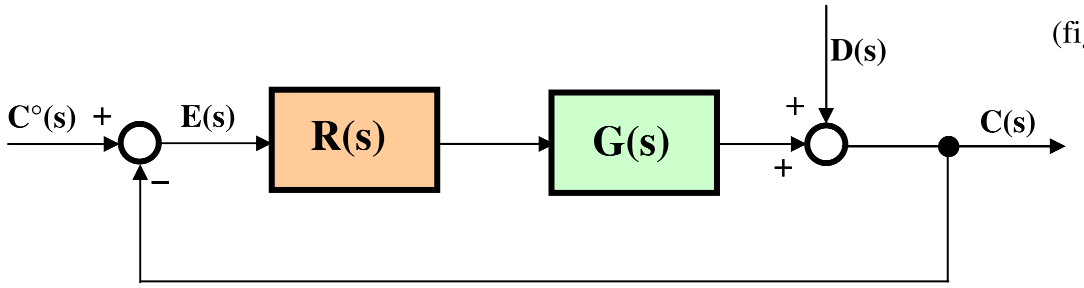
SINTESI DEL REGOLATORE ANALOGICO

(figura – 1)



$$G(s) = \frac{\mu_g}{s^g} \frac{\prod_h (1+s\tau_h)}{\prod_k (1+s\tau_k)} \qquad R(s) = \frac{\mu_r}{s^r} \cdot \frac{\prod_i (1+s\tau_i)}{\prod_j (1+s\tau_j)}$$

Errore a transitorio esaurito e(∞) relativo al set point C^{O}(t)

g \ C°(t)	sca(t)	ram(t)	par(t)
0	1/(1+μ)	∞	∞
1	0	1/μ	∞
2	0	0	1/μ

$$E(s) = \frac{1}{1+L(s)} \cdot C^o(s)$$

$$L(s) = R(s) \cdot G(s)$$

Errore a transitorio esaurito e(∞) relativo al disturbo d(t) agente sulla linea di reazione

g \ d(t)	sca(t)	ram(t)	par(t)
0	μ/(1+μ)	∞	∞
1	1	∞	∞
2	1	∞	∞

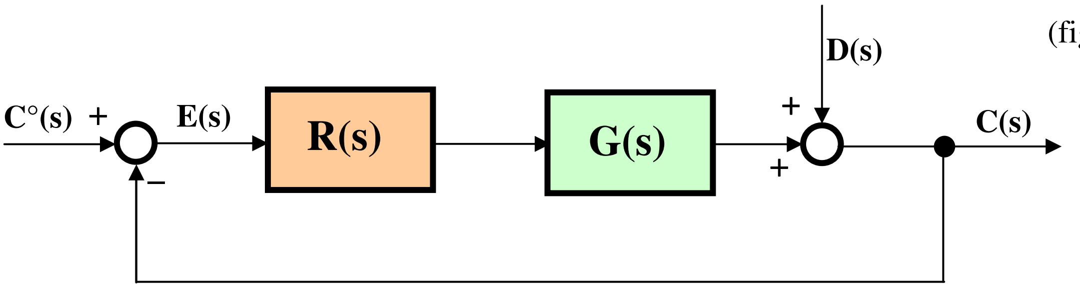
$$E(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \cdot D(s)$$

$$L(s) = R(s) \cdot G(s)$$

Progetto del Regolatore

Se si considera il sistema mostrato in figura 2, gli **obiettivi** della **sintesi** del **regolatore** si traducono, per lo più nel "**soddisfacimento**" delle seguenti specifiche:

(figura – 2)



- l'**errore a transitorio esaurito deve essere** **sufficientemente piccolo**; precisato che sia il **massimo valore consentito** $e_M(\infty)$, occorre cioè che sia: $|e(\infty)| \leq e_M(\infty)$;
- il sistema di controllo deve essere **stabile**, con un **grado di stabilità** che sia "**sufficientemente elevato**"; ciò significa richiedere che il **margine di fase** Φ_M sia **superiore** ad un **prefissato** Φ_{Mmin}, cioè:
  $\Phi_M \geq \Phi_{Mmin}$;
- si stabilisce che il sistema risulti "**sufficientemente veloce**", ossia che la **pulsazione critica** ω_C risulti **superiore** ad una **prescritta** ω_{Cmin}, cioè:
  $\omega_C \geq \omega_{Cmin}$.

