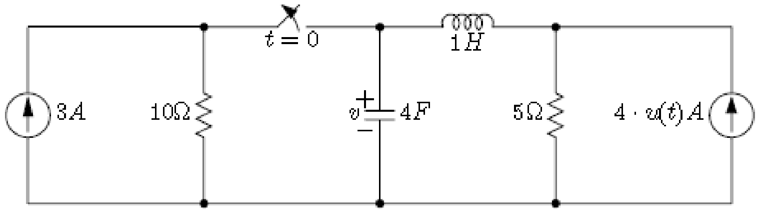
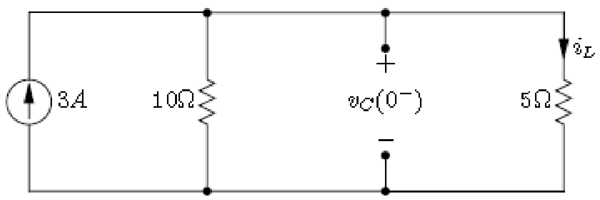
L'interruttore è chiuso da molto tempo, e si apre in t = 0. Determinare la tensione v(t) per t ≥ 0.   [N.B. u(t) è la funzione gradino unitario]



__Soluzione__:

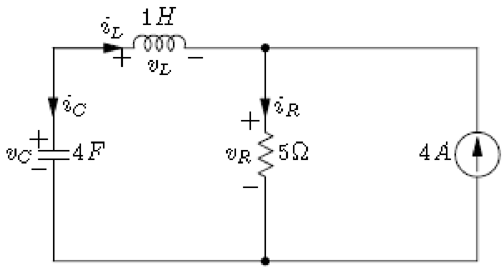
__*1) t < 0*__ Si calcolano le due C.I. prima dell'apertura del tasto. Il circuito è:



$$i_L(0^-) = 3 \cdot \frac{10}{10+5} = 2A$$

$$v_C(0^-) = 5 \cdot i_L(0^-) = 10V$$

__*2) t ≥*__ 0 Il circuito cambia e applicando le KCL e KVL, si ha:



$$\begin{cases} i_L = -i_C \\ i_R - i_L - 4 = 0 \\ -v_C + v_L + v_R = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} +\dfrac{v_R}{5} - i_L - 4 = 0 \\ -v_C + L \cdot \dfrac{di_L}{dt} + v_R = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} +\dfrac{v_R}{5} + 4 \cdot \dfrac{dv_C}{dt} - 4 = 0 \\ +v_C + 4 \cdot \dfrac{d^2 v_C}{dt^2} = v_R \end{cases}$$

$$+\frac{v_C}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{d^2 v_C}{dt^2} + 4 \cdot \frac{dv_C}{dt} - 4 = 0$$ (Equ.differenziale del 2° ord.non omogenea

$$4 \cdot \frac{d^2 v_C}{dt^2} + 20 \cdot \frac{dv_C}{dt} + v_C = 20 \qquad (*)$$

L' *equazione caratteristica associata*, serve per calcolare i 2 valori di λ:

$$4 \cdot \lambda^2 + 20 \cdot \lambda + 1 = 0 \qquad (**) \qquad \lambda_{1/2} = \begin{cases} -0{,}051 \\ -4{,}949 \end{cases}$$

Le due soluzioni sono reali, distinte e negative, (risposta *sovrasmorzata*):

$$v_C(t) = K_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + v_{C_p}(t) \qquad (***)$$

Sostituendo la (***) nella (*), si ottiene: $v_{C_p}(t) = cost. = 20V$

Calcolo di K_1 e K_2: (C.I. $v_C(0)=10V$, $i_L(0)=2A$):

$$v_C(0) = K_1 \cdot e^{\lambda \cdot 0} + K_2 \cdot e^{\lambda \cdot 0} + 20 = 10V \qquad K_1 + K_2 + 20 = 10$$

$$i_L(0) = -i_C(0) = \left| -C \cdot \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0} \Rightarrow -\frac{1}{2} = (K_1 \cdot \lambda_1) + (K_2 \cdot \lambda_2)$$

$\boxed{\text{dvc/dt|t=0 = -iL(0)/C}}$

Risolvendo si determinano le due costanti:

$$\begin{cases} K_1 = -9{,}795 \\ K_2 = -0{,}205 \end{cases}$$

Sostituendo nella (***):

$$v_C(t) = -9{,}795 \cdot e^{-0{,}051 \cdot t} - 0{,}205 \cdot t \cdot e^{-4{,}949 \cdot t} + 20V$$