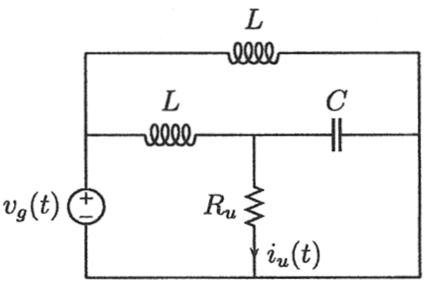
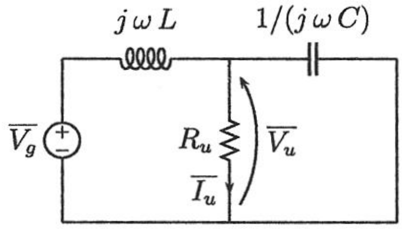
9.2.1 Potenza Complessa e Potenza Istantanea

Calcolare la corrente $i_u(t)$ che attraversa il resistore R_u, la sua potenza complessa $\overline{S_u}$ e la sua potenza istantanea $p_u(t)$.
$R_u = 200\Omega$; $L = 20H$; $C = 1mF$; $v_g(t) = 100\sqrt{2}\cos(10t + \pi/4)\,V$.



Soluzione

Il circuito opera in regime sinusoidale, per calcolare la grandezza di nostro interesse trasporto il circuito in campo complesso e lo analizzo nel dominio dei fasori. La potenza complessa $\overline{S_u}$ è definita proprio nel dominio dei fasori, per calcolare la potenza istantanea, invece, dovrò antitrasformare i risultati calcolati nei fasori riportandoli nel dominio del tempo e poi, lì, calcolare la potenza $p_u(t)$ di nostro interesse.
Prima di trasportare il circuito nel dominio dei fasori lo semplifico: infatti l'induttore in alto si trova in parallelo ad una sorgente di tensione e non ha effetto sulle variabili di nostro interesse, quindi posso trascurarlo.



$$\omega = 10\,rad/s \qquad \overline{V_g} = 100\sqrt{2}\,\exp(j\,\pi/4) = 100\,(1+j)$$

$$Z_R = R_u = 200\,\Omega \qquad Z_L = j\,\omega\,L = j\,200\,\Omega \qquad Z_C = \frac{1}{j\,\omega\,C} = -j\,100\,\Omega$$

Dal circuito rimanente appare evidente il collegamento parallelo di R_u e C ai capi del quale posso calcolare la tensione mediante un semplice partitore:

$$Z_p = R_u /\!/ Z_C = -j\,\frac{200}{2-j} = 40 - j\,80$$

$$\overline{V_u} = \frac{Z_R /\!/ Z_C}{Z_R /\!/ Z_C + Z_L}\,\overline{V_g} = \frac{40 - j\,80}{40 - j\,80 + j\,200}\,100\,(1+j) = -j\,100$$

$$\overline{I_u} = \frac{\overline{V_u}}{R_u} = \frac{-j\,100}{200} = -j\,0.5$$

Note tensione e corrente del resistore R_u possiamo calcolare la sua potenza complessa (convenzione degli utilizzatori). Da notare che per un resistore la potenza complessa è puramente reale e dunque coincide esattamente con la sua potenza attiva.

$$\overline{S_u} = \frac{1}{2}\overline{V_u}\,\overline{I_u}^* = \frac{1}{2}R_u\,|\overline{I}|^2 = \frac{1}{2}200\,|-j\,0.5|^2 = 25\,W$$

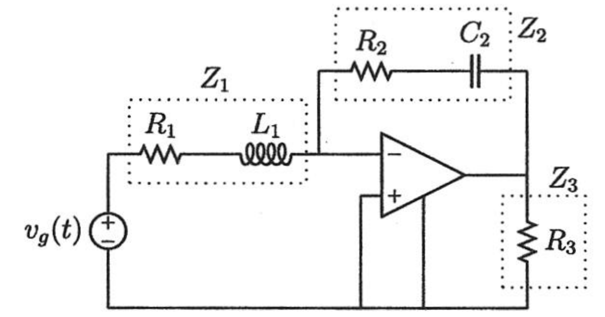
Per calcolare invece la potenza istantanea $p_u(t)$ il modo più semplice di procedere è riportare nel tempo le variabili i_u e v_u e applicare la definizione. Il resistore ha relazione lineare fra v e i anche nel tempo, quindi ci basterebbe anche solo una grandezza e ricaveremmo l'altra da questa in modo facile, attraverso la legge di Ohm, anche se fra grandezze tempo-varianti.