La sintesi di un controllore soddisfacente è di solito il risultato di una serie di ragionevoli tentativi, coordinati secondo una sequenza logica di passi che l'esperienza suggerisce di ordinare nel modo seguente:

- determinare le "**caratteristiche**" che il "**controllore**" deve possedere per soddisfare la specifica statica dell'**errore a regime**; normalmente questa parte del progetto, che prende il nome di **progetto statico**, fornisce una idea del ***numero di poli nell'origine che deve possedere il controllore*** e del valore del ***suo guadagno***.
- determinare le "**caratteristiche**" che il "**controllore**" deve possedere per soddisfare le specifiche dinamiche attinenti il **grado di stabilità** definito dalla **fase margine**, nonché la **velocità di risposta** definita dalla **banda passante** ω_C; normalmente questa parte del progetto, che prende il nome di **progetto dinamico**, fornisce un'idea relativa ***ai poli del sistema che il regolatore deve cancellare e dei nuovi poli da introdurre*** per soddisfare alle specifiche richieste e ***garantire la fisica realizzabilità del regolatore stesso con l'introduzione di eventuali poli in alta frequenza***.

Esempio di Progetto

Con riferimento allo schema di figura 4, in cui è:

$$\boxed{G(s) = \frac{10}{(1+s)\cdot(1+10s)}}$$

$$c°(t) = ram(t)$$

$$d(t) = \pm sca(t)$$

si vogliono determinare le caratteristiche che deve possedere il **controllore R(s)** affinché sia:

$$\left|e_\infty\right| \le 0{,}1 \qquad \Phi_m \ge 70° \qquad \omega_c \ge 0{,}1 \quad rad/\sec$$

1. Progetto Statico

Anzitutto, affinché abbia senso parlare di **transitorio esaurito** occorre che il **sistema sia <u>asintoticamente</u> <u>stabile</u>**. Dietro tale ipotesi (che si dovrà poi verificare a posteriori), postuliamo che il ***regolatore*** presenti la ***funzione*** di ***trasferimento***, in forma canonica, seguente:

$$R(s) = \frac{\mu_r}{s^r}\cdot\frac{\prod_i (1+s\tau_i)}{\prod_j (1+sT_j)}$$

Il regolatore si trova in cascata col sistema e ciò consente di affermare che la funzione di trasferimento di anello assume la forma:

$$L(s) = R(s)\cdot G(s) = \frac{10\mu_r}{s^r}\cdot\frac{\prod_i (1+s\tau_i)}{(1+s)\cdot(1+10s)\cdot\prod_j (1+sT_j)}$$

Pertanto, il **guadagno d'anello** è $\mu = 10\mu_r$ ed il **tipo del sistema coincide con il tipo di R(s)**.
Per quanto riguarda la valutazione dell'errore a transitorio esaurito si deve sempre considerare la condizione peggiore, ovvero che ***gli errori dovuti al segnale di riferimento ed al disturbo si sommino***; Si ha allora:

$$\left|e_\infty\right| = \left|e_\infty\right|_{rif} + \left|e_\infty\right|_{dist}$$

in cui, facendo riferimento alle tabelle ricavate in precedenza, risulta che:

- il contributo d'errore dovuto al segnale di riferimento vale:

$$\left|e_\infty\right|_{rif} = \begin{cases} \infty & se \quad r=0 \\ \dfrac{1}{10\mu_r} & se \quad r=1 \\ 0 & se \quad r\ge 2 \end{cases}$$

• il contributo d'errore dovuto al disturbo vale:

$$|e_\infty|_{dist} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+10\mu_r} & se \quad r=0 \\ 0 & se \quad r \geq 1 \end{cases}$$

Dato che l'**errore** a **transitorio esaurito** è **finito**, occorre che risulti **r ≥ 1**. Più specificatamente, si ha:

$$|e_\infty|_{tot} = \begin{cases} \dfrac{1}{10\mu_r} & se \quad r=1 \\ 0 & se \quad r \geq 2 \end{cases}$$

Ne consegue che la specifica posta è soddisfatta:

• **per r ≥ 2 qualunque sia il valore del guadagno μ_r;**

• **per r = 1 allora che è verificata la relazione $(1/10\cdot\mu_r) \leq 0{,}1$ cioè:$\cdot\mu_r \geq 1$**

Di solito, tra tutti i possibili "**r**", si sceglie il più piccolo in quanto una tale scelta rende più agevole la ***parte del progetto dedicato*** al **soddisfacimento** delle specifiche relative alla ***fase margine*** $\boldsymbol{\Phi_M}$ ed alla ***pulsazione critica*** $\boldsymbol{\omega_c}$ cioè al progetto dinamico del regolatore.

Operando la scelta r = 1, si ottiene:

$$R(s) = \frac{\mu_r}{s} \cdot \frac{\prod_i (1+s\tau_i)}{\prod_j (1+sT_j)} \qquad con \quad \mu_r \geq 1$$

Non è opportuno scegliere per il **guadagno** $\boldsymbol{\mu_r}$ il **valore minimo** fornito dai calcoli svolti. Per quanto accurati possono essere sia il modello del sistema sia la schematizzazione dei disturbi agenti su di esso, mai vi è la certezza che sul sistema non agiscano disturbi di ampiezza o addirittura di natura diverse da quelle previste.

