SISTEMI LINEARI DINAMICI A TEMPO CONTINUO

Indicato con: $u(t) \in \Re^m$ **il vettore delle variabili di ingresso**;

$x(t) \in \Re^n$ **il vettore delle variabili di stato**;

$y(t) \in \Re^p$ **il vettore delle variabili di uscita**;

f, g **due funzioni vettoriali, le cui proprietà classificano i sistemi**;

un **SISTEMA DINAMICO a TEMPO CONTINUO** è definito dalle seguenti relazioni costitutive:

$$\dot{x}(t) = f\,[x(t),\ u(t),\ t] \quad \Rightarrow \quad \textbf{equazione di stato}$$

$$y(t) = g\,[x(t),\ u(t),\ t] \quad \Rightarrow \quad \textbf{trasformazione di uscita}$$

$$x(t)\big|_{t=t_O} = x(t_O) = x_O \quad \Rightarrow \quad \textbf{stato iniziale o condizione iniziale}$$

Il numero n delle variabili di stato definisce l'ordine del sistema.

- ***L'equazione differenziale, nota come equazione di stato, pone l'ingresso u(t) in relazione con le variabili che descrivono la situazione interna del sistema e definisce l'evoluzione dello stato x(t) per t > 0, in corrispondenza dell'istante iniziale t_O, della "condizione iniziale" $x_O = x(t_O)$ e della funzione di ingresso u(t) definita per ogni t ≥ t_O.***
  La funzione x(t) per t ≥ t_O si dice movimento dello stato del sistema.
- ***L'equazione algebrica, detta trasformazione di uscita, consente di determinare l'uscita y(t) a uno specifico istante di tempo sulla base della conoscenza della situazione interna del sistema e dell'ingresso allo stesso istante di tempo, ovvero permette di determinare l'evoluzione della uscita y(t) per t ≥ t_O, in corrispondenza della funzione*** **u(t) e dell'andamento dello stato x(t) per *t ≥ t_O*. La funzione y(t) per *t ≥ t_O è conosciuta col nome di movimento dell'uscita.***

L'**equazione di stato** e la **trasformazione di uscita** costituiscono una **rappresentazione di stato**, o **rappresentazione ingresso–stato–uscita**, o **rappresentazione interna** di un **sistema dinamico a tempo continuo**. Si parla anche di ***rappresentazione nello spazio degli stati***.

CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI DINAMICI

I **sistemi dinamici** descritti mediante l'**equazione di stato** e la **trasformazione di uscita** si possono classificare in diversi modi in relazione alle **proprietà** caratterizzanti le **funzioni *f*** e **g**.

- ***i sistemi dotati di una sola variabile di ingresso e di una sola variabile di uscita, cioè i sistemi per cui risulta m = p = 1 sono detti sistemi monovariabili o SISO (single input single output); i sistemi per i quali risulta m > 1 e p > 1 sono detti sistemi multivariabili o MIMO (multiple input multiple output);***

- ***Un sistema dinamico nel quale l'uscita y(t) NON dipende dall'ingresso u(t), ma solamente dallo stato x(t), ovvero un sistema per il quale la funzione "g" NON è dipendente dall'ingresso u(t) e la trasformazione di uscita y(t) è, pertanto, determinata esclusivamente dalla relazione:***

  $y(t) = g\,[x(t),\ t]$ ***è definito sistema strettamente proprio, o sistema puramente dinamico***.

  Un sistema dinamico nel quale l'uscita y(t) <u>oltre</u> che dallo <u>stato</u> x(t) dipende <u>direttamente</u> anche dall'<u>ingresso</u> u(t), ovvero un sistema per il quale la funzione "g" è dipendente dallo ingresso u(t) e la trasformazione di uscita y(t), pertanto, è determinata dalla relazione:

  $y(t) = g\,[x(t),\ u(t),\ t]$ ***è detto sistema proprio***.

  Un caso particolare di sistema proprio è quello di un sistema non dinamico per cui non risulta necessario definire alcuna variabile di stato al fine di descrivere il suo comportamento e per il quale, pertanto, il legame ingresso uscita è istantaneo ovvero descritto dalla sola equazione:

  $$y(t) = g\,[u(t),\ t]$$

- ***Un sistema per il quale le funzioni f e g non dipendono esplicitamente dal tempo per cui si ha:***
  $\dot{x}(t) = f\,[x(t),\ u(t)]$ ***e*** $y(t) = g\,[x(t),\ u(t)]$ ***è detto sistema invariante nel tempo, o anche***

sistema stazionario **o** *sistema tempo invariante;*
Un sistema per il quale anche una sola delle funzioni f e g risulti dipendere esplicitamente dal tempo è detto sistema variante nel tempo o tempo variante.

- ***Quando le funzioni f e g sono funzioni lineari dello stato x(t) e dell'ingresso u(t), cioè quando sia $\dot{x}(t)$, sia $y(t)$ sono delle combinazioni lineari delle varie componenti dei vettori x(t) e u(t), allora il sistema può essere rappresentato nella forma seguente:***

$$\dot{x}(t) = A(t)\cdot x(t) + B(t)\cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad \textbf{equazione di stato}$$
$$y(t) = C(t)\cdot x(t) + D(t)\cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad \textbf{trasformazione di uscita}$$

dove le matrici $\mathbf{A}\in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$, $\mathbf{B}\in \mathbf{R}^{\mathbf{nxm}}$, $\mathbf{C}\in \mathbf{R}^{\mathbf{pxn}}$ e $\mathbf{D}\in \mathbf{R}^{\mathbf{pxm}}$ sono in generale funzioni del tempo. In questo caso si dice che il sistema dinamico è lineare; altrimenti si parla di sistema NON lineare. La matrice A è nota come matrice della dinamica; i suoi elementi, come anche quelli delle matrici B e C, assumono valori complessi nei casi in cui lo stato venga definito in campo complesso.

La linearità è una proprietà di grande importanza per un sistema, soprattutto allorché risulta associata alla tempo invarianza. Un sistema lineare tempo invariante è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = A\cdot x(t) + B\cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad \textbf{equazione di stato}$$
$$y(t) = C\cdot x(t) + D\cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad \textbf{trasformazione di uscita}$$

in cui ***A*, *B*, *C* e *D* sono matrici costanti**. Tale **descrizione rende** lo **studio** dei **sistemi lineari** e **invarianti** nel **tempo particolarmente semplice**; pertanto, ove sia possibile, si **cerca** di **fornire** al **sistema** le **due proprietà** succitate tramite una procedura di "***linearizzazione***" e di "***congelamento***" degli ***eventuali parametri lentamente variabili nel tempo***.

Le **proprietà** sopra esaminate sono sinteticamente riassunte nel prospetto di seguito riportato.

⇒ Sistema Strettamente Proprio

NON C'È dipendenza esplicita dell'uscita y(t) dall'ingresso u(t)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\,[x(t), u(t), t] \\ y(t) = g\,[x(t), t] \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \textbf{NON compare u(t)}$$
$$x(t_O) = x_O$$

⇒ Sistema Tempo-Invariante o Stazionario

NON C'È esplicita presenza della variabile tempo t

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\,[x(t), u(t)] \\ y(t) = g\,[x(t), u(t)] \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \textbf{NON compare esplicitamente t}$$
$$x(t_O) = x_O$$

⇒ Sistema Lineare

Le **funzioni** $f\,[x(t), u(t)]$ **e** $g\,[x(t), u(t)]$ **SONO FUNZIONI LINEARI, sia dell'ingresso u(t), sia dello stato x(t). (Non importa che lo siano nella variabile tempo t)**

⇒Sistema SISO – Single Input Single Output

L'ingresso u(t) e l'uscita y(t) sono SCALARI, ovvero: **u(t)** $\in \Re$ **, y(t)** $\in \Re$

ESEMPIO 1: **Definire le caratteristiche del sistema descritto dalla rappresentazione di stato.**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x(t) + u(t) \\ y(t) = 2x(t) \end{cases}$$
$$x(t_O) = x_O = 0$$

