla sezione considerata
  - In ogni istante la LKV richiede che sia

$$\mathrm{v}_{12}(t)+\mathrm{v}_{23}(t)+\mathrm{v}_{31}(t)=0 \qquad \mathbf{V}_{12}+\mathbf{V}_{23}+\mathbf{V}_{31}=0$$

Correnti di linea e tensioni concatenate

- Nel piano complesso, i fasori delle correnti di linea e delle tensioni concatenate possono essere rappresentati da tre vettori disposti a triangolo (➡ somma vettoriale nulla)





Terne di tensioni simmetriche

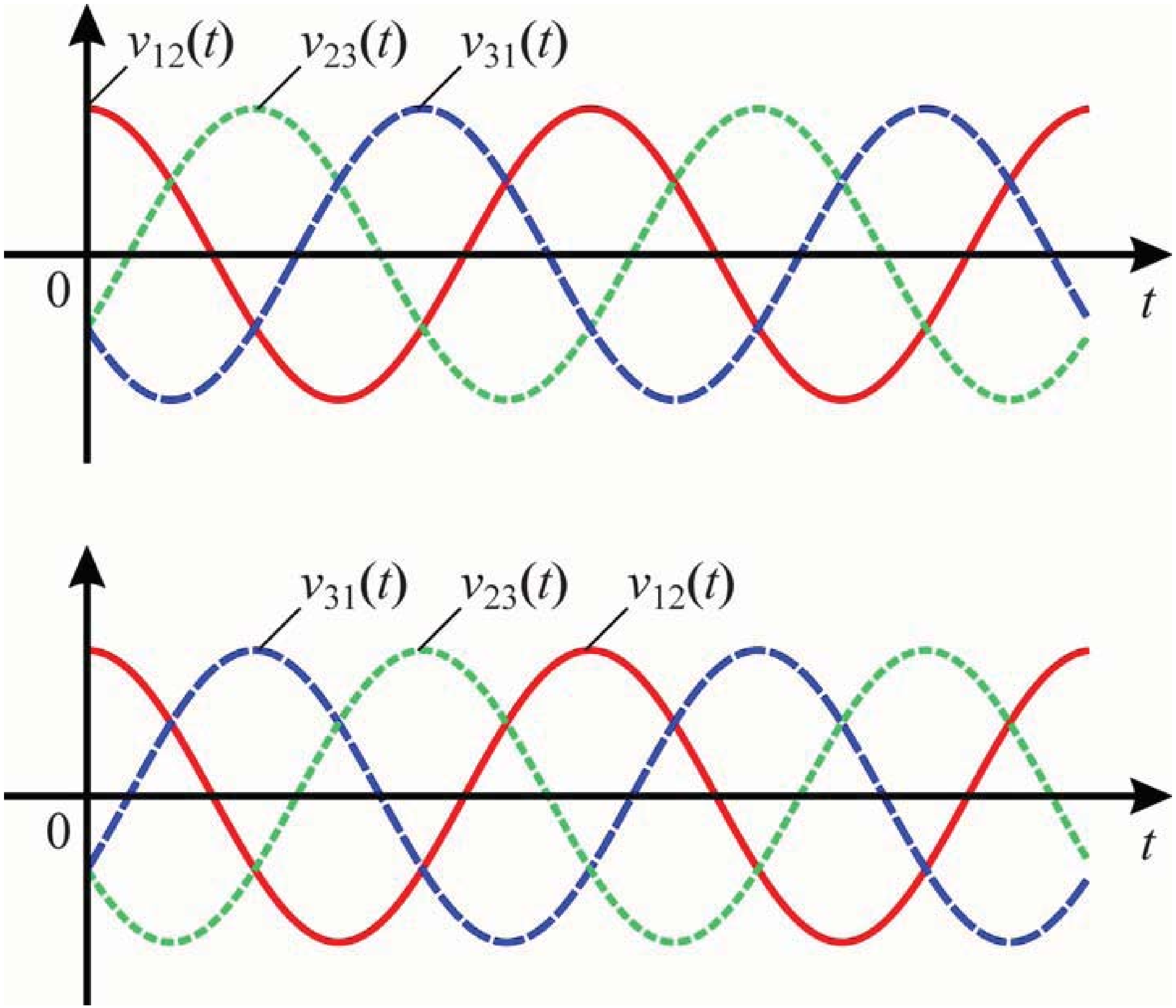
- Una terna di tensioni trifase si dice **simmetrica** se
  - le tensioni hanno uguale ampiezza
  - la loro somma è nulla in ogni istante
- Ciò richiede che lo sfasamento tra due tensioni consecutive sia
  - $-\frac{2}{3}\pi$ ➡ **terna simmetrica diretta**

$$v_{12}(t) = V_M \cos(\omega t + \alpha_{12})$$
$$v_{23}(t) = V_M \cos(\omega t + \alpha_{12} - \tfrac{2}{3}\pi)$$
$$v_{31}(t) = V_M \cos(\omega t + \alpha_{12} - \tfrac{4}{3}\pi) = V_M \cos(\omega t + \alpha_{12} + \tfrac{2}{3}\pi)$$

  - $+\frac{2}{3}\pi$ ➡ **terna simmetrica inversa**

$$v_{12}(t) = V_M \cos(\omega t + \alpha_{12})$$
$$v_{23}(t) = V_M \cos(\omega t + \alpha_{12} + \tfrac{2}{3}\pi)$$
$$v_{31}(t) = V_M \cos(\omega t + \alpha_{12} + \tfrac{4}{3}\pi) = V_M \cos(\omega t + \alpha_{12} - \tfrac{2}{3}\pi)$$

Terne di tensioni simmetriche



Terna diretta

Terna inversa

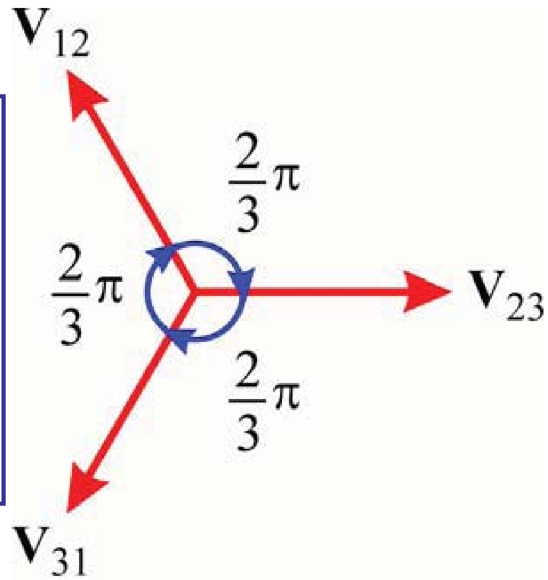
Terne di tensioni simmetriche

Terna diretta

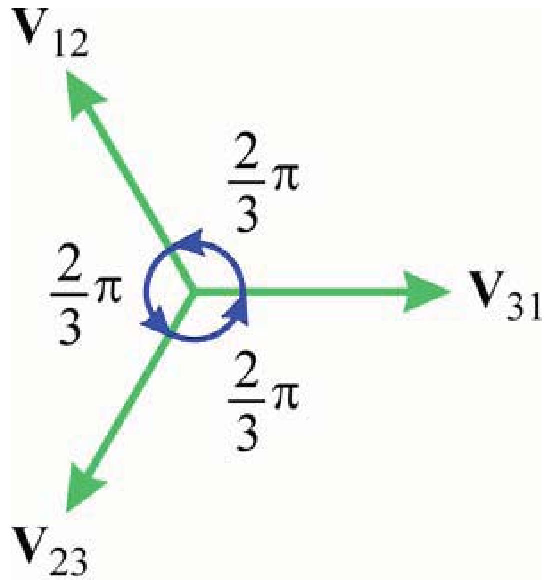
$$\mathbf{V}_{12} = Ve^{ja_{12}}$$

$$\mathbf{V}_{23} = \mathbf{V}_{12}e^{-j\frac{2}{3}\pi}$$

$$\mathbf{V}_{31} = \mathbf{V}_{12}e^{j\frac{2}{3}\pi}$$



Terna inversa

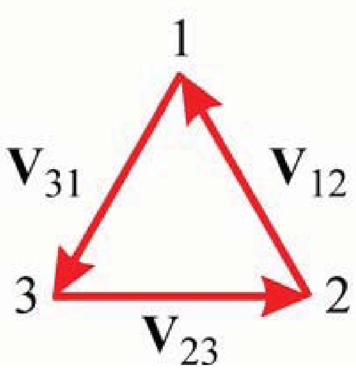


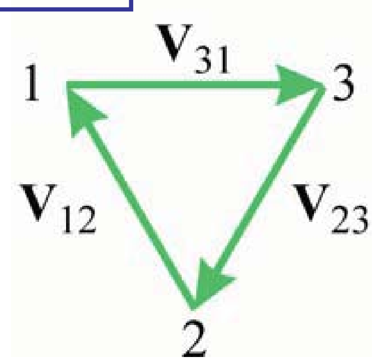
$$\mathbf{V}_{12} = Ve^{ja_{12}}$$

$$\mathbf{V}_{23} = \mathbf{V}_{12}e^{j\frac{2}{3}\pi}$$

$$\mathbf{V}_{31} = \mathbf{V}_{12}e^{-j\frac{2}{3}\pi}$$

$$\boxed{\mathbf{V}_{12} + \mathbf{V}_{23} + \mathbf{V}_{31} = 0}$$

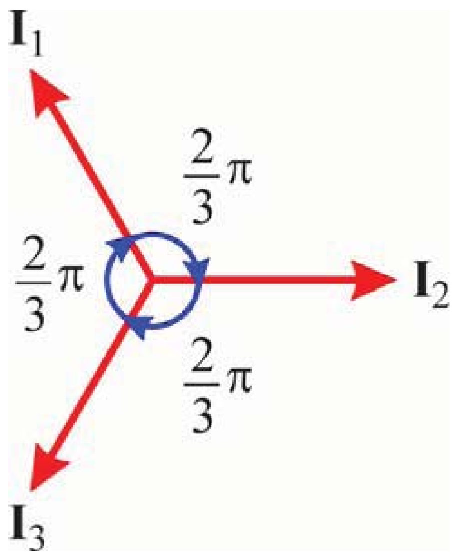


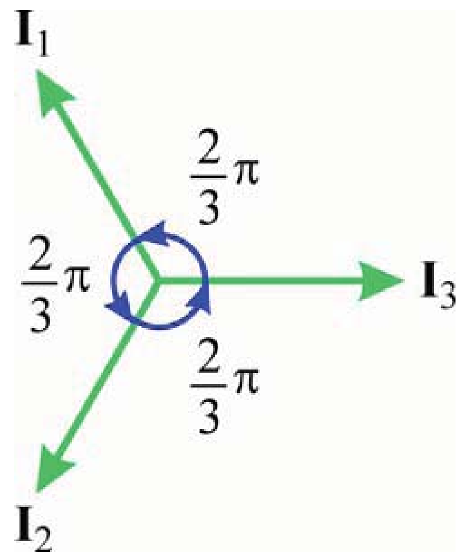


Terne di correnti equilibrate

- Una terna di correnti trifase si dice **equilibrata** se
  - le correnti hanno uguale ampiezza
  - la loro somma è nulla in ogni istante
- Per le terne di correnti equilibrate valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per le terne di tensioni simmetriche
- Lo sfasamento tre due correnti consecutive di una terna equilibrata può essere $-2\pi/3$ (**terna diretta**) o $+2\pi/3$ (**terna inversa)**

