CAPITOLO 9 - RETI DINAMICHE NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

INTRODUZIONE

Il metodo della trasformata di Laplace, chiamato anche analisi nel dominio della frequenza, è una tecnica molto potente applicabile a sistemi lineari a parametri costanti.

Pertanto è adatto allo studio dinamico delle reti elettriche lineari invarianti. Si utilizza il concetto di funzione di trasferimento (f. di t.) tra le variabili di ingresso e le variabili di uscita.

Rispetto all'analisi mediante il sistema dinamico in forma normale, chiamata analisi nel dominio del tempo, si hanno le seguenti differenze:

- il sistema deve essere strettamente lineare invariante
- la rappresentazione è di tipo ingresso-uscita (funzione di trasferimento - rappresentazione esterna), in contrapposizione alla rappresentazione interna con le variabili di stato, quindi considera più direttamente il risultato specifico di interesse
- le funzioni di trasferimento sono lo strumento del controllo automatico (composizioni, retroazioni, stabilità, ecc.)
- manca della nozione esplicita di stato del sistema e di condizioni iniziali
- le condizioni iniziali possono essere rappresentate mediante opportuni generatori impulsivi (o costanti con trasformazioni serie-parallelo)
- ha il grande pregio di gestire naturalmente anche le condizioni critiche. Consente di ignorare l'ordine della rete, le variabili di stato e le degeneranze dinamiche.
- le variabili energetiche (potenze ed energie) si ottengono solo dall'analisi nel dominio del tempo.

Più in sintesi, l'analisi nel tempo con variabili di stato è più completa, evidenzia la struttura e le proprietà del sistema e le cause di condizioni anomale o degeneri. Evidenzia in modo chiaro l'ordine del sistema e lo stato iniziale. Inoltre la formulazione del sistema in forma normale è il presupposto dell'integrazione numerica con metodi automatici iterativi.

L'analisi in frequenza è più semplice ed omnicomprensiva. Si focalizza sul comportamento ingresso-uscita e non richiede una analisi preliminare di determinazione dell'ordine del sistema, scelta delle v. di s. o riconoscimento di situazioni degeneri. Tali dati seguono naturalmente dalla relazione ingresso-uscita che ne risulta.

Inoltre l'analisi in frequenza è in grado di gestire e risolvere le condizioni critiche o degeneri. In ciò è più potente dell'analisi nel tempo in quanto tratta anche le funzioni impulsive. Gli impulsi non sono, a rigore, funzioni (sono funzioni generalizzate o distribuzioni) quindi non sono dominabili dalle usuali equazioni differenziali, invece sono trasformabili secondo Laplace.

Il metodo standard calcola il transitorio completo a condizioni iniziali nulle. Le eventuali condizioni iniziali non nulle necessitano di un calcolo separato, contrariamente a quanto avviene per l'analisi nel tempo. Questo inconveniente è superabile applicando il metodo del transitorio autonomo a condizioni iniziali modificate.

PROCEDURA STANDARD

Il metodo standard di utilizzo della trasformata di Laplace ricalca le linee di tutti i metodi che ricorrono a trasformate, ovvero

- Si trasforma con Laplace la forzante o le forzanti (ingressi). Usualmente si ricorre a tabelle e regole di trasformazione.
- Si trasforma la relazione ingresso-uscita (per più ingressi o più uscite vale la sovrapposizione oppure metodi matriciali). Nel nostro caso le relazioni trasformate sone le auto o mutue impedenze/ammettenze generalizzate, o in generale funzioni di rete compresi rapporti di tensione e rapporti di corrente.
- Si moltiplica la funzione di rete per la forzante trasformata e il risultato è l'uscita trasformata.
- Il risultato esplicito nel tempo si ottiene dalla antitrasformazione dell'uscita.

