- reti elettriche in regime alternato sinusoidale

  - numeri complessi

- **Esercizio 1**

Calcola :

a) $\dfrac{2-j}{4-j}$ b) $\left|\dfrac{3-2j}{1+2j}\right|$ c) $\dfrac{5+5j}{1+2j}+\dfrac{20}{4+3j}$ d) $(1+j)^2-j$ e) $1+e^{2j\frac{\pi}{3}}+e^{-2j\frac{\pi}{3}}$

f) $\dfrac{j^4+j^9+j^{16}}{2-j^5+j^{10}-j^{15}}$ g) $\angle\dfrac{1+j}{1-j}$ h) $e^{j\frac{\pi}{2}}$ m) $e^{j\pi}$ n) $e^{-j\frac{\pi}{4}}$

Risposte : a) $\dfrac{9}{17}-\dfrac{2}{17}j$ b) $\sqrt{\dfrac{13}{5}}$ c) $\dfrac{31}{5}-\dfrac{17}{5}j$ d) j e) 0 f) 2+j g) $\dfrac{\pi}{2}$ h) j
m) -1 n) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-j\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- **Esercizio 2**

Esprimere in forma esponenziale
a) 2-2j b) $-1+j\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{2}+j2\sqrt{2}$ d) -j e) -4 f) $-2\sqrt{3}-j2$ g) $\sqrt{2}$
h) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-j\dfrac{3}{2}$

Risposte: a) $2\sqrt{2}e^{7j\frac{\pi}{4}}$ b) $2e^{2j\frac{\pi}{3}}$ c) $4e^{j\frac{\pi}{4}}$ d) $e^{-j\frac{\pi}{2}}$ e) $4e^{j\pi}$ f) $4e^{7j\frac{\pi}{6}}$
g) $\sqrt{2}$ h) $\sqrt{3}e^{5j\frac{\pi}{3}}$

- **Esercizio 3**

Calcolare modulo e fase

a) 1-j b) -j c) -3 d) -1-j e) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{j}{2}$

Risposte: a) $\sqrt{2}, -\dfrac{\pi}{4}$ b) $1, -\dfrac{\pi}{2}$ c) $3, \pi$ d) $\sqrt{2}, \dfrac{-3\pi}{4}$ e) $1, \dfrac{5\pi}{6}$

Esercizio 1.1. *Dati i seguenti numeri complessi in forma polare, determinarne la forma rettangolare.*

$2\,e^{j\frac{\pi}{6}}$	$\left[\sqrt{3}+j\right]$
$3\,e^{-j\frac{\pi}{4}}$	$\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}-j\frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$
$4\,e^{j\pi}$	$\left[-4\right]$
$\sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$\left[-j\sqrt{2}\right]$
$5.78\,e^{-j0.61}$	$\left[\simeq 4.74-j3.31\right]$

Esercizio 1.2. *Dati i seguenti numeri complessi in forma rettangolare, determinarne la forma polare.*

$1-j$	$\left[\sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{4}}\right]$
$-1+j\sqrt{3}$	$\left[2\,e^{j\frac{2}{3}\pi}\right]$
$3+j\sqrt{3}$	$\left[2\sqrt{3}\,e^{j\frac{\pi}{6}}\right]$
$-5-j5$	$\left[5\sqrt{2}\,e^{j\frac{5}{4}\pi}=5\sqrt{2}\,e^{-j\frac{3}{4}\pi}\right]$
$-3j$	$\left[3\,e^{-j\frac{\pi}{2}}\right]$
$-\frac{1}{4}$	$\left[\frac{1}{4}\,e^{j\pi}\right]$
$4j$	$\left[4\,e^{j\frac{\pi}{2}}\right]$
3	$\left[3\right]$
$+0.37+j1.12$	$\left[1.18\,e^{j1.25}\right]$
$+0.37-j1.12$	$\left[1.18\,e^{-j1.25}\right]$
$-0.37+j1.12$	$\left[1.18\,e^{j1.89}\right]$
$-0.37-j1.12$	$\left[1.18\,e^{j4.39}=1.18\,e^{-j1.89}\right]$

✓ fasori e funzioni sinusoidali

Si fa riferimento alla trasformazione

$A(t) = A\cos(\omega t + \phi) \quad \rightarrow \quad \bar{A} = A\, e^{j\phi}$

$\bar{A} = A\, e^{j\phi} \quad \overset{\omega}{\rightarrow} \quad A(t) = \mathrm{Re}[\bar{A}\, e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[A\, e^{j(\omega t+\phi)}] = A\cos(\omega t + \phi)$

Esercizio 2.1. *Scrivere il fasore rappresentativo delle seguenti funzioni*

$A(t) = 2\cos(314t + \frac{\pi}{4})$ $[\bar{A} = 2\, e^{j\frac{\pi}{4}}]$

$A(t) = 3\cos(314t + 0.8)$ $[\bar{A} = 3\, e^{j0.8}]$

$A(t) = 4\cos(314t + \frac{\pi}{2})$ $[\bar{A} = 4\, e^{j\frac{\pi}{2}}]$

$A(t) = \cos(314t - \frac{\pi}{6})$ $[\bar{A} = e^{-j\frac{\pi}{6}}]$

$A(t) = \sqrt{3}\cos(314t - 0.6)$ $[\bar{A} = \sqrt{3}\, e^{-j0.6}]$

$I(t) = \sqrt{2} I\cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$ $[\bar{I} = \sqrt{2} I e^{j\frac{\pi}{3}}]$

$I(t) = I_M\cos(\omega t + \pi)$ $[\bar{I} = I_M\, e^{j\pi} = -I_M]$

Nota. Se sono presenti anche funzioni "seno", si può utilizzare la relazione

$$\sin(\omega t + \varphi) = \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Ad esempio, se la funzione $A(t)$ è data da:

$$A(t) = 2\sqrt{2}\sin\left(314t - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\cos\left(314t - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}\cos\left(314t - \frac{3}{4}\pi\right),$$

il suo fasore rappresentativo sarà $\bar{A} = 2\sqrt{2}\, e^{-j\frac{3}{4}\pi}$ o, direttamente, $\bar{A} = -j\, 2\sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{4}}$ => $\bar{A} = -2 - j\,2$

Il fattore moltiplicativo $-j$ tiene conto dello sfasamento di $-\frac{\pi}{2}$ della funzione seno rispetto alla funzione coseno.

Analogamente, nel caso di trasformazione fasoriale con la funzione seno, può essere utile la seguente uguaglianza:

$$\cos(\omega t + \varphi) = \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Esercizio 2.2. *Scrivere le funzioni $A(t)$ che corrispondono ai seguenti fasori* ($\omega = 314$ rad/s):

$\bar{A} = 3\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{3}}$ $[A(t) = 3\sqrt{2}\cos(314t + \frac{\pi}{3})]$

$\bar{A} = 2\, e^{-j\frac{\pi}{2}}$ $[A(t) = 2\cos(314t - \frac{\pi}{2})] = 2\sin(314t)]$

$\bar{A} = j\,2$ $[A(t) = 2\cos(314t + \frac{\pi}{2}) = -2\sin(314t)]$

$\bar{A} = \sqrt{2}$ $[A(t) = \sqrt{2}\cos(314t)]$

$\bar{A} = -\sqrt{2}$ $[A(t) = \sqrt{2}\cos(314t + \pi) = -\sqrt{2}\cos(314t)]$

Esercizio 2.3. *Calcolare la funzione $A(t)$ somma delle seguenti funzioni sinusoidali* isofrequenziali

$$A(t) = 2\sqrt{2}\sin(314t) + \sqrt{2}\sin\left(314t + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(314t + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{6}\sin\left(314t - \frac{5}{6}\pi\right)$$

utilizzando il metodo dei fasori. [$R: \; A(t) \simeq 0.38\cos(314t)$]

ES. 1.1 **Esprimere la corrente $i(t)$ in termini di fasore nei seguenti tre casi:**

a) $i(t)=4\sin(\omega t-1.14)$ b) $i(t)=10\sin(\omega t-\pi)$ c) $i(t)=8\sin(\omega t+\pi/2)$

Risultato: a) $\bar{I}=-j4e^{-j1.14}$ b) $\bar{I}=-j10e^{-j\pi}$ c) $\bar{I}=-j8e^{j\frac{\pi}{2}}$

Scrivere i precedenti fasori in forma standard

a) $\bar{I}=-j4e^{-j1.14}=4e^{-j1.14}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}=4e^{-j2.71}\cong-3.63-j1.67$

b) $\bar{I}=-j10e^{-j\pi}=10e^{-j\pi}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}=10e^{-j\frac{3}{2}\pi}=j10$

c) $\bar{I}=-j8e^{j\frac{\pi}{2}}=8e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}=8$