Terna diretta



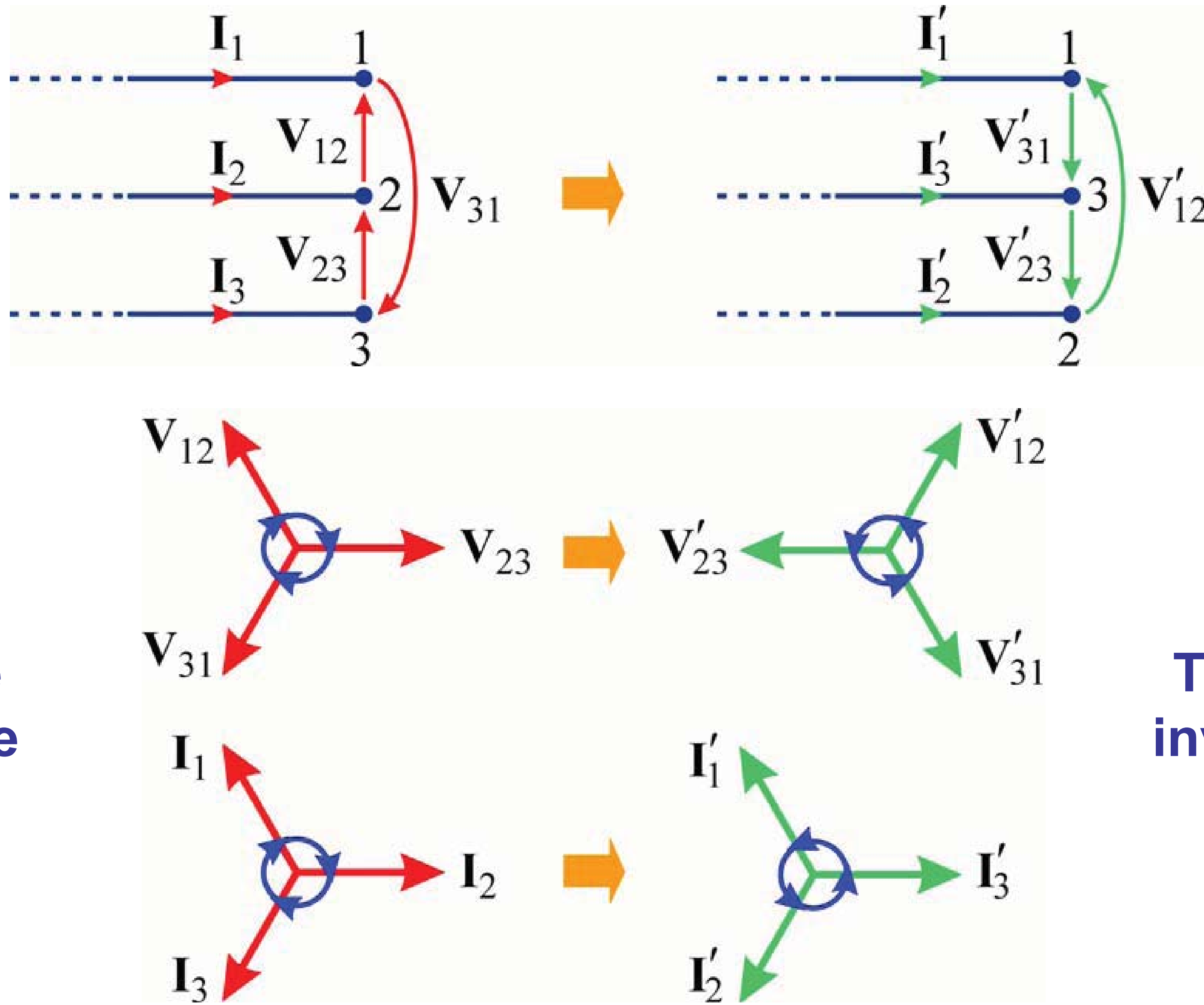


Terna inversa

Note

- Nello studio dei sistemi trifase, si utilizzeranno esclusivamente fasori il cui modulo coincide con il valore efficace (non con il valore massimo) delle tensioni e delle correnti
  - i valori efficaci delle tensioni e correnti saranno indicati con le lettere maiuscole V, E, I
- Le stesse terne di tensioni concatenate e di correnti di linea possono essere interpretate come dirette o inverse a seconda di come sono numerati i conduttori
  - In seguito, se non indicato esplicitamente, si considereranno sempre terne dirette
  - data l'arbitrarietà della numerazione dei conduttori, questo non comporta perdita di generalità

Terne dirette e inverse

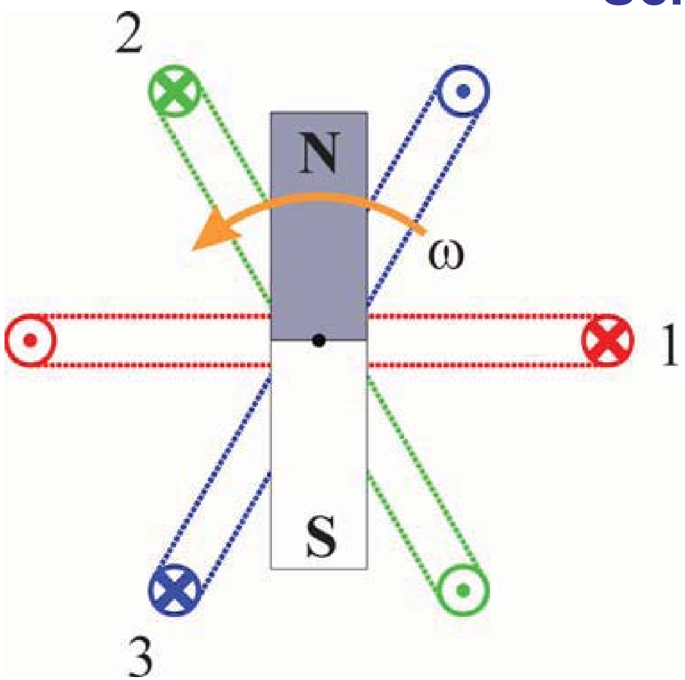


Terne dirette

Terne inverse

Generatori trifase

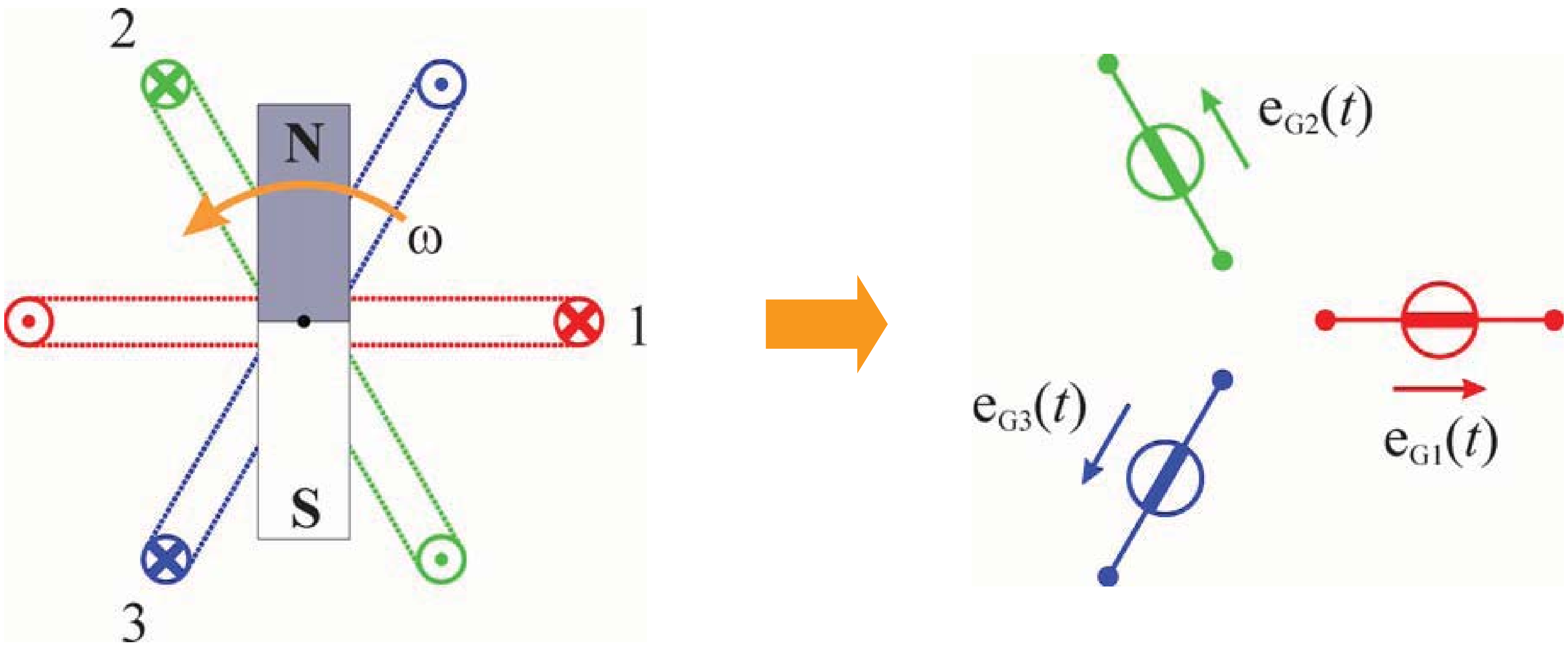
Schema di principio



- Parte mobile (**rotore**)
  - schematizzata con un magnete permanente che ruota con velocità angolare ω
- Parte fissa (**statore**)
  - tre avvolgimenti identici (rappresentati con una spira)
  - ruotati l'uno rispetto all'altro di 120°

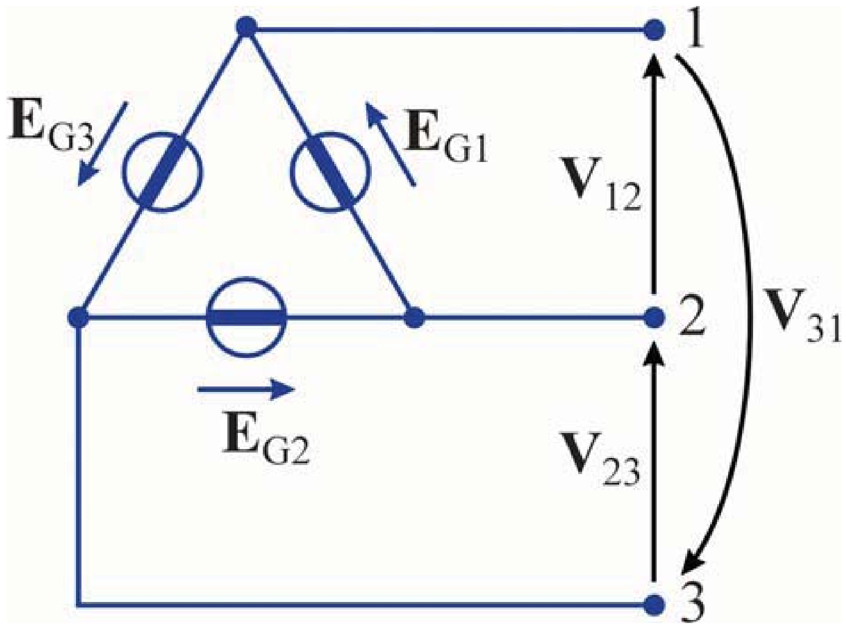
- I flussi di induzione magnetica concatenati con gli avvolgimenti sono funzioni periodiche con periodo $T = 2\pi/\omega$
- ➡ In ciascun avvolgimento viene indotta una f.e.m. periodica
- Dimensionando opportunamente il sistema è possibile ottenere f.e.m. sinusoidali

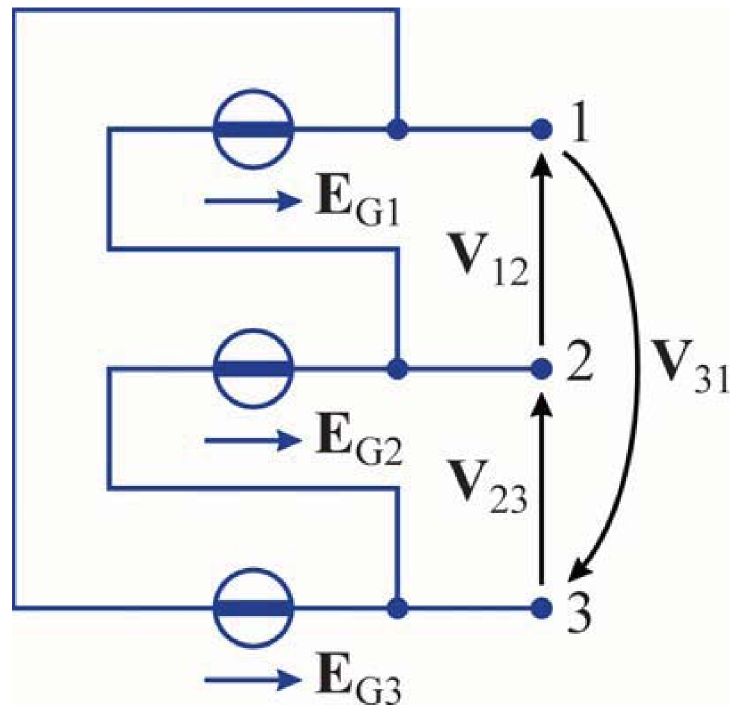
Generatori trifase



- I tre avvolgimenti (**fasi del generatore**) equivalgono a tre generatori sinusoidali con tensioni sfasate tra loro di $2\pi/3$
- Gli avvolgimenti vengono collegati a stella o a triangolo

Generatori a triangolo





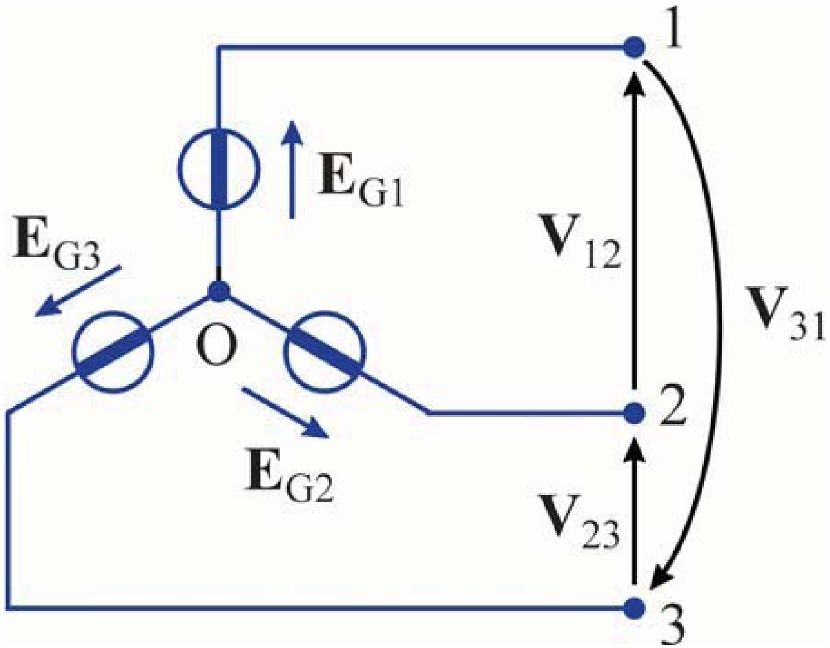
$$\mathbf{V}_{12} = \mathbf{E}_{G1} = E_G e^{j\alpha_1}$$

