



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA

---

**CORSO DI CONTROLLI AUTOMATICI**

**QUADERNO DELLE**  
**ESERCITAZIONI**



---

ANNO ACCADEMICO 1996-97

## SOMMARIO

<b>SOMMARIO</b>	
.....	2
<b>ESERCITAZIONE N°1: La trasformata di Laplace</b>	
.....	4
<b>ESERCITAZIONE N°2: Rappresentazione delle funzioni di s</b>	
.....	23
<b>ESERCITAZIONE N°3: I diagrammi di Bode</b>	
.....	30
<b>ESERCITAZIONE N°4: Applicazione dei diagrammi di Bode</b>	
.....	44
<b>ESERCITAZIONE N°5: Diagrammi polari o di Nyquist</b>	
.....	54
<b>ESERCITAZIONE N°6: Sistemi a fase minima</b>	
.....	73
<b>ESERCITAZIONE N°7: Analisi modale</b>	
.....	78
<b>ESERCITAZIONE N°8: Procedimenti di convoluzione e deconvoluzione</b>	
.....	90
<b>ESERCITAZIONE N°9: Ancora sui diagrammi di Bode</b>	
.....	99
<b>ESERCITAZIONE N°10: Teoria della struttura - Grafi di flusso</b>	
.....	101
<b>ESERCITAZIONE N°11: Formule di Mason - Sistemi a catena chiusa</b>	
.....	108
<b>ESERCITAZIONE N°12: Teoria della realizzazione - Studio di stabilità - Metodo di Routh</b>	
.....	120
<b>ESERCITAZIONE N°13: Studio di stabilità - Metodi di Routh e Hurwitz</b>	
.....	128

ESERCITAZIONE N°14: Studio di stabilità - Metodi di Routh e Hurwitz	.....137
ESERCITAZIONE N°15: Studio di stabilità - Metodo di Jury e Blanchard - Metodo di Nyquist	.....142
ESERCITAZIONE N°16: Studio di stabilità - Metodo di Nyquist	.....147
ESERCITAZIONE N°17: Studio di stabilità - Metodo di Nyquist	.....150
ESERCITAZIONE N°18: Stabilità di sistemi multidimensionali - Metodo di Gershgorin Sistema di regolazione della temperatura	.....155
ESERCITAZIONE N°19: Amplificatori a parzializzazione	.....171
ESERCITAZIONE N°20: Stabilità di sistemi contenenti elementi non lineari - Criterio di Popov - Metodo di sintesi per tentativi in $\omega$	.....187
ESERCITAZIONE N°21: Metodo di sintesi per tentativi in $\omega$	.....200
ESERCITAZIONE N°22: Metodo di sintesi per tentativi in $s$	.....218
ESERCITAZIONE N°23: Metodo di sintesi diretta	.....234
ESERCITAZIONE N°24: Sintesi con reazione dello stato	.....244
ESERCITAZIONE N°25: Appendice - Esperienze di laboratorio	.....249

## **ESERCITAZIONE N°1**

### **LA TRASFORMATATA DI LAPLACE**

Lo studio dei sistemi a tempo continuo lineari e stazionari non viene condotto soltanto nel dominio del tempo ma anche con altre metodologie basate sull'applicazione dell'operatore *Trasformata di Laplace*. Il motivo di tutto ciò, come meglio vedremo in seguito, risiede nel fatto che ricorrere allo studio nel dominio di  $s$  talvolta semplifica notevolmente la trattazione analitica ed è consentito trarre conclusioni teoriche con una maggiore facilità.

Per *studio nel dominio di  $s$*  intendiamo l'applicazione dell'operatore trasformata di Laplace alle funzioni del tempo che esprimono l'evoluzione temporale delle grandezze in gioco e tutti i legami che intercorrono tra le rappresentazioni delle stesse grandezze nei due domini.

Definiamo trasformata di Laplace della funzione temporale  $f(t)$  la funzione complessa di variabile complessa:

$$F(s) = L[f(t)] = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \int_{\varepsilon}^T f(t) \cdot e^{-st} dt$$

con  $0 < \varepsilon < T$ . La funzione  $f(t)$  risulta nulla per  $t < 0$  mentre la funzione  $F(s)$  risulta definita per tutti i valori della variabile complessa  $s$ , che ha la forma  $s = \sigma + j\omega$ , per cui l'integrale evidenziato converge.

