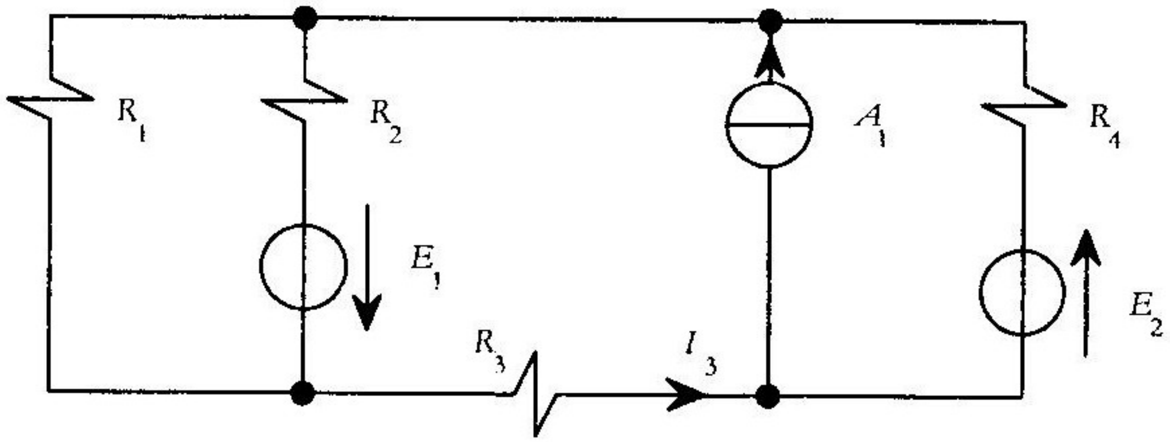
Problema 4

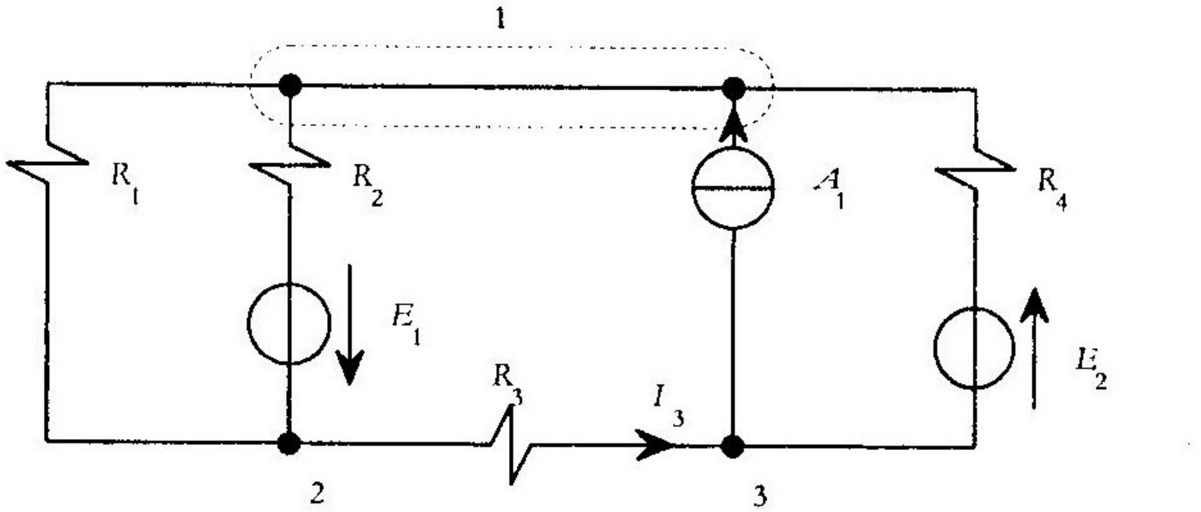
Nel circuito in figura determinare la corrente I_3.

Dati: $E_1=E_2=10$ V; $A_1=1$ mA; $R_1=R_2=R_3=R_4=1$ kΩ.