$$\begin{aligned} i_u(t) &= 0.5\,\cos(10\,t - \pi/2)\ A \\ v_u(t) &= 100\,\cos(10\,t - \pi/2)\ V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_u(t) = v_u(t)\,i_u(t) &= 100\,\cos(10\,t - \pi/2)\ \ 0.5\,\cos(10\,t - \pi/2) = \\ &= 25 + 25\,\cos(20\,t - \pi)\ \ W \end{aligned}$$

9.2.2 Potenza Complessa nei carichi dell'Operazionale

Determinare la potenza complessa assorbita dai tre elementi Z_1-Z_2-Z_3 rappresentati in figura con una linea tratteggiata.
$R_1 = 4\Omega$; $R_2 = 2\Omega$; $R_3 = 29\Omega$; $L_1 = 30mH$; $C_2 = 2mF$;
$v_g(t) = 20\cos(100\,t - \pi/3)\,V$.



Soluzione

Nello schema proposto riconosciamo la configurazione retroazionata dell'amplificatore che conosciamo bene. Portiamo il circuito nel dominio dei fasori: calcoliamo il valore delle tre impedenze definite dall'esercizio e il fasore associato alla sorgente.

$$\omega = 100\,rad/s \qquad \overline{V_g} = 20\,\exp(-j\,\pi/3) = 10 - j\,10\sqrt{3}$$

$$Z_1 = R_1 + j\,\omega\,L_1 = 4 + j\,3\,\Omega \qquad Z_2 = R_2 + \frac{1}{j\,\omega\,C_2} = 2 - j\,5\,\Omega$$

$$Z_3 = R_3 = 29\,\Omega$$

In questa configurazione sappiamo che la tensione della sorgente è applicata all'impedenza Z_1, la corrente che qui si determina scorre in Z_2 e la tensione ai capi di Z_2 si ritrova su Z_3 cambiata di segno. Calcoliamo dunque la corrente $\overline{I_1}$ e la tensione $\overline{V_2}$. Da queste conoscenze possiamo poi calcolare la potenza di ognuno degli elementi indicati.
Per semplicità possiamo anche limitarci al solo calcolo del modulo (o del modulo quadro) della corrente $\overline{I_1}$ e della tensione $\overline{V_2}$, in quanto, nelle espressioni semplificate della potenza, esse compaiono solo in forma di modulo.

$$\overline{I_1} = \frac{\overline{V_g}}{Z_1} = \frac{10 - j\,10\sqrt{3}}{4 + j\,3} \qquad |\overline{I_1}| = \frac{|\,10 - j\,10\sqrt{3}\,|}{|\,4 + j\,3\,|} = \frac{10\sqrt{1+3}}{\sqrt{16+9}} = 4$$

$$\overline{V_2} = Z_2\,\overline{I_1} = (2 - j\,5)\,\frac{10 - j\,10\sqrt{3}}{4 + j\,3} \qquad |\overline{V_2}| = |Z_2|\,|\overline{I_1}| = 4\sqrt{4+25}$$

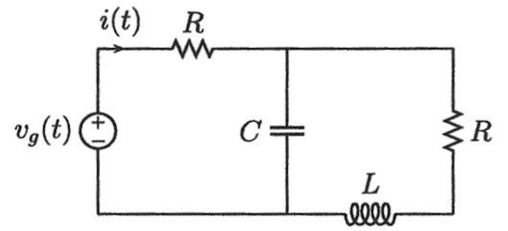
$$\overline{S_1} = \frac{1}{2}\,\overline{V_g}\,\overline{I_1}^* = \frac{1}{2}\,\frac{|\overline{V_g}|^2}{Z_1^*} = \frac{1}{2}\,\frac{20^2}{4 - j\,3} = 32 + j\,24 \quad VA$$

$$\overline{S_2} = \frac{1}{2}\,\overline{V_2}\,\overline{I_1}^* = \frac{1}{2}\,Z_2\,|\overline{I_1}|^2 = \frac{1}{2}\,(2 - j\,5)\,16 = 16 - j\,40 \quad VA$$

$$\overline{S_3} = \frac{1}{2}\,\overline{V_2}\,\overline{I_3}^* = \frac{1}{2}\,\frac{|\overline{V_2}|^2}{Z_3^*} = \frac{1}{2}\,\frac{16 \cdot 29}{29} = 8 \quad VA$$