- **Esercizio 4**

Determinare i fasori relativi alle seguenti funzioni sinusoidali

$f_1(t)=-3\sin(\omega t+\frac{\pi}{6})$ $f_2(t)=-\sin(\omega t+\frac{2\pi}{15})$

$f_3(t)=\cos(\omega t)-\sin(\omega t)$

$f_1(t)=10\cos(\omega t)$ $f_2(t)=-10\sin(\omega t)$

$f_3(t)=10\cos(\omega t)+10\sin(\omega t)$ $f_4(t)=-5\cos(\omega t-\frac{\pi}{3})$ $f_5(t)=\sqrt{\pi}\sin(\omega t-\frac{5}{6}\pi)$

$f_2(t)+f_4(t)+f_5(t)$

- **Esercizio 6**

Determinare le funzioni sinusoidali associate ai seguenti fasori

$F_1=10$ $F_2=j10$ $F_3=10-j10$ $F_4=-5e^{-j\frac{\pi}{3}}$

- **Esercizio 7**

Porre in forma standard le seguenti funzioni sinusoidali

$f_1(t)=\cos(\omega t)+\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)$

$f_2(t)=3\cos(t)+\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$

- **Esercizio 8**

Rappresentare graficamente i fasori relativi alle seguenti funzioni sinusoidali

$f_1=3\sin(\omega t)-2\cos(\omega t)$ $f_2(t)=-4\sin(\omega t+\frac{\pi}{6})$

• SCRIVERE LA FUNZIONE CHE CORRISPONDE AL SEGUENTE FASORE

$$\bar{A} = 2 - j3 \quad \overset{\omega}{\rightarrow} \quad \begin{array}{l} 1)\ A(t) = 2\cos\omega t + 3\sin\omega t \\ 2)\ A(t) = \sqrt{13}\cos\left(\omega t - \mathrm{atg}\frac{3}{2}\right) \end{array}$$

dimostrazione 1)

$$A(t) = Re\left(\bar{A}e^{j\omega t}\right) = Re\left[(2-j3)e^{j\omega t}\right] = Re\left[2e^{j\omega t} - j3e^{j\omega t}\right] =$$

$$= Re\left[2\left(\cos\omega t + j\sin\omega t\right) - j3\left(\cos\omega t + j\sin\omega t\right)\right] =$$

$$= Re\left[2\cos\omega t + 3\sin\omega t + j2\sin\omega t - j3\cos\omega t\right]$$

$$= 2\cos\omega t + 3\sin\omega t$$

dimostrazione 2)

$$\bar{A} = 2 - j3 = \sqrt{13}\,e^{-\mathrm{atg}\frac{3}{2}}$$

$$A(t) = Re\left(\bar{A}e^{j\omega t}\right) = Re\left[\sqrt{13}\,e^{-\mathrm{atg}\frac{3}{2}} \cdot e^{j\omega t}\right] = Re\left[\sqrt{13}\,e^{j\left(\omega t - \mathrm{atg}\frac{3}{2}\right)}\right]$$

$$= \sqrt{13}\cos\left(\omega t - \mathrm{atg}\frac{3}{2}\right)$$

NOTARE CHE

$$\sqrt{13}\cos\left(\omega t - \mathrm{atg}\frac{3}{2}\right) = \sqrt{13}\cos\left(\omega t + \mathrm{atg}\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{13}\sin\left(\omega t + \mathrm{atg}\frac{2}{3}\right)$$

- SCRIVERE IL FASORE CHE CORRISPONDE ALLA SEGUENTE FUNZIONE

$$A(t) = -3\cos\omega t - 4\sin\omega t \quad \rightarrow \quad \bar{A} = -3 + j4$$

- SCRIVERE I FASORI IN FORMA ESPONENZIALE

1) $\bar{A} = 3 + j4 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \\ \varphi = \mathrm{atg}\frac{4}{3} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{atg}\frac{3}{4} \end{cases}$

$\quad \hookrightarrow = 5e^{j\left(\mathrm{atg}\frac{4}{3}\right)} = 5e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{atg}\frac{3}{4}\right)}$

2) $\bar{A} = 3 - j4 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 5 \\ \varphi = -\mathrm{atg}\frac{4}{3} = \mathrm{atg}\frac{3}{4} - \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\quad \hookrightarrow = 5e^{-j\,\mathrm{atg}\frac{4}{3}} = 5e^{j\left(\mathrm{atg}\frac{3}{4} - \frac{\pi}{2}\right)}$

3) $\bar{A} = -3 + j4 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 5 \\ \varphi = -\mathrm{atg}\frac{4}{3} + \pi = \mathrm{atg}\frac{3}{4} + \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\quad \hookrightarrow = 5e^{j\left(\pi - \mathrm{atg}\frac{4}{3}\right)} = 5e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{atg}\frac{3}{4}\right)}$

4) $\bar{A} = -3 - j4 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 5 \\ \varphi = \mathrm{atg}\frac{4}{3} - \pi = -\mathrm{atg}\frac{3}{4} - \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\quad \hookrightarrow = 5e^{j\left(\mathrm{atg}\frac{4}{3} - \pi\right)} = 5e^{j\left(-\mathrm{atg}\frac{3}{4} - \frac{\pi}{2}\right)}$

- SCRIVERE LE FUNZIONI CORRISPONDENTI AI SEGUENTI FASORI

1) $\bar{A} = 3 + j4 \xrightarrow{\omega} \begin{cases} A(t) = 3\cos\omega t - 4\sin\omega t \\ \qquad = 5\cos\left(\omega t + \mathrm{atg}\frac{4}{3}\right) \end{cases}$

2) $\bar{A} = 3 - j4 \xrightarrow{\omega} \begin{cases} A(t) = 3\cos\omega t + 4\sin\omega t \\ \qquad = 5\cos\left(\omega t - \mathrm{atg}\frac{4}{3}\right) \end{cases}$

3) $\bar{A} = -3 + j4 \xrightarrow{\omega} \begin{cases} A(t) = -3\cos\omega t - 4\sin\omega t \\ \qquad = 5\cos\left(\omega t - \mathrm{atg}\frac{4}{3} + \pi\right) \end{cases}$

4) $\bar{A} = -3 - j4 \xrightarrow{\omega} \begin{cases} A(t) = -3\cos\omega t + 4\sin\omega t \\ \qquad = 5\cos\left(\omega t + \mathrm{atg}\frac{4}{3} - \pi\right) \end{cases}$

<u>ES. 1.6</u> - **Dati i seguenti fasori** $\overline{V_1} = 10e^{j\pi/6}$, $\overline{V_2} = 10e^{-j\pi/6}$, $\overline{V_3} = 5e^{-j\pi/3}$:

a) rappresentare nel piano complesso i fasori $\overline{V_1}, \overline{V_2}, \overline{V_3}$;

b) calcolare i fasori: $\overline{V_1} + \overline{V_2}, \overline{V_1} - \overline{V_2}, \overline{V_1} + \overline{V_3}, \overline{V_1} - \overline{V_3}$;

c) rappresentare nel piano complesso i fasori valutati al punto b)

d) rappresentare nel tempo le tensioni corrispondenti ai fasori dei punti a) e b),

Esempio 1 Effettuare il prodotto del seguente vettore: $\bar{I} = 2\text{A} \underline{/30°}$
per l'operatore vettoriale: $\bar{Z} = 50\ \Omega\ \underline{/20°}$

Soluzione *Prodotto*

All'operatore vettoriale $\bar{Z}$ sono state attribuite le dimensioni di una resistenza. Il suo prodotto per una corrente sarà perciò una tensione.

modulo: $V = Z \cdot I = 2 \cdot 50 = 100$ V

fase: $\varphi_V = \varphi_I + \varphi_Z = 30° + 20° = 50°$

$\bar{V} = V\underline{/\varphi} = 100\ \text{V}\ \underline{/50°}$

Esempio 2 Effettuare il rapporto tra i vettori $\bar{V}$ e $\bar{I}$

$\bar{V} = 200\ \text{V}\ \underline{/30°}$

$\bar{I} = 2\text{A}\ \underline{/50°}$

Soluzione *Rapporto*

modulo: $Z = \dfrac{V}{I} = \dfrac{200}{2} = 100\ \Omega$

fase: $\varphi_Z = \varphi_V - \varphi_I = 30° - 50° = -20°$

Si ricava l'operatore vettoriale

$\bar{Z} = Z\ \underline{/\varphi_Z} = 100\ \Omega\ \underline{/-20°}$

L'operatore vettoriale ottenuto come rapporto tra una tensione e una corrente ha le dimensioni di una resistenza e si misura in Ω.