- √ **Ingresso e uscita sono scalari, cioè u(t) ∈ $\Re$ e y(t) ∈ $\Re$.** → **Sistema SISO Single Input – Single Output**
- √ **NON c'è dipendenza esplicita dell'uscita y(t) dall'ingresso u(t)** → **Sistema Strettamente Proprio**
- √ **NON c'è esplicita presenza della variabile tempo t** → **Sistema Tempo Invariante**
- √ **Le funzioni *f*[x(t), u(t)] e g[x(t), u(t)] sono funzioni lineari dell'ingresso u(t) e dello stato x(t)** → **Sistema Lineare**

ESEMPIO 2: Definire le caratteristiche del sistema descritto dalla rappresentazione di stato.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2x^2(t) + \sin(t) \cdot u(t) \\ y(t) = 3x(t) \end{cases}$$

$$x(t_O) = x_O = 0$$

- √ **Ingresso e uscita sono scalari, cioè u(t) ∈ $\Re$ e y(t) ∈ $\Re$.** → **Sistema SISO Single Input – Single Output**
- √ **NON c'è dipendenza esplicita dell'uscita y(t) dall'ingresso u(t)** → **Sistema Strettamente Proprio**
- √ **C'È la presenza esplicita della variabile tempo t** → **Sistema Tempo Variante**
- √ **La funzione *f*[x(t), u(t)] NON È funzione lineare dello stato x(t)** → **Sistema NON Lineare**

ESEMPIO 3: Definire le caratteristiche del sistema descritto dalla rappresentazione di stato.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x(t) + u_1(t) - 3u_2(t) \\ y(t) = 2x(t) - u_1(t) \end{cases}$$

$$x(t_O) = x_O = 0$$

- √ **L'ingresso NON È uno scalare, infatti si ha** che **u(t) ∈ $\Re^2$.** → **Sistema MIMO Multy Input – Multy Output**
- √ **C'È la dipendenza esplicita dell'uscita y(t) dall'ingresso u(t)** → **Sistema Proprio**
- √ **NON c'è presenza esplicita della variabile tempo t** → **Sistema Tempo Invariante**
- √ **Le funzioni *f*[x(t), u(t)] e g[x(t), u(t)] sono funzioni lineari dell'ingresso u(t) e dello stato x(t)** → **Sistema Lineare**

ESEMPIO 4: Definire l'ordine e le caratteristiche del sistema descritto dalla rappresentazione di stato di seguito riportata.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2\cos(t) \cdot x_1(t) - 3x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -3x_1(t) + (1 + t^2) \cdot u(t) \\ y(t) = 2x_1(t) - x_2(t) - u(t) \end{cases}$$

$$x(t_O) = x_O = 2$$

L'ordine del sistema è n = 2 poiché vi sono due variabili di stato indicate con x_1(t) e x_2(t).

- √ **Ingresso e uscita sono scalari, cioè u(t) ∈ ℜ e y(t) ∈ ℜ.** ⟶ **Sistema SISO Single Input – Single Output**
- √ **C'É dipendenza esplicita dell'uscita y(t) dall'ingresso u(t).** ⟶ **Sistema Proprio**
- √ **Nell'equazione di stato e nell'equazione della trasformazione di uscita, ma basta in una sola delle due, si evidenzia la presenza esplicita della variabile tempo t.** ⟶ **Sistema Tempo Variante**
- √ **La funzione *f*[x(t), u(t)] È funzione lineare sia dell'ingresso u(t), sia dello stato x(t)** ⟶ **Sistema Lineare**

ESEMPIO 5: Definire l'ordine e le caratteristiche del sistema descritto dalla rappresentazione di stato di seguito riportata.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t)\cdot u(t) \\ y(t) = 2t\cdot x(t) \end{cases}$$

$$x(t_O) = x_O = 2$$

L'ordine del sistema è n = 1 poiché vi è una sola variabili di stato.

- √ **Ingresso e uscita sono scalari, cioè u(t) ∈ ℜ e y(t) ∈ ℜ.** ⟶ **Sistema SISO Single Input – Single Output**
- √ **NON c'é dipendenza esplicita dell'uscita y(t) dall'ingresso u(t)** ⟶ **Sistema Strettamente Proprio**
- √ **Nell'equazione della trasformazione della uscita si ravvisa la presenza esplicita della variabile tempo t.** ⟶ **Sistema Tempo Variante**
- √ **La funzione *f*[x(t), u(t)] NON È funzione lineare sia dell'ingresso u(t), sia dello stato x(t); vi è, bensì il loro prodotto.** ⟶ **Sistema NON Lineare**

ESEMPIO 6: Definire l'ordine e le caratteristiche del sistema descritto dalla rappresentazione di stato di seguito riportata.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0{,}5\cdot x(t) + 3\cdot u^4(t) \\ y(t) = 2{,}25\cdot x(t) \end{cases}$$

$$x(t_O) = x_O = -1$$

L'ordine del sistema è n = 1 poiché vi è una sola variabili di stato.

- √ **Ingresso e uscita sono scalari, cioè u(t) ∈ ℜ e y(t) ∈ ℜ.** ⟶ **Sistema SISO Single Input – Single Output**
- √ **NON c'é dipendenza esplicita dell'uscita y(t) dall'ingresso u(t)** ⟶ **Sistema Strettamente Proprio**
- √ **Tanto nell'equazione di stato quanto nella trasformazione della uscita non si ravvisa esplicitamente la presenza della variabile tempo t.** ⟶ **Sistema Tempo Invariante**
- √ **La funzione *f*[x(t), u(t)] NON È funzione lineare dell'ingresso u(t)..** ⟶ **Sistema NON Lineare**

MOVIMENTO DELLO STATO E MOVIMENTO DELL'USCITA

La **funzione x(t),** corrispondente all'**ingresso u(t)** definito per $t \geq t_O$ e allo **stato iniziale** $x(t_O) = x_{to}$, **idonea** a **soddisfare** l'**equazione** di **stato** è chiamata ***movimento*** dello ***stato***. La determinazione del ***movimento*** dello ***stato*** è effettuata ricorrendo all'utilizzo della **formula** di **Lagrange**, che di seguito si riporta:

$$x(t) = \underbrace{\underbrace{e^{A\cdot(t-t_O)}x_{t_O}}_{risposta\ \ libera} + \underbrace{\int_{t_O}^{t} e^{A\cdot(t-\tau)}B\cdot u(\tau)\cdot d\tau}_{RISPOSTA\ \ FORZATA}}_{RISPOSTA\ TOTALE}$$

La **risposta libera** è così chiamata poiché **dipende** soltanto dalla **condizione iniziale** x_O, ovvero in **assenza** dell'**azione impressiva u(t)** esercitata dall'**ingresso u(t)**. La ***risposta forzata*** è così definita in quanto **dipende soltanto** dall'**azione esercitata** sul **sistema** dall'**ingresso u(t)**.

Pertanto, si definiscono, con immediatezza, le relazioni seguenti:

$$\boxed{x_l(t) = e^{A\cdot(t-t_O)}x_{t_O}}$$ **risposta libera dello stato**

$$\boxed{x_f(t) = \int_{t_O}^{t} e^{A\cdot(t-\tau)}B\cdot u(\tau)\cdot d\tau}$$ **risposta forzata dello stato**

Per i **sistemi** caratterizzati da ***modelli stazionari***, di norma, si considera come ***valore tipico*** $t_O = 0$; di conseguenza si ottiene la relazione:

$$x(t) = \underbrace{\underbrace{e^{A\cdot t}x_{t_O}}_{risposta\ \ libera} + \underbrace{\int_{t_O}^{t} e^{A\cdot(t-\tau)}B\cdot u(\tau)\cdot d\tau}_{RISPOSTA\ \ FORZATA}}_{RISPOSTA\ TOTALE}$$

Per la determinazione del ***movimento*** dell'***uscita*** **y(t)** non resta che fare ricorso alla relazione con la quale si è definita, nel modello dello spazio di stato, la ***trasformazione*** dell'***uscita*** **y(t)** medesima; in sostanza, ricordando che:

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

si perviene alla seguente relazione:

$$y(t) = \underbrace{\underbrace{C\cdot e^{A\cdot(t-t_O)}x_{t_O}}_{risposta\ \ libera} + \underbrace{C\cdot\int_{t_O}^{t} e^{A\cdot(t-\tau)}B\cdot u(\tau)\cdot d\tau + D\cdot u(t)}_{RISPOSTA\ \ FORZATA}}_{RISPOSTA\ TOTALE}$$

