STABILITÀ DI UN SISTEMA AD ANELLO CHIUSO

Il metodo diretto per valutare la stabilità di un sistema ad anello chiuso consiste nel determinare i poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso che lo descrive.

C'è una corrispondenza diretta tra i poli della funzione e la stabilità del sistema.

Gli altri metodi si basano sull'analisi della funzione di trasferimento d'anello $L \equiv GH$ che descrive il sistema.

Il primo metodo (criterio di Routh) consiste nell'analisi dell'equazione caratteristica del sistema $N(s) + D(s) = 0$ [con $N(s)$ numeratore di $L(s)$ e $D(s)$ denominatore di $L(s)$]. Il criterio fornisce una condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema ad anello chiuso.

L'applicazione del criterio consiste in due fasi:

a) Si verifica se è soddisfatta la condizione necessaria
b) Si costruisce la tabella di Routh e si verifica che non siano presenti alternanze di segno nella prima colonna della tabella

Il secondo metodo (criterio di Nyquist) è valido sia per sistemi stabili e instabili ad anello aperto e per sistemi con retroazione negativa e positiva (per questi il punto critico ha coordinate $1+j0$ anziché $-1+j0$). Per i sistemi senza poli nel semipiano destro si fornisce un criterio ristretto: basta esaminare il diagramma polare e verificare se abbraccia il punto critico. Per gli altri sistemi vale il criterio generalizzato: si utilizza il diagramma di Nyquist completo e si verifica se $N=P_d$, cioè se il numero di rotazioni in senso antiorario intorno al punto critico è = al numero di poli nel semipiano destro della funzione di trasferimento d'anello $L(s)$).

Il terzo metodo (criterio di Bode) si applica solo per sistemi con $L(s)$ senza poli nel semipiano destro e con diagrammi di Bode che tagliano l'asse a zero dB una e una sola volta e si verifica che sia guadagno $\mu > 0$ e margine di fase $\varphi_m > 0$.

Criterio di Routh.

questo criterio fornisce, in generale, una condizione (necessaria e sufficiente) per stabilire se un sistema dinamico è asintoticamente stabile. Esso costituirà quindi anche un utile strumento per l'analisi della stabilità dei sistemi reazionati, quali sono appunto i sistemi di controllo.

RICHIAMI SUL CRITERIO DI ROUTH.

Con riferimento ad un polinomio a coefficienti reali

$$p(s) = p(s) = p_n s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0, \; p_n \neq 0$$

si consideri il problema di stabilire se gli zeri di tale polinomio hanno tutte parte reale negativa. Al riguardo, sussistono i seguenti risultati, il primo dei quali esprime una semplice condizione necessaria e il secondo una condizione necessaria e sufficiente.

Teorema

Condizione necessaria affinchè gli zeri di $p(s)$ abbiano tutte parte reale negativa è che i coefficienti p_i siano tutti non nulli e tutti dello stesso segno

Teorema (Criterio di Routh)

Condizione necessaria e sufficiente perchè gli zeri di $p(s)$ abbiano tutti parte reale negativa è che tutti i coefficienti della prima colonna della Tabella di Routh siano tutti non nulli e tutti dello stesso segno.

Definizione

Si dice Tabella di Routh la seguente tabella a $n + 1$ righe:

$$
\begin{array}{llll}
a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots \\
a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots \\
\cdots & & & \\
a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots ,
\end{array}
$$

