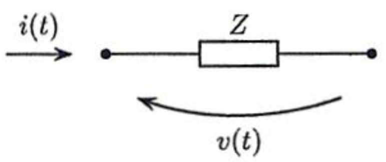
Potenza in Regime Sinusoidale

10.1 Potenza istantanea e potenza media



$$i(t) = \hat{I}cos(\omega t + \phi_I)$$

$$v(t) = \hat{V}cos(\omega t + \phi_V)$$

Figura 10.1: Bipolo

Si consideri un generico bipolo, come mostrato in figura 10.1 e si supponga di voler calcolare la potenza istantanea $p(t)$:

$$p(t) = v(t)i(t) = \hat{V}cos(\omega t + \phi_V)\hat{I}cos(\omega t + \phi_I)$$

Il grafico della potenza,riportato in figura 10.2, mostra come come la potenza istantanea diventi nulla quando è nulla almeno una delle due grandezze tensione o corrente, inoltre diventa negativa due volte in un periodo; durante questi intervalli l'energia anzichè essere assorbita(o erogata a seconda della convenzione utilizzata) dal bipolo viene erogata (o assorbita). Inoltre si noti come la potenza ha frequenza doppia rispetto alle singole grandezze. Per vedere cosa accade davvero dal punto di vista matematico, si provi a modificare l'espressione della potenza attraverso le formule di Werner della Trigometria:

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

si può riscrivere l'espressione della potenza come:

$$p(t) = \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}\cos(\phi_V - \phi_I) + \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}\cos(2\omega t + \phi_V + \phi_I)$$

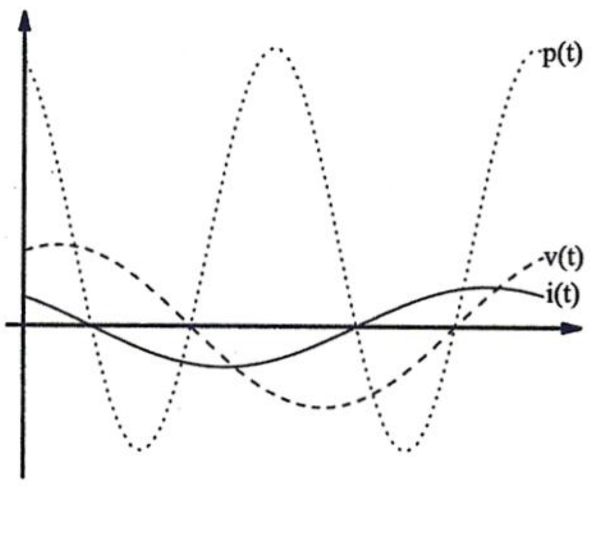


Figura 10.2: Potenza in un bipolo generico

Il termine $\phi = \phi_V - \phi_I$ viene definito **sfasamento** tra la tensione e la corrente. Sostituendo nella precedente relazione $\phi_V + \phi_I = 2\phi_V - \phi$ e applicando la formula di prostaferesi seguente:

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

si ottiene:

$$p(t) = \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}\cos(\phi) + \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}\left[\cos(2\omega t + 2\phi_V)\cos(-\phi) - \sin(2\omega t + 2\phi_V)\sin(-\phi)\right]$$

raccogliendo adesso i termini si ottiene:

$$p(t) = \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}\cos(\phi)[1 + \cos(2\omega t + 2\phi_V)] + \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}\sin(\phi)\left[\sin(2\omega t + 2\phi_V)\right]$$

Questo permette di vedere la potenza istantanea come somma di due componenti uno $p_A(t)$ detto *potenza attiva istantanea* e l'altro $p_R(t)$ detto *potenza reattiva istantanea*:

$$p(t) = p_A(t) + p_R(t)$$

con

$$p_A(t) = \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}\cos(\phi)[1 + \cos(2\omega t + 2\phi_V)] = P[1 + \cos(2\omega t + 2\phi_V)]$$

$$p_R(t) = \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}\sin(\phi)[\sin(2\omega t + 2\phi_V)] = Q[\sin(2\omega t + 2\phi_V)]$$