1.2 Effettuare la rappresentazione polare e simbolica delle seguenti sinusoidi e calcolare la somma e la differenza.

$$v_1 = 142 \cos\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$v_2 = 35{,}35 \cos\left(1000t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Soluzione Dalle espressioni delle sinusoidi si ricavano i valori dei moduli, delle fasi e della pulsazione.

$$V_1 = 142 \text{ V}$$
$$\varphi_1 = \pi/2 \text{ rad} = 90^\circ$$
$$\omega = 1000 \text{ rad/s}$$
$$V_2 = 35{,}35 \text{ V}$$
$$\varphi_2 = -\pi/6 \text{ rad} = -30^\circ$$

L'operazione di somma per mezzo dei corrispondenti vettori è lecita poiché le due sinusoidi hanno la stessa frequenza.

La rappresentazione in forma polare risulta immediata

$$\bar{V}_1 = 142 \text{ V } \underline{/90^\circ}$$
$$\bar{V}_2 = 35{,}35 \text{ V } \underline{/-30^\circ}$$

mentre per la rappresentazione simbolica occorre effettuare il calcolo

$$\bar{V}_1 = 142(\cos 90 + j \text{ sen} 90) = 0 + j\,142 \text{ V}$$
$$\bar{V}_2 = 35{,}35(\cos -30 + j \text{ sen } -30) = 30 - j\,17{,}3 \text{ V}$$

Le operazioni di somma e differenza vengono effettuate per mezzo della rappresentazione simbolica.

Somma:

$$\bar{V}_S = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 = j142 + 30 - j17{,}3 = 30 + j124{,}7 \text{ V}$$

Ricaviamo modulo e fase del vettore corrispondente

$$V_S = \sqrt{30^2 + 124{,}7^2} = 128{,}25 \text{ V}; \qquad \varphi_{V_S} = \text{arctg}\frac{124{,}7}{30} = 76{,}4^\circ$$

Differenza:

$$\bar{V}_D = \bar{V}_1 - \bar{V}_2 = j142 - 30 + j17{,}3 = -30 + j159{,}3 \text{ V}$$

Modulo e fase della differenza:

$$V_D = 162 \text{ V} \qquad \varphi_{V_D} = 100{,}6^\circ$$

1.3 Effettuare il prodotto tra la corrente i e l'operatore vettoriale $\bar{Z}$.

Dati: $i = 2 \cos\left(314t + \dfrac{\pi}{4}\right)$; $Z = 40\ \Omega$; $\varphi_Z = 30°$

Soluzione Il vettore corrispondente alla corrente sinusoidale ha modulo e fase

$$I = 2\ \text{A}; \qquad \varphi_I = \frac{\pi}{4}\ \text{rad} = 45°$$

In forma polare

$$\bar{I} = 2\ \text{A}\ \underline{/45°}$$

Il prodotto risulta

$$\bar{V} = \bar{Z} \cdot \bar{I}$$
$$V = 2 \cdot 40 = 80\ \text{V}; \qquad \varphi_V = \varphi_I + \varphi_Z = 75°$$
$$\bar{V} = 80\ \text{V}\ \underline{/75°}$$

1.4 Effettuare il rapporto tra le seguenti sinusoidi

$$v = 198 \cos\left(314t + \frac{\pi}{12}\right); \qquad i = 2{,}83 \cos\left(314t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Soluzione 1 L'operazione di rapporto attraverso i corrispondenti vettori è lecita in quanto le due sinusoidi hanno la stessa frequenza.

$$V = 198\ V \qquad \varphi_V = 15°$$

$$I = 2{,}83\ \text{A} \qquad \varphi_I = -30°$$

$$Z = \frac{V}{I} = 70\ \Omega \qquad \varphi_Z = \varphi_V - \varphi_I = 45°$$

$$\bar{Z} = 70\ \Omega\ \underline{/45°}$$

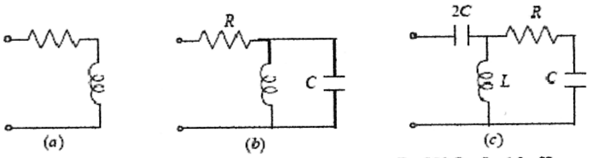
Soluzione 2 Metodo simbolico.

$$\bar{V} = V(\cos\varphi_V + j\ \text{sen}\ \varphi_V) = 191 + j51{,}25\ \text{V}$$
$$\bar{I} = I(\cos\varphi_V + j\ \text{sen}\ \varphi_V) = 2{,}45 - j1{,}41\ \text{A}$$
$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{191 + j51{,}25}{2{,}45 - j1{,}41} = 49{,}5 + j49{,}5\ \Omega$$
$$Z = \sqrt{49{,}5^2 + 49{,}5^2} = 70\ \Omega; \qquad \varphi_Z = \text{arctg}\ 1 = 45°$$

✓ impedenza e ammettenza

- determinare impedenze e ammettenze noti i parametri circuitali e la pulsazione
- determinare impedenza e ammettenza equivalente

ES. 1.2 Valutare (in coordinate cartesiane e polari) le impedenze viste ai capi dei morsetti:



(a) $R=10\,\Omega$ $L=1\,mH$ $\omega=10^4\ rad/s$

(b) $R=8\,\Omega$, $L=15\,mH$ $C=0.4\,mF$, $f=50\,Hz$

(c) $R=200\,\Omega$, $L=16\,mH$ $C=10\,\mu F$, $\omega=2.5\cdot10^3\ rad/s$

Risultato: a) $\dot{Z}=10+10j=10\sqrt{2}\exp(j\pi/4)\,\Omega$; b) $\dot{Z}=8+11.54j=14\exp(j0.965)\,\Omega$;
c) $\dot{Z}=8+20j=21.5\exp(j1.19)\,\Omega$;

ES. 1.3 **Le seguenti coppie di funzioni esprimono tensione e corrente relative ad un dato bipolo. Dire, nei tre casi, se si tratta di un resistore, un condensatore o un induttore e valutare il valore dei parametri corrispondenti R, C o L**

a) $v(t)=15\cos(400t+1.2)$, $i(t)=3\sin(400t+1.2)$;
b) $v(t)=8\cos(900t-\pi/3)$, $i(t)=2\sin(900t+2\pi/3)$;
c) $v(t)=20\cos(250t+\pi/3)$, $i(t)=5\sin(250t+5\pi/6)$;

Esempio 2 Con riferimento al circuito di fig. 4.2.11 determinare l'impedenza equivalente.

Dati: $R_1=20\ \Omega$; $X_1=20\ \Omega$
$R_2=30\ \Omega$; $X_2=40\ \Omega$

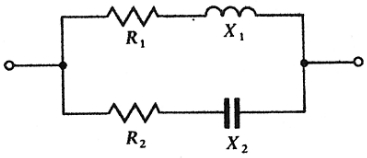


Fig. 4.2.11

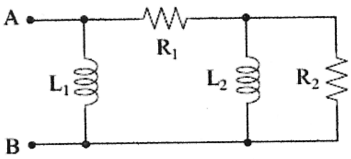
Soluzione

$$\bar{Z}_1=20+j20\ \Omega$$
$$\bar{Z}_2=30-j40\ \Omega$$
$$\bar{Z}_{eq}=\frac{\bar{Z}_1\cdot\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1+\bar{Z}_2}=\frac{(20+j20)\,(30-j40)}{50-j20}=\frac{1400-j200}{50-j20}$$

Semplifichiamo e razionalizziamo

$$\bar{Z}_{eq}=\frac{140-j20}{5-j2}\,\frac{5+j2}{5+j2}=\frac{740+j180}{5^2+2^2}=25{,}5+j6{,}2\ \Omega$$
$$Z_{eq}=\sqrt{25{,}5^2+6{,}2^2}=26{,}24\ \Omega$$
$$\varphi_Z=\text{arctg}\frac{6{,}2}{25{,}5}=13{,}6°$$

Esercizio n. 1

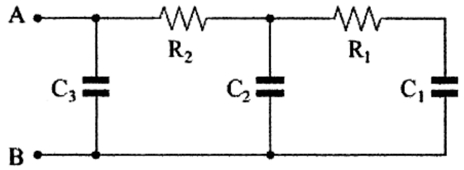


$R_1 = 4\ \Omega$
$R_2 = 8\ \Omega$
$L_1 = 20$ mH
$L_2 = 8$ mH
$\omega = 1000$ rad/s

Determinare l'impedenza e l'ammettenza del bipolo A-B.