dove

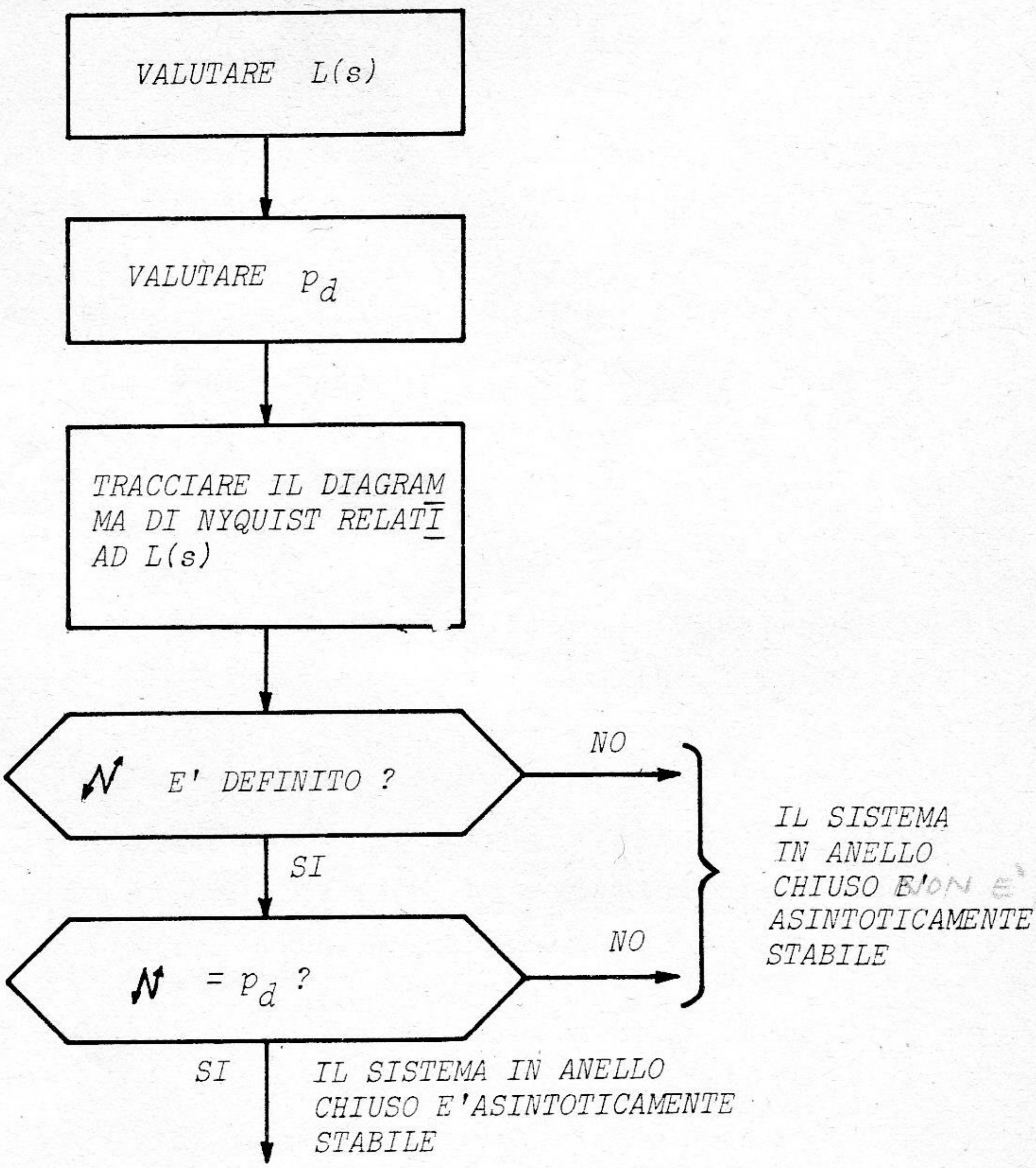
$$
a_{0j} \triangleq \begin{cases} p_{n-2j} & , \ \forall j \ \ tale\ che\ n-2j \geqslant 0 \\ 0 & , \ altrove \end{cases}
$$

$$
a_{1j} \triangleq \begin{cases} p_{n-2j-1} & , \ \forall j \ \ tale\ che\ n-2j > 0 \\ 0 & , \ altrove \end{cases}
$$

$$
a_{ij} \triangleq - \frac{1}{a_{i-1,0}} \det \begin{vmatrix} a_{i-2,0} & a_{i-2,j+1} \\ a_{i-1,0} & a_{i-1,j+1} \end{vmatrix} , \ \forall \ i \geqslant 2.
$$