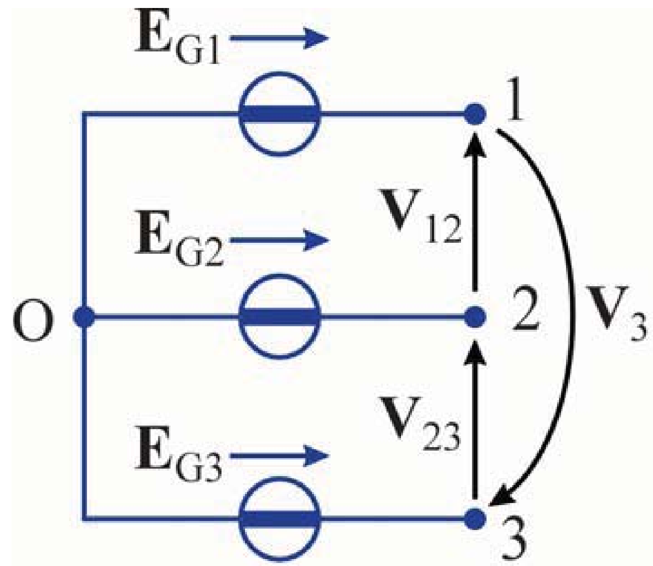
$$\mathbf{V}_{23} = \mathbf{E}_{G2} = \mathbf{E}_{G1} e^{-j\frac{2}{3}\pi}$$

$$\mathbf{V}_{31} = \mathbf{E}_{G3} = \mathbf{E}_{G1} e^{j\frac{2}{3}\pi}$$

Le tensioni concatenate coincidono con le tensioni di fase

Generatori a stella





Tensioni di fase (stellate)

$$\mathbf{E}_{G1} = E_G e^{j\alpha_1}$$

$$\mathbf{E}_{G2} = \mathbf{E}_{G1} e^{-j\frac{2}{3}\pi}$$

$$\mathbf{E}_{G3} = \mathbf{E}_{G1} e^{j\frac{2}{3}\pi}$$

Tensioni concatenate

$$\mathbf{V}_{12} = \mathbf{E}_{G1} - \mathbf{E}_{G2}$$

$$\mathbf{V}_{23} = \mathbf{E}_{G2} - \mathbf{E}_{G3}$$

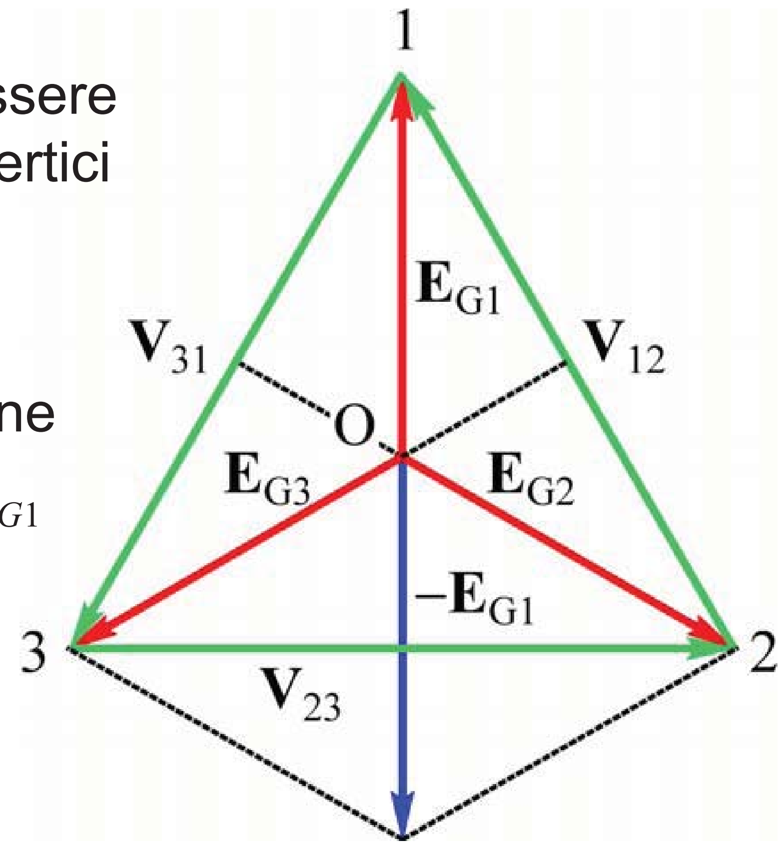
$$\mathbf{V}_{31} = \mathbf{E}_{G3} - \mathbf{E}_{G1}$$

Tensioni concatenate e tensioni di fase

- Nel piano complesso, i fasori delle tensioni concatenate possono essere rappresentati da tre vettori disposti in modo da formare un triangolo equilatero
- I fasori delle tensioni stellate possono essere rappresentati da vettori che uniscono i vertici del triangolo ad un punto O (**centro delle tensioni di fase**)
- Le tensioni stellate soddisfano la relazione

$$\mathbf{E}_{G1}+\mathbf{E}_{G2}+\mathbf{E}_{G3}=0 \;\Rightarrow\; \mathbf{E}_{G2}+\mathbf{E}_{G3}=-\mathbf{E}_{G1}$$

➡ Quindi Il punto O coincide con il baricentro del triangolo (= punto di intersezione delle mediane)



Tensioni concatenate e tensioni di fase

- Con semplici considerazioni geometriche si può riconoscere che valgono le relazioni

$$\left|\mathbf{V}_{12}\right| = V = 2\left|\mathbf{E}_{G1}\right|\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\,E_G$$

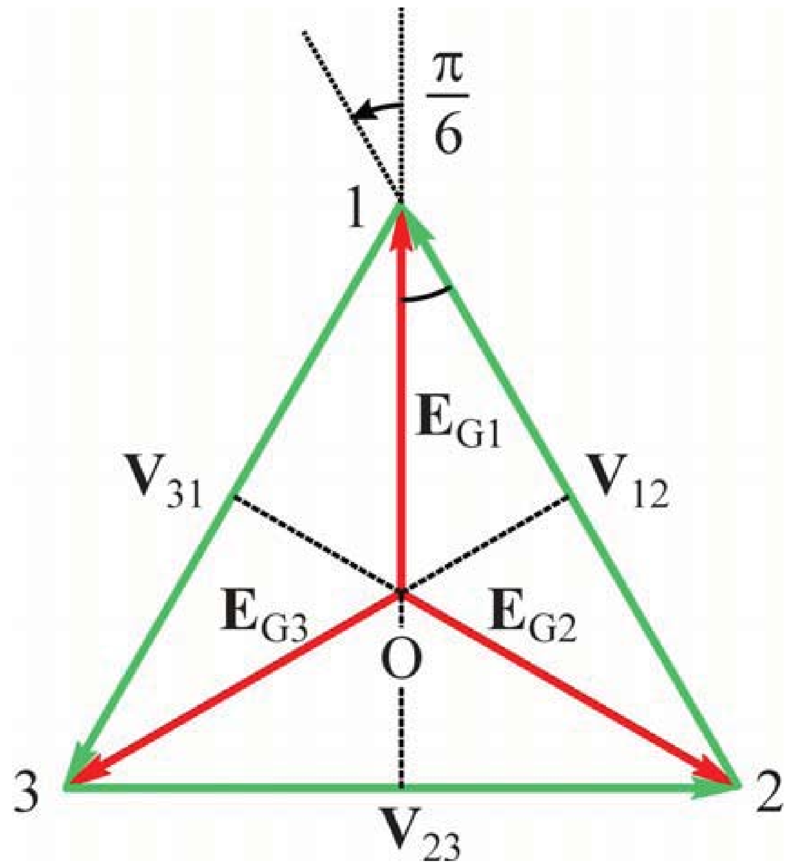
$$\arg(\mathbf{V}_{12}) = \arg(\mathbf{E}_{G1}) + \frac{\pi}{6}$$

- Le tensioni concatenate sono

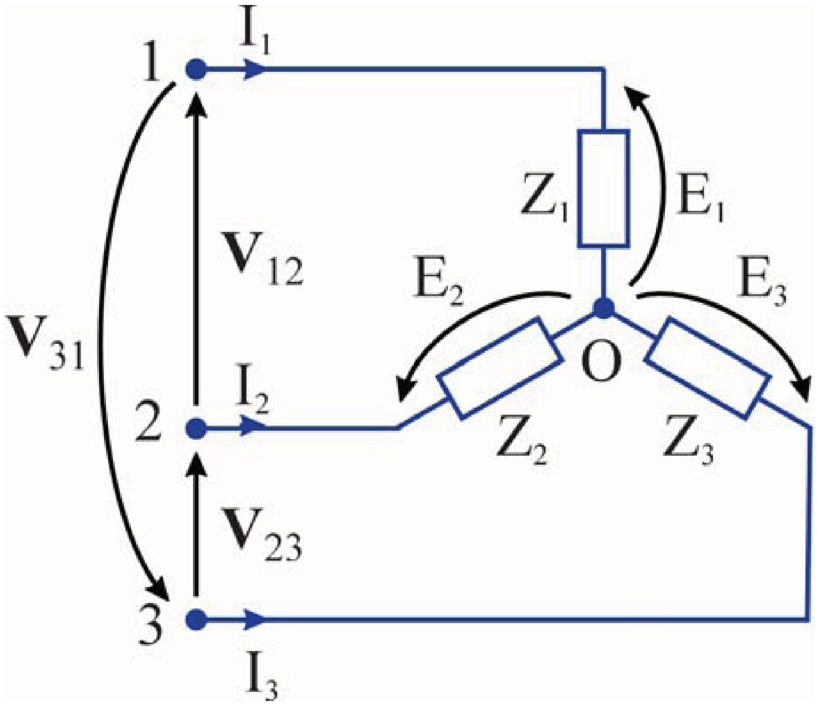
$$\mathbf{V}_{12} = \sqrt{3}\,\mathbf{E}_{G1}e^{j\frac{\pi}{6}}$$

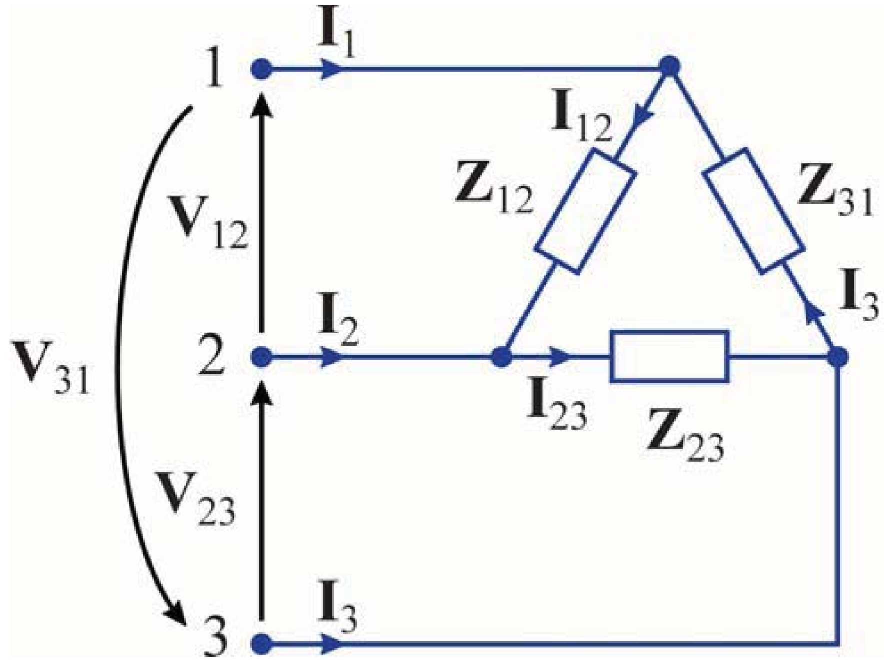
$$\mathbf{V}_{23} = \sqrt{3}\,\mathbf{E}_{G2}e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\mathbf{V}_{31} = \sqrt{3}\,\mathbf{E}_{G3}e^{j\frac{\pi}{6}}$$



Utilizzatori trifase

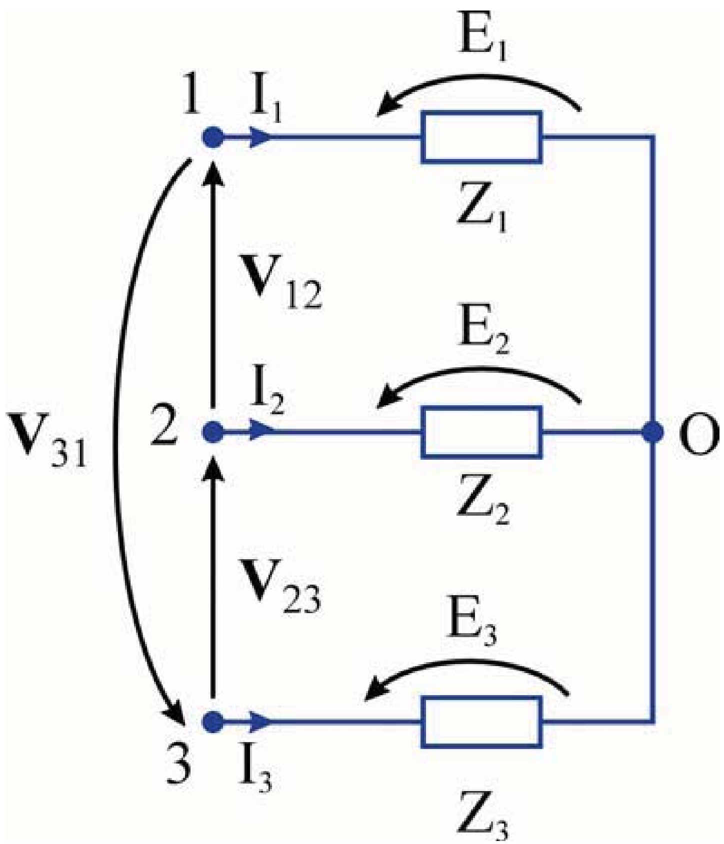


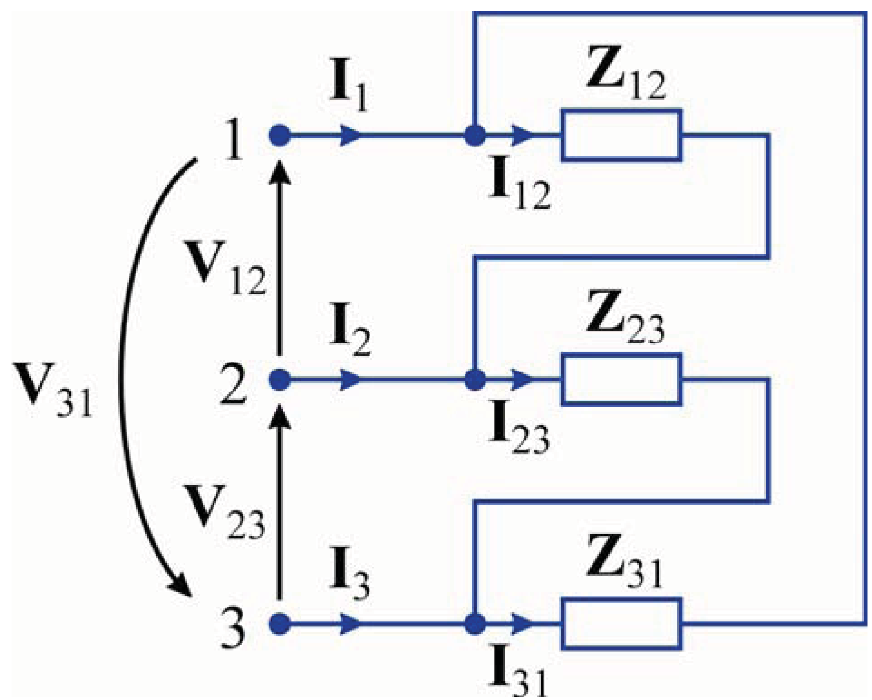


- Gli utilizzatori trifase sono normalmente rappresentabili mediante terne di impedenze (**fasi dell’utilizzatore**) collegate a stella o a triangolo