9.2.3 Potenza Erogata dal Generatore Sinusoidale

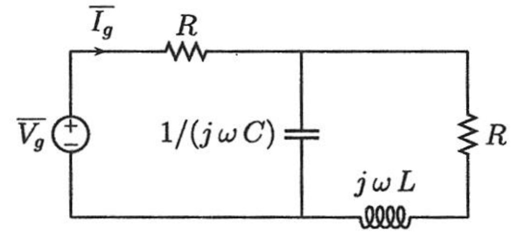
Calcolare le potenze attiva, reattiva, apparente, complessa, istantanea, fluttuante e media erogate dalla sorgente di tensione $v_g(t)$.
Quanto vale la corrente $i(t)$ nel dominio del tempo?
$R = 10\Omega$; $L = 10mH$; $C = 100\mu F$; $v_g(t) = 10\cos(10^3 t)\,V$.



Soluzione

Le prime potenze richieste dall'esercizio sono le varie componenti della potenza complessa, cioè la potenza definita nel dominio dei fasori: la potenza attiva e la potenza reattiva sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria della potenza complessa, la potenza apparente è il suo modulo. Le altre potenze sono definite nel dominio del tempo e sono le componenti della potenza istantanea: la potenza fluttuante è la parte oscillante a frequenza doppia, la potenza media invece è il termine costante, il suo valor medio.

Portiamo il circuito nel dominio dei fasori e calcoliamo il valore della corrente del generatore che ci serve per calcolare la potenza. Si noti che per le sorgenti il calcolo della potenza deve essere fatto applicando la formula della potenza nella sua definizione generale, cioè pari al prodotto tensione per corrente (convenzione dei generatori per avere quella erogata).



$$\omega = 1000\,rad/s \qquad \overline{V_g} = 10$$

$$Z_R = R = 10\,\Omega \qquad Z_L = j\,\omega\,L = j\,10\,\Omega \qquad Z_C = \frac{1}{j\,\omega\,C} = -j\,10\,\Omega$$

Determiniamo il valore dell'impedenza equivalente vista dal generatore per poter calcolare il valore della sua corrente $\overline{I_g}$. La serie di R-L va in parallelo a C e il tutto in serie all'altra R.

$$
\begin{aligned}
Z_s &= R + j\,\omega\,L = 10 + j\,10 \\
Z_p &= Z_s /\!/ Z_C = \frac{(R + j\,\omega\,L)/(j\,\omega\,C)}{R + j\,\omega\,L + 1/(j\,\omega\,C)} = 10 - j\,10 \\
Z_{eq} &= R + Z_p = 20 - j\,10
\end{aligned}
$$

Il valore di $\overline{I_g}$, oltre che per il calcolo della potenza, ci serve anche per rispondere alla seconda domanda dell'esercizio: il valore di $i(t)$ nel dominio del tempo.

$$
\overline{I_g} = \frac{\overline{V_g}}{Z_{eq}} = \frac{10}{20 - j\,10} = \frac{2 + j}{5} \qquad\qquad i(t) = \sqrt{5}/5\,\cos\left(\omega t + 27°\right)
$$

Ora abbiamo tutto ciò che ci serve per determinare le potenze richieste dall'esercizio, ovvero potenza complessa $\overline{S_g}$ e potenza istantanea $p_g(t)$ e tutte le loro componenti:

$$
\overline{S_g} = \frac{1}{2}\,\overline{V_g}\,\overline{I_g}^{\,*} = \frac{1}{2}\,10\,\frac{2 - j}{5} = 2 - j \quad VA
$$

$$
\overline{S_g} = P_g + j\,Q_g \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} P_g = 2\;W & \text{potenza attiva} \\ Q_g = -1\;VAR & \text{potenza reattiva} \end{cases}
$$

La potenza apparente P_{app} è il modulo di $\overline{S_g}$ e quindi vale:

$$
P_{app} = |\,\overline{S_g}\,| = \sqrt{P_g^2 + Q_g^2} = \sqrt{5}
$$

Nel dominio del tempo abbiamo la potenza istantanea:

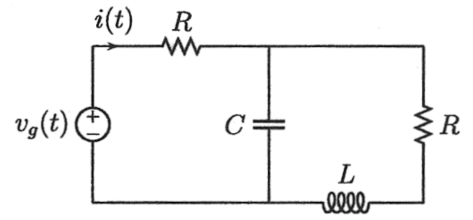
$$
\begin{aligned}
p_g(t) &= v_g(t)\,i_g(t) = 10\,\cos(\omega\,t) \cdot \sqrt{5}/5\,\cos\left(\omega t + 27°\right) = \\
&= \sqrt{5}\,\cos\left(2\omega t + 27°\right) + \sqrt{5}\,\cos\left(27°\right) \;\; W
\end{aligned}
$$

$$
p_g(t) = p_f(t) + p_m
$$

$$
\Longrightarrow \qquad \begin{cases} p_f(t) = \sqrt{5}\,\cos\left(2\omega t + 27°\right) & \text{potenza fluttuante} \\ p_m = \sqrt{5}\,\cos\left(27°\right) & \text{potenza media} \end{cases}
$$

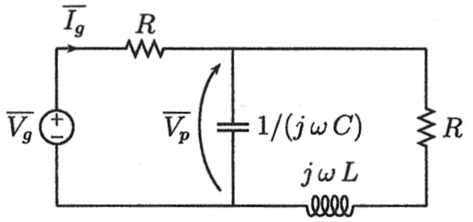
9.2.4 Conservazione della Potenza Complessa

Calcolare la potenza complessa dell'esercizio precedente mediante l'applicazione del teorema di conservazione della potenza.
$R = 10\Omega$; $L = 10mH$; $C = 100\mu F$; $v_g(t) = 10\cos(10^3 t)\, V$.



Soluzione

Il teorema di conservazione della potenza afferma che la somma delle potenze di tutti gli elementi del circuito è nulla. In altre parole la potenza erogata dalla sorgente è pari alla somma delle potenze assorbite da tutti gli altri elementi del circuito.
Per applicare questa proprietà dobbiamo quindi calcolare le potenze assorbite da tutti i componenti.



Sfruttando i risultati ottenuti nell'esercizio precedente abbiamo che:

$$\overline{V_p} = \frac{Z_p}{R + Z_p}\,\overline{V_g} = 6 - j\,2$$

La potenza assorbita dai vari elementi risulta:

$$\overline{S_R} = \frac{1}{2}\,R\,|\overline{I_g}|^2 = \frac{1}{2}\,|\,2 + j\,|^2 = 1\ W$$

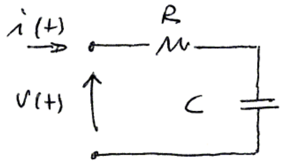
$$\overline{S_C} = \frac{1}{2}\,\frac{|\overline{V_p}|^2}{Z_C^*} = \frac{1}{2}\,\frac{|\,6 - j\,2\,|^2}{+j\,10} = -j\,2\ VAR$$

$$\overline{S_{RL}} = \frac{1}{2}\,\frac{|\overline{V_p}|^2}{Z_s^*} = \frac{1}{2}\,\frac{|\,6 - j\,2\,|^2}{10 - j\,10} = 1 + j\ \ VA$$

Applichiamo ora il teorema di conservazione della potenza:

$$\overline{S_g} = \overline{S_R} + \overline{S_C} + \overline{S_{RL}} = 1 - j\,2 + 1 + j = 2 - j\ \ VA \qquad c.v.d.$$

DETERMINARE LE POTENZE ASSORBITE DAL BIPOLO SEGUENTE IN REGIME SINUSOIDALE



$R = 20\,\Omega \qquad \omega = 1000\ rad/s$

$C = 100\,\mu F \qquad i(t) = \frac{\sqrt{5}}{5}\cos\omega t\ A$

SVOLGIMENTO

- FASORI E IMPEDENZE

$$\bar{I} = \frac{\sqrt{5}}{5}e^{j0} = \frac{\sqrt{5}}{5}\ A$$

$$\bar{Z}_c = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = -j\,10\,\Omega$$

>> NEL DOMINIO DEI FASORI

- IMPEDENZA COMPLESSIVA DEL BIPOLO

$$\bar{Z} = R + \bar{Z}_c = 20 - j10\,\Omega = 10\sqrt{5}\,e^{-j27^\circ} \qquad \begin{cases} R = 20\,\Omega \\ X = -10\,\Omega \end{cases} \qquad \bar{Z} = R + jX$$