(Criterio di Nyquist)

Dato un sistema reazionato negativamente con funzione di trasferimento d'anello $L(s)$, si tracci il diagramma di Nyquist relativo ad $L(s)$ e si valuti il numero dei giri $\mathcal{N}$ descritti da tale diagramma in senso antiorario intorno al punto $-1+j0$. (punto critico)
Condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema è che $\mathcal{N}$ sia ben definito (cioè il diagramma di Nyquist non passi per $-1+j0$) e che $\mathcal{N}$ uguagli il numero p_d dei poli di $L(s)$ nel semipiano destro (o, più esattamente, a parte reale maggiore di zero).



Il Criterio di Nyquist permette dunque di stabilire se un sistema reazionato è asintoticamente stabile attraverso l'analisi della funzione di trasferimento d'anello. Precisamente, per la sua applicazione, bisogna

1. Valutare la funzione di trasferimento d'anello $L(s)$;
2. determinare il numero dei poli p_d a parte reale maggiore di zero di $L(s)$;
3. tracciare il diagramma di Nyquist relativo ad $L(s)$;
4. determinare il numero delle rotazioni $\mathcal{N}$ che il diagramma descrive (in senso antiorario) intorno al punto $-1+j0$;
5. se $\mathcal{N}$ non è definito (il diagramma passa per $-1+j0$), il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile;
6. se $\mathcal{N}$ è definito, vi sono due possibilità: o $\mathcal{N} = p_d$ e allora il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile oppure $\mathcal{N} \neq p_d$ e allora il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile.

Conviene, a questo punto, fare un paio di osservazioni.
Anzitutto, se il sistema ha reazione positiva invece che negativa, il Criterio di Nyquist conserva la sua validità pur di considerare il numero delle rotazioni (in senso antiorario) del diagramma di Nyquist di $L(s)$ intorno al punto $+1+j0$ anzichè intorno a $-1+j0$.

Inoltre, si deve sottolineare che tale criterio non può essere esteso, in generale, ai cosiddetti sistemi a parametri distribuiti (ai quali corrisponde una funzione di trasferimento trascendente, ossia che non ha più la forma di un semplice rapporto tra polinomi).

Al riguardo, vi è tuttavia una situazione particolarmente importante in cui esso conserva la sua validità: precisamente quando la funzione di trasferimento d'anello è del tipo

$$L(s) = e^{-Ts} F(s),$$

dove $F(s)$ è una funzione razionale di s (rapporto di polinomi).
In questo caso, i poli da considerare per il calcolo di p_d sono quelli di $F(s)$.

Definizione 7

Dato un sistema reazionato, con funzione di trasferimento d'anello *L(s)*, si dice guadagno d'anello del sistema il guadagno di *L(s)*. μ

$$L(s) = \frac{\mu \prod_i (1+sT_i)\, e^{-sT}}{s^K \prod_j (1+sT_j)} \qquad \begin{array}{l} i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots n \end{array} \qquad m \leq n+K$$

Definizione 8

Dato un sistema reazionato negativamente con funzione di trasferimento d'anello *L(s)*, si supponga che vi sia una e una sola intersezione tra il diagramma di Bode del modulo e l'asse a *0 dB*.
Si definisce allora:

- pulsazione critica ω_C del sistema la pulsazione corrispondente al punto di intersezione suddetto;
- fase critica ϕ_C del sistema lo sfasamento di $L(j\omega)$ alla pulsazione critica

  $\phi_C = \measuredangle L(j\omega_C)$;
- margine di fase ϕ_m del sistema l'angolo

  $\phi_m = 180° - |\phi_C|$.