Soluzione

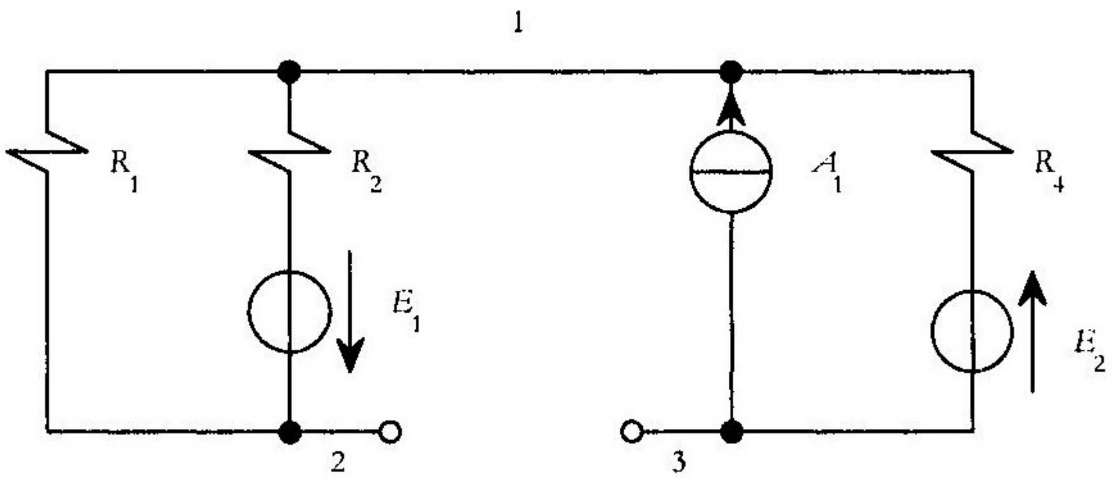
Innanzitutto riconosciamo che la rete è dotata di soli tre nodi così come sono rappresentati nella figura seguente.



Poiché l'unica informazione richiesta dall'esercizio è il valore della corrente I_3, risulta conveniente applicare il teorema di Thevenin. Tuttavia a scopo didattico il problema verrà risolto anche mediante il principio di sovrapposizione delle cause e degli effetti e mediante l'applicazione delle leggi di Kirchhoff ai nodi ed alle maglie.

Soluzione mediante applicazione del teorema di Thevenin

Determinare il bipolo equivalente visto dal resistore R_3 ai nodi 2 e 3. Staccando tale resistore la rete si semplifica come segue.



La tensione equivalente, cioè la tensione a vuoto fra i nodi 2 e 3 si trova osservando che V_{21} è il partitore di tensione di E_1 sul resistore R_2

$$V_{21} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_1 = 5\ V$$

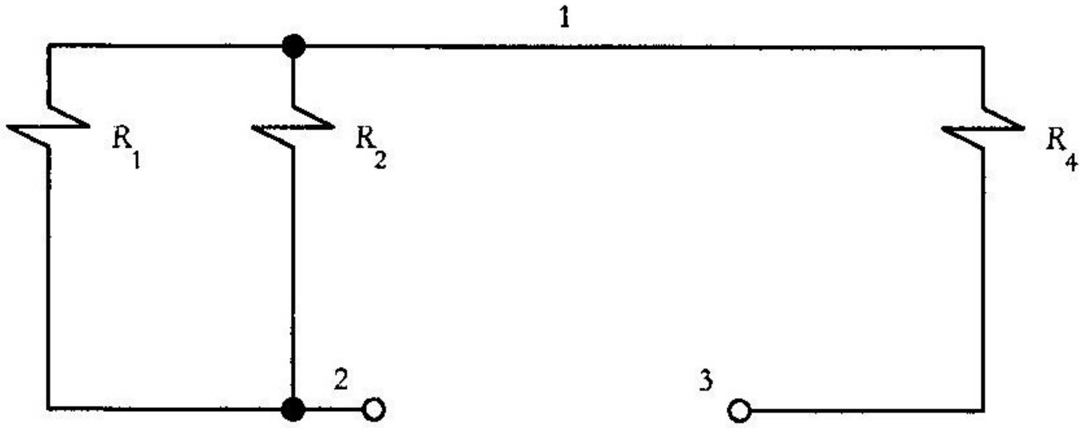
mentre V_{13} è data dalla somma di E_2 e della cauta di tensione su R_4 dovuta al generatore di corrente A_1