- TENSIONE AI CAPI DEL BIPOLO

$$\bar{V} = \bar{Z}\bar{I} = (20 - j10)\frac{\sqrt{5}}{5} = (4 - j2)\sqrt{5} = 10\,e^{-j27^\circ}\ V$$

- POTENZA COMPLESSA ASSORBITA

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\bar{V}\,\bar{I}^* = \frac{1}{2}(4-j2)\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} = 2 - j\ VA = \sqrt{5}\,e^{-j27^\circ} \qquad \begin{cases} P = 2\,W \\ Q = -1\ VAR \end{cases} \qquad \bar{S} = P + jQ$$

  - POTENZA ATTIVA

    $P = 2\,W$

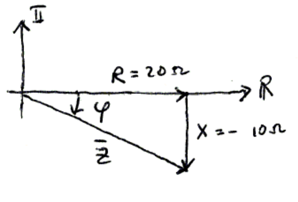
  - POTENZA REATTIVA

    $Q = -1\ VAR$ NEGATIVA – CAPACITIVA

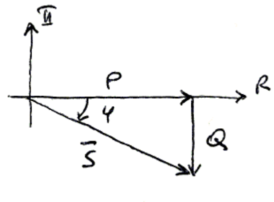
  - POTENZA APPARENTE

    $$|\bar{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}\ VA$$

TRIANGOLO DELLE IMPEDENZE



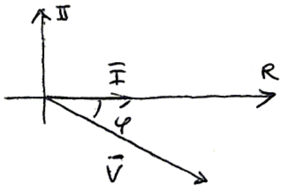
TRIANGOLO DELLE POTENZE



$\varphi = -27^\circ$

FATTORE DI POTENZA (CONTADINO DELLA BASILICATA) $\quad \cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{2}{\sqrt{5}} \simeq 0{,}89$

DIAGRAMMA DEI FASORI



SI NOTI LA PROPORZIONALITÀ DEI 2 TRIANGOLI (DELLE IMPEDENZE E DELLE POTENZE)

$$P = \frac{1}{2}R|\bar{I}|^2 = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 2\,W$$

$$Q = \frac{1}{2}X|\bar{I}|^2 = \frac{1}{2}(-10)\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = -1\ VAR$$

>> NEL DOMINIO DEL TEMPO

- TENSIONE ISTANTANEA AI CAPI DEL BIPOLO

$$v(t) = \mathbb{R}_e\left[\bar{V} e^{j\omega t}\right] = \mathbb{R}_e\left[10\, e^{-j27^\circ} e^{j\omega t}\right] = \mathbb{R}_e\left[10\, e^{j(\omega t - 27^\circ)}\right] = 10\cos(\omega t - 27^\circ)\ V$$

- POTENZA ISTANTANEA ASSORBITA DAL BIPOLO

$$p(t) = v(t)\cdot i(t) = 10\cos(\omega t - 27^\circ)\frac{\sqrt{5}}{5}\cos\omega t = 2\sqrt{5}\cos(\omega t - 27^\circ)\cos\omega t =$$

$$= \sqrt{5}\cos(-27^\circ) + \sqrt{5}\cos(2\omega t - 27^\circ) = 2 + \sqrt{5}\cos(2\omega t - 27^\circ)$$

- POTENZA MEDIA

$$P_0 = \sqrt{5}\cos(-27^\circ) = 2\ W$$

- POTENZA FLUTTUANTE

$$P_{fl} = \sqrt{5}\cos(2\omega t - 27^\circ) = \sqrt{5}\cos(-27^\circ)\cos 2\omega t + \sqrt{5}\sin(-27^\circ)\sin 2\omega t$$

$$= 2\cos 2\omega t - \sin 2\omega t \qquad \begin{cases} P_{flA} = \underbrace{2}_{P}\cos 2\omega t \\ P_{flR} = -\underbrace{1}_{Q}\sin 2\omega t \end{cases}$$

- POTENZA ATTIVA ISTANTANEA

$$P_A(t) = P_0 + P_{flA} = 2(1 + \cos 2\omega t)$$ (potenza media + potenza fluttuante attiva)

- POTENZA REATTIVA ISTANTANEA

$$P_R(t) = P_{flR} = -\sin 2\omega t$$ (= potenza fluttuante reattiva)