Risultati
Z = 5 + 5j **Y** = 0.1 – 0.1j

Esercizio n. 2

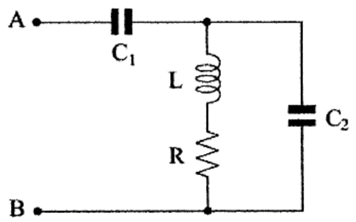


$R_1 = 40\ \Omega$
$R_2 = 25\ \Omega$
$C_1 = 50\ \mu F$
$C_2 = 10\ \mu F$
$C_3 = 4\ \mu F$
$\omega = 1000$ rad/s

Determinare l'impedenza e l'ammettenza del bipolo A-B.

Risultati
$\mathbf{Z} = 40 - 30j$ $\mathbf{Y} = 0.016 + 0.012j$

Esercizio n. 3

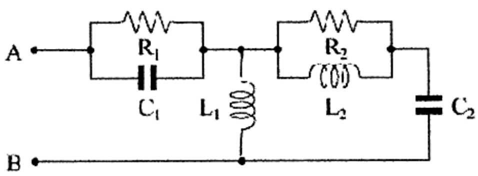


$R = 1\ \Omega$
$L = 2$ mH
$C_1 = 250\ \mu F$
$C_2 = 300\ \mu F$
$\omega = 1000$ rad/s

Determinare l'impedenza e l'ammettenza del bipolo A-B.

Risultati
$\mathbf{Z} = 4 - 2j$ $\mathbf{Y} = 0.2 + 0.1j$

Esercizio n. 4

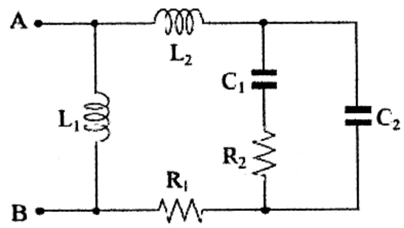


$R_1 = 10\ \Omega$ $C_1 = 100\ \mu F$
$R_2 = 8\ \Omega$ $C_2 = 250\ \mu F$
$L_1 = 16$ mH
$L_2 = 16$ mH $\omega = 500$ rad/s

Determinare l'impedenza del bipolo A-B.

Risultato
$\mathbf{Z} = 16 - 4j$

Esercizio n. 5



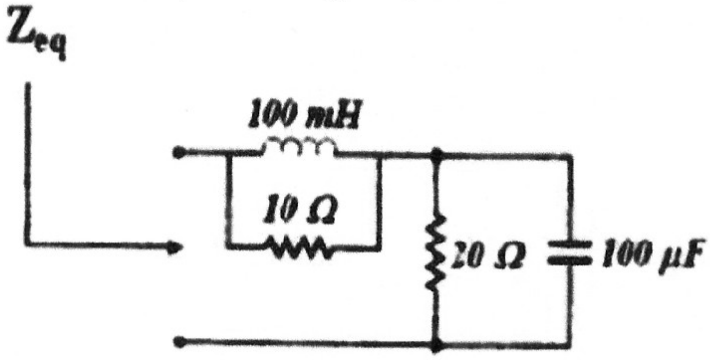
$R_1 = 4\ \Omega$
$R_2 = 8\ \Omega$
$L_1 = 2.5$ mH
$L_2 = 4$ mH
$C_1 = 125\ \mu F$
$C_2 = 125\ \mu F$
$\omega = 2000$ rad/s

Determinare l'ammettenza del bipolo A-B.

Risultato
$\mathbf{Y} = 0.1 - 0.3j$

- **Esercizio 19**

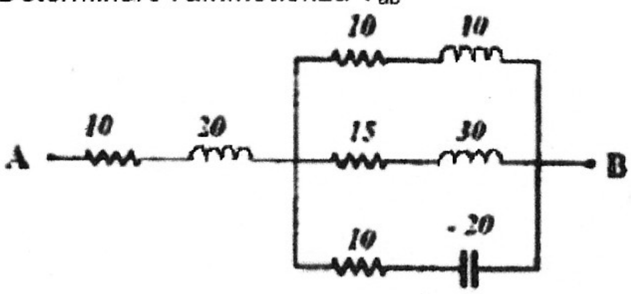
Calcolare l'impedenza Z_{eq} alla pulsazione ω=100 rad/s



Risposta : Z_{eq} = (315/13+j15/13)Ω

- **Esercizio 20**

Determinare l'ammettenza Y_{ab}



Risposta : Y_{ab}=(0.02-j0.0245)S

2.2 Nel circuito di figura 4.2.19 si determinino le correnti I_1, I_2, I_3 e la tensione V_{AC}.
Dati: $R_1 = 10\ \Omega$; $X_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = 20\ \Omega$; $X_2 = 10\ \Omega$
$R_3 = 30\ \Omega$; $X_3 = 40\ \Omega$; $V_{BC} = 50\ \text{V}$.

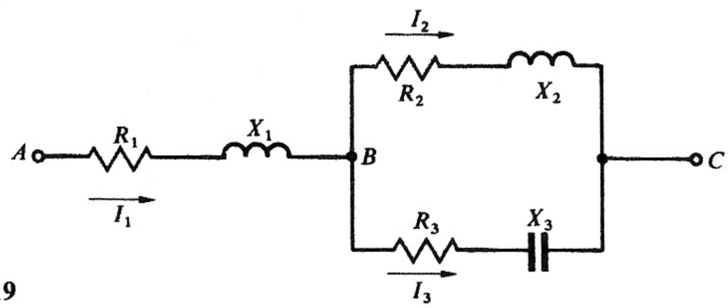


Fig. 4.2.19

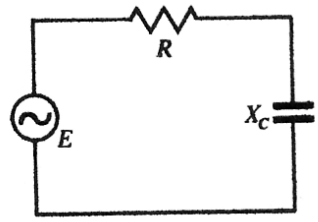
✓ partitori di tensione e di corrente

E 4.12 Nel circuito in figura determinare V_C e V_R

Dati: $R = 10\ \Omega$

$X_C = 15\ \Omega$

$E = 30\ \text{V}$



E 4.13 Nel circuito in figura determinare le tre correnti.

Dati: $e = \frac{311}{\sqrt{2}} \cos 314t$

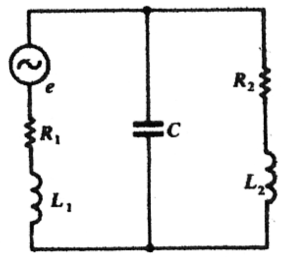
$R_1 = 2\ \Omega$

$R_2 = 5\ \Omega$

$L_1 = 0{,}0159\ \text{H}$

$L_2 = 0{,}08\ \text{H}$

$C_1 = 120\ \mu\text{F}$



[$\bar{I}_1 = 1{,}65\ \text{A}\ \underline{/6{,}5°}$; $\bar{I}_2 = 8{,}43\ \text{A}\ \underline{/-80{,}8°}$; $\bar{I}_c = 8{,}14\ \text{A}\ \underline{/88°}$]

E 4.14 Nel circuito in figura determinare il valore delle tensioni ai capi di L, C_2 e C_1 applicando la regola dei partitori

Dati: $e = \frac{28{,}28}{\sqrt{2}} \cos 628t$

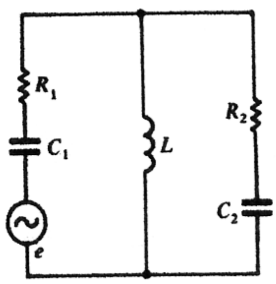
$R_1 = 15\ \Omega$

$R_2 = 10\ \Omega$

$L = 0{,}04\ \text{H}$

$C_1 = 159\ \mu\text{F}$

$C_2 = 79\ \mu\text{F}$

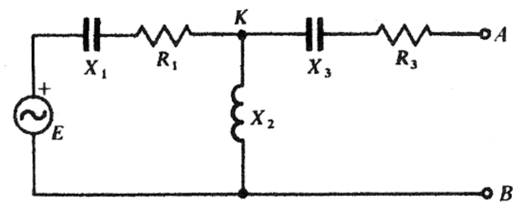


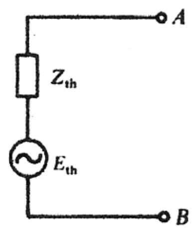
✓ equivalente Thévenin

2.7 Del circuito di fig. 4.2.28*a* ricavare il circuito equivalente di Thevenin tra i punti *A*-*B*. Calcolare inoltre la corrente che attraversa un filo che pone in cortocircuito i due punti.