Sinteticamente vale la (4.22) che si riscrive

$$Y(s) = F(s) \cdot U(s) \qquad (9.1)$$

Per le reti elettriche si particolarizza nelle $I(s) = Y(s) \cdot V(s)$, $V(s) = Z(s) \cdot I(s)$, $V_2(s) = H(s) \cdot V_1(s)$, $I_2(s) = H(s) \cdot I_1(s)$ a seconda dei casi.

La (9.1) lega una forzante (generatore indipendente) all'uscita. In presenza di più forzanti vale la (9.1) per ogni forzante separatamente. Il risultato complessivo si ottiene per sovrapposizione.

La antitrasformazione della (9.1) fornisce l'andamento completo, regime più transitorio, a condizioni iniziali nulle.

Da notare che il procedimento tratta allo stesso modo le variabili di stato e le altre variabili di rete. Il metodo della trasformata di Laplace ignora le variabili di stato.

Condizioni iniziali

Delle condizioni iniziali non nulle si può tenere conto con l'aggiunta di generatori equivalenti ad ogni porta induttiva e capacitiva, come visto al Cap. 4.

Le condizioni iniziali ed i generatori equivalenti vanno assegnati anche alle porte non variabili di stato. L'eventuale incongruenza dei valori iniziali con le Leggi di Kirchhoff è compatibile con la Trasformata. Le incongruenze generano andamenti impulsivi.

Un valore iniziale X_0 è equivalente nel dominio del tempo ad un generatore impulsivo $X_0\delta(t)$. La trasformata del generatore impulsivo è la costante X_0 quale ingresso nella (9.1).

$$\mathbf{L}\left[X_0\delta(t)\right] = X_0$$

Regole di antitrasformazione

E noto che, per reti costituite da componenti considerati in questi appunti, la f. di t. (o funzione di rete) $F(s)$ è costituita dal rapporto di due polinomi in s

$$F(s) = \frac{N_F(s)}{D_F(s)} \qquad (9.2)$$

in cui il numeratore $N_F(s)$ ha grado superiore di uno, uguale o inferiore di uno rispetto al denominatore $D_F(s)$.

Il polinomio $D_F(s)$ denominatore della f. di t. coincide con il polinomio caratteristico della matrice di stato. Le radici del denominatore della f. di t., che costituiscono i poli delle f. di t., sono ancora gli autovalori della matrice di stato. Sono chiamate frequenze naturali del sistema (o frequenze proprie, o modi naturali, propri). Le radici del numeratore sono gli zeri della f. di t. Sono possibili cancellazioni tra zeri e poli.

Anche la forzante è, in molti casi di interesse, il rapporto tra due polinomi in s. Ciò avviene per forzanti cisoidali o combinazioni lineari di cisoidi, polinomi in t e prodotto fra polinomi e cisoidi. Ci limitiamo a questi casi. Rientrano in questi le costanti, sinusoidi, esponenziali, rampe.

$$U(s) = \frac{N_U(s)}{D_U(s)}$$

Per ingressi non impulsivi il grado del numeratore è inferiore al grado del denominatore.

Quindi la uscita (9.1) da antitrasformare è un rapporto di polinomi in s. Notare che, esclusi ingressi impulsivi, il numeratore è di grado non superiore al denominatore.

$$Y(s) = \frac{N_F(s)}{D_F(s)} \frac{N_U(s)}{D_U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad (9.3)$$

La procedura canonica di antitrasformazione di rapporti di polinomi richiede la decomposizione in somma di frazioni parziali.

Per fare ciò è necessario calcolare le radici del denominatore (poli). Note le radici, il denominatore è fattorizzabile. Da notare che il denominatore è già per costruzione il prodotto fra i denominatori della funzione di rete e della forzante, quindi le radici si calcolano separatamente per i due termini, dopo di che il risultato è decomponibile in somma di frazioni parziali con procedimenti standard.

Nel caso qui considerato di polinomi a coefficienti reali, le radici sono reali o complesse coniugate a coppie.