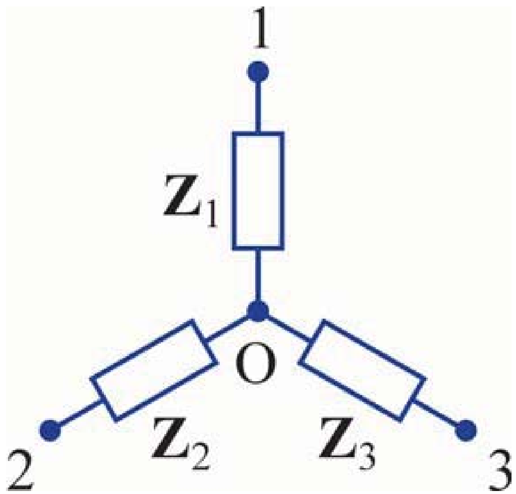
Nota

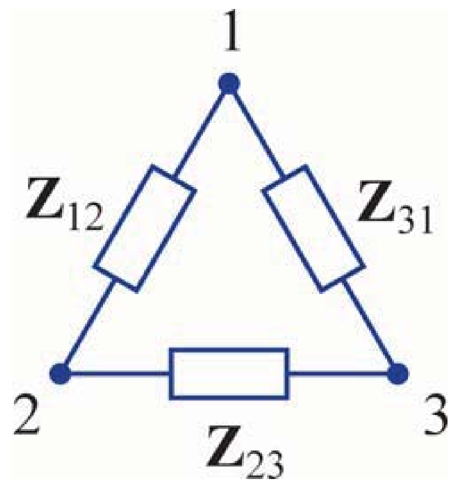
- I collegamenti a stella e a triangolo vengono rappresentati anche nel modo seguente





Equivalenza stella-triangolo





$$Z_1 = \frac{Z_{12}Z_{13}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

$$Z_2 = \frac{Z_{12}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

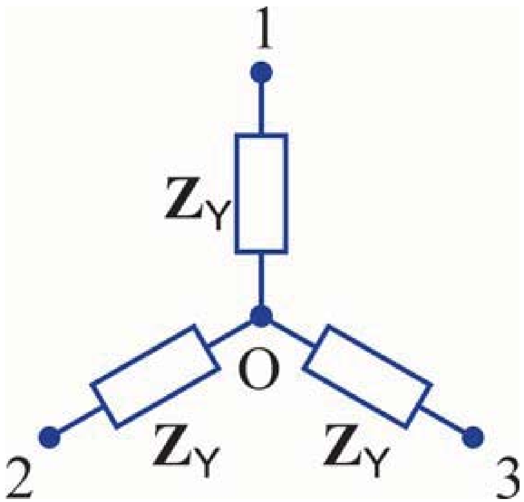
$$Z_3 = \frac{Z_{13}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$

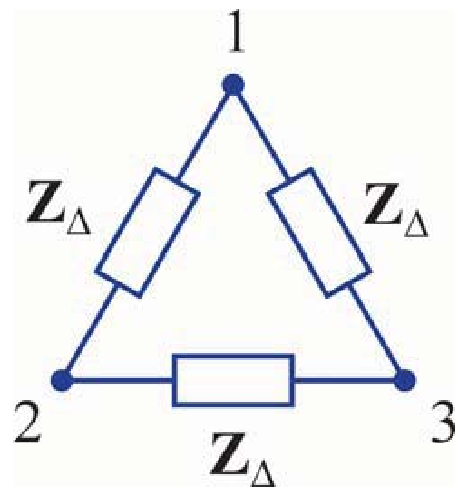
$$Z_{12} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_3}$$

$$Z_{31} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_2}$$

$$Z_{23} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_1}$$

Carichi regolari





$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_Y \qquad \mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{23} = \mathbf{Z}_{31} = \mathbf{Z}_\Delta$$

- **Carico regolare** (o **equilibrato**): le tre impedenze sono uguali
- ➡ Formule di trasformazione stella triangolo

$$\mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{Z}_\Delta}{3} \qquad \mathbf{Z}_\Delta = 3\mathbf{Z}_Y$$

Carico a triangolo

- Le tensioni di fase coincidono con le tensioni concatenate
  - Correnti di fase:

$$\mathbf{I}_{12} = \frac{\mathbf{V}_{12}}{\mathbf{Z}_{12}}$$

$$\mathbf{I}_{23} = \frac{\mathbf{V}_{23}}{\mathbf{Z}_{23}}$$

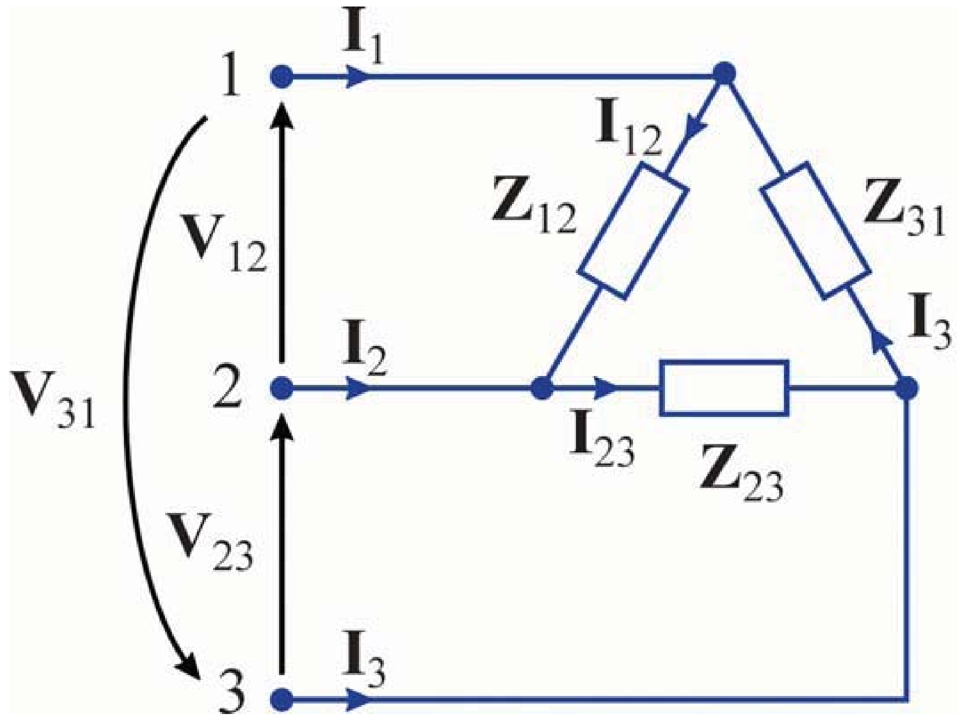
$$\mathbf{I}_{31} = \frac{\mathbf{V}_{31}}{\mathbf{Z}_{31}}$$

  - Correnti di linea:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{12} - \mathbf{I}_{31}$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{23} - \mathbf{I}_{12}$$

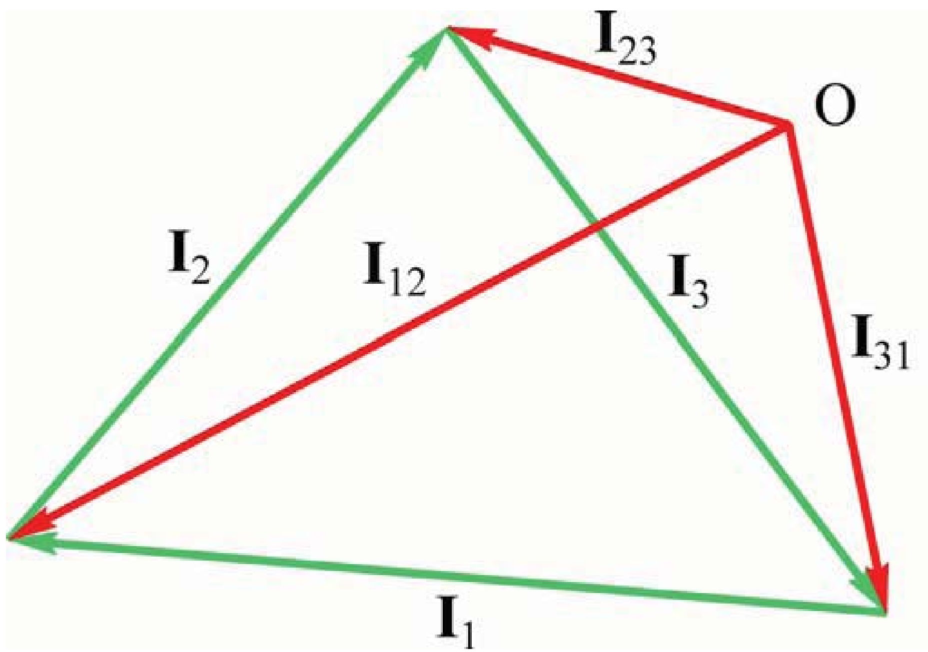
$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_{31} - \mathbf{I}_{23}$$



Carico a triangolo

- Nel piano complesso, i fasori delle correnti di linea possono essere rappresentati da tre vettori che formano un triangolo
- I fasori delle correnti di fase possono essere rappresentati da tre vettori che collegano i vertici del triangolo ad un punto O

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{12} - \mathbf{I}_{31}$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{23} - \mathbf{I}_{12}$$
$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_{31} - \mathbf{I}_{23}$$

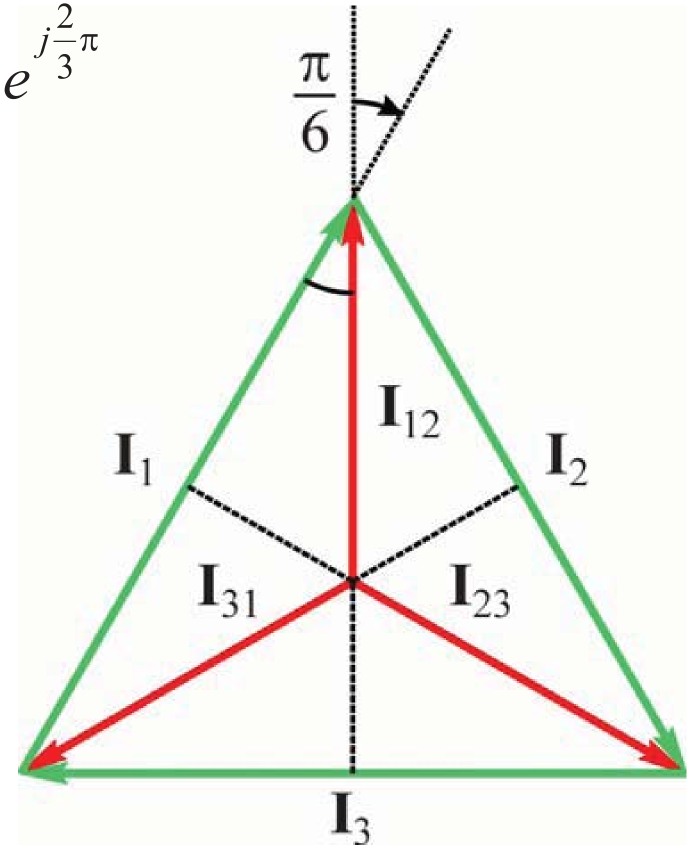


Carico a triangolo regolare

- Se il carico è regolare e le tensioni concatenate costituiscono una terna simmetrica, le correnti di fase costituiscono una terna equilibrata

$$\mathbf{I}_{12} = \frac{\mathbf{V}_{12}}{|\mathbf{Z}|} e^{-j\varphi} \qquad \mathbf{I}_{23} = \mathbf{I}_{12} e^{-j\frac{2}{3}\pi} \qquad \mathbf{I}_{31} = \mathbf{I}_{12} e^{j\frac{2}{3}\pi}$$

$$\varphi = \arg(\mathbf{Z})$$



➡ Anche le correnti di linea costituiscono una terna equilibrata (➡ il triangolo è equilatero e il punto O coincide con il suo baricentro)