La convergenza è, così, legata ai valori assunti dalla variabile  $s$  sul piano di Gauss. E' possibile dimostrare che l'integrale converge  $\forall s \in \mathbb{C} / \text{Re}(s) > a$ , con  $a$  costante positiva, e ciò  $\forall f(t)$ . Graficamente (fig.1) è possibile evidenziare sul piano di Gauss questa regione di convergenza:

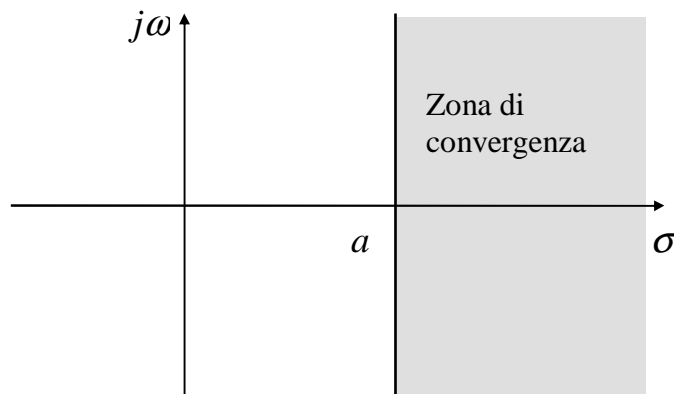


fig.1

Il valore di  $a$  varia al variare di  $s$  poiché  $\omega$  rappresenta un ulteriore grado di libertà. Dal momento che ci servirà un parametro di riferimento sceglieremo come tale l'estremo inferiore dell'insieme dei valori delle parti reali  $\sigma$  della variabile  $s$  per cui si ha l'assoluta convergenza dell'integrale. Tale valore sarà indicato col simbolo  $\sigma_a$  e viene detto *ascissa di assoluta convergenza* della funzione  $f$ .

Una volta eseguito lo studio nel dominio della variabile  $s$  è opportuno ricondurre i risultati del dominio di partenza. Nasce, così, il concetto di *Antitrasformata di Laplace*. Essa è definita come:

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds$$

in cui il cammino tra  $c - j\infty$  e  $c + j\infty$  è inteso percorso a destra di  $\sigma_a$ .

### **Trasformate notevoli e proprietà**

•La trasformata di Laplace è una trasformazione lineare. Proprio in questo fatto si ritrova la sua grande utilità:

$$L[a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)] = a \cdot F_1(s) + b \cdot F_2(s)$$

con  $a, b \in R$

•Trasformata della derivata.

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot F(s) - f(0^+)$$

Si mette  $0^+$  per eventuali punti in cui non è definita la derivata (a causa di discontinuità impulsive).

Per derivate successive:

$$L\left[\frac{d^i f(t)}{dt^i}\right] = s^i \cdot F(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^k \cdot f^{i-1-k}(0^+)$$

•Trasformata dell'integrale.

$$L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Da queste prime formule è già intuibile l'utilità dello studio nel dominio di  $s$ .

•1° teorema dello scorrimento.

$$L[f(t) \cdot e^{-at}] = F(s+a) \quad \text{con } a > 0$$

•2° teorema dello scorrimento.

$$L[f(t-t_0) \cdot \delta_{-1}(t-t_0)] = e^{-t_0 s} \cdot F(s)$$

$\delta_{-1}(t-t_0)$  è il gradino unitario che parte da  $t=t_0$  ed ha ampiezza 1 per  $t > t_0$ . Altrove è pari a zero.

•Teorema del valore iniziale.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot F(s)$$

•Teorema del valore finale.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

Il teorema del valore finale permette di calcolare la risposta del sistema a regime permanente, una volta esauriti i transitori. Questo limite non si può, ovviamente, calcolare quando  $F(s)$  ha poli nel semipiano destro o sull'asse immaginario. Infatti se  $\sigma \geq 0$  la risposta è oscillatoria pura ( $\sigma = 0$ ) o diverge ( $\sigma > 0$ ) esaltandosi.

•Teorema della traslazione.

$$L[e^{\alpha t} \cdot f(t)] = F(s + \alpha)$$

$$L[f(t - T)] = e^{-sT} \cdot F(s)$$

•Teorema della convoluzione reale.

$$L\left[\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau\right] = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

•Teorema della convoluzione complessa.

$$L[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\omega) \cdot F_2(s - \omega) d\omega$$

Inoltre si ha che:

$$L\left[\frac{t^k}{k!} \cdot e^{pt}\right] = \frac{1}{(s - p)^{k+1}}$$

con  $k \in R$  e  $p$  costante.