Senza perdere di generalità si fa l'ipotesi che il termine s^n di grado più elevato nel denominatore abbia coefficiente unitario. L'eventuale coefficiente si considera facente parte del numeratore.

Si presentano tre casi principali

- radici tutte distinte
- alcune radici multiple, senza radici comuni alla f. di t. e all'ingresso
- radici comuni alla f. di t. e all'ingresso.

L'ultimo caso verrà esaminato più avanti.

Nei casi di radici distinte si ha

$$Y(s) = \frac{N(s)}{\prod_{k=1}^{N}(s-\lambda_k)\cdot\prod_{k=1}^{a}(s-\alpha_k)} = \sum_{k=1}^{N}\frac{C_k}{s-\lambda_k} + \sum_{k=1}^{a}\frac{B_k}{s-\alpha_k} \tag{9.4}$$

Si sono volutamente mantenuti separati lo sviluppo dalla f. di t. e dalla forzante.

La (9.4) consente di determinare i coefficienti C_k B_k (residui dei corrispondenti poli). Metodi sono

- Confronto diretto. Consiste nel ridurre a denominatore comune i termini a destra dell'uguale in (9.4) e imporre l'identità tra i numeratori a sinistra e a destra dell'uguale.
- Determinazione dei residui con la formula sintetica (formula di Heaviside)

$$C_k = \lim_{s\to\lambda_k}\left[(s-\lambda_k)Y(s)\right] \qquad B_k = \lim_{s\to\alpha_k}\left[(s-\alpha_k)Y(s)\right] \tag{9.5}$$

o equivalente

$$C_k = \frac{N(\lambda_k)}{\frac{d}{ds}D(\lambda_k)} \qquad B_k = \frac{N(\alpha_k)}{\frac{d}{ds}D(\alpha_k)} \tag{9.6}$$

La antitrasformazione della (9.4) dà luogo alla

$$y(t) = \sum_{k=1}^{N} C_k e^{\lambda_k t} + \sum_{k=1}^{a} B_k e^{\alpha_k t} \tag{9.7}$$

Nel caso di semplificazioni tra poli e zeri della f. di t., uno o più coefficienti C_k sono zero.

Nei caso di radici multiple del denominatore, senza radici comuni alla f. di t. e all'ingresso, si procede come segue.

Nel caso di radici doppie, il polo doppio λ_k si espande in somma di due frazioni parziali

$$\frac{C_{k1}}{s-\lambda_k} + \frac{C_{k2}}{(s-\lambda_k)^2}$$

I coefficienti si valutano o con il metodo diretto o con

$$C_{k2} = \lim_{s\to\lambda_k}\left[(s-\lambda_k)^2 Y(s)\right] \qquad C_{k1} = \lim_{s\to\lambda_k}\frac{d}{ds}\left[(s-\lambda_k)^2 Y(s)\right]$$

dopo di che le regole di antitrasformazione danno

$$\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{C_{k1}}{s-\lambda_k} + \frac{C_{k2}}{(s-\lambda_k)^2}\right] = \left(C_{k1} + C_{k2}t\right)e^{\lambda_k t}$$

In generale un polo λ_k di molteplicità m si espande in somma di m frazioni parziali

$$\frac{C_{k1}}{s-\lambda_k} + \frac{C_{k2}}{(s-\lambda_k)^2} + \ldots + \frac{C_{km}}{(s-\lambda_k)^m} \tag{9.8}$$

si identificano le m costanti C_k per confronto diretto oppure con la formula (estensione della formula di Heaviside)

$$C_{kj} = \frac{1}{(m-j)!} \lim_{s \to \lambda_k} \frac{d^{m-j}}{ds^{m-j}} \left[(s-\lambda_k)^m Y(s) \right] \qquad (9.9)$$

dopo di che si sfrutta la formula generale di antitrasformazione

$$\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{C_{kn}}{(s-\lambda_k)^n} \right] = C_{kn} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda_k t} \qquad (9.10)$$

In precedenza si è ipotizzato il numeratore di grado inferiore al denominatore. Si consideri ora il numeratore di grado uguale al denominatore o al più superiore di uno. Con operazioni elementari di divisione tra polinomi si perviene alla decomposizione

$$\frac{N(s)}{D(s)} = as + b + \frac{N'(s)}{D(s)} \qquad (9.11)$$

con *N'* di grado inferiore a *D*.