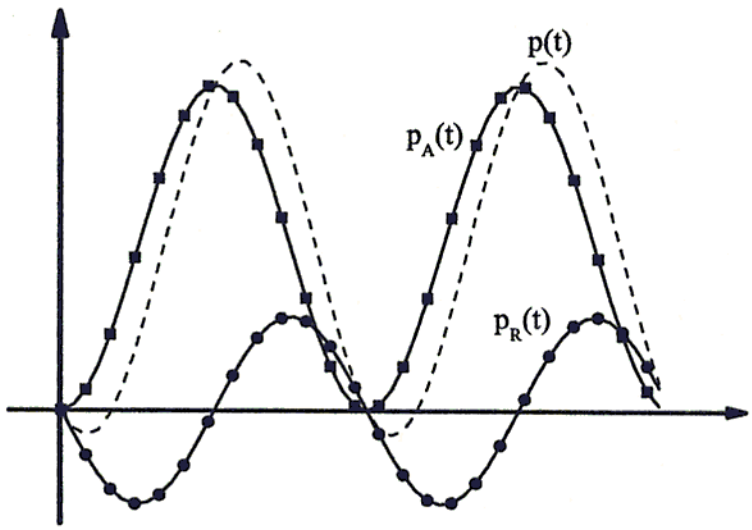


Figura 10.3: Potenza istantanea $p(t)$, potenza attiva istantanea $p_A(t)$ e potenza reattiva istantanea $p_R(t)$

dove P e Q sono rispettivamente la *potenza attiva* e la *potenza reattiva* associate alla potenza istantanea.

E' possibile calcolare per le grandezze indicate il valor medio, per cui si avrà:

$$
\begin{aligned}
P_{A_{av}} &= \frac{1}{T}\int_0^T p_A(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T P[1+\cos(2\omega t + 2\phi_V)]dt = \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T P dt + \frac{1}{T}\int_0^T \cos(2\omega t + 2\phi_V)dt = P
\end{aligned}
$$

$$
P_{R_{av}} = \frac{1}{T}\int_0^T p_R(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T Q\sin(2\omega t + 2\phi_V)dt = 0
$$

da cui si può dire che il valore medio della potenza istantanea coincide con il valor medio della potenza attiva istantanea, essendo nullo quello della potenza reattiva istantanea. Si può pertanto definire la potenza attiva P come il valor medio della potenza istantanea e la potenza reattiva Q come il valore di picco della potenza reattiva istantanea.
Il significato delle tre potenze appena calcolate è chiaro dal grafico in figura 10.3 in cui si può vedere come la potenza attiva istantanea è unidirezionale, cioè non cambia mai segno e quindi una volta fornita al circuito questa non può piu essere recuperata. Diverse sono le cose per la potenza reattiva istantanea che è infatti bidirezionale e a valor medio nullo. Questo significa che questa energia è scambiata in egual misura tra il circuito e l'esterno e viceversa, per cui una volta fornita può essere recuperata.

Di seguito è riportata l'espressione della potenza istantanea e media per i componenti circuitali.

10.2 Potenza Complessa

Volendo utilizzare il metodo simbolico per calcolare la potenza è necessario definire una potenza complessa:

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\bar{V}\bar{I}^*$$

dove $\bar{V}$ e $\bar{I}$ sono rispettivamente i fasori della tensione e della corrente. A questo punto la relazione precedente può anche essere riscritta:

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\hat{V}e^{\jmath\phi_V}\hat{I}e^{-\jmath\phi_I} = \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}e^{\jmath(\phi_V-\phi_I)}$$

Ricordando la relazione che lega il valore efficace con il suo valore massimo e la definizione di sfasamento si può ottenere l'espressione della potenza complessa in funzione dei valori efficaci di tensione e corrente, in cui si vede che scompare il fattore 1/2:

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}e^{\jmath(\phi)} = \frac{1}{2}\sqrt{2}V\sqrt{2}Ie^{\jmath(\phi)} = VIe^{\jmath(\phi)}$$

Il modulo della potenza complessa viene chiamata **potenza apparente** e si misura in [VA] (Volt-Ampere):

$$S = \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I} = VI$$

mentre viene definita una nuova grandezza chiamata **fattore di Potenza**:

$$cos\phi$$

Alla luce di queste definizioni la potenza complessa può essere anche riscritta come:

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}cos\phi + \jmath\frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}sin\phi = VIcos\phi + \jmath VIsin\phi$$

dove

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}cos\phi = VIcos\phi \\ Q &= \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}sin\phi = VIsin\phi \end{aligned}$$

La potenza media P diventa quindi la parte reale della potenza complessa, mentre la parte immaginaria prende il nome di **Potenza reattiva** e si misura in [VAr] (Volt-ampere reattivi).