Dati: $E=10$ V; $\varphi_E=-60°$; $R_1=2\ \Omega$; $R_3=3\ \Omega$; $X_1=2\ \Omega$; $X_2=2\ \Omega$; $X_3=5\ \Omega$.

a)





b)

Fig. 4.2.28

Soluzione Esprimendo la tensione *E*, in forma simbolica

$$\bar{E}=10(\cos 60°-j\,\mathrm{sen}\,60°)=5-j8{,}6\ \mathrm{V}$$

Dopo aver applicato il teorema di Thevenin, il circuito si presenta come in fig. 4.2.28*b*. Il valore di $\bar{E}_{th}$ è la tensione $\bar{V}_{AB}$ a vuoto, che coincide con $\bar{V}_{KB}$. Essa vale

$$\bar{E}_{th}=\bar{V}_{KB}=\bar{E}\cdot\frac{\bar{X}_2}{\bar{R}_1+\bar{X}_1+\bar{X}_2}=(5-j8{,}6)\cdot\frac{j2}{2+j2-j2}=8{,}6+j5\ \mathrm{V}$$

$$E_{th}=10\ \mathrm{V};\ \varphi_{E_{th}}=\mathrm{arctg}\frac{5}{8{,}6}=30°$$

Z_{th} è l'impedenza vista dai punti *A*-*B*, dopo aver cortocircuitato il generatore di tensione

$$\bar{Z}_{th}=(R_3-jX_3)+\frac{(R_1-jX_1)\cdot jX_2}{R_1-jX_1+jX_2}$$

Sostituendo i valori

$$\bar{Z}_{th}=3-j5+\frac{(2-j2)\cdot j2}{2}=3-j5+2+j2=5-j3\ \Omega$$

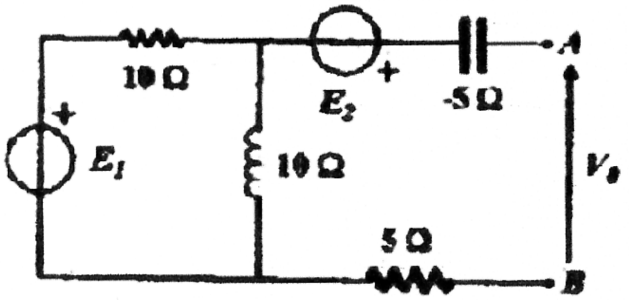
La corrente di corto circuito sarà

$$\bar{I}_{cc}=\frac{\bar{E}_{th}}{\bar{Z}_{th}}=\frac{8{,}6+j5}{5-j3}=\frac{(8{,}6+j5)(5+j3)}{25+9}=0{,}823+j1{,}49$$

$$I_{cc}=1{,}7\ \mathrm{A};\quad \varphi_{I_{cc}}=\mathrm{arctg}\frac{1{,}49}{0{,}823}=61°$$

- **Esercizio 29**

Noti i generatori $E_1=10\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$ V e E_2=10V. Rappresentare con Thevenin il bipolo visto dai morsetti A e B

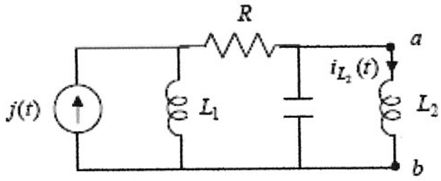


Risposta : V_0=20V; Z_{eq}=5Ω

Applicazione del teorema di Thévenin alla soluzione delle reti

(in questo esercizio: impedenze, partitore di corrente e, naturalmente, teorema di Théveniv)

<u>ES. 2.3</u> - Applicando il teorema di Thévenin, valutare corrente e tensione nell'induttore L_2.



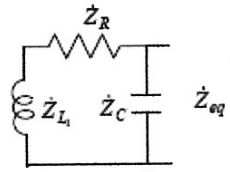
$j(t) = 10\cos(100t + 0.35)$ A
$R = 4\,\Omega$, $C = 3$ mF,
$L_1 = 2$ mH, $L_2 = 5$ mH

Trasformiamo preliminarmente la rete in una rete di impedenze:

$$\bar{J} = 10e^{j0.35}, \quad Z_C = -3.33j, \quad \dot{Z}_{L1} = 0.2j, \quad \dot{Z}_R = 4, \quad \dot{Z}_{L2} = 0.5j$$

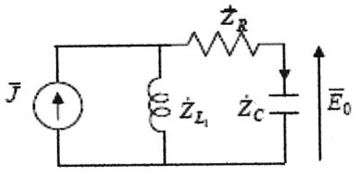
L'impedenza equivalente nel circuito di Thévenin si valuta risolvendo la rete seguente:

$$\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_C \,//(\dot{Z}_{L_1} + \dot{Z}_R) = 1.721 - j1.985\,\Omega.$$



La tensione a vuoto, invece, si può calcolare a partire dalla corrente che circola in $\dot{Z}_C$, a sua volta ottenuta con un partitore di corrente:

$$\overline{E}_0 = \dot{Z}_C \bar{I}_C = \dot{Z}_C \bar{J}\frac{\dot{Z}_{L_1}}{\dot{Z}_{L_1} + \dot{Z}_C + \dot{Z}_R} = 0.693 + j1.114\ \Omega.$$



Risolvendo la rete equivalente ottenuta, si ha che

$$\bar{I}_{L_2} = \frac{\overline{E}_0}{\dot{Z}_{L_2} + \dot{Z}_{eq}} = -0.089 + j0.570 = 0.577e^{j1.726}\ A.$$

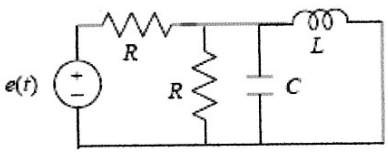
L'andamento della corrente nel tempo è allora dato da:

$$i_{L_2}(t) = 0.577\cos(100t + 1.726)\text{ A}$$

Si ha quindi:

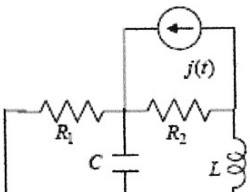
$$\overline{V}_{L_2} = \dot{Z}_{L_2}\bar{I}_{L_2} = 0.289e^{-j2.986}\text{ A} \quad \Leftrightarrow \quad v_{L2}(t) = 0.289\cos(100t - 2.986)\text{ V}$$

<u>ES. 2.5</u> - Applicando il teorema di Thévenin, valutare la tensione ai capi del parallelo *R-C* in figura.



$e(t) = 5\ \sin(1000t + \pi/3)\ V$
$R = 0.21\,\Omega$, $L = 1.12$ mH
$C = 1.23$ mF.

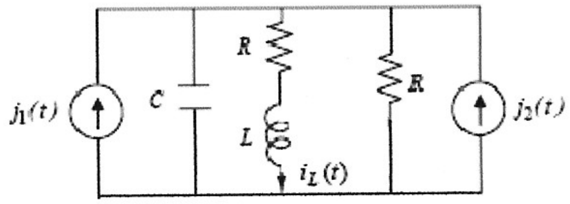
<u>ES. 2.8</u> - Applicando il teorema di Thévenin, valutare la tensione ai capi del condensatore *C*.



$j(t) = 2\sqrt{2}\cos(20t + 0.23)\ A$
$R_1 = 12\,\Omega$ $R_2 = 2\,\Omega$
$L = 0.2\,H$ $C = 0.1\,F$

✓ principio di sovrapposizione degli effetti

ES. 2.4 - Con riferimento al seguente circuito valutare la corrente $i_L(t)$.