L'ultimo termine si elabora come in precedenza. La antitrasformazione della costante *b* corrisponde a un impulso $b\delta(t)$ (impulso del primo ordine) di ampiezza *b*. La antitrasformazione del termine *as* corrisponde ad un impulso del secondo ordine $a\,\delta^{(2)}(t)$.

Impulsi di ordini superiori non sono al momento contemplati.

Andamenti impulsivi non possono apparire in transitori di sistemi dinamici autonomi con rappresentazione in forma normale nel dominio del tempo. Appaiono in soluzioni critiche di sistemi degeneri, soluzioni non trattabili nel dominio del tempo.

TRANSITORIO DEL SISTEMA AUTONOMO

Come già mostrato in precedenza, il metodo spesso più efficace di affrontare un transitorio è di utilizzare la sovrapposizione per separare il calcolo del regime (o più correttamente termine forzato) dal transitorio del sistema senza forzanti.

Il termine di regime si determina con metodi specifici in relazione al tipo di forzante (regime in continua, fasori, sviluppo in serie, forma chiusa, ecc.).

Dal regime si determina lo stato del sistema all'istante di inizio transitorio. Dopo di che rimane da calcolare il transitorio del sistema autonomo soggetto, per sovrapposizione, a uno stato iniziale pari alla differenza tra lo stato iniziale effettivo e lo stato iniziale del regime.

Solamente per questo transitorio si fa ricorso alla trasformata di Laplace.

L'andamento effettivo del sistema sarà poi la somma del regime e del trasitorio autonomo così valutato.

Il transitorio da risolvere è quindi con ingressi solo impulsivi, corrispondenti ai valori iniziali, modificati, delle variabili di stato.

E' quindi da risolvere una o più relazioni del tipo

$$Y(s) = F(s) \cdot X_{0g} \qquad (9.12)$$

dove l'ingresso è diventato la costante X_{0g}.

Il metodo di soluzione è come quanto visto sopra, ma più semplice in quanto si deve siviluppare e antitrasformare solo la f. di t.

Nei casi frequenti di radici semplici valgono le relazioni

$$y(s) = X_{0g}\frac{N_F(s)}{D_F(s)} = X_{0g}\frac{N_F(s)}{\sum_{k=1}^{N}(s-\lambda_k)} = \sum_{k=1}^{N}\frac{C_k}{s-\lambda_k} \qquad (9.13)$$

$$C_k = X_{0g}\frac{N_F(s)}{\frac{d}{ds}D_F(s)}$$

La antitrasformazione della (9.13) dà luogo alla soluzione del tipo

$$y(t) = \sum_{k=1}^{N} C_k e^{\lambda_k t} \qquad (9.14)$$

Nei casi di radici multiple (caso generale) valgono ancora le formule del paragrafo precedente applicate alla sola f. di t.

In tutti i casi si devono calcolare solamente le costanti C_k dell'integrale generale e questo calcolo è semplificato dal fatto che dipende solo dalla f. di t., non dalla forzante. Della forzante si tiene conto in modo implicito nel valore modificato dei valori iniziali.

Questo approccio è possibile solo se le frequenze proprie delle forzanti non coincidono con alcune delle frequenze naturali della rete. Di tale condizione ci si accorge al momento della determinazione del regime, in casi di frequenze coincidenti le relazioni di regime non hanno soluzione o si incontrano termini infiniti.