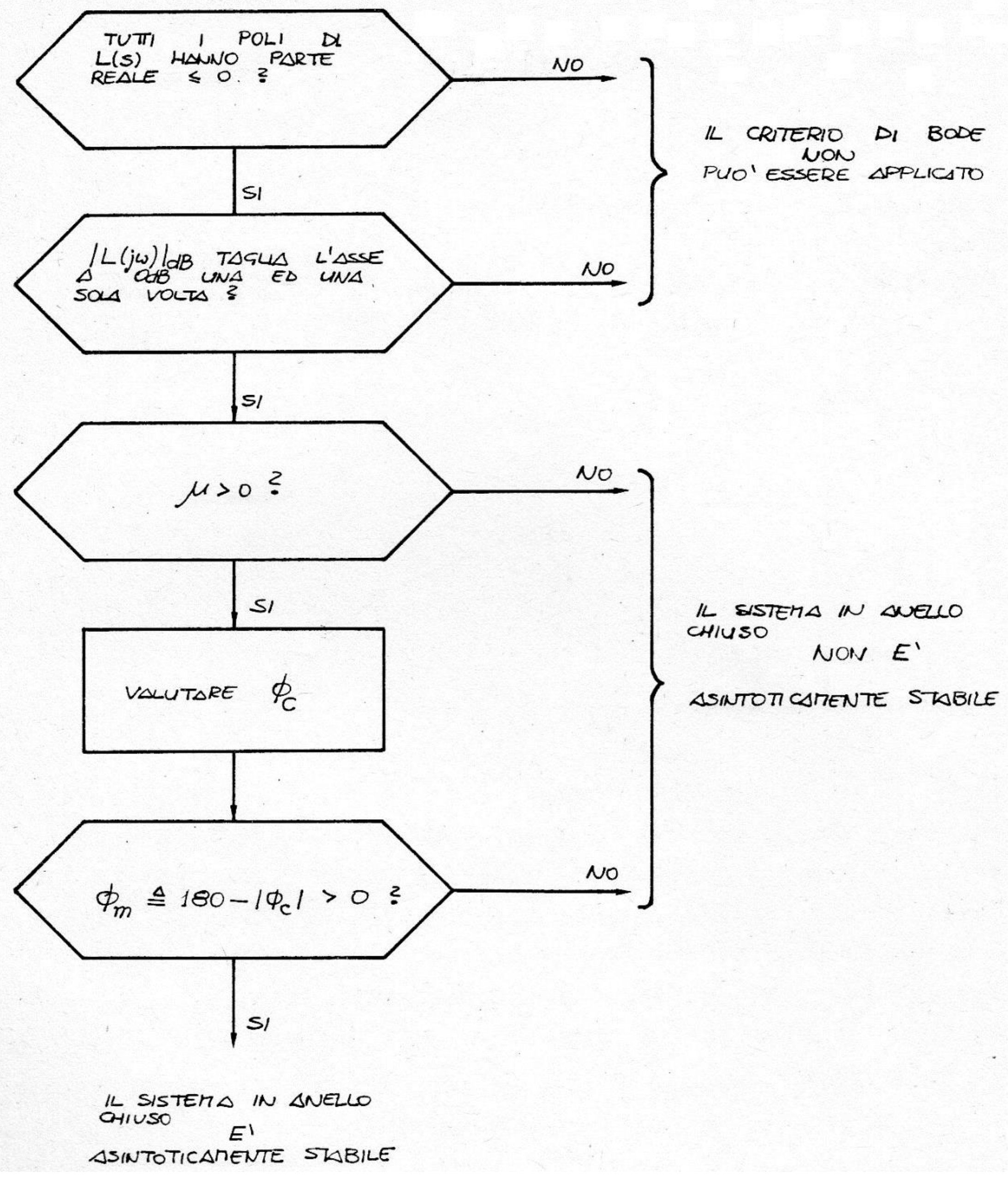
(Criterio di Bode)

Dato un sistema reazionato negativamente con funzione di trasferimento d'anello $L(s)$, siano soddisfatte le seguenti ipotesi

i) $L(s)$ non ha poli con parte reale maggiore di zero; $P_d = 0$

ii) il diagramma di Bode del modulo di $L(j\omega)$ taglia l'asse a $0\ dB$ una ed una sola volta.