$j_1(t) = -10\sin(1000t)\ A$
$j_2(t) = 10\cos(1000t)\ A$
$R = 2\ \Omega$
$L = 2\ \mathrm{mH}$
$C = 1\ \mathrm{mF}$

Passando al dominio dei fasori si avrà la rete di impedenze:

$$\bar{J}_1 = j10\ A,\quad \bar{J}_2 = 10\ A,\quad \dot{Z}_C = -j\ \Omega,\quad \dot{Z}_{RL} = R + j\omega L = 2 + j2\ \Omega,\quad \dot{Z}_R = R = 2\ \Omega.$$

Questa rete può essere risolta con la sovrapposizione degli effetti. Il contributo del solo generatore $\bar{J}_1$ si ottiene dalla rete in cui $\bar{J}_2$ è stato sostituito con un circuito aperto:

$$\bar{I}_L' = \bar{J}_1\frac{\dot{Z}_{RC}}{\dot{Z}_{RC} + \dot{Z}_{RL}} = 3.33\ \mathrm{A},\quad \textit{avendo posto}\quad \dot{Z}_{RC} = \frac{\dot{Z}_R\dot{Z}_C}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_C} = 0.4\text{-}j0.8\ \Omega$$

Il contributo del solo generatore $\bar{J}_2$ si ottiene dalla rete in cui $\bar{J}_1$ è stato sostituito con un circuito aperto:

$$\bar{I}_L'' = \bar{J}_2\frac{\dot{Z}_{RC}}{\dot{Z}_{RC} + \dot{Z}_{RL}} = -j3.33\ \mathrm{A}.$$

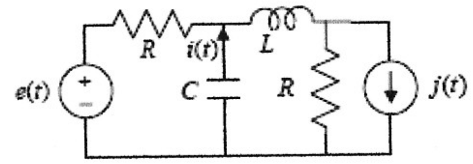
Si ha, quindi

$$\bar{I}_L = \bar{I}_L' + \bar{I}_L'' = 3.33(1 - j) = 4.71\exp(-0.78j)\ \mathrm{A}$$

a cui corrisponde, nel tempo la corrente

$$i_L(t) = 4.71\cos(1000t - 0.78)\quad \mathrm{A}$$

ES. 2.9 - Valutare la corrente che circola nel condensatore



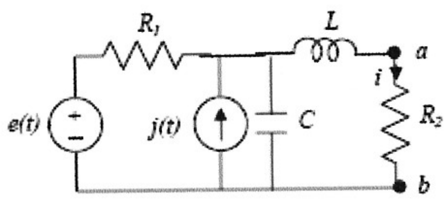
$j(t) = 2\sqrt{2}\sin(2\pi ft + 0.12)\ A,$
$e(t) = 10\sqrt{2}\cos(2\pi ft)\ V,\ f = 50\ Hz$
$R = 1\ \Omega,\ C = 1\ mF,\ L = 3\ mH$

Risultato: $i(t) = 3.15\sin(2\pi ft + 0.23)\ \mathrm{A}$

ES. 2.11 - Con riferimento alla seguente rete in regime sinusoidale, valutare:

a) il circuito equivalente di Thévenin ai capi di R_2

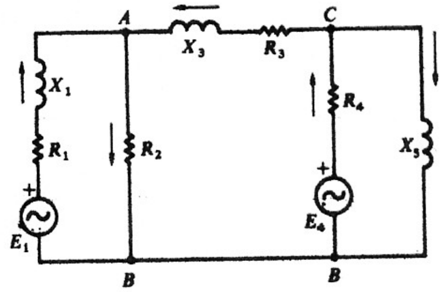
b) la corrente circolante in R_2



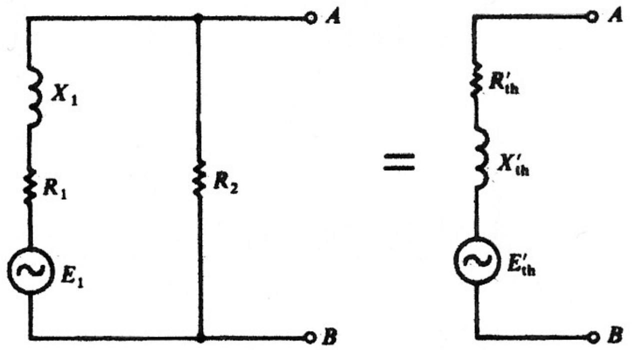
$e(t) = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/3)\ V,$
$j(t) = \sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4)\ A,\quad \omega = 10^3\ rad/s$
$R_1 = 1.2\ \Omega,\ R_2 = 3.3\ \Omega,$

2.8 Nel circuito in figura determinare la corrente in ogni ramo.

Dati $E_1 = 20\ \text{V}\ \underline{/0^\circ}$
$E_4 = 30\ \text{V}\ \underline{/0^\circ}$
$R_1 = 20\ \Omega$
$X_1 = 30\ \Omega$
$R_2 = 20\ \Omega$
$R_3 = 10\ \Omega$
$X_3 = 10\ \Omega$
$R_4 = 20\ \Omega$
$X_5 = 30\ \Omega$



Soluzione Applicando il teorema di Thevenin tra i punti A e B si ottiene

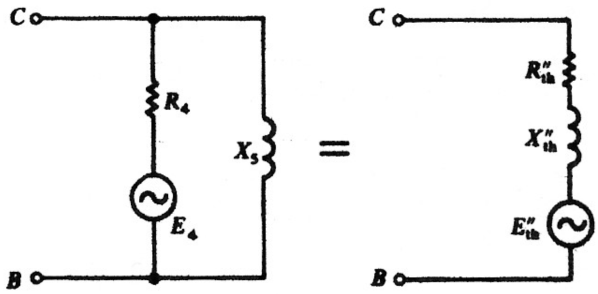


$$\bar{E}'_{th} = \frac{\bar{E}_1 \cdot R_2}{R_1 + jX_1 + R_2} = \frac{20 \cdot 20}{40 + j30} = 6{,}4 - j4{,}8\ \text{V}$$

$$\bar{E}'_{th} = 8\ \text{V}\ \underline{/-37^\circ}$$

$$\bar{Z}'_{th} = \bar{Z}_1 // R_2 = \frac{(20 + j30) \cdot 20}{20 + j30 + 20} = 13{,}6 + j4{,}8\ \Omega$$

Ripetendo lo stesso procedimento tra i punti C-B

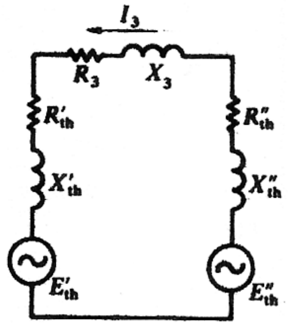


$$\bar{E}''_{th} = \frac{\bar{E}_4 \cdot jX_5}{R_4 + jX_5} = \frac{30 \cdot j30}{20 + j30} = 20{,}77 + j13{,}85\ \text{V}$$

$$\bar{E}''_{th} = 25\ \text{V}\ \underline{/33{,}7^\circ}$$

$$\bar{Z}''_{th} = R''_{th} + jX''_{th} = \frac{R_4 \cdot jX_5}{R_4 + jX_5} = \frac{20 \cdot j30}{20 + j30} = 13{,}8 + j9{,}23\ \Omega$$

Il circuito totale assume l'aspetto seguente



La corrente I_3 risulta

$$\overline{I}_3 = \frac{\overline{E}''_{th} - \overline{E}'_{th}}{\overline{Z}'_{th} + \overline{Z}''_{th} + \overline{Z}_3} = \frac{20{,}77 + j\,13{,}85 - 6{,}4 + j\,4{,}8}{13{,}6 + j\,4{,}8 + 13{,}8 + j\,9{,}2 + 10 + j\,10} =$$
$$= 0{,}5 + j\,0{,}179 \text{ A}$$
$$I_3 = 0{,}53 \text{ A } \underline{/19{,}7^\circ}$$

La tensione $\overline{V}_{AB}$ risulta

$$\overline{V}_{AB} = \overline{E}'_{th} + \overline{Z}'_{th}\overline{I}_3 = 6{,}4 - j\,4{,}8 + (13{,}6 + j\,4{,}8)(0{,}5 + j\,0{,}179) = 12{,}3 \text{ V}$$
$$\overline{V}_{AB} = 12{,}3 \text{ V } \underline{/0^\circ}$$

La tensione $\overline{V}_{CB}$ risulta

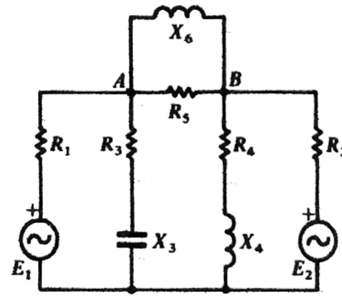
$$\overline{V}_{CB} = \overline{E}''_{th} - \overline{Z}''_{th}\overline{I}_3 = 20{,}77 + j\,13{,}85 - (13{,}8 + j\,9{,}23)(0{,}5 + j\,0{,}179) =$$
$$= 15{,}5 + j\,6{,}77 \text{ V}$$
$$\overline{V}_{CB} = 16{,}9 \text{ V } \underline{/23{,}6^\circ}$$

Le correnti nei vari rami si calcolano facilmente

$$\overline{I}_5 = \frac{\overline{V}_{CB}}{jX_5} = \frac{15{,}5 + j\,6{,}77}{j\,30} = 0{,}225 - j\,0{,}51 \text{ A}$$
$$I_5 = 0{,}564 \text{ A } \underline{/-66{,}4^\circ}$$
$$\overline{I}_4 = \frac{\overline{E}_4 - \overline{V}_{CB}}{\mathrm{R}_4} = \frac{30 - (15{,}5 + j\,6{,}77)}{20} = 0{,}725 - j\,0{,}338 \text{ A}$$
$$\overline{I}_4 = 0{,}8 \text{ A } \underline{/-25^\circ}$$
$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{E}_1 - \overline{V}_{AB}}{\overline{Z}_1} = \frac{20 - 12{,}3}{20 + j\,30} = 0{,}112 - j\,0{,}177$$
$$\overline{I}_1 = 0{,}213 \text{ A } \underline{/-56^\circ}$$
$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{V}_{AB}}{R_2} = \frac{12{,}3}{20} = 0{,}616 \text{ A}$$
$$\overline{I}_2 = 0{,}616 \text{ A } \underline{/0^\circ}$$

E 4.36 Nel circuito in figura determinare $\bar{I}_3$, $\bar{I}_4$, $\bar{V}_{AB}$.