$$V_{13} = E_2 + R_4 A_1 = 11\ V$$

Si perveniva allo stesso risultato constatando che, togliendo il resistore R_3, la rete si riduce a

due circuiti fra loro uniti solo mediante un nodo. Fra i due circuiti non si hanno allora interazioni ed è possibile scrivere le due LKT alle due maglie ricavandone i medesimi risultati sopra riportati.

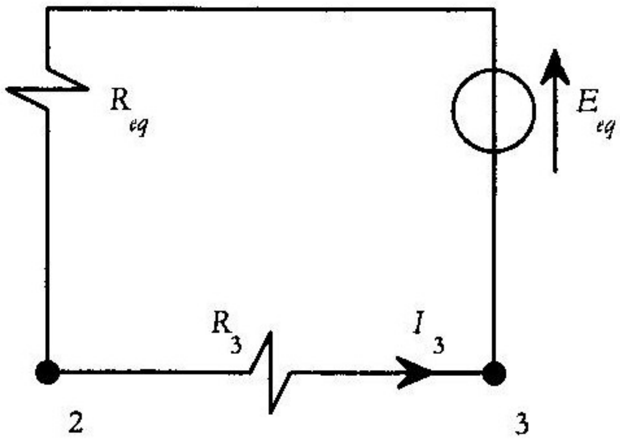
Quindi $E_{eq}=V_{23}=V_{21} + V_{13}=16$ V. La resistenza equivalente ai morsetti 2 e 3 si trova spegnendo i generatori di tensione e di corrente come segue.



Per ispezione si vede che essa è uguale alla serie fra R_4 ed il parallelo fra R_1 ed R_2,

$$R_{eq} = R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1.5\ \text{k}\Omega .$$

Il circuito di partenza si può dunque disegnare come segue



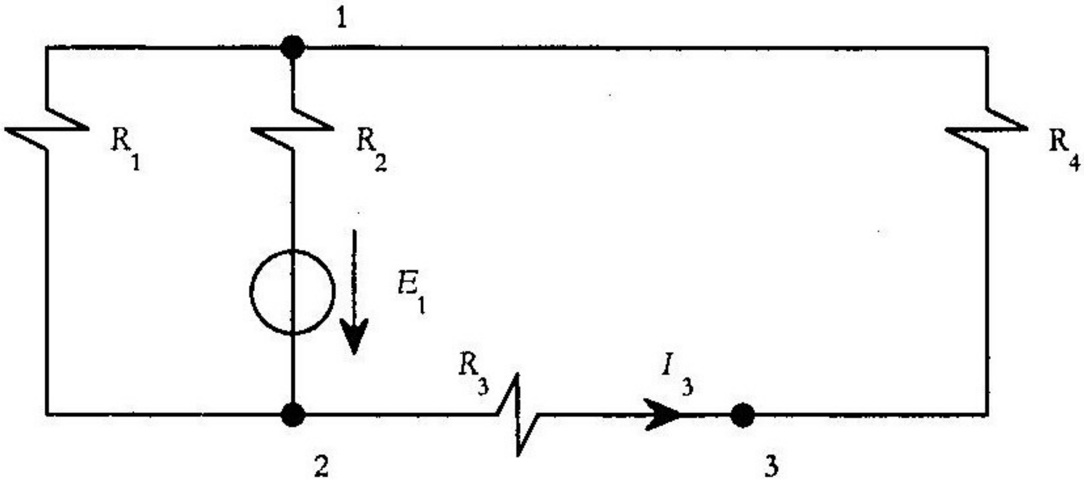
Il calcolo della corrente I_3 richiesta è quindi immediato

$$I_3 = \frac{E_{eq}}{R_{eq} + R_3} = \frac{16}{2500} = 6.4\ \text{mA} .$$

Soluzione mediante sovrapposizione delle cause e degli effetti

A) Caso in cui è acceso solo E_1

Mantenendo acceso il solo generatore E_1 il circuito diventa come segue.