➡ Con semplici considerazioni geometriche si può riconoscere che le espressioni delle correnti di linea sono

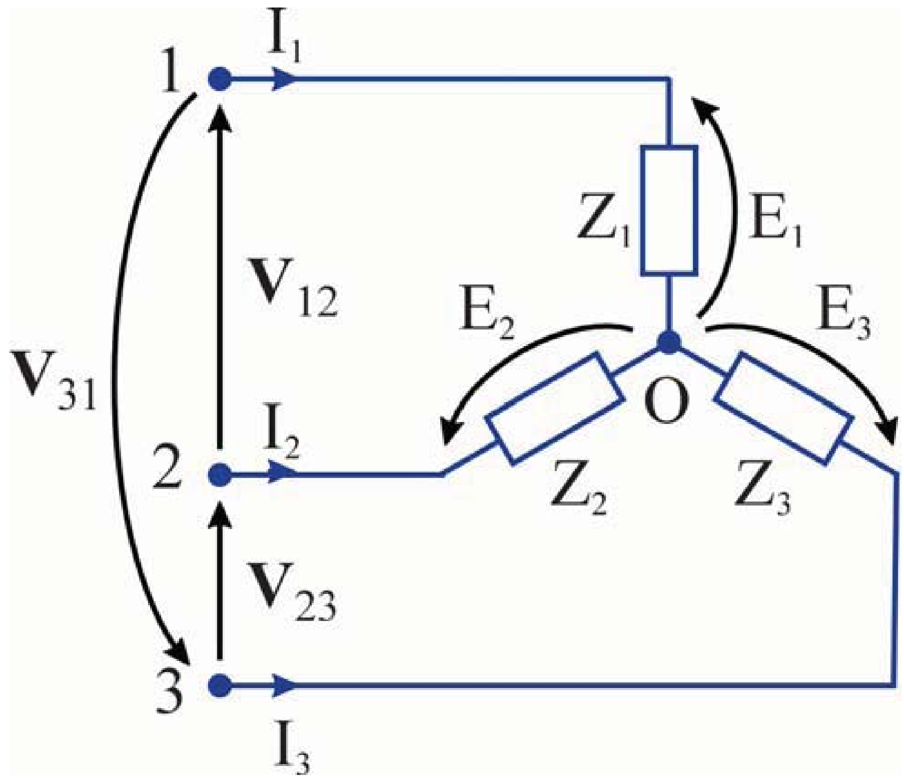
$$\mathbf{I}_1 = \sqrt{3}\,\mathbf{I}_{12} e^{-j\frac{\pi}{6}} \qquad \mathbf{I}_2 = \sqrt{3}\,\mathbf{I}_{23} e^{-j\frac{\pi}{6}} \qquad \mathbf{I}_3 = \sqrt{3}\,\mathbf{I}_{31} e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

Carico a stella

- Le correnti di fase coincidono con le correnti di linea
- Le correnti di fase possono essere ottenute risolvendo il sistema

$$\mathbf{Z}_1\mathbf{I}_1 - \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_{12}$$
$$\mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2 - \mathbf{Z}_3\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_{23}$$
$$(\mathbf{Z}_3\mathbf{I}_3 - \mathbf{Z}_1\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_{31})$$
$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = 0$$

(La terza equazione non serve perché è conseguenza delle prime due)



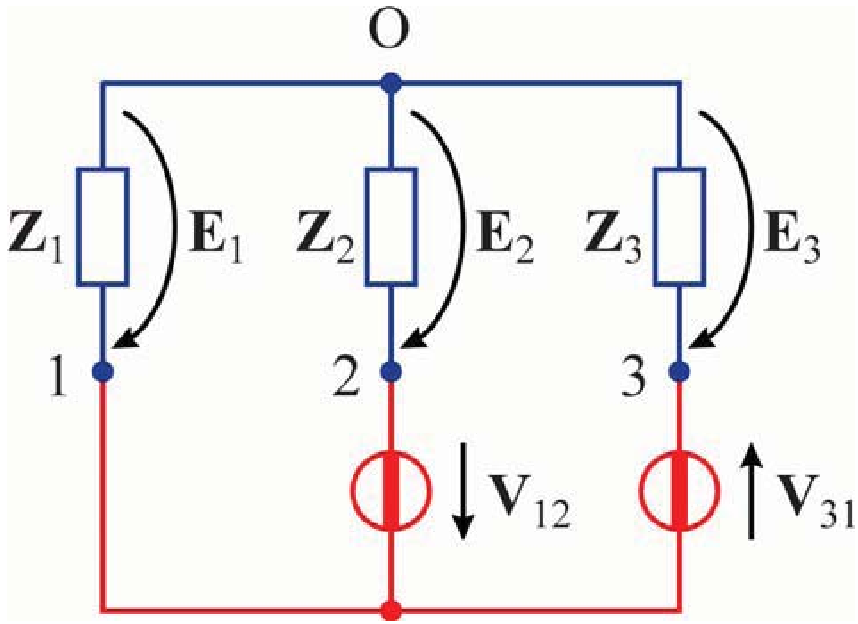
- Note le correnti di fase si ricavano le tensioni di fase

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{Z}_1\mathbf{I}_1 \qquad \mathbf{E}_2 = \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2 \qquad \mathbf{E}_3 = \mathbf{Z}_3\mathbf{I}_3$$

Carico a stella – calcolo delle tensioni di fase

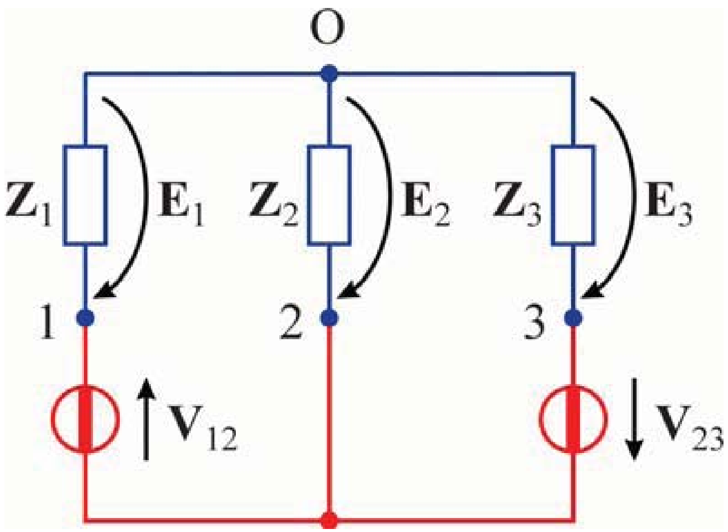
- Metodo alternativo per il calcolo delle tensioni di fase
  - Le stesse tensioni ai terminali della stella potrebbero essere ottenute mediante due soli generatori aventi tensioni uguali a due delle tensioni concatenate (come nell'esempio in figura)
  - Dalla formula di Millman si ottiene direttamente

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{V}_{12}\mathbf{Y}_2 - \mathbf{V}_{31}\mathbf{Y}_3}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3}$$

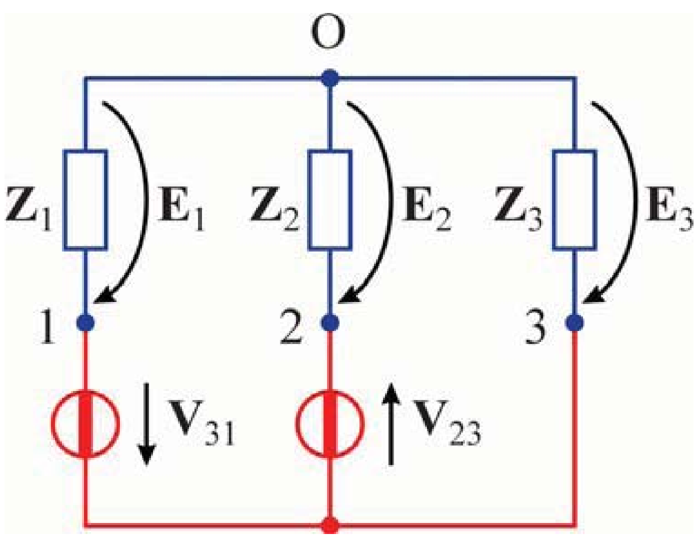


  - Considerando le altre possibili coppie di generatori si possono ottenere le altre tensioni di fase

Carico a stella – calcolo delle tensioni di fase



$$E_2 = \frac{V_{23}Y_3 - V_{12}Y_1}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$



$$E_3 = \frac{V_{31}Y_1 - V_{23}Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

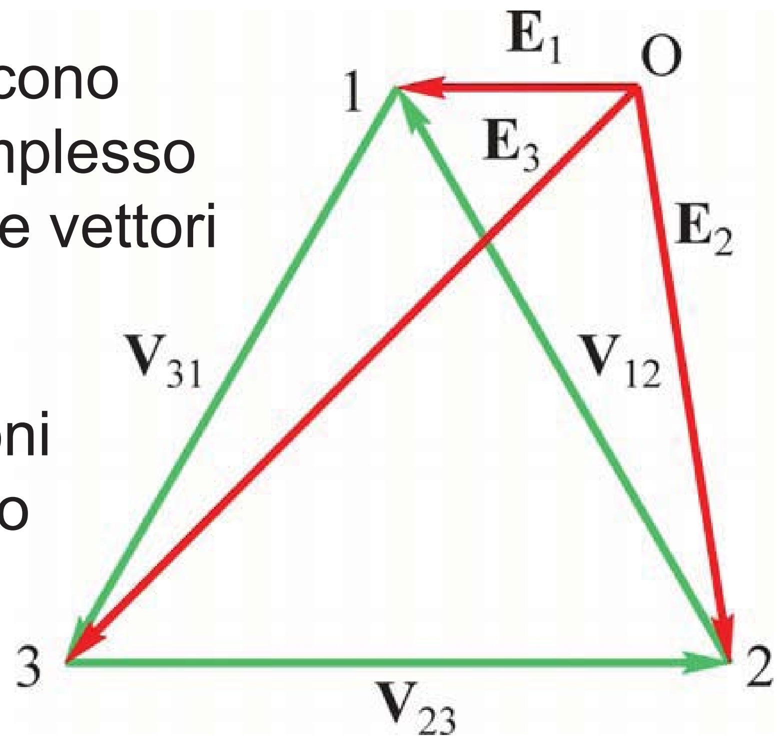
Centro delle tensioni di fase

- Le tensioni di fase e le tensioni concatenate sono legate dalle relazioni

$$\mathbf{V}_{12} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 \qquad \mathbf{V}_{23} = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_3 \qquad \mathbf{V}_{31} = \mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_1$$

- Se le tensioni concatenate costituiscono una terna simmetrica, nel piano complesso possono essere rappresentate da tre vettori che formano un triangolo equilatero

- I vettori che rappresentano le tensioni di fase uniscono i vertici del triangolo con un punto O
  - ➡ **centro delle tensioni di fase**



Carico a stella regolare

- Se il carico è regolare ($\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}$) si ha

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{Z}\,\mathbf{I}_1 \qquad \mathbf{E}_2 = \mathbf{Z}\,\mathbf{I}_2 \qquad \mathbf{E}_3 = \mathbf{Z}\,\mathbf{I}_3$$

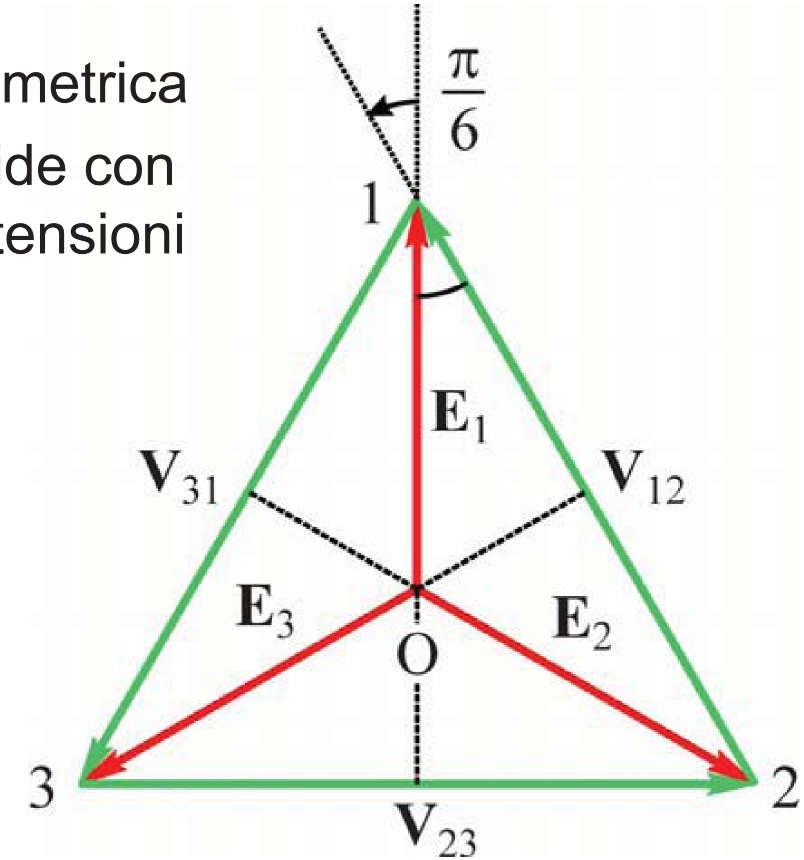
$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = \mathbf{Z}(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3) = 0$$