ESEMPIO 1

Il circuito di Fig 9.1 è alimentato da un generatore di tensione costante E e a condizioni iniziali nulle. Si chiede la tensione $v(t)$ sul condensatore. La rete trasformata è

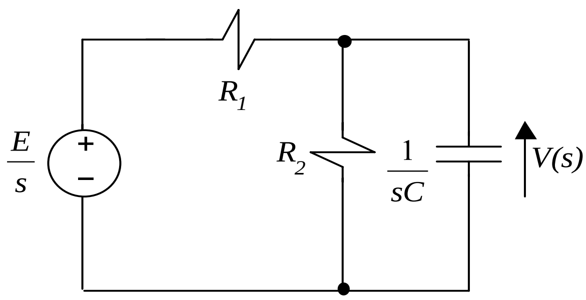


Fig. 9.1. Circuito *RC* trasformato.

Dal partitore di tensione si ottiene

$$V(s) = \frac{R_2}{sCR_1R_2 + R_1 + R_2}\frac{E}{s}$$

Le radici del denominatore sono $s_1 = 0 \quad s_2 = -\dfrac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}$

Per l'antitrasformazione si decompone in somma di frazioni parziali, un termine per ogni radice.

$$V(s) = \frac{A}{s - s_2} + \frac{B}{s}$$

Per identificare le costanti A e B (residui dei rispettivi poli) si può procedere in due modi.
Primo modo. Si impone che le due espressioni di V(s) siano identiche e si trova

$$B = -A = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Antitrasformando si ottiene l'andamento completo nel tempo

$$v(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E\left(1 - e^{s_2 t}\right)$$

Secondo modo più potente. Per il calcolo dei residui si valuta il rapporto di polinomi

$$r(s) = \frac{N(s)}{\frac{d}{ds} D(s)} = \frac{R_2 E}{2sCR_1 R_2 + R_1 + R_2}$$

L'andamento completo nel tempo è $v(t) = r(s_1) + r(s_2)e^{s_2 t} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E\left(1 - e^{s_2 t}\right)$

ESEMPIO 2

Consideriamo la rete di Fig. 8.2 (v. prima) con il generatore di tensione costante E e le condizioni iniziali V_{C0} I_{L0}. Si richiede la corrente $i(t)$ nel generatore.

Si risolve per sovrapposizione del regime e del transitorio proprio. Le variabili di stato di regime in continua sono

$$I_{Lp} = \frac{R_2}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)} E \qquad V_{Cp} = R_4 I_{Lp} = \frac{R_4 R_2}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)} E$$

La corrente di regime è $I_p = \dfrac{E + R_2 I_{Lp}}{R_1 + R_2}$

Le condizioni iniziali del transitorio proprio sono $V_0 = V_{C0} - V_{Cp}$ $\quad I_0 = I_{L0} - I_{Lp}$

La rete autonoma trasformata con le impedenze simboliche è

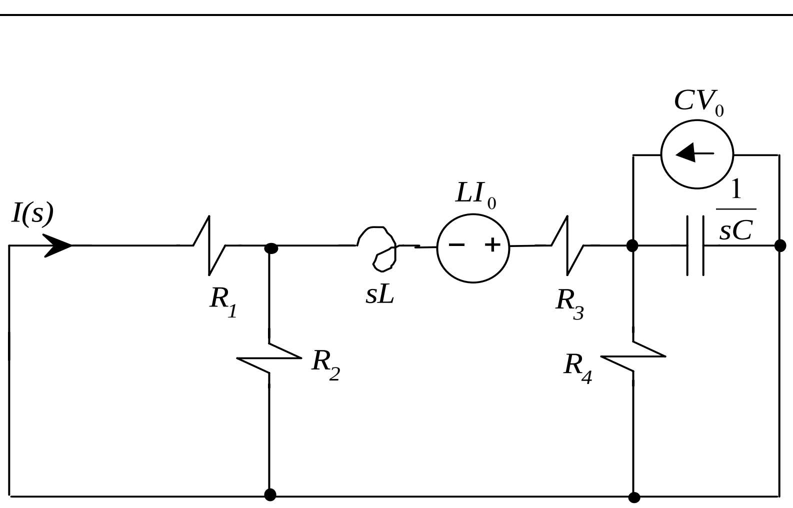


Fig. 9.2. Circuito autonomo *RLC* trasformato.