Vediamo, adesso, alcune trasformate elementari:

$$L\left[\frac{t^k}{k!} \cdot \delta_{-1}(t)\right] = \frac{1}{s^{k+1}}$$

$$L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$L[e^{-at} \cdot \cos \omega t] = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

$$L[e^{-at} \cdot \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

$$L[\delta(t)] = 1$$

$$L[\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s}$$

$$L[\delta_{-2}(t)] = \frac{1}{s^2}$$

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$\delta(t)$  è l'impulso unitario. Un sistema sollecitato da un impulso è come se fosse sollecitato da sinusoidi con frequenza che arriva fino ad infinito. In alcune espressioni, talvolta, bisogna stare attenti al valore di  $\sigma_a$ .

### **Antitrasformazione**

Le funzioni nella variabile reale  $s$  sono in genere funzioni razionali fratte:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

con  $P(s)$  e  $Q(s)$  polinomi generici. Generalmente il grado del numeratore è inferiore al grado del denominatore. Anche se ciò non fosse potremmo sempre effettuare la divisione: otterremmo un insieme di fattori immediatamente antitrasformabili per mezzo delle regole note ed una frazione avente le caratteristiche suddette. Se, allora,  $m$  è il grado del numeratore e  $n$  è il grado del denominatore, sarà  $m \leq n$ .

Dei due polinomi posso trovare le radici e dare una nuova espressione:

$$P(s) = (s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_m)$$

$$Q(s) = (s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)$$

Sarà, allora:

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

Vediamo, ora, i vari casi che si possono presentare partendo da una forma di questo tipo:

**a) Poli tutti distinti.**

$$Q(s) = \prod_{j=1}^n (s - p_j)$$

Vogliamo pervenire allo sviluppo in frazioni parziali.

Calcoleremo i residui, elementi numerici alla base di tale sviluppo. L'i-esimo residuo (relativo al polo i-esimo) si ottiene a partire dalla formula:

$$R_i = \lim_{s \rightarrow p_i} [(s - p_i) \cdot F(s)]$$

Questo calcolo deve essere eseguito  $n$  volte, al variare di  $i$ . Ciò fatto segue che:

$$F(s) = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{(s - p_i)}$$

A questo punto si ha che:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n R_i \cdot e^{p_i t} \quad \text{con } t > 0.$$

Questa espressione risulta valida solo ed esclusivamente nel caso di poli tutti distinti e reali.

**b)  $\mu$  poli reali e distinti e  $\nu$  coppie di poli complessi e coniugati.**

E' opportuno precisare che ove si presentassero poli complessi, questi devono essere presenti a coppie coniugate perché il polinomio al denominatore possiede per ipotesi coefficienti reali. Per il teorema fondamentale dell'algebra, se un polinomio a coefficienti reali ammette come zero un numero complesso dovrà ammettere come zero anche il suo coniugato. Per quanto detto sarà:  $\mu + 2 \cdot \nu = n$ .

Per i  $\mu$  poli reali e distinti lavorerò esattamente come prima. Ciò che cambia è che le coppie di poli complessi coniugati danno un contributo periodico. Avremo:

$$f(t) = L^{-1}F(s) = \sum_{i=1}^{\mu} R_i \cdot e^{\sigma_i t} + \sum_{k=1}^{\nu} M_k \cdot e^{\sigma_k t} \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k)$$

Come noto i poli reali danno un contributo aperiodico mentre quelli complessi coniugati un contributo periodico (non posso dire se si tratta di oscillazioni smorzate, pure o esaltate perché non dico nulla su  $\sigma_k$ ). Avremo che:

$$R_k = |R_k| \cdot e^{j\angle R_k}$$

$$M_k = 2 \cdot |R_k|$$

$$\varphi_k = \frac{\pi}{2} + \angle R_k$$

$\omega_k$  sarà ricavabile dalle radici complesse coniugate, così come per  $\sigma_k$ .

### **c) Radici con molteplicità >1.**

Nella produttorina compaiono delle potenze:

$$Q(s) = \prod_{i=1}^{\mu} (s - p_i)^{v_i}$$

Trattasi di  $\mu$  zeri reali e distinti, ciascuno con molteplicità  $v_i$ .