  - La terna delle tensioni di fase è simmetrica
  - Il centro delle tensioni di fase coincide con il baricentro del triangolo, quindi le tensioni di fase sono

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{V}_{12}}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{V}_{23}}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

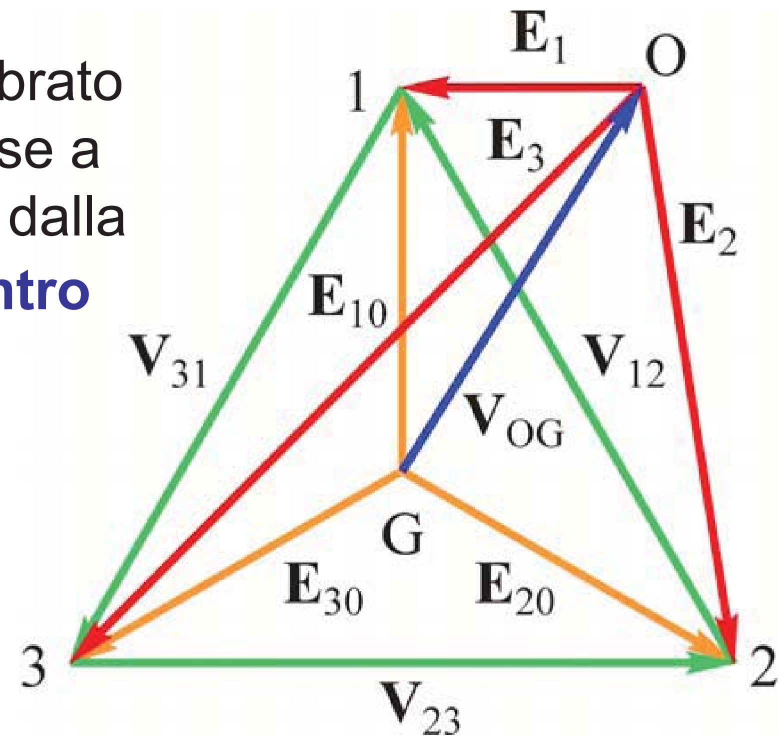
$$\mathbf{E}_3 = \frac{\mathbf{V}_{31}}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}}$$



Tensioni principali di fase

- Le tensioni di fase corrispondenti ad un carico a stella regolare sono dette **tensioni principali di fase** e verranno indicate anche con i simboli $\mathbf{E}_{10}$, $\mathbf{E}_{20}$, $\mathbf{E}_{30}$
- Il centro delle tensioni principali di fase corrisponde al baricentro G del triangolo delle tensioni concatenate
- Nel caso di un carico a stella non equilibrato è possibile determinare le tensioni di fase a partire dalle tensioni principali di fase e dalla tensione $\mathbf{V}_{\mathrm{OG}}$ (= **spostamento del centro delle tensioni di fase**)

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{10} - \mathbf{V}_{\mathrm{OG}}$$
$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{20} - \mathbf{V}_{\mathrm{OG}}$$
$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_{30} - \mathbf{V}_{\mathrm{OG}}$$

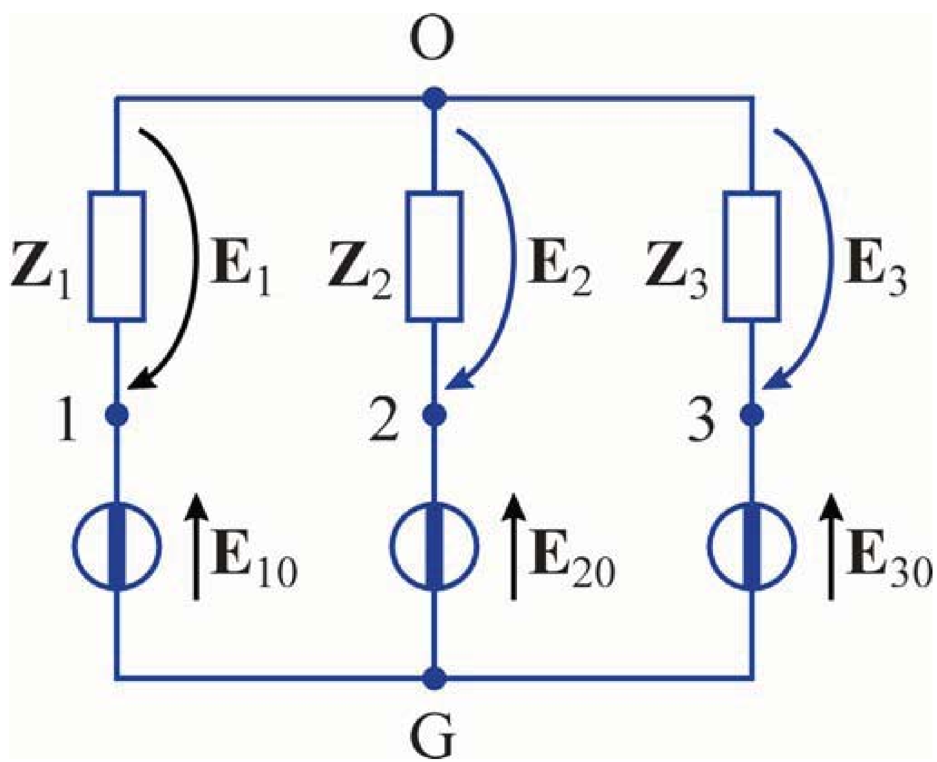


Spostamento del centro delle tensioni di fase

- La terna di tensioni concatenate che alimenta il carico a stella può essere ottenuta mediante tre generatori collegati a stella aventi tensioni coincidenti con le tensioni principali di fase

➡ La tensione $\mathbf{V}_{OG}$ può essere calcolata mediante la formula di Millman

$$\mathbf{V}_{OG} = \frac{\mathbf{E}_{10}\mathbf{Y}_1 + \mathbf{E}_{20}\mathbf{Y}_2 + \mathbf{E}_{30}\mathbf{Y}_3}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3}$$



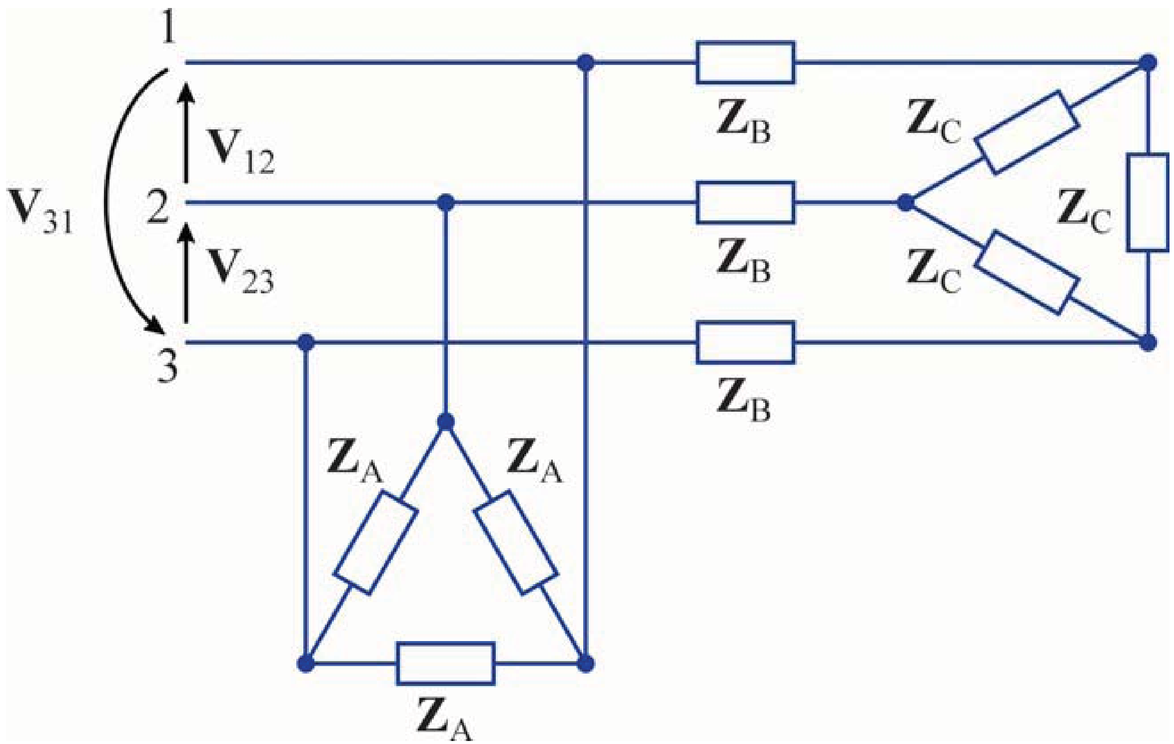
- Per un carico simmetrico si ha

$$\mathbf{V}_{OG} = \frac{\mathbf{E}_{10} + \mathbf{E}_{20} + \mathbf{E}_{30}}{3} = 0$$

Rete ridotta monofase

- **Ipotesi**:
  - Le tensioni concatenate costituiscono una terna simmetrica
  - I carichi sono regolari

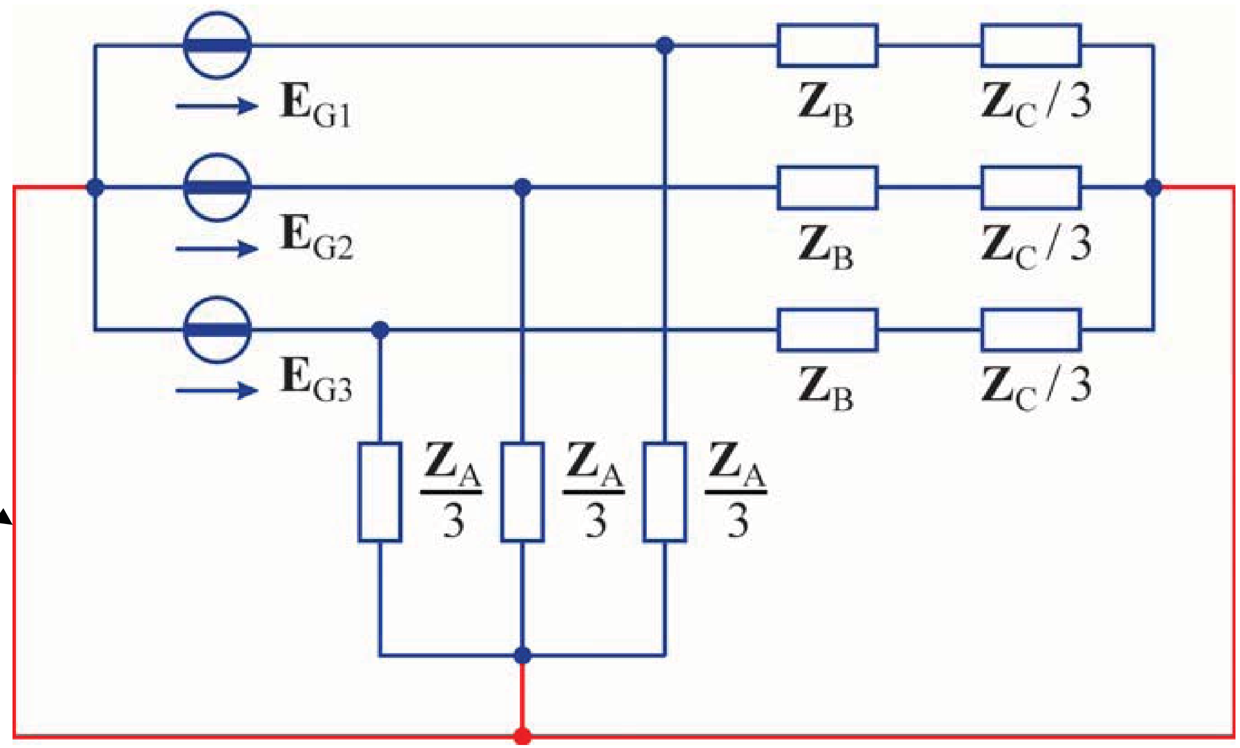
Esempio



Rete ridotta monofase

- Si sostituiscono eventuali generatori a triangolo con generatori a stella
- Si trasformano eventuali carichi a triangolo in stelle equivalenti

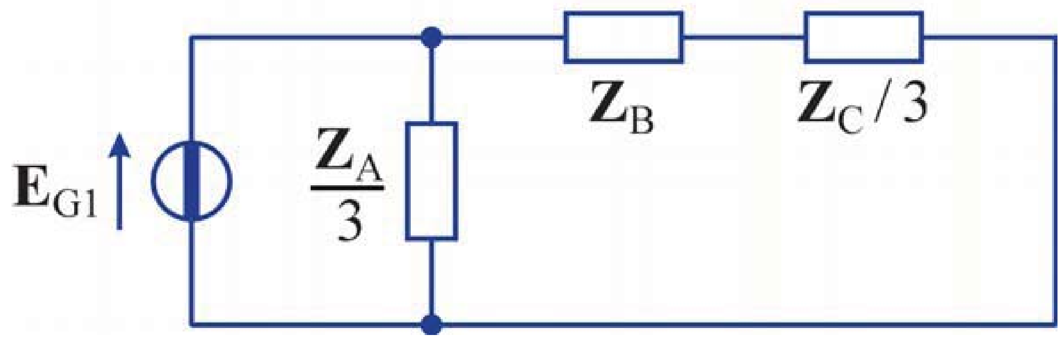
collegamento tra i centri delle stelle



- Tutti i carichi sono regolari
  - ➡ i centri di tutte le stelle sono allo stesso potenziale
  - ➡ collegandoli tra loro non si altera il comportamento del circuito