Con procedura elementare di composizione delle impedenze simboliche si ottiene

$$I(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{(1 + sCR_4)LI_0 - R_4CV_0}{s^2LCR_4 + s(L + R_4R^*C) + R_4 + R^*} \qquad R^* = R_3 + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

Si calcolano le radici del polinomio del secondo ordine in s al denominatore (poli) λ_1 , λ_2

Per il calcolo dei residui si valuta il rapporto di polinomi

$$r(s) = \frac{N(s)}{\frac{d}{ds}D(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{(1 + sCR_4)LI_0 - R_4CV_0}{2sLCR_4 + L + R_4R^*C}$$

L'andamento completo nel tempo è

$$i(t) = I_p + r(\lambda_1)e^{\lambda_1 t} + r(\lambda_2)e^{\lambda_{21} t}$$

RETI DEGENERI

L'analisi con Laplace ricorre all'uso delle funzioni di trasferimento. Queste sono relazioni ingresso-uscita nelle quali eventuali condizioni degeneri come tagli dinamici di porte con uscita in corrente o maglie dinamiche di porte con uscita in tensione, sono risolte. Esempi semplici sono induttori in serie, condensatori in parallelo.

Anche i sottosistemi non osservabili ad autovalori nulli (es. maglie di induttori, tagli di condensatori) sono conglobati nelle f. di t. e la dinamica interna non appare.

Infatti nella costruzione delle funzioni di rete generalizzate si opera sui componenti in modo algebrico con le stesse regole di composizione delle reti resistive.

In sintesi, eventuali multiporta induttivi o capacitivi sono visti come algebrici e solo ai terminali esterni. Solo i valori iniziali ai terminali esterni sono rilevanti.

Se le f. di t. sono dedotte dalla trasformazione del sistema dinamico completo, i poli corrispondenti a eventuali dinamiche interne non osservabili spariscono dal risultato finale per effetto di eliminazione tra poli e zeri.

Ovviamente i modi non osservabili possono essere evidenziati considerando una variabile interna come uscita.

ANALISI DI CONDIZIONI INCONGRUENTI CON LAPLACE

Il metodo della trasformata di Laplace è in grado di risolvere le configurazioni in cui si presentano maglie degeneri dinamiche e tagli degeneri dinamici anche sotto condizioni iniziali non congruenti.

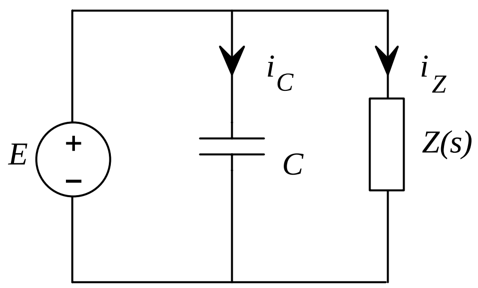
Ciò si spiega con il fatto che le relazioni differenziali degli induttori e condensatori si trasformano con Laplace in relazioni algebriche, invertibili, tra tensione e corrente, quindi gli elementi dinamici diventano tutti controllabili sia in tensione che in corrente, analogamente ai resistori.

Matematicamente la trasformazione di Laplace opera su un campo più ampio delle usuali funzioni, il campo delle distribuzioni, nel quale sono sempre lecite e definite le operazioni di derivazione ed integrazione.

Infatti nei casi degeneri dinamici la analisi con Laplace fa apparire andamenti impulsivi.

Si danno due esempi elementari.