Avremo che:

$$F(s) = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{k=0}^{v_i-1} \frac{R_{ik}}{(s - p_i)^{k+1}}$$

con:

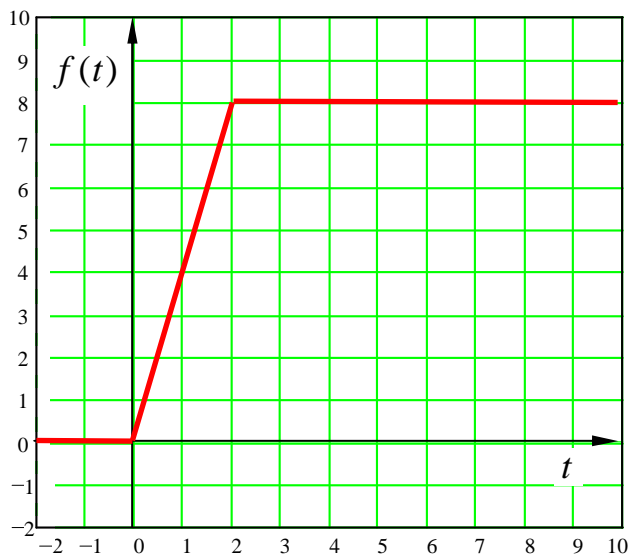
$$R_{ik} = \frac{1}{(v_i - k - 1)!} \cdot \lim_{s \rightarrow p_i} \left\{ \frac{d^{(v_i - k - 1)}}{ds^{(v_i - k - 1)}} [(s - p_i)^{v_i} \cdot F(s)] \right\}$$

In tal modo si perviene a:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{k=0}^{v_i-1} R_{ik} \cdot \frac{t^k}{k!} \cdot e^{p_i t} \quad \text{con } t > 0.$$

### Esercizio n°1

**Calcolare la trasformata di Laplace per la seguente funzione:**



Per prima cosa determiniamo la forma analitica della funzione. Essa è data da una rampa che parte all'istante zero con pendenza 4 e da una seconda rampa che parte dall'istante due con pendenza -4. Abbiamo, cioè:

$$f(t) = 4 \cdot \delta_{-2}(t) - 4 \cdot \delta_{-2}(t - 2) \quad \text{ovvero}$$

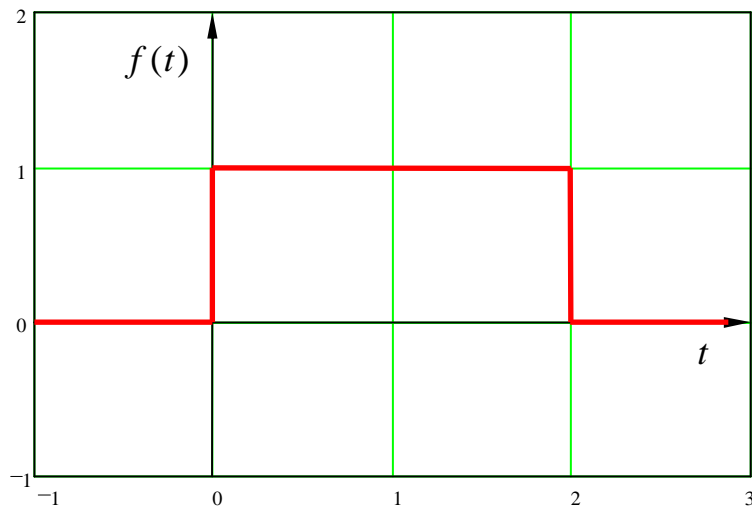
$$f(t) = 4 \cdot t \cdot \delta_{-1}(t) - 4 \cdot (t - 2) \cdot \delta_{-1}(t - 2)$$

Applicando le regole note:

$$F(s) = \frac{4}{s^2} - \frac{4}{s^2} \cdot e^{-2s} = \frac{4}{s^2} (1 - e^{-2s})$$

### Esercizio n°2

**Calcolare la trasformata di Laplace per la seguente funzione:**



Per prima cosa determiniamo la forma analitica della funzione. Essa è data da un gradino che parte all'istante zero con ampiezza 1 da un secondo gradino che parte dall'istante due con ampiezza -1. Abbiamo, cioè:

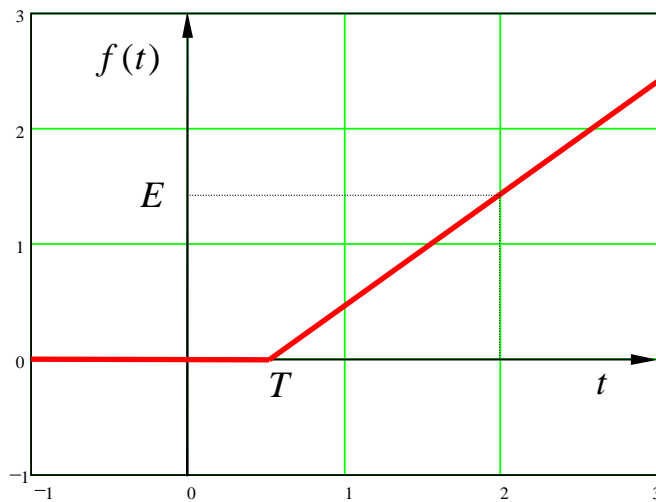
$$f(t) = \delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t - 2)$$

Applicando le regole note:

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-2s} = \frac{1}{s}(1 - e^{-2s})$$

### Esercizio n°3

**Calcolare la trasformata di Laplace per la seguente funzione:**



Per prima cosa determiniamo la forma analitica della funzione. Essa è data da una rampa che parte all'istante  $T$  con pendenza pari a  $\frac{E}{2-T}$ . Abbiamo, cioè:

$$f(t) = \frac{E}{2-T} \cdot \delta_{-2}(t-T) \quad \text{ovvero}$$

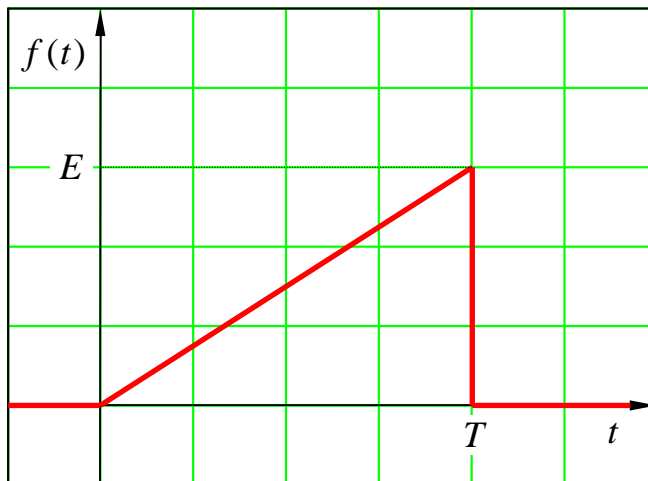
$$f(t) = \frac{E}{2-T} \cdot (t-T) \cdot \delta_{-1}(t-T)$$

Applicando le regole note:

$$F(s) = \frac{E}{2-T} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot e^{-sT}$$

#### Esercizio n°4

**Calcolare la trasformata di Laplace per la seguente funzione:**



Per prima cosa determiniamo la forma analitica della funzione. Essa è data da una rampa che parte all'istante 0 con pendenza pari a  $\frac{E}{T}$  e procede fino all'istante  $T$  per poi tornare a 0. Abbiamo, cioè:

$$f(t) = \frac{E}{T} \cdot \{\delta_{-2}(t) - \delta_{-2}(t - T)\} - E \cdot \delta_{-1}(t - T) \quad \text{ovvero}$$

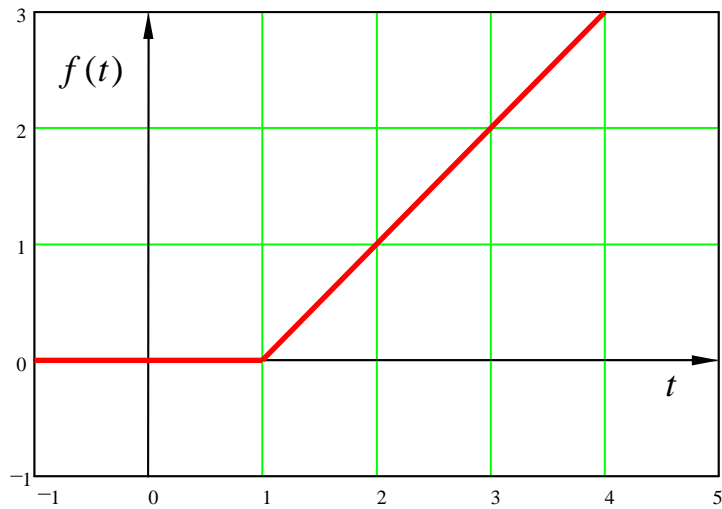
$$f(t) = \frac{E}{T} \cdot \{t \cdot \delta_{-1}(t) - (t - T) \cdot \delta_{-1}(t - T)\} - E \cdot \delta_{-1}(t - T)$$