Ricordando le ***definizioni*** afferenti i concetti, rispettivamente, di **risposta libera** e **risposta forzata**, si ottengono, con immediatezza, le posizioni seguenti;

$$\boxed{y_l(t) = C\cdot e^{A\cdot(t-t_O)}x_{t_O}}$$ **risposta libera dell'uscita**

$$\boxed{y_f(t) = C\cdot\int_{t_O}^{t} e^{A\cdot(t-\tau)}B\cdot u(\tau)\cdot d\tau + D\cdot u(t)}$$ **risposta forzata dell'uscita**

Per i **sistemi** caratterizzati da ***modelli stazionari***, essendo tipicamente $t_O = 0$; si ottiene la relazione:

$$y(t) = \underbrace{\underbrace{C\cdot e^{A\cdot t}x_{t_O}}_{risposta\ \ libera} + \underbrace{C\cdot\int_{t_O}^{t} e^{A\cdot(t-\tau)}B\cdot u(\tau)\cdot d\tau + D\cdot u(t)}_{RISPOSTA\ \ FORZATA}}_{RISPOSTA\ TOTALE}$$

OSSERVAZIONE: La segnalata **distinzione** in **risposta** *libera* e in **risposta** *forzata* nelle relazioni costitutive, sia del **movimento** dello **stato x(t)**, sia del **movimento** dell'**uscita y(t)**, corrisponde alla **proprietà** del **principio** di **sovrapposizione** degli **effetti**, esprimibile nella forma seguente:

$$\underbrace{\varphi[t, t_O, x_O, u(t)]} = \underbrace{\varphi[t, t_O, x_O, 0]} + \underbrace{\varphi[t, t_O, 0, u(t)]}$$

risposta con ingresso u(t) e condizione iniziale dello stato $x(t_O) = x_O$.

risposta con ingresso nullo u(t) = 0 e condizione iniziale dello stato $x(t_O) = x_O$.

risposta con ingresso u(t) e condizione iniziale dello stato nulla, cioè $x(t_O) = 0$.

ESERCIZIO 1: Si vuole determinare il *movimento libero* dello stato $x_L(t)$ e dell'uscita $y_L(t)$ per il sistema dinamico il cui modello nello spazio degli stati è caratterizzato dalla matrice A della dinamica, dalla matrice C della trasformazione dell'uscita e dalle condizioni iniziali di seguito riportate.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] \quad x_O = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Il **sistema** è del **secondo ordine**, atteso che la **matrice A** della **dinamica** è di **ordine n = 2**; pertanto lo **stato x(t)** è caratterizzato da **due componenti** come, del resto, si evince dall'assegnazione delle condizioni iniziali. Per determinare il **movimento libero** dello **stato** e dell'uscita necessita calcolare l'**esponenziale** di **matrice e^{At}**.

- **Determinazione degli autovalori della matrice A**

  Gli **autovalori** della **matrice A** della dinamica sono le ***radici*** del **polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$** ovvero le soluzioni dell'equazione **$\det(\lambda I - A) = 0$**. Pertanto si procede come segue.

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det([\lambda I - A]) = \lambda \cdot (\lambda - 3) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$p_A(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det([\lambda I - A]) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_1 = (3-1)/2 = 1 \\ \lambda_2 = (3+1)/2 = 2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \quad \nu = 1 \\ \lambda_2 = 2 \quad \nu = 1 \end{matrix}$$

  Si ottengono **due autovalori reali** e **distinti** quindi **semplici** e, pertanto, **regolari**. La **matrice A** della dinamica è ***diagonalizzabile***, ovvero ammette la forma **simile** a una **matrice diagonale**. Per determinare la **matrice V** di **passaggio** è necessario determinare i due **autovettori** associati agli **autovalori λ_1** e **λ_2**.

- **Determinazione degli autovettori della matrice A**

  In conformità alla definizione costitutiva di **autovalore** e di **autovettore** si giustifica la seguente procedura:

$$\text{per } \lambda_1 = 1 \;\Rightarrow\; A \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 3a - 2b = a \\ a = b \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2a = 2b \\ a = b \end{cases}$$

  L'**autospazio associato** all'**autovalore $\lambda_1 = 1$ è costituito** dagli **infiniti autovettori** della **forma:**

$$v_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\Rightarrow$$

  posto arbitrariamente a = 1, si ottiene l'**autovettore** **v_1** costituente una **base** dell'**autospazio** relativo a **λ_1**.

$$\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{per } \lambda_2 = 2 \;\Rightarrow\; A \cdot v_2 = \lambda_2 \cdot v_2 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 3a - 2b = 2a \\ a = 2b \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = 2b \\ a = 2b \end{cases}$$

L'**autospazio associato** all'**autovalore $\lambda_2 = 1$ è costituito** dagli **infiniti autovettori** della **forma:**

$$v_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b \\ b \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

posto arbitrariamente $b = 1$, si ottiene l'**autovettore** v_2 costituente una **base** dell'**autospazio** relativo a λ_2. $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- **Determinazione della matrice V di passaggio alla forma diagonale.**
  La **matrice V** di **passaggio** alla ***forma diagonale*** è la matrice le cui **colonne** sono costituite dagli **autovettori** dianzi calcolati; nel caso specifico in esame si ottiene:

$$V = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(V) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow \textbf{V, È NON singolare}$$

- **Determinazione della forma diagonale $\hat{A} = (V^{-1}AV)$ della matrice A della dinamica.**
  È necessario procedere al **calcolo** della matrice ***inversa*** $\mathbf{V^{-1}}$; si determina la matrice ***trasposta*** $\mathbf{V_T}$ e la relativa **matrice** dei **complementi algebrici** $\mathbf{V_{Tca}}$ della **trasposta**. Si perviene alla scrittura:

$$V^{-1} = \frac{1}{\det(V)} V_{T_{CA}} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

, pertanto, consegue che:

$$\hat{A} = (V^{-1}AV) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si è pervenuti alla costituzione di una **matrice diagonale** caratterizzata dal fatto che gli **elementi** della **diagonale principale** sono gli **autovalori λ_1** e **λ_2** nell'**ordine** con cui sono stati **posizionati** gli **autovettori** per la **costituzione** delle **colonne** della **matrice** di **passaggio V**; in sostanza si ha:

$$\hat{A} = (V^{-1}AV) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

- **Determinazione dell'esponenziale di matrice** $e^{\hat{A} \cdot t}$
  In conformità all'esponenziale di matrice, dato che la matrice $\hat{A}$ è una matrice diagonale, si ha:

$$e^{\hat{A} \cdot t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

i **modi** caratterizzanti la **risposta libera** sono: $\mathbf{e^{t}}$ ed $\mathbf{e^{2t}}$.

- **Determinazione dell'esponenziale di matrice** $e^{A \cdot t}$
  In conformità alle proprietà dell'esponenziale matrice si relaziona come segue:

$$e^{At} = (Ve^{\hat{A}t}V^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t} & 2e^{2t} \\ e^{t} & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{t} + 2e^{2t} & 2e^{t} - 2e^{2t} \\ -e^{t} + e^{2t} & 2e^{t} - 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

- **Determinazione del movimento libero $x_l(t)$dello stato.**
  In ossequio alla definizione di **movimento libero** dello **stato**, si considera la relazione:

$$x_l(t) = e^{At}x_O = \begin{bmatrix} -e^{t} + 2e^{2t} & 2e^{t} - 2e^{2t} \\ -e^{t} + e^{2t} & 2e^{t} - 2e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{t} + 2e^{2t} - 2e^{t} + 2e^{2t} \\ -e^{t} + e^{2t} - 2e^{t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

, ovvero:

$$x_l(t) = \begin{bmatrix} x_{1l}(t) \\ x_{2l}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{2t} - 3e^{t} \\ 2e^{2t} - 3e^{t} \end{bmatrix}$$

$$x_{1l}(t) = 4e^{2t} - 3e^{t}$$

$$x_{2l}(t) = 2e^{2t} - 3e^{t}$$

- **Determinazione del movimento libero $y_l(t)$dello stato.**
  In ossequio alla definizione di **movimento libero** dell'**uscita**, si considera la relazione:

$$y_l(t) = C \cdot e^{At} x_O = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} -e^t + 2e^{2t} & 2e^t - 2e^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & 2e^t - 2e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= [-e^t + 2e^{2t} \quad 2e^t - 2e^{2t}] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -e^t + 2e^{2t} - 2e^t + 2e^{2t} = 4e^{2t} - 3e^t$$