Generatore di tensione in parallelo al condensatore



Si esamina il transitorio di un generatore ideale di tensione costante E connesso al condensatore C scarico, il tutto collegato ad una rete di impedenza generica $Z(s)$.

$$E(s) = \frac{E}{s} \qquad\qquad Y(s) = sC$$

La corrente si determina nel modo classico

$$I_c(s) = Y(s)E(s) = CE$$

Antitrasformando, la corrente nel condensatore in funzione del tempo ha andamento impulsivo. L'ampiezza dell'impulso è la carica elettrica da fornire al condensatore per portarlo istantaneamente alla tensione E.

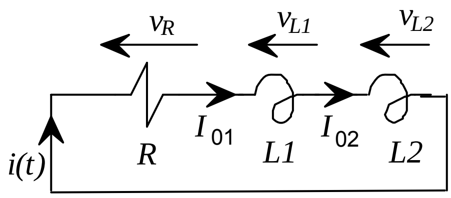
$$i_c(t) = CE\delta(t)$$

La corrente nel resto del circuito rimane la generica

$$I_z(s) = E(s)/Z(s)$$

Il parallelo del generatore ideale e del condensatore, inserito in una rete, dà luogo alla carica istantanea del condensatore con corrente impulsiva, come visto. Dopo di che al parallelo è imposta la tensione costante E del generatore ideale.

Serie di induttori carichi



Consideriamo due induttori in serie e caricati all'istante iniziale con correnti differenti, collegati alla resistenza *R*.

$V_{L1}(s) = sL_1 I(s) - L_1 I_{01}$

$V_{L2}(s) = sL_2 I(s) - L_2 I_{02}$

$V_R(s) = RI(s)$

La somma nulla delle tensioni di maglia consente di ricavare la corrente comune

$$I(s) = \frac{L_1 I_{01} + L_2 I_{02}}{R + s(L_1 + L_2)}$$

L'espressione è il transitorio su un circuito *RL* con induttanza pari alla serie e sostenuto dal valore iniziale del flusso totale $\psi_0 = \psi_{01} + \psi_{02} = L_1 I_{01} + L_2 I_{02}$.

Si fanno ora alcune considerazioni sull'istante iniziale.

La corrente comune all'istante iniziale si ottiene dal teorema del limite

$$I_{0^+} = \frac{L_1 I_{01} + L_2 I_{02}}{L_1 + L_2}$$

Le correnti negli induttori si adeguano a gradino al valore comune con discontinuità rispettivamente

$$I_{0^+} - I_{01} = -\frac{L_2}{L_1 + L_2}(I_{01} - I_{02}) \qquad I_{0^+} - I_{02} = \frac{L_1}{L_1 + L_2}(I_{01} - I_{02})$$

Le discontinuità corrispondono ad impulsi uguali e di segno opposto sulle due tensioni di induttore all'istante iniziale, come si ottiene sostituendo la corrente nelle espressioni delle tensioni

$$v_2(t_{0+}) = -v_1(t_{0+}) = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}(I_{01} - I_{02})\delta(t)$$

Il risultato importante è che le correnti iniziali di induttore si riconfigurano istantaneamente rispettando i vincoli di nodo sulle correnti ed i vincoli di maglia sugli impulsi di tensione. Da notare che le discontinuità iniziali non conservano la energia magnetica totale.

FREQUENZE COMUNI TRA FORZANTE E RETE

Si è visto che la rete inerte è caratterizzata da un certo numero di frequenze proprie (frequenze caratteristiche, modi caratteristici).

Anche gli ingressi sono caratterizzati da frequenze proprie. Sono i poli della trasformata dell'ingresso.

Finora si è ammesso che le frequenze proprie dell'ingresso e della rete fossero differenti.

Nei caso anomalo di una o più frequenze coincidenti tra ingresso e rete, si esce dai metodi standard visti e la soluzione diventa meno immediata.

Il principio è che in questi casi non è lecito separare la soluzione forzata dal transitorio proprio. In termini matematici non è lecito decomporre la soluzione in integrale particolare della equazione completa più integrale generale dell'omogenea associata. Infatti la soluzione forzata (soluzione di regime o integrale particolare) non esiste separatamente.