Applicando le regole note:

$$F(s) = \frac{E}{T} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot (1 - e^{-sT}) - E \cdot \frac{1}{s} \cdot e^{-sT}$$

### Esercizio n°5

**Calcolare la trasformata di Laplace per la seguente funzione:**



Per prima cosa determiniamo la forma analitica della funzione. Essa è data da una rampa che parte all'istante 1 con pendenza pari a 1. Abbiamo, cioè:

$$f(t) = \delta_{-2}(t - 1) \quad \text{ovvero}$$

$$f(t) = (t - 1) \cdot \delta_{-1}(t - 1)$$

Applicando le regole note:

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \cdot e^{-s}$$

### Esercizio n°6

**Calcolare l'antitrasformata di Laplace per la seguente funzione:**

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1) \cdot (s+2)}$$

Si tratta di una funzione avente due poli reali e distinti. Calcoliamo i residui sfruttando la formula:

$$R_i = \lim_{s \rightarrow p_i} [(s - p_i) \cdot F(s)]$$

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{(s+1) \cdot (s+3)}{(s+1) \cdot (s+2)} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{(s+3)}{(s+2)} = 2$$

$$R_2 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{(s+2) \cdot (s+3)}{(s+1) \cdot (s+2)} = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{(s+3)}{(s+1)} = -1$$

A questo punto applichiamo la formula:

$$F(s) = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{(s - p_i)}$$

Da cui deriva che:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n R_i \cdot e^{p_i t} \quad \text{con } t > 0.$$

Sostituendo i valori ricavati:

$$f(t) = 2 \cdot e^{-t} - e^{-2t} = e^{-t} \cdot (2 - e^{-t})$$

### **Esercizio n°7**

**Calcolare l'antitrasformata di Laplace per la seguente funzione:**

$$F(s) = \frac{s+1}{s \cdot (s^2 + s + 1)}$$

Si tratta di una funzione avente un polo reale nell'origine e due poli complessi coniugati pari a:

$$s_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$s_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Il residuo del polo reale si calcola nel modo consueto e darà origine ad una componente aperiodica:

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot (s+1)}{s \cdot (s^2 + s + 1)} = 1$$

Calcoliamo con la stessa modalità i residui corrispondenti ai due poli complessi coniugati. Ci aspettiamo ancora due valori complessi coniugati.

$$R_2 = \lim_{s \rightarrow (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})} \frac{(s + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (s+1)}{s \cdot (s^2 + s + 1)} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$R_3 = \lim_{s \rightarrow (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})} \frac{(s + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (s+1)}{s \cdot (s^2 + s + 1)} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Dal momento che nella formula:

$$f(t) = L^{-1}F(s) = \sum_{i=1}^{\mu} R_i \cdot e^{\sigma_i t} + \sum_{k=1}^{\nu} M_k \cdot e^{\sigma_k t} \cdot \text{sen}(\omega_k t + \varphi_k)$$

figurano le coppie di poli complessi coniugati, per determinare le grandezze di cui abbiamo bisogno ci serviremo indifferentemente di uno dei due poli.

$$R_k = |R_k| \cdot e^{j\angle R_k}$$

$$M_k = 2 \cdot |R_k|$$

$$\varphi_k = \frac{\pi}{2} + \angle R_k$$

$$|R_2| = |R_3| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{36}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$M_2 = M_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \angle R_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\angle R_2 = -\angle R_3 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$$

In conclusione, abbiamo che:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \delta_{-1}(t) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Con  $R_3$  avrei ottenuto esattamente lo stesso risultato, in virtù delle proprietà delle funzioni di tipo periodico.