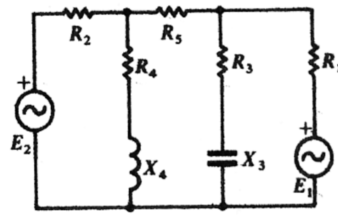
Dati: $\bar{E}_1 = 30$ V; $\varphi = 0$
$\bar{E}_2 = 20$ V; $\varphi = 45°$
$R_1 = 20\ \Omega$
$R_2 = 30\ \Omega$
$R_3 = 10\ \Omega$
$R_4 = 30\ \Omega$
$R_5 = 20\ \Omega$
$X_4 = 40\ \Omega$
$X_3 = 20\ \Omega$
$X_6 = 20\ \Omega$



[$I_3 = 0{,}837$ A; $\varphi_{I_3} = 56°$; $I_4 = 0{,}241$ A; $\varphi_{I_4} = -43°$; $V_{AB} = 8{,}12$ V; $\varphi_{V_{AB}} = 145°$]

E 4.37 Nel circuito in figura determinare le correnti $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_5$.

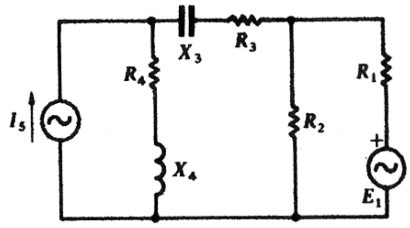
Dati: $\bar{E}_1 = 30$ V; $\varphi = 0$
$\bar{E}_2 = 20$ V; $\varphi = -45°$
$R_1 = 20\ \Omega$
$R_2 = 30\ \Omega$
$R_3 = 10\ \Omega$
$R_4 = 30\ \Omega$
$R_5 = 10\ \Omega$
$X_4 = 40\ \Omega$
$X_3 = 20\ \Omega$



[$I_1 = 0{,}814$ A; $\varphi_{I_1} = 28{,}7°$; $I_2 = 0{,}24$ A; $\varphi_{I_2} = 264{,}5°$; $I_5 = 0{,}12$ A; $\varphi_{I_5} = 137°$]

E 4.38 Nel circuito in figura determinare la corrente $\bar{I}_4$.

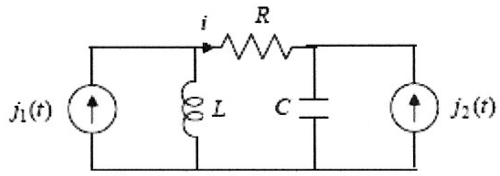
Dati: $\bar{E}_1 = 20$ V
$\bar{I}_5 = 0{,}8$ A; $\varphi = 45°$
$R_1 = 10\ \Omega$
$R_2 = 40\ \Omega$
$R_3 = 12\ \Omega$
$R_4 = 20\ \Omega$
$X_3 = 15\ \Omega$
$X_4 = 15\ \Omega$



[$I_4 = 0{,}9$ A $\underline{/4{,}5°}$]

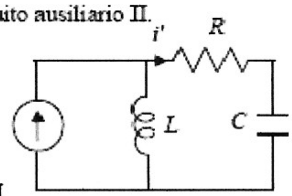
- reti elettriche in regime periodico
    - rete con gen sinusoidali non isofrequenziali

ES. 4.2 **-Con riferimento al seguente circuito, valutare corrente i che attraversa il resistore *R***

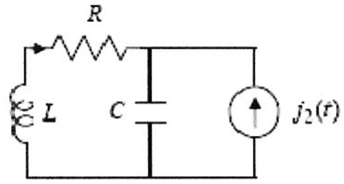


$j_1(t) = \cos(100t)\ A$
$j_2(t) = sin(200t)\ A$
$R = 1\,\Omega \quad L = 1\,mH$
$C = 0.1\,mF$

Poiché i generatori non sono isofrequenziali, cioè $\omega_1 \neq \omega_2$, il circuito non ammette un regime sinusoidale ma un regime periodico e quindi non è possibile trasformare la rete in una rete di impedenze. Tuttavia, essendo la rete lineare, si può applicare la sovrapposizione degli effetti e ricavare la corrente che circola in R come $i = i' + i''$, dove i' si ricava dal circuito ausiliario I e i'' dal circuito ausiliario II.



I



Ciascuna di queste due reti può essere rappresentata da una rete di impedenze:

rete I: $\overline{J}_1 = 1, \quad \dot{Z}'_C = -100j, \quad \dot{Z}'_L = 0.1j, \quad \dot{Z}'_R = 1.$

rete II: $\overline{J}_2 = 1, \quad \dot{Z}''_C = -50j, \quad \dot{Z}''_L = 0.2j, \quad \dot{Z}''_R = 1.$

Applicando i partitori di corrente:

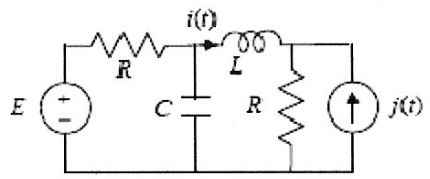
$$\overline{I}' = \overline{J}_1 \frac{\dot{Z}'_L}{\dot{Z}'_L + \dot{Z}'_C + \dot{Z}'_R} = 10^{-3} e^{j3.13} \quad \Rightarrow \quad i'(t) = \cos(100t + 3.13)\ mA.$$

$$\overline{I}'' = -\overline{J}_2 \frac{\dot{Z}''_C}{\dot{Z}''_C + \dot{Z}''_L + \dot{Z}''_R} = e^{j3.12} \quad \Rightarrow \quad i''(t) = sin(200t + 3.12)\ A.$$

Quindi la corrente che circola in R sarà

$$i(t) = i'(t) + i''(t) = 10^{-3}\cos(100t + 3.13) + sin(200t + 3.12)\ A.$$

ES. 4.3 **-Con riferimento al seguente circuito, valutare la corrente *i(t)*.**



$j(t) = J_m \cos\omega t$
$J_m = 1\,A, \ \omega = 10^6\,rad/s$
$E = 1V$
$R = 1\Omega,\ L = 1mH,\ C = 1mF$

La corrente $i(t)$ si può calcolare con la sovrapposizione degli effetti nel dominio del tempo:

$$i(t) = i_1 + i_2(t).$$

Il contributo i_1 è dovuto al solo generatore di tensione e si ottiene tenendo conto che, in regime stazionario, l'induttore si riduce ad un corto-circuito ed il condensatore ad un circuito aperto: $i_1 = E/2R = 1/2\,A$.