Questo fatto è indicato anche dalle relazioni trasformate con Laplace.

In termini circuitali la rete non va a regime, non si trova il regime della stessa forma della forzante. Ciò indipendentemente dal fatto che la rete autonoma sia stabile.

La soluzione si ottiene dall'integrazione del sistema in modo unitario senza poter separare la soluzione forzata dal transitorio proprio. Quindi non è lecito in questi casi la decomposizione più volte proposta.

L'integrazione del sistema può ottenersi ricorrendo a metodi non standard nel dominio del tempo, ciò è facile in casi semplici.

Il metodo della trasformata di Laplace si rivela in questi casi estremamente potente, senza ricorrere a tecniche diverse dall'usuale porge la soluzione del transitorio completo.

Nel dettaglio, si presentano radici multiple e si opera come indicato in precedenza (9.8-9.10) per il sistema completo.

Il risultato è l'andamento completo a condizioni iniziali nulle.

Esempi

1) Generatore costante su induttore (condizioni iniziali nulle)

$v(t) = E \qquad V(s) = \dfrac{E}{s}$ frequenza propria s=0

$Y(s) = \dfrac{1}{sL}$ frequenza propria s=0

Nel tempo la soluzione è immediata $i(t) = \dfrac{1}{L}\int_0^t v\,dt = \dfrac{1}{L}\int_0^t E\,dt = \dfrac{E}{L}t$

L'andamento è una rampa indefinita. La corrente diverge.

In Laplace $I(s) = Y(s)V(s) = \dfrac{E}{s^2 L} \qquad i(t) = \dfrac{E}{L}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right] = \dfrac{E}{L}t$

2) Generatore sinusoidale su LC (condizioni iniziali nulle)

$v(t) = E\sin(\omega t) \qquad V(s) = \dfrac{\omega E}{s^2+\omega^2}$ frequenze proprie $s = \pm j\omega$

$Y(s) = \dfrac{sC}{s^2 LC + 1} = \dfrac{1}{L}\dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$ frequenze proprie $s = \pm j\omega_0$

Per $\omega = \omega_0$ la soluzione con i fasori non è possibile.

$$I(s) = Y(s)V(s) = \omega\frac{E}{L}\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2} = \omega\frac{E}{L}\frac{s}{(s-j\omega)^2(s+j\omega)^2}$$

In frazioni parziali $I(s) = \frac{E}{j4L}\left[\frac{1}{(s-j\omega)^2} - \frac{1}{(s+j\omega)^2}\right]$

$i(t) = \frac{E}{j4L}\left[t\,e^{j\omega t} - t\,e^{-j\omega t}\right] = \frac{E}{2L}\,t\sin(\omega t)$

La corrente diverge.

3) Generatore esponenziale smorzato su *RL* (condizioni iniziali nulle)

$v(t) = Ee^{-\alpha t}$ $\quad V(s) = \frac{E}{s+\alpha}$ $\quad$ frequenza propria $\quad s = -\alpha$

$Y(s) = \frac{1}{sL+R}$ $\quad$ frequenza propria $\quad s = -\frac{R}{L}$

Per $\alpha \neq \frac{R}{L}$ vale la formula dell'integrale particolare per forzante cisoidale

$i_p(t) = Y(-\alpha)Ee^{-\alpha t} = \frac{E}{R-\alpha L}e^{-\alpha t}$

L'andamento completo è $i(t) = \frac{E}{R-\alpha L}\left(e^{-\alpha t} - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

Per $\alpha = \frac{R}{L}$ $\quad I(s) = Y(s)V(s) = \frac{E}{L}\frac{1}{(s+\alpha)^2}$ $\quad i(t) = \frac{E}{L}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+\alpha)^2}\right] = \frac{E}{L}\,t\,e^{-\alpha t}$