Rete ridotta monofase

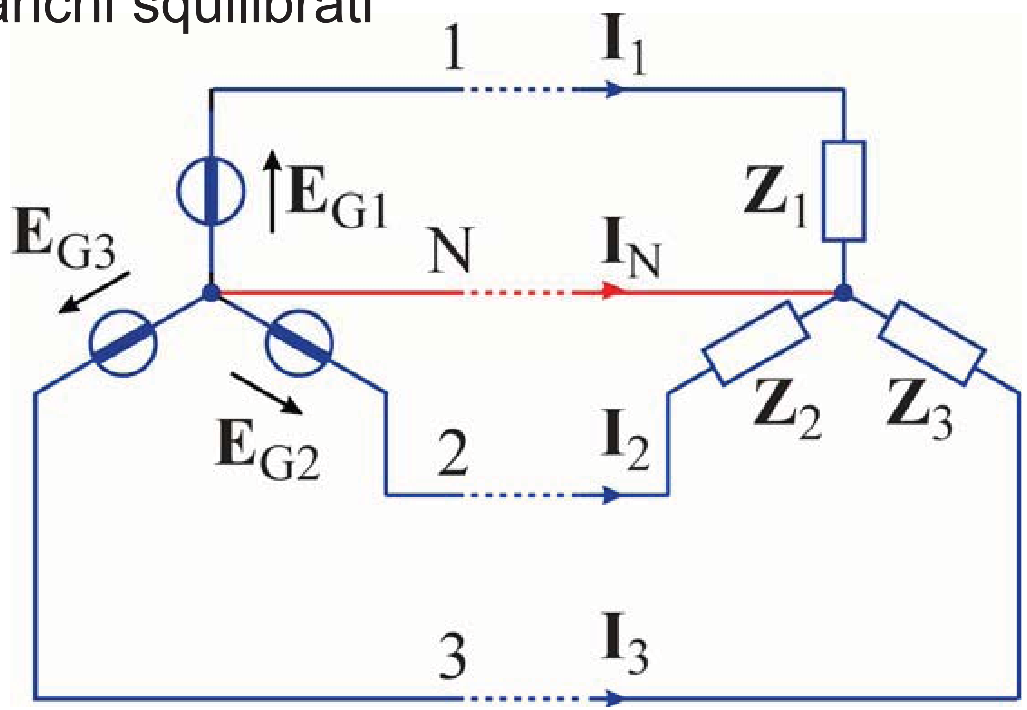
- Nel circuito così ottenuto, ciascuna delle fasi può essere studiata separatamente dalle altre
- I circuiti relativi alle tre fasi sono identici, a parte la rotazione di fase dei generatori



➡ Risolta la rete relativa alla prima fase (**rete ridotta monofase**) è possibile determinare le tensioni e le correnti delle altre due fasi introducendo i corrispondenti sfasamenti di $\pm 2\pi/3$

Sistemi trifase con neutro

- Nel caso di generatori e carico a stella è possibile aggiungere un quarto conduttore (**neutro**) che collega il centro della stella di generatori al nodo centrale del carico
- Le tensioni di fase del carico coincidono con le tensioni dei generatori e quindi non dipendono dalle impedenze di carico
- ➡ Il neutro consente di garantire valori prefissati delle tensioni di fase in presenza di carichi squilibrati



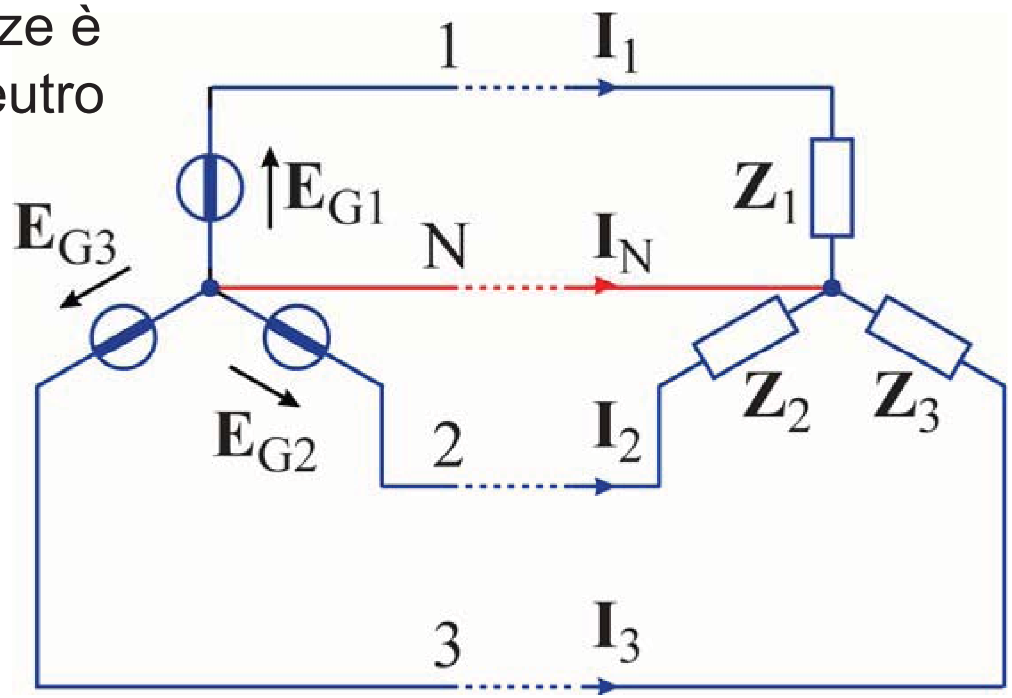
Sistemi trifase con neutro

- Il neutro è percorso dalla corrente

$$\mathbf{I}_{\mathrm{N}} = -(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3) = -\left(\frac{\mathbf{E}_{G1}}{\mathbf{Z}_1} + \frac{\mathbf{E}_{G2}}{\mathbf{Z}_2} + \frac{\mathbf{E}_{G3}}{\mathbf{Z}_3}\right)$$

➡ $\mathbf{I}_{\mathrm{N}}$ si annulla se le tre impedenze sono uguali (carico regolare)

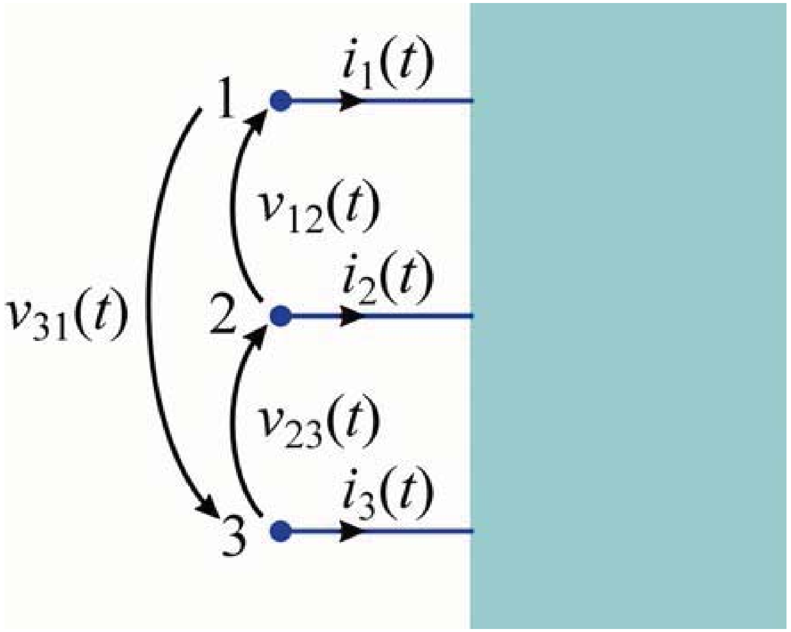
- In questo caso la tensione tra il centro della stella di generatori e il centro della stella di impedenze è nulla anche in assenza del neutro
  - ➡ la presenza del neutro è irrilevante
- Se il carico è irregolare nel neutro circola una corrente la cui intensità è tanto maggiore quanto più il carico è squilibrato

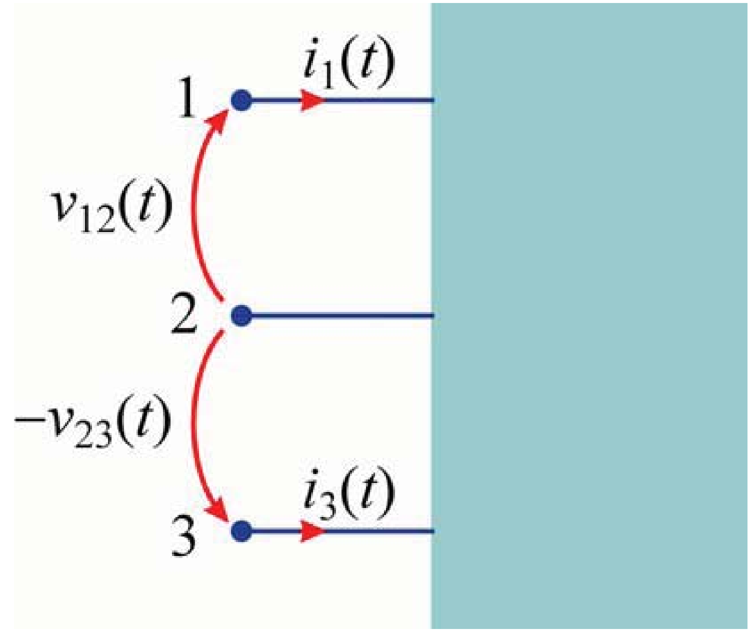


Sistemi trifase con neutro

- I sistemi con neutro sono utilizzati nella distribuzione di energia a bassa tensione
- In Italia il valore normalizzato delle tensioni di fase per la distribuzione a bassa tensione è di 230 V efficaci, corrispondenti a tensioni concatenate di 400 V efficaci
  (fino al 2003 i valori erano 220 V e 380 V)
- Le tensioni di fase sono utilizzate per alimentare carichi monofasi indipendenti (es. utenze domestiche)
  - ➡ normalmente il carico risulta squilibrato
- Le tensioni concatenate sono utilizzate per carichi trifase o per carichi monofase che richiedono potenze più elevate

Potenza assorbita da un carico trifase





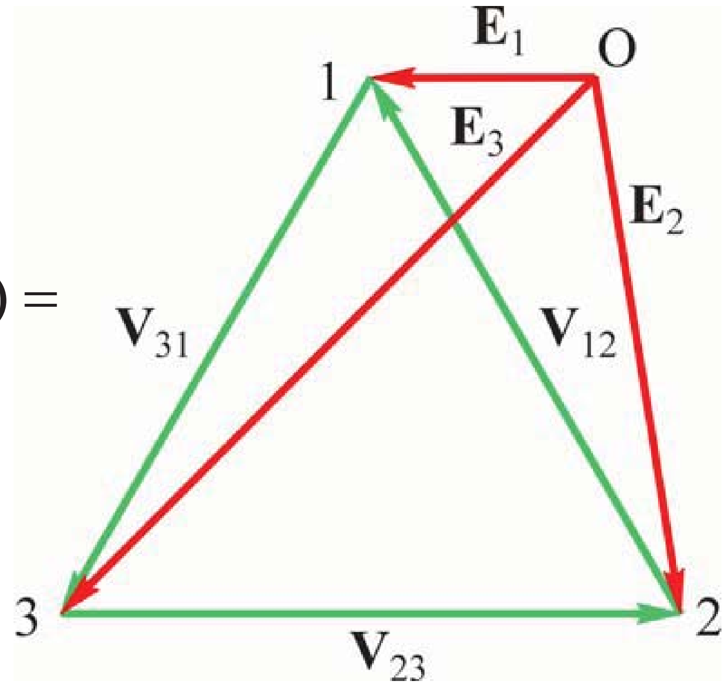
- Un generico carico trifase è un tripolo
- Scelto un arbitrariamente un terminale di riferimento, si può esprimere la potenza assorbita in funzione delle correnti degli altri terminali e delle tensioni degli altri terminali rispetto al riferimento

$$p(t) = v_{12}(t)i_1(t) + v_{32}(t)i_3(t) = v_{12}(t)i_1(t) - v_{23}(t)i_3(t)$$

Potenza assorbita da un carico trifase

- Indipendentemente dalla struttura del carico, la potenza può essere espressa anche in funzione di un'arbitraria terna di tensioni stellate associata alle tensioni concatenate (fissata scegliendo arbitrariamente il punto O)

$$
\begin{aligned}
p(t) &= v_{12}(t)i_1(t) - v_{23}(t)i_3(t) = \\
&= \left[e_1(t) - e_2(t)\right]i_1(t) - \left[e_2(t) - e_3(t)\right]i_3(t) = \\
&= e_1(t)i_1(t) - e_2(t)\left[i_1(t) + i_3(t)\right] + e_3(t)i_3(t) = \\
&= e_1(t)i_1(t) + e_2(t)i_2(t) + e_3(t)i_3(t)
\end{aligned}
$$



  - In particolare è possibile esprimere la potenza in funzione delle tensioni principali di fase

$$p(t) = e_{10}(t)i_1(t) + e_{20}(t)i_2(t) + e_{30}(t)i_3(t)$$

Potenza assorbita da un carico trifase

- La potenza attiva e la potenza reattiva di un carico trifase sono definite come somme delle potenze attive e reattive associate alle tre fasi
- Quindi anche la potenza complessa è data dalla somme delle potenze associate alle tre fasi, e può essere espressa nelle forme

$$\mathbf{N} = \mathbf{E}_1\mathbf{I}_1^* + \mathbf{E}_2\mathbf{I}_2^* + \mathbf{E}_3\mathbf{I}_3^* = \mathbf{V}_{12}\mathbf{I}_1^* - \mathbf{V}_{23}\mathbf{I}_3^*$$