Si osserva che dalla relazione costitutiva della ***trasformazione*** dell'**uscita y(t)**, nel caso specifico di **risposta libera $y_l(t)$**, cioè nella situazione caratterizzata da **ingresso u(t) = 0**, si ottiene:

$$y_l(t) = y(t)\big|_{(u=0)} = [C \cdot x(t) + D \cdot u(t)]\big|_{(u=0)} = C \cdot \begin{bmatrix} x_{1l}(t) \\ x_{2l}(t) \end{bmatrix} = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_{1l}(t) \\ x_{2l}(t) \end{bmatrix} = x_{1l}(t)$$

Pertanto, si conclude e si è verificato che:

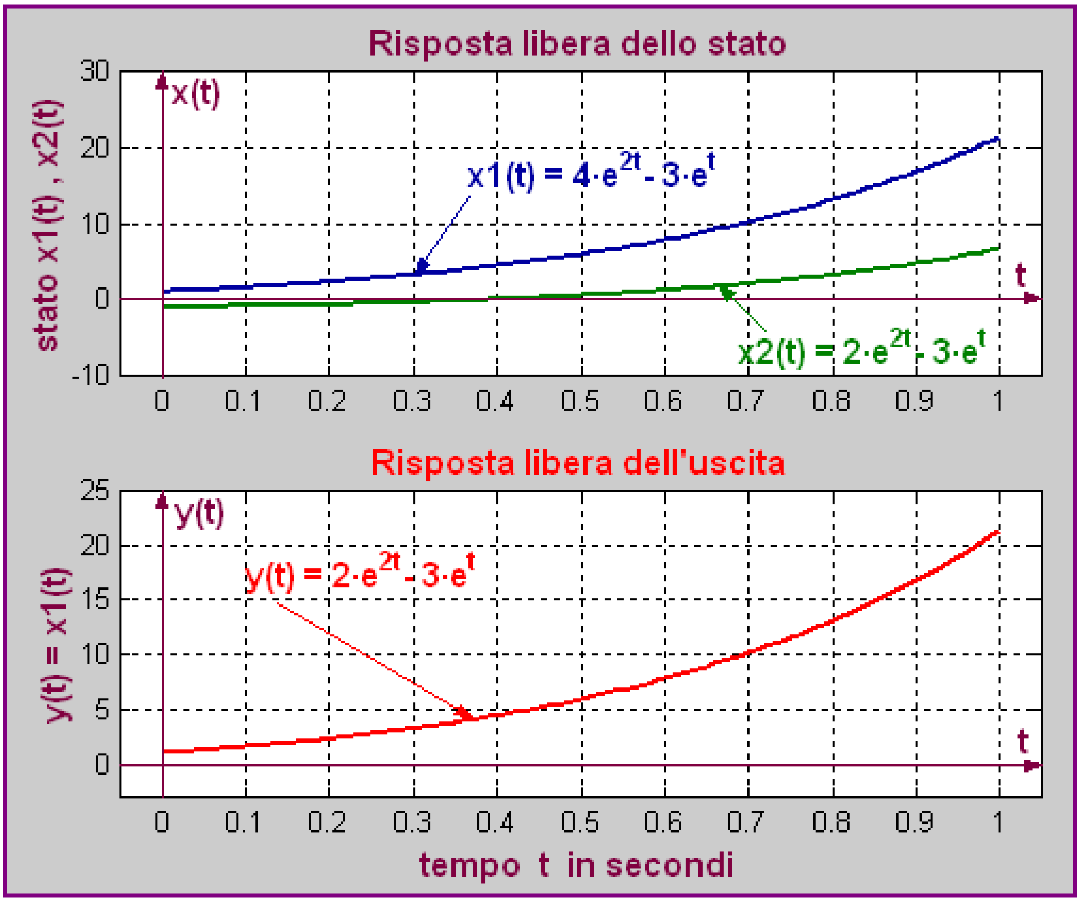
$$y_l(t) = x_{1l}(t) = 4e^{2t} - 3e^t$$

È importante ricordare il significato della procedura adottata che attiene alle seguenti relazioni:

$$\boxed{x_l(t) = e^{At} x_O = T \cdot e^{\hat{A}t} \cdot T^{-1} x_O}$$

$$\boxed{y_l(t) = C \cdot e^{At} x_O = C \cdot T \cdot e^{\hat{A}t} \cdot T^{-1} x_O}$$

Nella figura sotto riportata viene evidenziata la ***risposta libera dello*** ***stato*** **x(t)**, cioè l'**evoluzione temporale** delle **componenti $x_1(t)$** e **$x_2(t)$** dello **stato x(t),** e la ***risposta libera*** dell'***uscita*** **y(t)** che, istante per istante, coincide con l'**evoluzione temporale** della **componente $x_1(t)$** dello **stato x(t)**.



I modi del movimento libero sia dello stato x(t) sia dell'uscita y(t) sono rappresentati dalle due funzioni temporali seguenti:

$$m_1 = e^t \quad \text{e} \quad m_2 = e^{2 \cdot t}$$

SCELTA DELLE VARIABILI DI STATO

⇒ ***Le variabili di stato rendono conto di quanto è necessario conoscere della situazione interna del sistema, o anche, della storia passata del sistema, per poter calcolare l'uscita y(t);***

⇒ ***Nei sistemi fisici la situazione interna viene determinata dai fenomeni di accumulo di energia, di quantità di moto o di massa e, pertanto, può risultare opportuno scegliere come variabili di stato quelle variabili da cui tali accumuli dipendono***

- ***nei modelli dei circuiti elettrici si possono scegliere come variabili di stato le tensioni ai morsetti dei condensatori, perché da queste dipende l'energia elettrostatica $W=(1/2)CV^2$ da essi accumulata, e le correnti negli induttori, perché da queste dipende l'energia magnetica $W=(1/2)LI^2$ accumulata al loro interno;***
- ***nei modelli dei sistemi meccanici è comodo scegliere come variabili di stato la posizione e la velocità dei vari elementi, in quanto risultano legati agli accumuli di energia potenziale, di energia cinetica o di quantità di moto;***
- ***nei sistemi termici, le temperature sono idonee e particolarmente adatte a essere assunte come variabili di stato, in quanto da esse dipendono le energie termiche immagazzinate;***

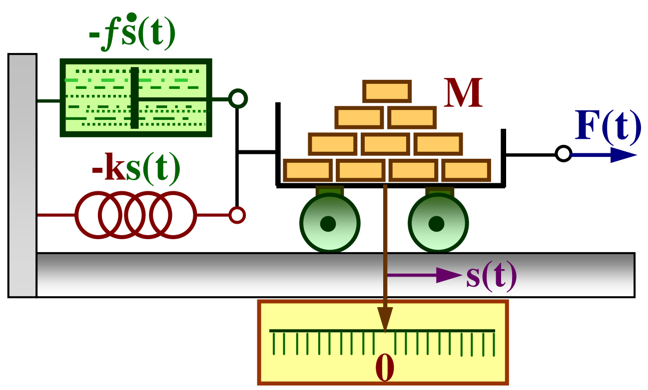
⇒ ***le leggi fondamentali della fisica quali l'elettromagnetismo, la meccanica, la termodinamica e idraulica, esprimono delle relazioni tra variabili di ingresso u(t), variabili di stato x(t) e le loro derivate che opportunamente elaborate, conducono alle equazioni di stato;***

⇒ ***le variabili e le equazioni di stato di un sistema dinamico NON sono definite in modo unico e neppure il numero delle variabili di stato, ovvero l'ordine del sistema, è fissato a priori e ciò è legato alla maggiore o minore accuratezza con cui si descrivono i fenomeni in gioco;***

⇒ ***il modello matematico di un "oggetto fisico" deve essere individuato evitando le ridondanze e stabilendo un adeguato compromesso tra la semplicità e la "precisione" nella descrizione della realtà in riferimento allo specifico problema in esame.***

ESERCIZIO 2: MASSA – SMORZATORE VISCOSO – MOLLA.