Allora, indicato con μ il guadagno d'anello, condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile è che $\boxed{\mu > 0 \text{ e } \phi_m > 0.}$



Per evitare possibili ambiguità, conviene fare alcune precisazioni circa l'enunciato dato.

Una prima incertezza potrebbe derivare dal fatto che i vettori del piano complesso hanno notoriamente un argomento definito a meno di multipli interi dell'angolo giro, cosicchè ϕ_C risulterebbe definito non univocamente, con la conseguenza che non sarebbe chiaro che segno attribuire a ϕ_m. Al riguardo, occorre pertanto precisare che il Criterio di Bode, nella forma qui data, vale soltanto se per ϕ_C si assume il valore univocamente definito dal diagramma dello sfasamento relativo ad $L(j\omega)$ tracciato secondo le regole ovvero se ϕ_C viene calcolato mediante l'impiego del regolo delle fasi

In secondo luogo le condizioni $\mu > 0$ e $\phi_m > 0$ devono essere entrambe verificate per poter concludere che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile (e, viceversa, se il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, allora necessariamente è sia $\mu > 0$ che $\phi_m > 0$). In altre parole, il risultato espresso nel Teorema equivale, più distesamente, ad affermare che, se $\mu < 0$, allora il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile; se $\mu > 0$, si hanno due possibilità: o $\phi_m > 0$ e allora il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, o $\phi_m < 0$ e allora il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile (il caso $\mu = 0$ non è ovviamente significativo).

$\mu = 0$ equivale ad un sistema BUCO NERO

qualunque cosa vi buttiamo dentro

non ne esce nulla

Infine, giova sottolineare che il criterio di Bode richiede soltanto che $L(s)$ non abbia poli a parte reale maggiore di zero; esso resta perciò valido se la $L(s)$ ha qualche polo sull'asse immaginario, oltre che nel semipiano sinistro.

GRADO DI STABILITÀ DI UN SISTEMA DAL DIAGRAMMA DI NYQUIST

Per valutare il grado di stabilità ad anello chiuso di un sistema reazionato negativamente descritto da una funzione di trasferimento d'anello L(s) si esamina l'andamento del diagramma intorno al pto critico Pc(-1+j0):

a. si determina l'intersezione con l'asse reale per valutare il margine di guadagno
b. si determina l'intersezione con il cerchio di raggio 1 per valutare il margine di fase

Nel caso a. si impone $Im(j\omega_\pi) = 0$ oppure $\measuredangle L(j\omega_\pi) = -\pi$ e di calcola ω_π.

Quindi si determina $\mathrm{Re}(j\omega_\pi)$ da cui $m_G = \dfrac{1}{|\mathrm{Re}(j\omega_\pi)|}$.

Nel caso b. si impone $|L(j\omega_c)| = 1$ e si calcola ω_c (pulsazione critica).

Quindi si determina la fase critica φ_c da cui $\varphi_m = 180° - |\varphi_c|$.

GRADO DI STABILITÀ DI UN SISTEMA DAL DIAGRAMMA DI BODE

Per valutare il grado di stabilità ad anello chiuso di un sistema reazionato negativamente descritto da una funzione di trasferimento d'anello L(s) si esamina l'andamento dei diagrammi del modulo e della fase

a. si determina l'intersezione con la fase a - 180° per valutare il margine di guadagno
b. si determina l'intersezione con l'asse a zero dB (modulo = 1) per valutare il margine di fase

Nel caso a. si individua ω_π dal diagramma della fase.

Quindi si determina $|L(j\omega_\pi)|$ in corrispondenza di ω_π e da questo m_G = - $|L(j\omega_\pi)|$ in dB.

Nel caso b. si individua la pulsazione di attraversamento ω_c dal diagramma del modulo.

Quindi si determina la fase φ_c in corrispondenza di ω_c e da questo $\varphi_m = 180° - |\varphi_c|$.