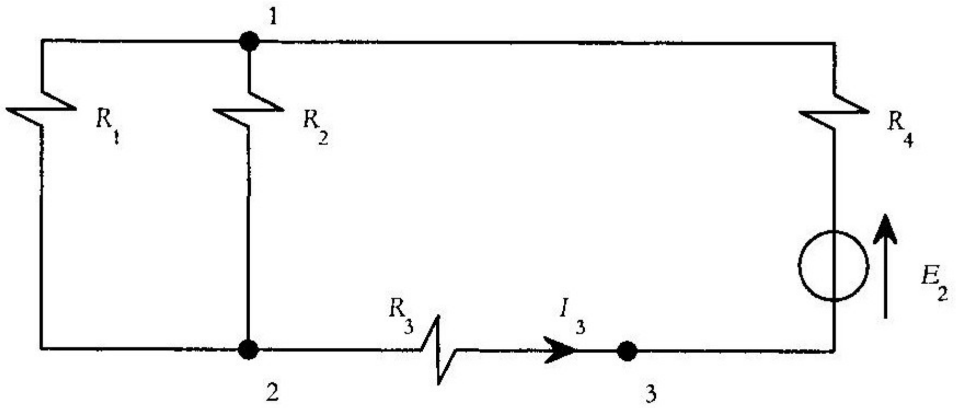
Indichiamo con R_{34} la serie fra R_3 ed R_4. Si avrà $R_{34}=R_3 + R_4=3$ kΩ. Utilizziamo poi il teorema di Millman per determinare la tensione V_{21} fra i morsetti 2 ed 1. Si ottiene il seguente risultato.

$$V_{21} = \frac{\frac{E_1}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_{34}}} = \frac{10}{2.5} = 4\ \text{V}.$$

Poiché $R_3=R_4$ la caduta di tensione su R_3 è data da $V_3=V_{21}/2=2$ V così che la corrente in R_3 è data da $I_3=V_3/R_3=2$ mA.

B) Caso in cui è acceso solo E_2

Mantenendo acceso il solo generatore E_2 il circuito diventa come segue.



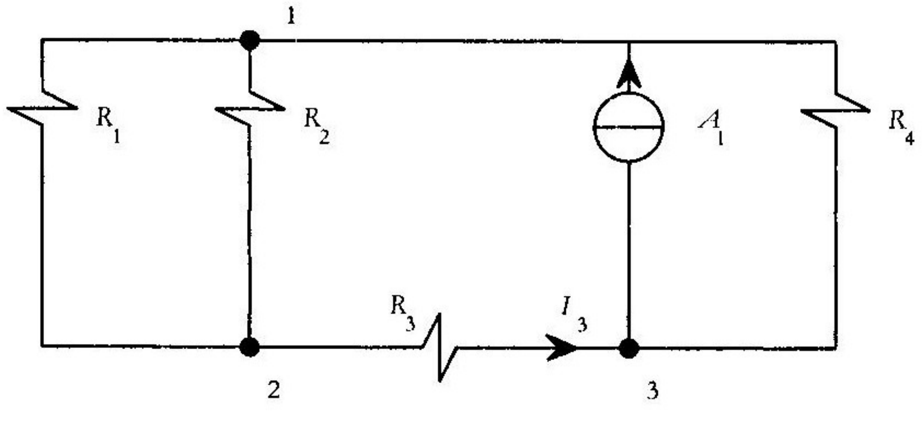
Indichiamo con R_{12} il parallelo fra R_1 ed R_2. Poiché $R_1=R_2$ segue che $R_{12}=R_1/2=R_2/2=500\ \Omega$.
A questo punto la tensione su R_3 è data dal partitore di tensione

$$V_3 = \frac{R_3 E_2}{R_{1,2}+R_3+R_4} = \frac{10}{2.5} = 4\ \text{V},$$

così che la corrente in R_3 è data da $I_3=V_3/R_3=4$ mA.