Il contributo $i_2(t)$ è dovuto al solo generatore $j(t)$ e si ottiene risolvendo la rete in regime sinusoidale:

$$\overline{J} = 1, \ Z_R = 1, \ Z_C = -j10^{-3}, \ Z_L = j10^3.$$

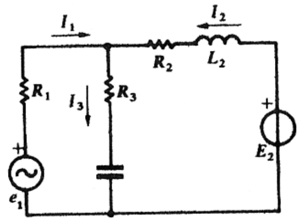
Posto $Z_a = Z_R \,//\, Z_C + Z_L$, la corrente I_2 si ottiene con un semplice partitore di corrente:

$$I_2 = -\overline{J}\frac{Z_R}{Z_R + Z_a} \approx -10^{-6} + j10^{-3} \approx j10^{-3} = 10^{-3}e^{j\pi/2} \quad \Rightarrow \quad i_2(t) = -10^{-3} sin(\omega t)\ A.$$

- rete con gen in continua e sinusoidale

2.9 Nel circuito in figura si determini l'andamento nel tempo della corrente I_2

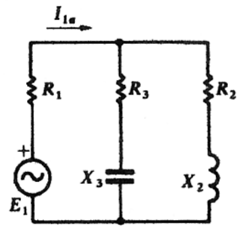
Dati: $e_1 = 14{,}1 \cos 314t$
$E_2 = 10$ V
$R_1 = 20\ \Omega$
$R_2 = 15\ \Omega$
$R_3 = 30\ \Omega$
$L_2 = 31{,}9$ mH
$C_3 = 318\ \mu$F



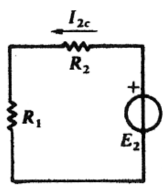
Nel caso in cui un circuito è alimentato con generatori a frequenza diversa (nel caso in esame e_1 è a 50 Hz mentre E_2 è in corrente continua, cioè con frequenza zero) si procede applicando la sovrapposizione degli effetti.
Si scompone cioè il circuito in tanti sottocircuiti, ognuno alimentato da generatori isofrequenziali, attribuendo alle impedenze i valori corrispondenti alla frequenza di alimentazione. Nel nostro caso si scompone in due circuiti: uno alimentato dal generatore a $f = 50$ Hz, che assume l'aspetto e i dati seguenti.

Dati: $E_1 = 14{,}1$ V

$$X_3 = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 318 \cdot 10^{-6}} = 10\ \Omega$$
$$X_2 = \omega L = 314 \cdot 31{,}9 \cdot 10^{-3} = 10\ \Omega$$
$$R_1 = 20\ \Omega$$
$$R_2 = 15\ \Omega$$
$$R_3 = 30\ \Omega$$



La tensione $\dot{E}_1$ viene assunta con fase zero, mentre il generatore E_2 viene cortocircuitato.
L'altro circuito, riguardante la corrente continua, assume l'aspetto di figura in quanto il condensatore si comporta come un circuito aperto, mentre l'induttanza equivale ad un corto circuito.
Per ogni circuito così scomposto calcoliamo il dato che interessa, nel nostro caso la corrente I_2. Con riferimento al circuito in alternata, calcoliamo l'impedenza equivalente.



$$\bar{Z}_{eq} = R_1 + \bar{Z}_3 // \bar{Z}_2 = 20 + \frac{(30 - j\,10)(15 + j\,10)}{30 - j\,10 + 15 + j\,10} = 32{,}2 + j\,3{,}\bar{3}\ \Omega$$

La corrente $\bar{I}_{1a}$ risulta

$$\bar{I}_{1a} = \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{14{,}1}{32{,}2 + j\,3{,}\bar{3}} = 0{,}433 - j\,0{,}045 \text{ A}$$
$$I_{1a} = 0{,}435 \text{ A } \underline{/-6^\circ}$$

La corrente I_{2a} si calcola applicando la regola del partitore di corrente.

$$\bar{I}_{2a} = \bar{I}_1 \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2} = (0{,}433 - j\,0{,}045) \frac{30 - j\,10}{45} = 0{,}278 - j\,0{,}126 \text{ A}$$
$$I_{2a} = 0{,}3 \text{ A } \underline{/-24^\circ}$$

Per quanto riguarda il circuito in corrente continua, la corrente I_{2c} risulta

$$I_{2c} = \frac{E_2}{R_1 + R_2} = \frac{10}{35} = 0{,}286 \text{ A}$$

Perciò I_2 (t) $= \cdots$

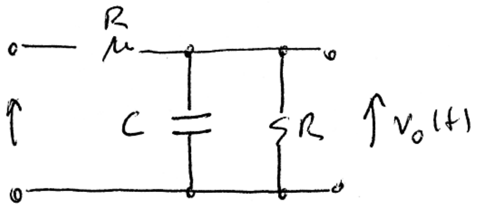
- rete con gen in continua e sinusoidali isofrequenziali

- rete con gen in continua e sinusoidali non isofrequenziali

la rete va scomposta in …. sottoreti, le impedenze di ciascuna sottorete si valutano … ecc

Esercizi finali

– DETERMINARE LA RISPOSTA IN FREQ. DEL SEGUENTE CIRCUITO

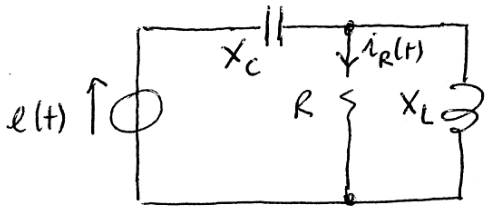


$R = 4\,\Omega$
$C = 1\,F$

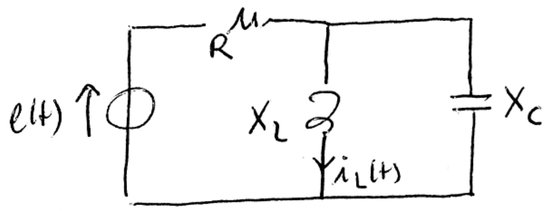
– DETERMINARE LA RISPOSTA AL SEGNALE SINUSOIDALE $v_i(t)$ APPLICATO AL PRECEDENTE CIRCUITO.

$$v_i(t) = 10 \sin 0{,}5t$$

–



$e(t) = 100 \sin \omega t$
$X_L = |X_C| = R = 20\,\Omega$
$f = 50\,Hz$
DETERMINARE $i_R(t)$ e L



$e(t) = 50 \sin \omega t$
$R = 5\,\Omega \quad X_L = 10\,\Omega \quad |X_C| = 20\,\Omega$
$f = 50\,Hz$
DETERMINARE $i_L(t)$ e C

– DETERMINARE $i(t)$

$v(t) = 400 \sin(100t - \pi/4)\ V$
$\bar{Z} = 2 - j\ \Omega$

$v(t) = 20 \sin\left(40t + \frac{5}{6}\pi\right)\ V$
$\bar{Z} = 1 + j3\ \Omega$

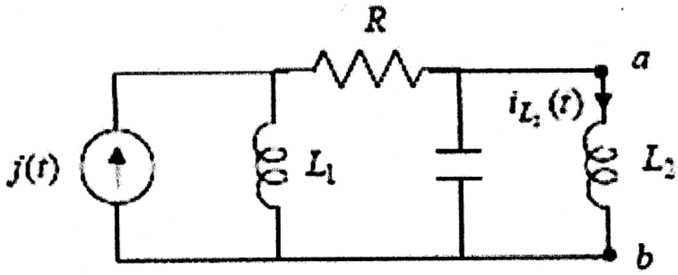
– DETERMINARE L'AMPIEZZA DELLA SINUSOIDE RISULTANTE

$i_1(t) = 10 \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \sin 4t$
$i_2(t) = \sin 3t + 2 \cos 3t$

$i_1(t) = -5 \sin 2t - 2\cos\left(2t - \pi/4\right)$
$i_2(t) = \cos 5t - 2 \sin 5t$

Es 1

Applicando il teorema di Thèvenin, valutare corrente e tensione nell'induttore L_2.



$j(t) = 10\ \sin(100t - 0.35)$ A

$R = 4\,\Omega$, $C = 3\,\text{mF}$,

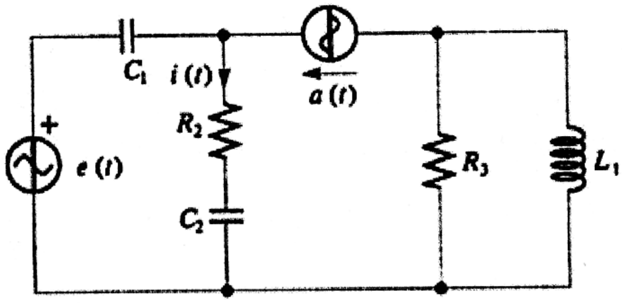
$L_1 = 2$ mH, $L_2 = 5$ mH

Es 2 e 3

Calcolare l'andamento temporale della corrente i(t) indicata nel circuito in fig. nell'ipotesi che sia

$\omega 1 = \omega 2 = 2\pi * 50$ rad/s

$\omega 1 = 2\pi * 50$ rad/s $\quad \omega 2 = 2 * \omega 1$



$e(t) = 100\ \text{sen}(\omega_1 t) \qquad a(t) = 5\ \text{sen}(\omega_2 t + \pi/3)$

$C_1 = 1\,\mu F \quad C_2 = 10\,\mu F \quad L_1 = 10\,\text{mH} \quad R_2 = 100\,\Omega \quad R_3 = 10\,\Omega$