In figura 10.7 è riportato il diagramma che lega i moduli delle potenza attiva e reattiva con quello della potenza apparente.

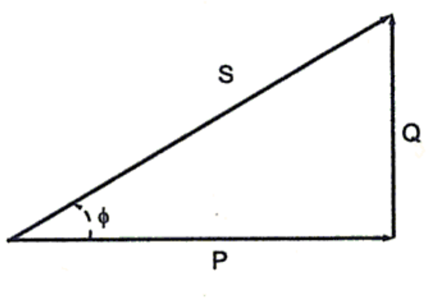


Figura 10.7: Triangolo delle potenze

Facendo riferimento al diagramma è possibile esplicitare le seguenti relazioni:

Potenza complessa	$\bar{S} = P + \jmath Q$
Potenza apparente	$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$
fattore di potenza	$cos\ \phi = \frac{P}{S}$
sfasamento	$\phi = atan\frac{Q}{P}$
potenza attiva	$P = Scos\ \phi$
potenza reattiva	$Q = Ssin\phi$

Di seguito sono anche i riportati i valori delle potenze attive e reattive per i singoli componenti:

- **Resistore**:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}R\hat{I}^2 = \frac{1}{2}\frac{\hat{V}^2}{R} \\ Q &= 0 \\ cos\phi &= 1 \end{aligned}$$

- **Induttore**:

$$\begin{aligned} P &= 0 \\ Q &= \frac{1}{2}X_L\hat{I}^2 = \frac{1}{2}\frac{\hat{V}^2}{X_L} \\ cos\phi &= 0 \end{aligned}$$

- **Condensatore**:

$$\begin{aligned} P &= 0 \\ Q &= -\frac{1}{2}X_C\hat{I}^2 = -\frac{1}{2}\frac{\hat{V}^2}{X_C} \\ cos\phi &= 0 \end{aligned}$$

è da notare come il resistore è un componente che assorbe potenza attiva, mentre l'induttore ed il condensatore non assorbono nessuna forma di potenza attiva, mentre immagazzinano potenza reattiva positiva il primo e negativa il secondo.

- **Resistore:**

$$\begin{aligned} i(t) &= \hat{I}cos(\omega t + \phi_I) \\ v(t) &= R\hat{I}cos(\omega t + \phi_I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2}R\hat{I}^2cos(\phi_V - \phi_I) + \frac{1}{2}R\hat{I}^2cos(2\omega t + \phi_V + \phi_I) = \\ &= \frac{1}{2}R\hat{I}^2cos(0) + \frac{1}{2}R\hat{I}^2cos(2(\omega t + \phi_I)) \end{aligned}$$

In cui operando la scomposizione in potenza attiva e reattiva istantanee mostrata in precedenza si ottiene che:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}R\hat{I}^2 \\ Q &= 0 \end{aligned}$$

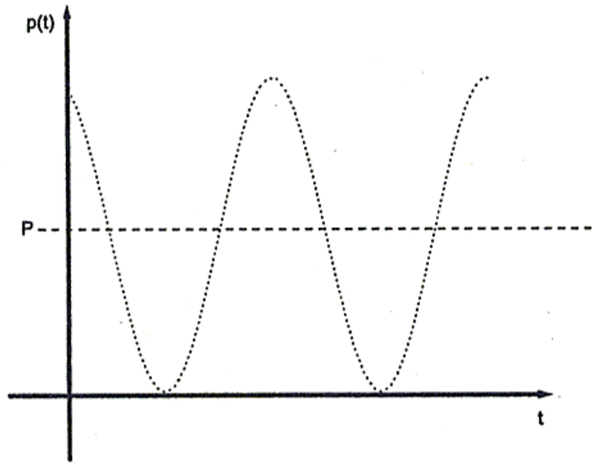


Figura 10.4: Potenza istantanea del resistore

- **Induttore:**

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \hat{I}cos(\omega t + \phi_I) \\
v(t) &= \omega L\hat{I}cos(\omega t + \phi_I + \pi/2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(t) &= \frac{1}{2}\omega L\hat{I}^2 cos(\phi_V - \phi_I) + \frac{1}{2}\omega LI^2 cos(2\omega t + \phi_V + \phi_I) = \\
&= \frac{1}{2}\omega L\hat{I}^2 cos(\pi/2) + \frac{1}{2}\omega L\hat{I}^2 cos(2(\omega t + \phi_I) + \pi/2) = \\
&= -\frac{1}{2}\omega L\hat{I}^2 sin(2(\omega t + \phi_I))
\end{aligned}
$$