- La potenza apparente e il fattore di potenza sono definiti convenzionalmente mediante le relazioni valide nel caso monofase

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\cos\Phi = \frac{P}{S} = \cos\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{Q}{P}\right)\right]$$

- In questo caso Φ è un angolo convenzionale e, in generale, non può essere interpretato come angolo di sfasamento tra una tensione e una corrente

Potenza nei sistemi simmetrici ed equilibrati

- **Ipotesi**
  - Le tensioni concatenate costituiscono una terna simmetrica
  - Il carico è regolare
- Si esprime la potenza assorbita dal carico in funzione delle tensioni principali di fase e delle correnti di linea

$$
\begin{aligned}
p(t) &= e_{10}(t)\,i_1(t) + e_{20}(t)\,i_2(t) + e_{30}(t)\,i_3(t) = \\
&= E_0 I \cos\varphi + \boxed{E_0 I \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I) +} \\
&+ E_0 I \cos\varphi + \boxed{E_0 I \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I + \tfrac{2}{3}\pi) +} \\
&+ E_0 I \cos\varphi + \boxed{E_0 I \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I - \tfrac{2}{3}\pi) =} \\
&= 3 E_0 I \cos\varphi
\end{aligned}
$$

I termini oscillanti formano una terna simmetrica

⇓

la loro somma è nulla

  - $E_0 =$ valore efficace delle tensioni principali di fase
  - $I =$ valore efficace delle correnti di linea

➡ *In un sistema simmetrico ed equilibrato la potenza istantanea è costante*

Potenza nei sistemi simmetrici ed equilibrati

- Il valore efficace delle tensioni principali di fase è legato al valore delle tensioni concatenate dalla relazione

$$V = \sqrt{3}E_0$$

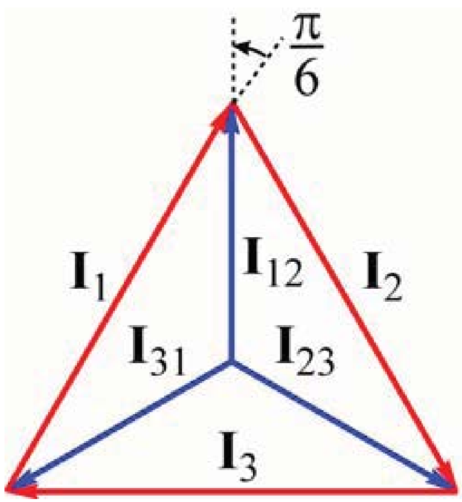
- Il valore costante della potenza istantanea, coincidente con la potenza attiva può essere espresso come

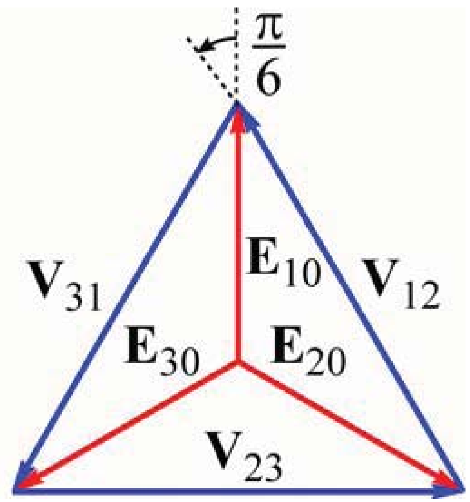
$$P = \sqrt{3}VI\cos\varphi$$

- In questo caso l'angolo φ non è lo sfasamento tra una tensione concatenata e una corrente di linea, ma tra una tensione principale di fase e la corrispondente corrente di linea

Potenza nei sistemi simmetrici ed equilibrati

- Nel caso di un carico a stella regolare, le tensioni delle impedenze coincidono con le tensioni principali di fase
  - ➡ φ rappresenta l'argomento delle impedenze
- Per un carico a triangolo regolare
  - ◆ le tensioni delle impedenze coincidono con le tensioni concatenate e quindi sono ruotate di $\pi/6$ rispetto alle tensioni principali di fase
  - ◆ le correnti delle impedenze sono ruotate di $\pi/6$ rispetto alle correnti di linea
  - ➡ anche in questo caso φ rappresenta l'argomento delle impedenze





Potenza nei sistemi simmetrici ed equilbrati

- Potenza attiva

$$P = 3E_0 I \cos\varphi = \sqrt{3} VI \cos\varphi$$

- Potenza reattiva

$$Q = 3E_0 I \operatorname{sen}\varphi = \sqrt{3} VI \operatorname{sen}\varphi$$

- Potenza apparente

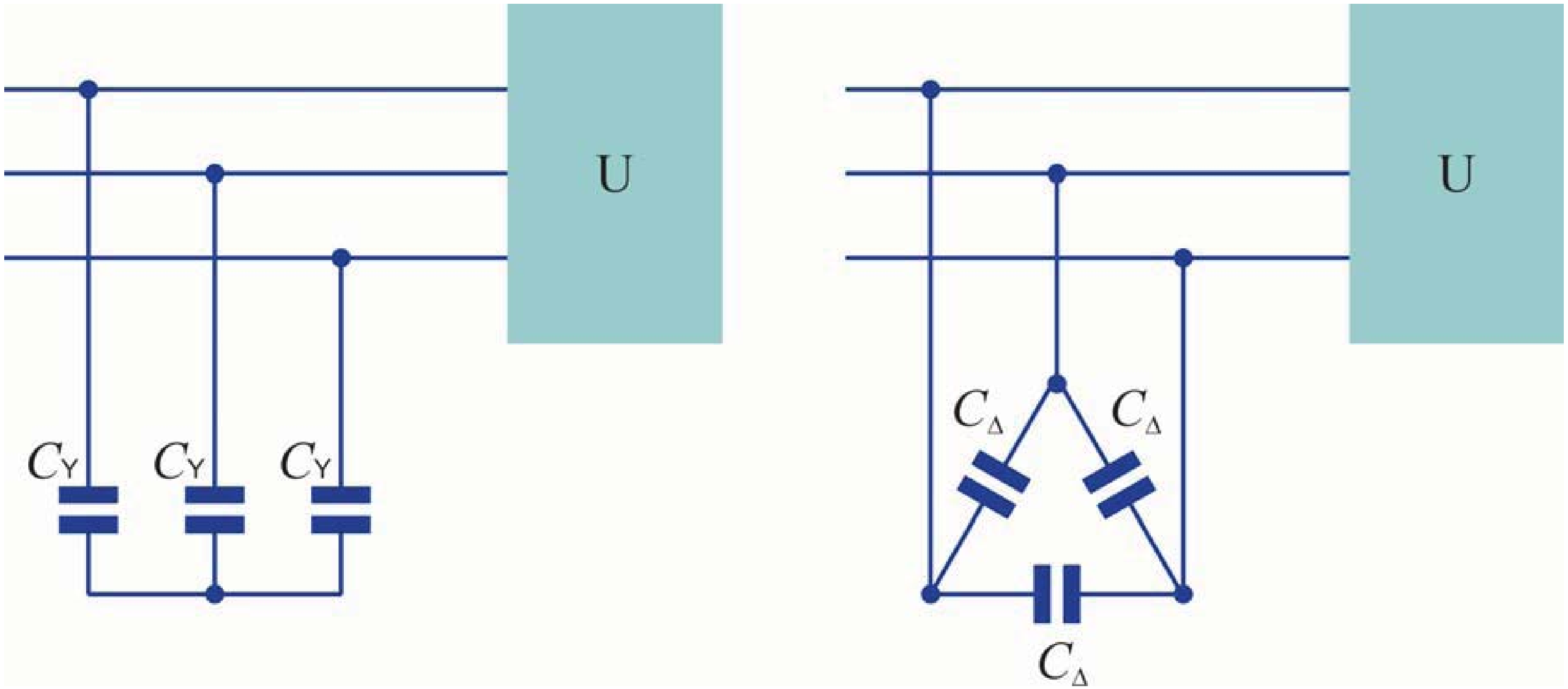
$$S = 3E_0 I = \sqrt{3} VI$$

- Fattore di potenza

$$\cos\Phi = \cos\varphi$$

(per un carico regolare a stella o a triangolo Φ rappresenta l'argomento delle impedenze di carico)

Rifasamento di un carico trifase



- Carico trifase equilibrato che assorbe una potenza attiva P
- Si vuole portare il fattore di potenza da $\cos\varphi$ a $\cos\varphi'$
- Si impiegano tre bipoli reattivi uguali collegati a stella o a triangolo tali da assorbire la potenza reattiva

$$Q_R = P(tg\varphi' - tg\varphi)$$

Rifasamento di un carico trifase

- Il caso più frequente nella pratica è quello di un carico ohmico-induttivo
  - ➡ i bipoli reattivi sono condensatori
- Valori efficaci delle tensioni dei condensatori
  - collegamento a stella

$$V_{Ce}^{Y} = \frac{V_e}{\sqrt{3}}$$

$V_e =$ valore efficace delle tensioni concatenate

  - collegamento a triangolo

$$V_{Ce}^{\Delta} = V_e = \sqrt{3}\, V_{Ce}^{Y}$$

➡ Potenze reattive

$$Q_R = -3\omega C V_{Ce}^2 = -\omega C_Y V_e^2 = -3\omega C_\Delta V_e^2$$

Rifasamento di un carico trifase

- Capacità di rifasamento
  - collegamento a stella

$$C_Y = \frac{P(tg\varphi - tg\varphi')}{\omega V_e^2}$$

  - collegamento a triangolo

$$C_\Delta = \frac{P(tg\varphi - tg\varphi')}{3\omega V_e^2} = \frac{C_Y}{3}$$

- Nel caso del collegamento a stella la capacità è 3 volte maggiore, mentre la tensione sui condensatori è inferiore di un fattore $\sqrt{3}$
- Dato che il costo di un condensatore aumenta sia con la capacità che con la massima tensione di funzionamento, la scelta del tipo di collegamento dipende dal fattore che incide in misura maggiore

Principali vantaggi dei sistemi trifase

- In un sistema simmetrico ed equilibrato la potenza istantanea è costante
  - L’energia elettrica è ottenuta convertendo l’energia meccanica fornita al rotore
  - In un sistema monofase la potenza istantanea è variabile e, se il carico non è puramente resistivo in alcuni istanti è anche negativa
    - ➡ Dato che ω deve essere costante è necessario applicare al rotore una coppia variabile
  - In un sistema trifase simmetrico ed equilibrato è richiesta una coppia costante
- A parità di condizioni, in un sistema trifase le perdite nelle linee di trasporto dell’energia elettrica sono inferiori
- Un sistema di correnti trifase può essere utilizzato per generare un **campo magnetico rotante**, su cui si basa il funzionamento delle macchine elettriche rotanti in corrente alternata

Trasmissione dell’energia elettrica

- Confronto tra
  - linea in corrente continua
  - linea in corrente alternata monofase
  - linea in corrente alternata trifase
- $l =$ lunghezza della linea
- $P =$ potenza assorbita dal carico in corrente continua
  $=$ potenza attiva assorbita dal carico in corrente alternata
- $V =$ tensione sul carico in corrente continua
  $=$ valore efficace della tensione sul carico monofase
  $=$ valore efficace delle tensioni concatenate della linea trifase

Correnti nella linea

- Corrente della linea in corrente continua

$$I_{\mathrm{CC}} = \frac{P}{V}$$

- Valore efficace della corrente della linea monofase

$$I_{\mathrm{CAM}} = \frac{P}{V \cos\varphi}$$

- Valore efficace delle correnti della linea trifase

$$I_{\mathrm{CAT}} = \frac{P}{\sqrt{3}\, V \cos\varphi}$$

(si assume che i fattori di potenza del carico monofase e del carico trifase siano uguali)

Potenza dissipata nella linea

- Potenza dissipata nella linea

$$P_D = nRI^2 = n\rho\frac{l}{S}I^2 = n^2\rho\frac{l^2}{\tau}I^2$$

  - n = numero di conduttori
  - R = resistenza di un conduttore
  - l = lunghezza della linea
  - S = sezione di un conduttore
  - ρ = resistività
  - τ = volume totale dei conduttori
    $\tau = nlS$
  - I = (nei tre casi) I_{CC}, I_{CAM}, I_{CAT}

Potenza dissipata nella linea

- Inserendo nell'espressione di P_D il numero di conduttori e l'espressione della corrente si ottiene nei tre casi

$$P_{\mathrm{DCC}} = 4\rho \frac{l^2 P^2}{\tau_{\mathrm{CC}} V^2} = \frac{4K}{\tau_{\mathrm{CC}}}$$

$$P_{\mathrm{DCAM}} = 4\rho \frac{l^2 P^2}{\tau_{\mathrm{CAM}} V^2 \cos^2 \varphi} = \frac{4K}{\tau_{\mathrm{CAM}} \cos^2 \varphi}$$

$$P_{\mathrm{DCAT}} = 3\rho \frac{l^2 P^2}{\tau_{\mathrm{CAT}} V^2 \cos^2 \varphi} = \frac{3K}{\tau_{\mathrm{CAT}} \cos^2 \varphi}$$

dove $K = \rho \dfrac{l^2 P^2}{V^2}$

Confronto

- A parità di volume dei conduttori
  - Le perdite nella linea trifase sono sempre inferiori del 25% rispetto a quelle della linea monofase
  - Le perdite nella linea monofase sono maggiori di quelle nella linea in continua tranne che nel caso di $\cos\varphi = 1$, in cui sono uguali
  - Per $\cos\varphi > \sqrt{3}/2$ le perdite nella linea trifase sono minori di quelle nella linea in continua
- A parità di perdite
  - La linea trifase consente di risparmiare il 25% di materiale conduttore rispetto alla linea monofase
  - Per valori elevati di $\cos\varphi$, è più conveniente anche della linea in continua