C) Caso in cui è acceso solo A_1

Mantenendo acceso il solo generatore A_1 il circuito diventa come segue.



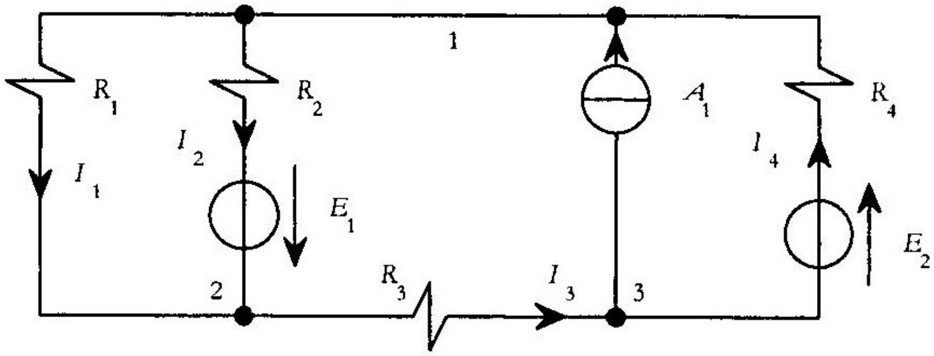
Indichiamo con R_{123} la serie fra R_3 ed il parallelo R_{12} fra R_1 ed R_2. Si avrà $R_{123}=R_{12}+R_3=1.5$ kΩ. La corrente in R_{123}, coincidente con quella in R_3 si ottiene attraverso il seguente partitore di corrente

$$I_3 = \frac{R_4 A_1}{R_{123}+R_4} = \frac{10^{-3}}{2.5} = 0.4\ \text{mA}.$$

Sommando i tre contributi per la corrente attraverso R_3, si ottiene in definitiva

$$I_3=2+4+0.4=6.4\ \text{mA}.$$

Il circuito dato dal problema presenta n=3 nodi di modo che il numero di equazioni ai nodi indipendenti è n – 1=2. I lati sono invece l=5 così che le equazioni indipendenti alle maglie sono pari $l - n + 1$=3. Si ha quindi un totale di 5 equazioni per le 5 correnti o per le 5 tensioni.



Iniziamo con lo scrivere le due equazioni indipendenti ai nodi 2 e 3 ottenendo le due seguenti relazioni:

$$I_3 = A_1 + I_4 = 1 + I_4, \tag{2a}$$

$$I_3 = I_1 + I_2. \tag{2b}$$

Scriviamo ora le correnti I_1 ed I_2 in funzione di I_3 e di I_4 utilizzando opportune equazioni alle maglie e la legge di Ohm. Applicando la convenzione di segno degli utilizzatori le cadute di tensione su R_1, R_2, R_3 ed R_4 sono rispettivamente R_1I_1, R_2I_2, R_3I_3 ed R_4I_4.

Applicando la LKT alla maglia costituita dal perimetro esterno della rete si ottiene $R_1I_1 + R_3I_3 - E_2 + R_4I_4=0$ da cui, essendo i resistori uguali fra loro:

$$I_1 = \frac{E_2 - R_4 I_4 - R_3 I_3}{R_1} = 10 - I_4 - I_3.$$

Analogamente applicando la LKT alla prima maglia di sinistra si ricava la relazione $R_1I_1 + E_1 - R_2I_2=0$ da cui

$$I_2 = \frac{E_1 + R_1 I_1}{R_2} = 10 + I_1 = 20 - I_4 - I_3$$

in cui nell'ultima uguaglianza si è sostituito l'espressione di I_1 precedentemente calcolata Sostituendo le relazioni così ottenute per I_1 e per I_2 nell'equazione e (2b) si ottiene

$$I_3 = 30 - 2I_4 - 2I_3$$

ovvero

$$3I_3 + 2I_4 = 30. \tag{2c}$$

Infine ricavando I_4 dalla relazione (2a) e sostituendolo nella (2c) si ottiene $5I_3$=32, da cui I_3=32/5=6.4 mA.