a cui si associano:

$$
\begin{aligned}
P &= 0 \\
Q &= \frac{1}{2}\omega L\hat{I}^2
\end{aligned}
$$

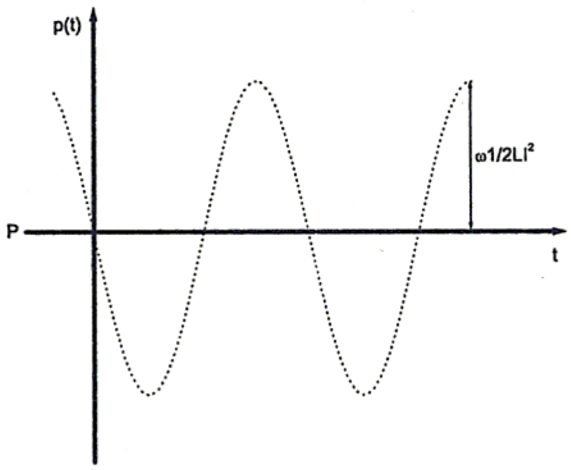


Figura 10.5: Potenza istantanea nell'induttore

- **Condensatore:**

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \omega C\hat{V}cos(\omega t + \phi_V + \pi/2) \\
v(t) &= \hat{V}cos(\omega t + \phi_V)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(t) &= \frac{1}{2}\omega C\hat{V}^2 cos(\phi_V - \phi_I) + \frac{1}{2}\omega C\hat{V}^2 cos(2\omega t + \phi_V + \phi_I) = \\
&= \frac{1}{2}\omega C\hat{V}^2 cos(-\pi/2) + \frac{1}{2}\omega C\hat{V}^2 cos(2(\omega t + \phi_I) - \pi/2) = \\
&= \frac{1}{2}\omega C\hat{V}^2 sin(2(\omega t + \phi_I))
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
P &= 0 \\
Q &= \frac{1}{2}\omega C\hat{V}^2
\end{aligned}
$$

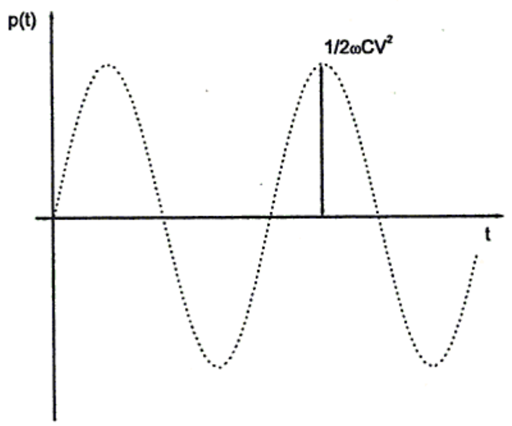


Figura 10.6: Potenza istantanea nel condensatore

10.3 Teorema del massimo trasferimento di potenza

Si supponga di avere un qualsiasi circuito lineare, rappresentato dal suo equivalente di Thevenin(come mostrato in figura 10.8); sia $\bar{Z}_c$ un'impedenza collegata al circuito. Si vuole sapere il valore dell'impedenza $\bar{Z}_c$ affinchè si abbia il massimo trasferimento di potenza media. Le due impedenze sono del tipo:

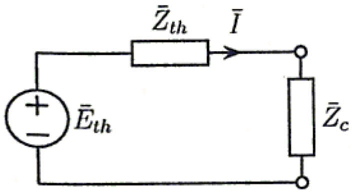


Figura 10.8: Teorema Massimo Trasferimento di potenza

$$\bar{Z}_{th} = R_{th} + \jmath\, X_{th}$$

$$\bar{Z}_c = R_c + \jmath\, X_c$$

La corrente che scorre nel carico vale:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}_{th}}{\bar{Z}_{th} + \bar{Z}_c} = \frac{\bar{E}_{th}}{R_{th} + R_c + \jmath\,(X_{th} + X_c)}$$