Assodato inoltre che **un aumento del guadagno** in ogni caso non può che migliorare le prestazioni statiche del sistema, è prassi comune ***moltiplicare il minimo teorico calcolato per un coefficiente di sicurezza***.

Nel caso in esame si può scegliere $\boldsymbol{\mu_r = 2}$

Pertanto, si ottiene:

$$R(s) = \frac{\mu_r}{s^r} \cdot \frac{\prod_i (1+s\tau_i)}{\prod_j (1+sT_j)} = \frac{2}{s} \cdot \frac{\prod_i (1+s\tau_i)}{\prod_j (1+sT_j)} = R_S(s) \cdot R_D(s)$$

in cui si è posto:

$$R_S(s) = \frac{\mu_r}{s^r} = \frac{2}{s} \qquad\qquad R_D(s) = \frac{\prod_i (1+s\tau_i)}{\prod_j (1+sT_j)}$$

Si può, pertanto, concludere che, al **termine del progetto statico**, risulta determinata la parte $R_S(s)$ della funzione di trasferimento del controllore, mentre $R_D(s)$ non ha alcuna influenza sull'errore a transitorio esaurito.
La libertà di scelta di $R_D(s)$ viene opportunamente sfruttata per soddisfare le specifiche dinamiche (progetto dinamico del controllore).

2. Progetto Dinamico

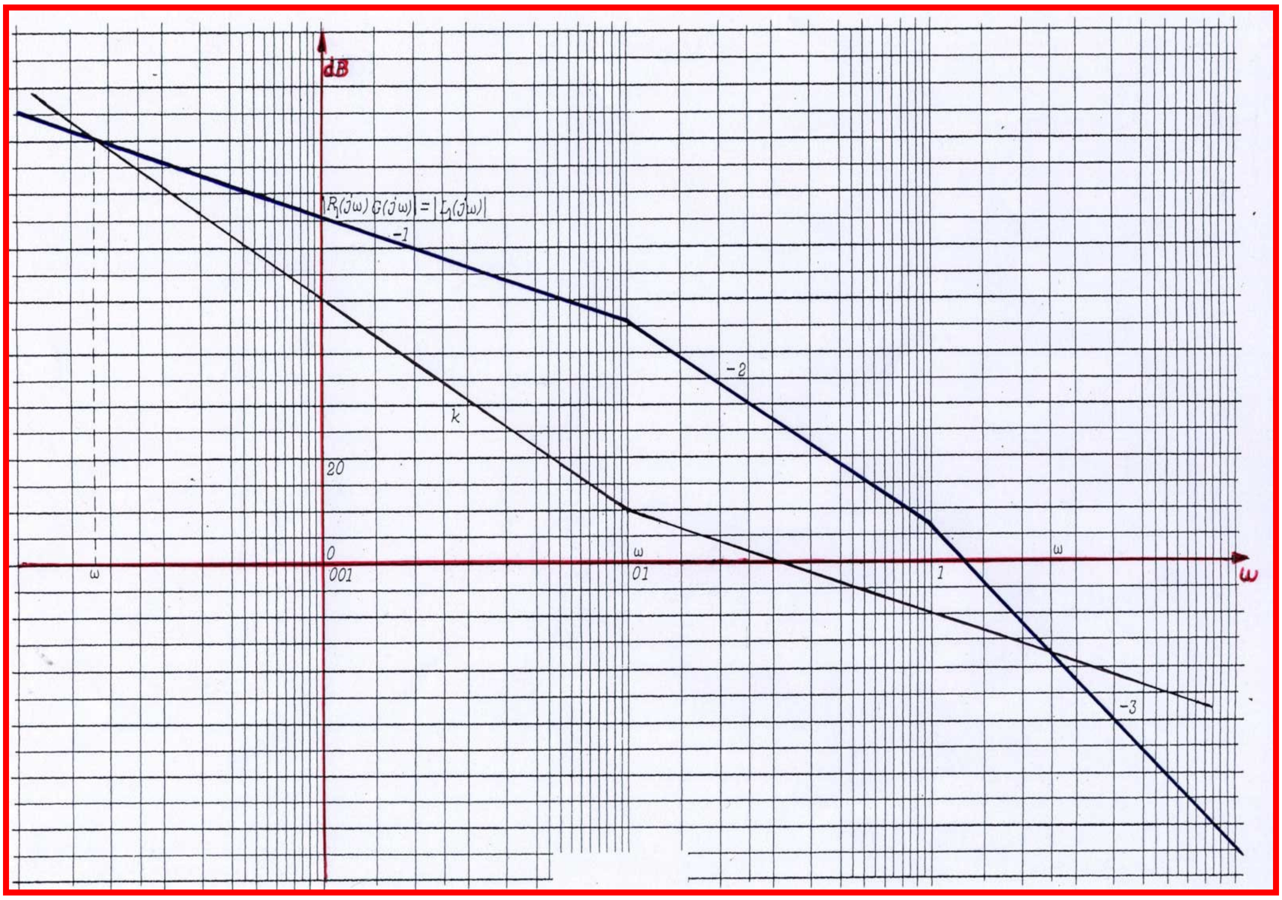
La funzione di trasferimento d'anello del sistema assume la forma:

$$L(s) = R(s) \cdot G(s) = R_S(s) \cdot R_D(s) \cdot G(s) = R_D(s) \cdot \frac{20}{s \cdot (1+s) \cdot (1+10s)}$$

in cui $R_D(s)$ deve avere guadagno unitario e non deve possedere alcuno zero o polo nell'origine; ciò equivale ad imporre con rigore la coincidenza dei **diagrammi del modulo** di **$|L(j\omega)|$** e di **$|R_S(j\omega) \cdot G(j\omega)|$** alle pulsazioni sufficientemente basse.
Come primo tentativo, poniamo $R_D(s) = 1$; si ottiene allora:

$$L(s) = R_S(s) \cdot R_D(s) \cdot G(s) = R_S(s) \cdot G(s) = \frac{20}{s \cdot (1+s) \cdot (1+10s)}$$

Dal relativo **diagramma di Bode** risulta manifesto che il **vincolo $\omega_C \geq 0{,}1$** rad/sec ***è soddisfatto***, mentre si trova **$\Phi_C = -224°$**, cioè **$\Phi_M < 0$**. Pertanto, **il *sistema* NON È *asintoticamente stabile***.
La funzione di trasferimento $L(s) = R_S(s) \cdot G(s)$ non ha zeri, mentre tutti i suoi poli stanno nel semipiano sinistro; si può allora asserire che il sistema rappresentato da L(s) è a sfasamento minimo. In prima approssimazione si può ritenere che, se il diagramma di Bode di **$|L(j\omega)|$** ha pendenza **–1** in un **intorno *sufficientemente ampio*** del suo ***punto*** d'**intersezione** con l'asse a 0 dB, allora il diagramma dello sfasamento di **$|L(j\omega)|$** sarà prossimo a quello asintotico in corrispondenza della pulsazione critica ed il margine di fase risulterà elevato.
Si sceglie un punto sull'asse a **0 dB** compreso tra **$\omega_C = 0{,}1$** rad/sec e la pulsazione critica **$\omega_C = 1{,}3$** rad/sec di L(s); ad esempio il punto di ascissa $\omega = 0{,}3$ rad/(sec). Si traccia una retta di pendenza –1 passante per tale punto, prolungandola verso le **ω crescenti** fino ad intersecare il diagramma di **$|L(j\omega)|$**.
L'intersezione ha luogo alla pulsazione **$\omega = 2{,}5$** rad/sec.
Si stabilisce poi una **pulsazione arbitraria inferiore** alla **$\omega = 0{,}3$** rad/sec, esempio **$\omega = 0{,}1$** rad/sec, e si stabilisce di prolungare, per le **ω decrescenti,** la retta di **pendenza –1** fino alla **pulsazione $\omega = 0{,}1$ rad/sec**, si traccia una



retta di pendenza –2 a partire dal punto della retta di ascissa 0.1, che si prolunga verso le **ω** decrescenti fino ad toccare il diagramma di **|L(jω)|.**
Dall'analisi del diagramma di Bode, sia dei moduli sia delle fasi, si evince che le procedure adottate per conseguire la stabilità del ***sistema reazionato*** richiedono la necessità di progettare la "parte dinamica" $\mathbf{R_D}$ della funzione di trasferimento del regolatore al fine di ottenere la cancellazione del polo s = −1 e del polo s = –0,1.
Le considerazioni tratte dal tracciamento del diagramma consentono di individuare come sintesi della "***parte dinamica***" $\mathbf{R_D(s)}$ del regolatore la seguente funzione di trasferimento:

$$R_D(s) = \frac{(1+10s)^2(1+s)}{(1+555s)\cdot(1+0{,}4s)^2}$$

Dal diagramma di **|L(jω)|** si ricava, d'altra parte, che la **fase margine** vale $\mathbf{\Phi_M = +56°}$: il **sistema retroazionato** è **asintoticamente stabile** ma con un **grado** di **stabilità inferiore** al **minimo stabilito** dal progetto. Provare con:

$$R_D^*(s) = \frac{(1+50s)\cdot(1+10s)\cdot(1+s)}{(1+5000s)\cdot(1+0{,}25s)^2}$$