Si consideri un carrello di massa M che si muove su di una guida rettilinea orizzontale soggetto alla forza F(t), in presenza di una forza $F_{av}(t)$ di attrito viscoso proporzionale, con coefficiente di viscosità $f>0$, alla velocità v(t) del carrello e di una forza di richiamo F_{me} dovuta alla molla elastica e proporzionale, con coefficiente di elasticità $k>0$, allo spostamento s(t)del carrello.
Si desidera: a) definire le variabili di stato del sistema; b) scrivere le equazioni relative alla sua rappresentazione nello spazio degli stati, considerando l'interesse per la posizione del carrello lungo la guida rettilinea.



Si indicano con **v(t)** e **s(t)**, rispettivamente, la **velocità** e la **posizione** del **carrello** lungo la guida. L'*attrito viscoso*, dovuto al movimento di un *pistone* interno a un *cilindro* contenente del **liquido viscoso**, è espresso da una **forza agente** con **verso opposto** al **moto** e con una **intensità**, ***proporzionale*** alla ***velocità*** **v(t)** del **carrello.** La **molla elastica reagisce** con una **forza** di **richiamo** di **verso opposto** al **moto** e d'**intensità** ***proporzionale*** allo ***spostamento*** **s(t)** del **carrello** lungo la guida. In sostanza:

$$F_{av} = -f \cdot v(t) \quad \text{e} \quad F_{me} = -k \cdot s(t)$$

L'**ingresso u(t)** del **sistema** è rappresentato dalla **forza esterna F(t)** agente sul carrello.
L'**uscita y(t)**, come stabilito dalla traccia, è definita dalla **posizione s(t)** del **carrello** lungo la guida.
Trattandosi di un **sistema meccanico** le **variabili** di **stato** identificano la ***posizione*** **s(t)** e la ***velocità v(t)*** del ***carrello*** in quanto *legate* agli *accumuli* d'*energia cinetica* o di *quantità* di *moto*; infatti **non si può definire la posizione e la velocità del carrello se non è noto il loro valore all'istante t = 0.**

La scelta delle **variabili** di **stato** e, di conseguenza, la definizione dell'**uscita** **y(t)** si traduce nelle posizioni seguenti:

$x_1(t) = s(t)$ $\rightarrow$ ***spostamento del carrello lungo la guida all'istante t***

$x_2(t) = v(t)$ $\rightarrow$ ***velocità del carrello all'istante t***

$y(t) = s(t) = x_1(t)$ $\rightarrow$ ***spostamento del carrello lungo la guida all'istante t***

Ricordando che la **velocità** di un corpo in movimento è data dalla ***derivata*** dello ***spostamento*** si ha:

$$v(t) = \frac{d[s(t)]}{dt} \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

Il **sistema**, **istante** per **istante**, è governato dal ***secondo principio*** della ***dinamica*** esprimibile con la relazione analitica che sancisce che l'**accelerazione a(t)** di un **corpo** in **movimento** è ***proporzionale*** alla **forza totale agente sul corpo** stesso; in termini analitici si ha:

$$\sum_h F_h(t) = M \cdot a(t) \quad \Rightarrow \quad M \cdot \frac{d[v(t)]}{dt} = \sum_h F_h(t) \quad \Rightarrow \quad M \cdot \dot{v}(t) = F(t) + F_{av}(t) + F_{me}(t)$$

Sostituendo le espressioni analitiche delle ***forze*** dovute sia all'***attrito viscoso***, sia alla ***molla elastica***, si ottiene:

$$M \cdot \dot{v}(t) = F(t) - f \cdot v(t) - k \cdot s(t)$$

Il ricorso alle ***variabili*** di ***stato*** consente di esprimere il ***modello matematico*** nel ***dominio*** del ***tempo*** nella forma seguente:

$$M \cdot \dot{x}_2(t) = F(t) - f \cdot x_2(t) - k \cdot x_1(t) \quad \Rightarrow \quad M \cdot \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M} x_1(t) - \frac{f}{M} x_2(t) + \frac{1}{M} F(t)$$

Le **equazioni rappresentative** del **sistema** nello **spazio** degli **stati** sono, pertanto:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M} x_1(t) - \frac{f}{M} x_2(t) + \frac{1}{M} F(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

Il modello matematico ora determinato ammette l'***equivalente rappresentazione*** in forma ***matriciale*** che di seguito si esplicita:

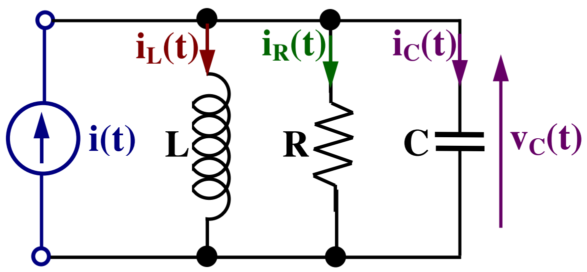
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k/M & -f/M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} \cdot F(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot F(t)$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{aligned}}$$

Restano così definite le costituzioni delle matrici di interesse; precisamente si relaziona come segue:

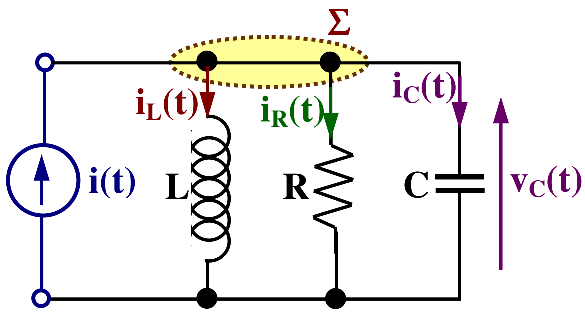
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k/M & -f/M \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} \; ; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; D = 0$$

ESERCIZIO 3: RETE ELETTRICA LINEARE RESISTENZA, INDUTTANZA, CAPACITÀ

Si consideri la rete lineare RLC realizzata con il collegamento di tipo parallelo fra un resistore di resistenza R, un induttore di induttanza L e un condensatore di capacità C. La rete RLC viene alimentata dal generatore ideale di corrente i(t). Si desidera: a) definire le variabili di stato per la rete in oggetto; b) scrivere le equazioni relative alla sua rappresentazione nello spazio degli stati



considerando l'interesse per la corrente che circola nella resistenza R.
Trattandosi di un **circuito elettrico**, le **variabili** di **stato** sono definite dai **fenomeni** di **accumulo** di ***energia elettrostatica*** nel ***condensatore*** e di ***energia magnetica*** nell'***induttore***. Il tutto afferisce, poi, al ***principio di conservazione della carica*** espresso dalla ***legge*** di ***Kirchhoff*** delle ***correnti*** applicata



al **supernodo Σ** di **corrente**. La **natura** del **tipo** del **collegamento** caratterizza la relazione:

$$v_c(t) = v_L(t) = v_R(t) = v(t)$$

La **scelta** delle **variabili** di **stato** e, di conseguenza, la **definizione** dell'**uscita y(t)** si traducono nelle **tre posizioni** seguenti:

$x_1(t) = v_C(t) \rightarrow$ ***tensione ai capi del condensatore***

$x_2(t) = i_L(t) \rightarrow$ ***corrente nell'induttore***

$y(t) = i_R(t) \rightarrow$ ***corrente circolante nel resistore di resistenza R***

Le **relazioni** ***costitutive*** afferenti i ***modelli dinamici*** del **condensatore** e dell'**induttore** e il **modello** del **resistore R** sono date dalle scritture:

$$\begin{cases} i_C(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt} \\ v_C(t_O) = v_{CO} \end{cases} ; \quad \begin{cases} v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} \\ i_L(t_O) = i_{LO} \end{cases} ; \quad v_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

L'applicazione della **legge** di **Kirchhoff** delle **correnti** al **supernodo Σ** consente di relazionare:

$$i_C(t) + i_L(t) + i_R(t) = i(t) \qquad i_C(t) = i(t) - i_L(t) - i_R(t)$$

Atteso quanto premesso, dalle **relazioni costitutive** dei **dispositivi dinamici** si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{dv_C(t)}{dt} &= \frac{1}{C} \cdot i_C(t) \\ \frac{di_L(t)}{dt} &= \frac{1}{L} v_L(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{dv_C(t)}{dt} &= \frac{1}{C} \cdot \left[i(t) - i_L(t) - \frac{v_C(t)}{R} \right] \\ \frac{di_L(t)}{dt} &= \frac{1}{L} v_L(t) \end{aligned}$$