La potenza media fornita al carico coincide con la sola potenza assorbita dalle componenti resiitive, per cui si avrà:

$$P = \frac{1}{2} R_c \hat{I}^2 = \frac{1}{2} R_c \left(\frac{\bar{E}_{th}}{\sqrt{(R_{th} + R_c)^2 + (X_{th} + X_c)^2}} \right)^2$$

Per conoscere il valore del massimo di questa potenza la si deriva rispetto a $\bar{Z}_c$, ossia rispetto alle sue componenti R_c e X_c:

$$\frac{\partial P}{\partial R_c} = R_c \frac{\bar{E}_{th}^2}{2\left[(R_{th} + R_c)^2 + (X_{th} + X_c)^2\right]^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial X_c} = -R_c \frac{\bar{E}_{th}^2}{\left[(R_{th} + R_c)^2 + (X_{th} + X_c)^2\right]^2} \left[(R_{th} + R_c)^2 + (X_{th} + X_c)^2 - 2R_c(X_{th} + X_c)\right]$$

Uguagliando contemporaneamente a zero le due derivate si trova il valore del massimo:

$$\frac{\partial P}{\partial R_c} = 0 \longrightarrow R_c = \sqrt{R_{th}^2 + (X_c^2 + X_{th}^2)}$$

$$\frac{\partial P}{\partial X_c} = 0 \longrightarrow X_c = -X_{th}$$

Da cui si ottiene

$$\bar{Z}_c = R_c + \jmath\, X_c = R_{th} - \jmath\, X_{th} = \bar{Z}_{th}^*$$

Quindi si può dire che per avere il **massimo trasferimento di potenza** l'impedenza di carico deve essere uguale al complesso coniugato dell'impedenza equivalente di Thevenin del circuito di alimentazione.

10.4 Conservazione della Potenza

Il principio di conservazione della potenza già visto per i circuiti in corrente continua rimane valido anche per i circuiti in regime sinusoidale.

Si faccia riferimento al seguente esempio per chiarirne il significato. Si supponga

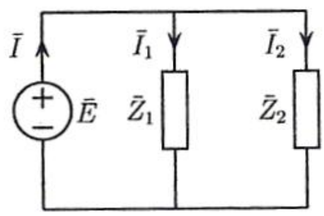


Figura 10.9: Conservazione della potenza

di avere una rete elettrica come quella in figura 10.9, la potenza complessa erogata dal generatore avrà la seguente espressione:

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\bar{E}\bar{I}^* = \frac{1}{2}\bar{E}(\bar{I}_1^* + \bar{I}_2^*) = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$$

In generale si può affermare che in una rete elettrica in regime sinusoidale la somma delle potenze complesse dei singoli bipoli è uguale a zero ovvero che la somma delle potenze complesse generate è uguale alla somma delle potenze complesse assorbite:

$$\sum_{j=1}^{N_g} \bar{S}_j = \sum_{l=1}^{N_u} \bar{S}_l$$

è necessario prestare attenzione al fatto che si parla di somme vettoriali, per cui le considerazioni fatte per la potenza complessa non valgono per la potenza apparente. Nello stesso tempo la relazione precedente può essere riscritta nella forma:

$$\sum_{j=1}^{N_g}(P_j + jQ_j) = \sum_{l=1}^{N_u}(P_l + jQ_l)$$

Da cui si può dire che la somma delle potenze attive(o potenze reattive) erogate deve essere uguale a quella di quelle assorbite:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N_g} P_j &= \sum_{l=1}^{N_u} P_l \\ \sum_{j=1}^{N_g} Q_j &= \sum_{l=1}^{N_u} Q_l\end{aligned}$$

Più in generale vale il teorema di **Boucherot**:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} P_k &= 0 \\ \sum_{k=1}^{N} Q_k &= 0\end{aligned}$$

Paul Boucherot (1869-1943)ingegnere elettrotecnico francese . Compì ricerche sulle vibrazioni nei motori a corrente alternata, studiando i metodi per smorzarle, e sulle caratteristiche della potenza in corrente alternata mono- e trifase. Da queste ultime ricerche derivò la distinzione fra potenza attiva, reattiva e apparente e un noto teorema.