### **Esercizio n°8**

**Calcolare l'antitrasformata di Laplace per la seguente funzione:**

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+1)^3}$$

Si tratta di una funzione avente un polo reale con molteplicità pari a 3. Dovremo calcolare i residui  $R_{10}$ ,  $R_{11}$ ,  $R_{12}$  per mezzo della formula:

$$R_{ik} = \frac{1}{(\nu_i - k - 1)!} \cdot \lim_{s \rightarrow p_i} \left\{ \frac{d^{(\nu_i - k - 1)!}}{ds^{(\nu_i - k - 1)!}} [(s - p_i)^{\nu_i} \cdot F(s)] \right\}$$

dove  $\nu_1 = 3$ .

$$R_{10} = \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d^2}{ds^2} \left[ (s+1)^3 \cdot \frac{s+2}{(s+1)^3} \right] = 0$$

$$R_{11} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} (s+2) = 1$$

$$R_{12} = \lim_{s \rightarrow -1} (s+2) = 1$$

Dalla formula:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{k=0}^{\nu_i-1} R_{ik} \cdot \frac{t^k}{k!} \cdot e^{p_i t} \quad \text{con } t > 0.$$

ricaviamo che:

$$f(t) = t \cdot e^{-t} + \frac{t^2}{2} \cdot e^{-t} = t \cdot e^{-t} \left( 1 + \frac{t}{2} \right) \quad \text{con } t > 0.$$

### **Esercizio n°9**

**Calcolare l'antitrasformata di Laplace per la seguente funzione:**

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^2 \cdot (s+2)}$$

Nella situazione che stiamo affrontando abbiamo 2 poli reali:  $s = -2$  con molteplicità 1 e  $s = -1$  con molteplicità 2. Dovremo calcolare:  $R_{10}$ ,  $R_{20}$ ,  $R_{21}$ .

$$R_{10} = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{(s+2) \cdot (s^2 + 2s + 3)}{(s+1)^2 \cdot (s+2)} = 3$$

$$R_{20} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{(s+1)^2 \cdot (s^2 + 2s + 3)}{(s+1)^2 \cdot (s+2)} \right\} = 2$$

$$R_{21} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s^2 + 2s + 3}{s+2} = 2$$

Applicando le formule note:

$$f(t) = 3 \cdot e^{-2t} + 2 \cdot e^{-t} + 2t \cdot e^{-t} \quad \text{ovvero}$$

$$f(t) = (3 \cdot e^{-t} + 2 + 2t) \cdot e^{-t}$$

### **Esercizio n°10**

**Calcolare l'antitrasformata di Laplace per la seguente funzione:**

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+s+4}$$

Siamo in presenza di due poli complessi coniugati.

$$s_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$s_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{15}}{2}$$

Adottando la tecnica nota determineremo  $R_1$  e  $R_2$ .

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2}} \frac{(s + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{15}}{2}) \cdot (s+2)}{s^2 + s + 4} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{15}}{10}$$

Analogamente si ottiene:

$$R_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{10}$$

$$|R_1| = |R_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{15}{100}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$M_1 = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\angle R_1 = -\arctg \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Infine avremo che:

$$f(t) = 2\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t + \frac{\pi}{2} + \arctg \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Stesso risultato si sarebbe ottenuto operando con  $R_2$ .

## ESERCITAZIONE N°2

### RAPPRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI DI s

Nell'ambito dello studio dei Controlli Automatici grande importanza ha la funzione  $W(s)$ , detta *funzione di trasferimento*. In questa fase non diamo una sua interpretazione. Ci soffermiamo, piuttosto, sul fatto che, come tutte le funzioni di s, essa è suscettibile di una rappresentazione grafica. Partiamo dall'ipotesi che  $W(s)$  sia una funzione complessa di variabile complessa. Per tale classe di funzioni esistono due tipi di rappresentazioni: *rappresentazione con poli e coefficienti* e *rappresentazione con poli e zeri*. Sia, inoltre,  $W(s)$  razionale fratta e strettamente propria e il sistema stazionario:

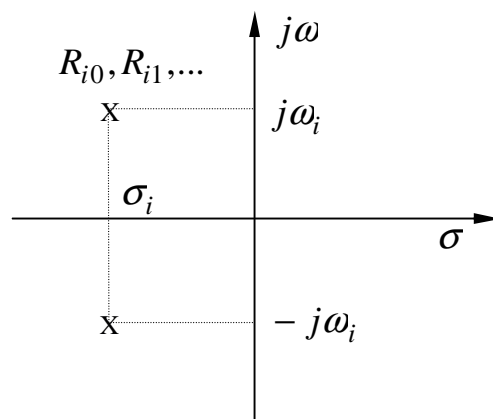
$$W(s) = \frac{L(s)}{N(s)} = \frac{\sum_{i=0}^l b_i \cdot s^i}{\sum_{i=0}^n a_i \cdot s^i} \quad \text{con } l < n$$

#### **Rappresentazione con poli e coefficienti.**

Si effettua lo sviluppo in frazioni parziali.

$$W(s) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{R_{ik}}{(s - p_i)^{k+1}}$$

Vediamo la rappresentazione grafica: Siamo nel caso di due poli complessi coniugati.