La sostituzione nella precedente relazione delle **variabili** di **stato** consente di concludere così come di seguito esplicitato.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= \frac{1}{C} \cdot \left[i(t) - x_2(t) - \frac{1}{R} x_1(t) \right] \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \frac{1}{L} x_1(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{1}{C} \cdot \left[i(t) - x_2(t) - \frac{1}{R} x_1(t) \right] \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L} x_1(t) \end{aligned}$$

Le equazioni caratteristiche del modello del sistema nello spazio degli stati sono definite da:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{CR} x_1(t) - \frac{1}{C} x_2(t) + \frac{1}{C} i(t) \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L} x_1(t) \\ y(t) &= \frac{1}{R} x_1(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1/CR & -1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix} \cdot i(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1/R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot i(t) \end{aligned}$$

Restano così definite le costituzioni delle matrici di interesse; precisamente si relaziona come segue:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1/CR & -1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} ; \quad \begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} \\ D &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{aligned}}$$

OSSERVAZIONE: è utile considerare che la definizione delle **variabili** di **stato** poteva effettuarsi anche mediante la seguente scelta:

$x_2(t) = v_C(t)$ → ***tensione ai morsetti del condensatore di capacità C***

$x_1(t) = i_L(t)$ → ***corrente circolante nell'induttore di induttanza L***

$y(t) = i_R(t)$ → ***corrente circolante nel resistore di Resistenza R***

In tal caso le **equazioni caratteristiche** della ***descrizione*** del **sistema** nel ***modello*** dello ***spazio*** degli ***stati*** assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \frac{1}{L}x_2(t) \\
\dot{x}_2 &= -\frac{1}{C}x_1(t) - \frac{1}{CR}x_2(t) + \frac{1}{C}i(t) \\
y(t) &= \frac{1}{R}x_2(t)
\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -1/CR \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/C \end{bmatrix} \cdot F(t) \\
&y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot i(t)
\end{aligned}$$

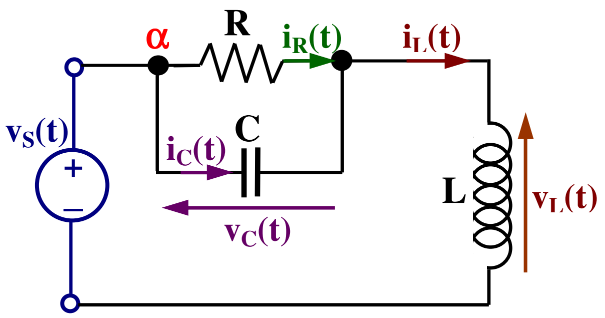
Per quanto riguarda la costituzioni delle matrici di interesse, in questo caso, si relaziona come segue.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -1/CR \end{bmatrix} ; \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1 \cdot x(t) + B_1 \cdot u(t) \\ y(t) &= C_1 \cdot x(t) + D_1 \cdot u(t) \end{aligned}}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/C \end{bmatrix} \qquad D_1 = 0$$

ESERCIZIO 4: RETE ELETTRICA LINEARE RESISTENZA, INDUTTANZA, CAPACITÀ

Si consideri la rete lineare RLC realizzata con il collegamento di un induttore di induttanza L, in serie con il parallelo di un condensatore avente di capacità C e di un resistore di resistenza R. La rete RLC è alimentata dal generatore ideale di tensione $v_S(t) = E$ per ogni $t \geq 0$. Si desidera:
a) definire le variabili di stato per la rete RLC;
b) scrivere le equazioni caratteristiche della sua rappresentazione nello spazio degli stati tenuto conto dell'interesse relativo alla tensione che si stabilisce ai morsetti dell'induttanza L. c) determinare la funzione di trasferimento del sistema.



Trattandosi di un **circuito elettrico**, le **variabili** di **stato** sono definite dai **fenomeni** di **accumulo** di ***energia elettrostatica*** nel ***condensatore*** e di ***energia magnetica*** nell'***induttore***. Il tutto afferisce, poi, al ***principio di conservazione della carica*** espresso dalla ***legge*** di ***Kirchhoff*** delle ***correnti*** applicata al **nodo α**. Si evidenzia, infatti, la seguente scrittura:

$$i_L(t) = i_C(t) + i_R(t) \quad \Rightarrow \quad i_C(t) = i_L(t) - i_R(t)$$

La **natura** dei **collegamenti** dei **tre bipoli** caratterizza la relazione relativa alla **legge** di Kirchhoff delle **tensioni** alle **maglie** e, precisamente:

$$v_S(t) = v_L(t) + v_C(t) \quad \Rightarrow \quad v_L(t) = v_S(t) - v_C(t)$$

La **scelta** delle **variabili** di **stato** e, di conseguenza, la **definizione** dell'**uscita y(t)** si traducono nelle **tre posizioni** seguenti:

$x_1(t) = v_C(t)$ → ***tensione ai capi del condensatore C***

$x_2(t) = i_L(t)$ → ***corrente nell'induttanza L***

$y(t) = v_L(t)$ → ***tensione ai morsetti dell'induttanza L***

Le **relazioni** ***costitutive*** afferenti i ***modelli dinamici*** del **condensatore** e dell'**induttore** e il **modello** del **resistore R** sono date dalle scritture:

$$\begin{cases} i_C(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt} \\ v_C(t_O) = v_{CO} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} \\ i_L(t_O) = i_{LO} \end{cases} \quad ; \quad v_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

Atteso quanto premesso, dalle **relazioni costitutive** dei **dispositivi dinamici** per lo stato si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{dv_C(t)}{dt} &= \frac{1}{C} \cdot i_C(t) \\ \frac{di_L(t)}{dt} &= \frac{1}{L} v_L(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{dv_C(t)}{dt} &= \frac{1}{C} \cdot [i_L(t) - i_R(t)] \\ \frac{di_L(t)}{dt} &= \frac{1}{L} \cdot [v_S(t) - v_C(t)] \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{dv_C(t)}{dt} &= \frac{1}{C} \cdot i_L(t) - \frac{1}{C} \cdot \frac{v_C(t)}{R} \\ \frac{di_L(t)}{dt} &= -\frac{1}{L} \cdot v_C(t) + \frac{1}{L} \cdot E \end{aligned}$$

mentre per l'uscita si relaziona come segue

$$y(t) = v_L(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = v_s(t) - v_C(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = E - v_C(t)$$

La sostituzione nella precedente relazione delle **variabili** di **stato $x_1(t)$ e $x_2(t)$**, dell'**ingresso u(t)** e dell'**uscita y(t)**, consente di concludere con le scritture come di seguito esplicitate.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -\frac{1}{CR} \cdot x_1(t) + \frac{1}{C} \cdot x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -\frac{1}{L} \cdot x_1(t) + \frac{1}{L} \cdot u(t) \\ y(t) &= -x_1(t) + u(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{CR} \cdot x_1(t) + \frac{1}{C} x_2(t) \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{L} x_1(t) + \frac{1}{L} \cdot u(t) \end{aligned}$$

Le equazioni caratteristiche del modello del sistema nello spazio degli stati sono definite da:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{CR} x_1(t) - \frac{1}{C} x_2(t) \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{L} x_1(t) + \frac{1}{L} \cdot E \\ y(t) &= -x_1(t) + E \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1/CR & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} \cdot E \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{L} \cdot E \end{aligned}$$

Si osserva che l'uscita y(t) dipende sia dallo stato sia, direttamente, dall'ingresso u(t); ciò consente di affermare che il **sistema dinamico lineare NON È STRETTAMENTE PROPRIO**.

Restano poi definite le **costituzioni** delle **matrici A**, **B**, **C** e **D** d'interesse; precisamente si relaziona come segue:

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{CR} & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} ; \; C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} ; \; D = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{aligned}}$$

La procedura per la determinazione della **funzione di trasferimento** di un sistema, non strettamente proprio, è definita dalla relazione:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

Si procede col calcolo della **matrice inversa $(\mathbf{sI - A})^{-1}$**, indi il **determinante $\det([\mathbf{sI - A}]^{-1})$** e poi la **matrice** dei **complementi algebrici**; si ottiene:

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s + \dfrac{1}{CR} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & s \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det([sI - A]) = s \cdot \left[s + \frac{1}{CR} \right] + \frac{1}{LC} = s^2 + \frac{1}{CR} s + \frac{1}{LC}$$

$$[sI-A]^{-1}=\frac{1}{s^2+\frac{1}{CR}s+\frac{1}{LC}}\cdot\begin{bmatrix} s & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s+\frac{1}{CR}\end{bmatrix}$$

La funzione di trasferimento **G(s)** fra l'ingresso u(t) = E e l'uscita y(t) è determinata dalla relazione:

$$G(s)=[-1 \quad 0]\cdot\frac{1}{s^2+\frac{1}{CR}s+\frac{1}{LC}}\cdot\begin{bmatrix} s & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s+\frac{1}{CR}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}+1=$$

$$=\frac{1}{s^2+\frac{1}{CR}s+\frac{1}{LC}}\cdot\begin{bmatrix} -s & -\frac{1}{C}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}+1=\frac{-\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{1}{CR}s+\frac{1}{LC}}+1$$

Svolgendo i successivi necessari passaggi algebrici e le relative semplificazioni si ottiene:

$$G(s)=\frac{-\frac{1}{LC}+s^2+\frac{1}{CR}s+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{1}{CR}s+\frac{1}{LC}}=\frac{s^2+\frac{1}{CR}s}{s^2+\frac{1}{CR}s+\frac{1}{LC}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{G(s)=\frac{s\cdot\left(s+\frac{1}{CR}\right)}{s^2+\frac{1}{CR}s+\frac{1}{LC}}}$$

Come si nota, la caratteristica del ***sistema lineare non strettamente proprio*** è quella che caratterizza una ***funzione di trasferimento G(s)*** in cui il ***grado del polinomio a numeratore è uguale al grado del polinomio a denominatore***. Il **sistema dinamico lineare** si **caratterizza** per la **presenza di due poli e di due zeri di cui uno ubicato nell'origine**. Il **sistema** è, pertanto, del **secondo ordine**.

Il **sistema** è ***caratterizzato*** da una **pulsazione naturale non smorzata ω_n** e da uno **smorzamento ξ** dati dalle seguenti relazioni:

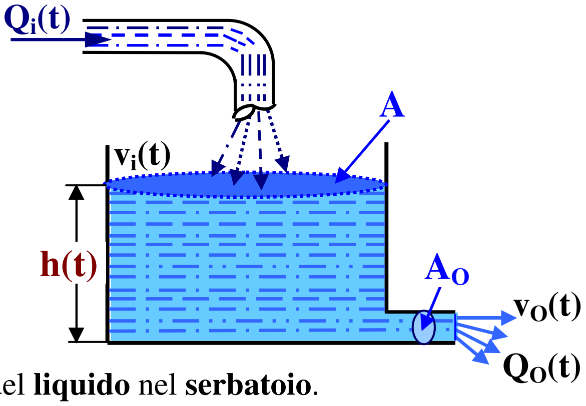
$$\omega_n^2=\frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \omega_n=\pm\sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \Rightarrow \quad \omega_n=\sqrt{\frac{1}{LC}}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$2\xi\omega_n=\frac{1}{CR} \quad \Rightarrow \quad \xi=\frac{1}{2\omega_n}\cdot\frac{1}{CR}=\frac{\sqrt{LC}}{2RC}=\frac{1}{2R}\cdot\frac{\sqrt{L}\cdot\sqrt{C}}{\sqrt{C}\cdot\sqrt{C}}=\frac{1}{2R}\cdot\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{C}} \quad \Rightarrow \quad \xi=\frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

La funzione di trasferimento G(s) può anche scriversi nella forma equivalente di seguito riportata:

$$\boxed{G(s)=\frac{sL\cdot(sCR+1)}{s^2LCR+sL+1}}$$

ESERCIZIO 5: LIVELLO DEL LIQUIDO IN UN SERBATOIO



Si consideri il sistema costituito da un serbatoio che riceve all'ingresso una portata volumetrica $Q_i(t)$ di liquido. La portata volumetrica $Q_O(t)$ di liquido in uscita è proporzionale, con costante k, al livello h(t) di liquido presente nel serbatoio.
Si desidera: a) definire le variabili di stato del sistema; b) scrivere le equazioni relative alla sua rappresentazione nello spazio degli stati, in cui si valuta l'interesse per il livello del liquido nel serbatoio.

La **variabile** di **stato** è rappresentata dal **livello h(t)** del **liquido** nel **serbatoio**.
Dalle **ipotesi** espresse dalla traccia, si evince che la **portata** di **liquido** in **uscita** $Q_O(t)$ è l'**ingresso u(t)** sono definiti, rispettivamente, da:

$$Q_O(t) = k \cdot h(t) \quad e \quad u(t) = Q_i(t)$$

L'**uscita** di **interesse y(t)** è rappresentata ancora dal **livello h(t)** del **liquido nel serbatoio**; pertanto:

$$y(t) = h(t) = x(t)$$

Il **modello dinamico** del **sistema** afferisce al **principio** di **conservazione** della **massa**. Dato che la **portata massica** è legata alla **portata volumetrica** dalla relazione $Q_M = \rho \cdot Q_V$, il citato **principio** di **conservazione** può essere espresso affermando che: ***la portata di liquido afferente $Q_i(t)$ uguaglia, istante per istante, la portata di liquido efferente $Q_O(t)$ sommata alla variazione di volume del liquido all'interno del serbatoio stesso***. In forma analitica, indicata con **A** la **sezione trasversale retta** del **serbatoio**, si relaziona come segue:

$$A\frac{dh(t)}{dt} = Q_i(t) - Q_O(t) \quad \Rightarrow \quad A\frac{dh(t)}{dt} = Q_i(t) - k \cdot h(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A}Q_i(t) - \frac{k}{A} \cdot h(t)$$

Ricordando le **posizioni effettuate** sia per la **variabile** di **stato x(t)**, sia per l'**uscita y(t)** si ottiene:

$$\dot{h}(t) = -\frac{k}{A} \cdot h(t) - \frac{1}{A}Q_i(t) \qquad \dot{h}(t) = -\frac{k}{A} \cdot h(t) - \frac{1}{A}Q_i(t)$$

Le **equazioni caratteristiche** del **modello** del **sistema** nello **spazio** degli **stati** sono definite da:

$$\dot{x}(t) = -\frac{k}{A} \cdot x(t) - \frac{1}{A}Q_i(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

Si osserva che in questo caso, trattandosi di un **sistema** del **primo ordine**, le **matrici** caratteristiche della **descrizione** del **sistema** stesso nel citato **spazio** degli **stati**, sono rappresentate da **scalari**; in particolare si ottiene:

$$A = -\frac{k}{A}; \quad B = -\frac{1}{A}; \quad C = 1; \quad D = 0$$

a cui corrisponde, pertanto, la classica scrittura di seguito riportata.

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

PASSAGGIO DAL MODELLO EQUAZIONE DIFFERENZIALE NORMALE AL MODELLO FORMA DI SPAZIO DI STATO

Un'**equazione differenziale ordinaria** di **ordine n**, nella **variabile indipendente reale t ($t \in R$),** è un'**equazione** la cui forma classica è del tipo:

$$\boxed{\Phi\left[y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, ..., \frac{d^{(n-1)}y(t)}{dt^{(n-1)}}, \frac{d^n y(t)}{dt^n}, u(t), \frac{du(t)}{dt}, \frac{d^2u(t)}{dt^2}, ..., \frac{d^m u(t)}{dt^m}, t\right] = 0}$$

In cui ***y(t)*** è la **funzione incognita**, ***u(t)*** è una **funzione nota** detta **forzante**, ***t*** è il **tempo** e ***Φ(·)*** è una **funzione assegnata**. L'**ordine "n"** dell'**equazione coincide** con l'**ordine massimo** di **derivazione** della **funzione incognita** ***y(t)***.

ESEMPIO 1: Per maggior chiarezza si consideri il **modello dinamico** caratterizzato dalla seguente **equazione differenziale**:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} - \cos\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] + 2\sin[y(t)] - 3\cdot\left[\frac{du(t)}{dt}\right]^2 = 0$$

In tale situazione, considerate le posizioni di seguito esplicitate:

$$w_1 = y(t) \;\; ; \;\; w_2 = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) \;\; ; \;\; w_3 = \frac{d^3y(t)}{dt^3} = \dddot{y}(t) \;\; ; \;\; w_4 = \frac{du(t)}{dt} = \dot{u}(t)$$

si ottiene la scrittura: $\Phi(\cdot) = \Phi(w_1, w_2, w_3, w_4) = 2\cdot\sin(w_1) - \cos(w_2) + w_3 - 3w_4^2$

Se risulta, inoltre, possibile ***esplicitare*** **la derivata di ordine massimo** rispetto alle altre **grandezze**, l'**equazione differenziale** si dice scritta in **forma normale**, ovvero, come segue:

$$\boxed{\frac{d^n y(t)}{dt^n} = \Psi\left[y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, ..., \frac{d^{(n-1)}y(t)}{dt^{(n-1)}}, u(t), \frac{du(t)}{dt}, \frac{d^2u(t)}{dt^2}, ..., \frac{d^m u(t)}{dt^m}, t\right] = 0}$$

Assegnata un'**equazione differenziale** in ***FORMA NORMALE***, se è $\mathbf{m \le n}$ allora essa **descrive** un **modello CAUSALE**; altrimenti se è $\mathbf{m > n}$ allora il **modello descritto È NON CAUSALE**.

ESEMPIO 2: si considerino i **due modelli dinamici** espressi da **equazioni differenziali assegnate** in **forma normale,** ***di seguito riportate e si discuta della loro*** **natura causale o meno.**

$\ddot{y} = 3\cos(y) + 5(\dot{u})^2 \;\; \Rightarrow$ poiché: $\mathbf{m=1}$, $\mathbf{n=2}$ consegue che $\mathbf{m<n}$ $\Rightarrow$ ***modello causale***

$\dot{y} = -2\sin(y) + 3(\ddot{u})^3 \;\; \Rightarrow$ poiché: $\mathbf{m=2}$, $\mathbf{n=1}$ consegue che $\mathbf{m>n}$ $\Rightarrow$ ***modello non causale***

Qualora sia $n \ge m$, pertanto quando il modello È causale, risulta allora possibile, mediante una opportuna definizione dello stato x(t), ***trasformare*** **un'equazione normale nella forma di spazio di stato**, cioè esprimere il **modello dinamico** nella già nota forma:

$\dot{x}(t) = f\,[x(t),\ u(t),\ t] \quad \Rightarrow$ **equazione di aggiornamento dello stato**

$y(t) = g\,[x(t),\ u(t),\ t] \quad \Rightarrow$ **trasformazione di uscita**

$x(t)\big|_{t=t_O} = x(t_O) = x_O \quad \Rightarrow$ **stato iniziale**

Esaminiamo come sia **possibile procedere con tale trasformazione** nel **caso** in cui **sia m = 0**, cioè **non siano presenti le derivate della funzione forzante nota u(t)**. Sia assegnata l'equazione:

$$\boxed{\frac{d^n y(t)}{dt^n} = \Psi\left[y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, ..., \frac{d^{(n-1)}y(t)}{dt^{(n-1)}}, u(t), t\right] = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{m=0}$$

L'**equazione differenziale normale è di ordine n**, quindi il **vettore di stato x(t) sarà costituito da n componenti $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$** che rappresentano l'**ennupla** delle **variabili** di **stato**. Il **vettore** di **stato x(t)** viene **definito** con la seguente *modalità*:

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots \\ x_n(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y(t)\\ \dfrac{dy(t)}{dt}\\ \vdots \\ \dfrac{d^{(n-1)}y(t)}{dt^{(n-1)}}\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_1(t) &= y(t)\\ x_2(t) &= \dfrac{dy(t)}{dt}\\ \vdots &= \vdots\\ x_n(t) &= \dfrac{d^{(n-1)}y(t)}{dt^{(n-1)}}\end{cases}$$

Procedendo con l'operazione di derivazione si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=\dfrac{dy(t)}{dt}=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}=x_3(t)\\ \vdots \quad = \quad \vdots\\ \dot{x}_{(n-1)}=\dfrac{d^{(n-1)}y(t)}{dt^{(n-1)}}=x_n(t)\\ \dot{x}_n=\dfrac{d^n y(t)}{dt^n}=\Psi(x_1,x_2,\ldots,x_n,u,t)\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \dot{x}(t)=f[x(t),u(t),t]=\begin{bmatrix} x_2(t)\\ x_3(t)\\ \vdots\\ x_n\\ \Psi(x_1,x_2,\ldots,x_n,u,t)\end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda l'equazione di uscita o trasformazione d'uscita si ha:

$$y(t)=g\,[x(t),\ u(t),\ t] \qquad y(t)=x_1(t)=[1\ \underbrace{0\ \cdots\ 0}_{(n-1)}]\cdot x(t)=g\,[x(t)] \quad\Rightarrow\quad y(t)=g\,[x(t)]$$

e, pertanto, ***nell'uscita non vi è l'esplicita dipendenza dall'ingresso u(t) e dalla variabile tempo t.***

ESEMPIO 3: Si vuole scrivere una rappresentazione in forma di Spazio di Stato per il sistema dinamico lineare, a tempo continuo, descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\dddot{y}(t)-2\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)-5y(t)=4u(t)$$

Si principia col **riscrivere** l'**equazione differenziale** assegnata in forma normale; quindi, si ottiene:

$$\dddot{y}(t)=2\ddot{y}(t)-3\dot{y}(t)+5y(t)+4u(t)$$

Il modello dinamico nel dominio del tempo continuo è espresso da un'equazione differenziale del* terzo ordine; pertanto, il vettore di stato x(t) è costituito da tre componenti, le tre variabili di stato fra loro linearmente indipendenti.** In ossequio a quanto sopra esposto il ***vettore di stato **x(t) viene come segue:**

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y(t)\\ \dot{y}(t)\\ \ddot{y}(t)\end{bmatrix}, \text{ derivando si ha: } \begin{array}{l} \dot{x}_1(t)=\dot{y}(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t)=x_3(t)\\ \dot{x}_3(t)=\underbrace{\dddot{y}(t)=5y(t)-3\dot{y}(t)+2\ddot{y}(t)+4u(t)}_{dall'equazione\ differenziale\ del\ sistema}\end{array}$$

dalla definizione di x(t)

Consegue che, per quanto attiene la **scrittura dell'equazione di stato**, si perviene alla relazione:

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_3(t)\\ \dot{x}_3(t)=5x_1(t)-3x_2(t)+2x_3(t)+4u(t)\end{array} \quad\Rightarrow\quad \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)}=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 5 & -3 & 2\end{bmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}}_{x(t)}+\underbrace{\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 4\end{bmatrix}}_{B}\cdot u(t)$$

Pertanto, si perviene all'**equazione di stato**, scritta **in forma canonica**, mediante la relazione:

$$\dot{x}(t)=A\cdot x(t)+B\cdot u(t)$$

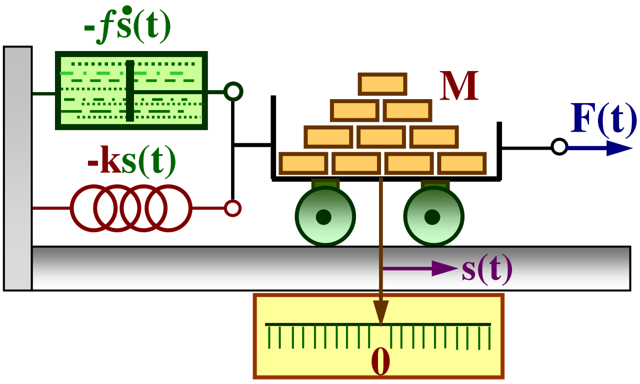
Per quanto riguarda l'**uscita y(t)**, proprio per come è ***stato definito il vettore di stato x(t)***, si ottiene:

$$y(t) = x_1(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = [1 \ 0 \ 0] \cdot x(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \underbrace{[1 \ 0 \ 0]}_{C} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D} \cdot u(t)$$

Si è così ottenuta la **forma classica** relativa alla ***caratterizzazione*** di un **sistema dinamico** espresso nello **spazio** degli **stati**, ovvero:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$
$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

ESEMPIO 4: MASSA-AMMORTIZZATORE-MOLLA



ESEMPIO 5: RETE LINEARE RLC