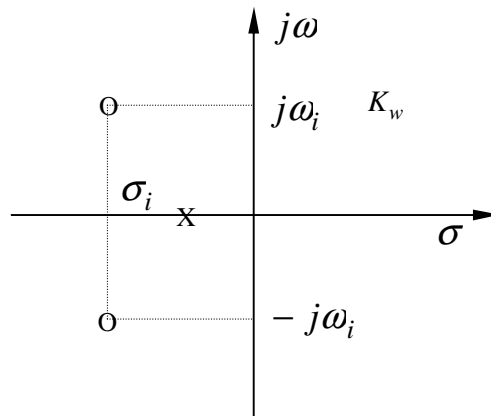


Col simbolo X abbiamo evidenziato i poli e i relativi residui (che sono in numero pari alla molteplicità del polo) vengono evidenziati mediante enumerazione nei pressi del polo stesso.

**Rappresentazione con poli e zeri.**

$$W(s) = K_w \cdot \frac{\prod_{i=1}^{\bar{r}} (s - z_i)^{\bar{m}_i}}{\prod_{i=1}^r (s - p_i)^{m_i}}$$

$K_w = \frac{b_l}{a_n}$  è detto *fattore di trasferimento*. Se  $a_n = 1 \Rightarrow K_w = b_l$ . Ad esempio, la rappresentazione grafica, nel caso di due zeri complessi coniugati e di un polo reale negativo, è:



Mettiamoci, adesso, nel caso più generale, in cui vogliamo distinguere poli e zeri reali da poli e zeri complessi coniugati, mettendo in evidenza le rispettive molteplicità. Per distinguere le grandezze relative al numeratore da quelle relative al denominatore useremo al numeratore il simbolo di soprasegno. Allora supponiamo di avere al numeratore  $\bar{\mu}$  zeri reali e  $\bar{\nu}$  coppie di zeri complessi coniugati, mentre al denominatore  $\mu$  poli reali (compresi eventuali poli nell'origine) e  $\nu$  coppie di poli complessi coniugati. Sia  $K_w$  il fattore di trasferimento,  $\bar{m}_i$  la molteplicità dell'i-esimo zero,  $m_i$  la molteplicità dell'iesimo zero,  $m_1$  la molteplicità del polo nell'origine,  $\bar{m}_k$  la molteplicità della

k-esima coppia complessa coniugata di zeri e  $m_k$  la molteplicità della k-esima coppia complessa coniugata di poli. Fissate tali convenzioni, per  $W(s)$  avremo una espressione del tipo:

$$W(s) = K_w \cdot \frac{\prod_{i=1}^{\bar{\mu}} (s - \bar{\sigma}_i)^{\bar{m}_i} \cdot \prod_{k=1}^{\bar{\nu}} [(s - \bar{\sigma}_k)^2 + \bar{\omega}_k^2]^{\bar{m}_k}}{s^{m_1} \cdot \prod_{i=2}^{\mu} (s - \sigma_i)^{m_i} \cdot \prod_{k=1}^{\nu} [(s - \sigma_k)^2 + \omega_k^2]^{m_k}}$$

dove al denominatore si sono messi in evidenza gli eventuali poli nell'origine. L'espressione trovata può essere espressa in un modo differente, più utile per determinate applicazioni:

Sia  $\bar{T}_i = -\frac{1}{\bar{\sigma}_i}$ , cioè il valore inverso dell'iesimo zero reale cambiato di segno: Tale valore ci

ricorda le costanti di tempo dei sistemi aperiodici.

Sia  $\bar{\zeta} = -\frac{\bar{\sigma}_k}{\sqrt{\bar{\sigma}_k^2 + \bar{\omega}_k^2}}$ , grandezza definita come *coefficiente di smorzamento*.

Sia, infine,  $\bar{\omega}_{nk} = \sqrt{\bar{\sigma}_k^2 + \bar{\omega}_k^2}$ , detta *pulsazione naturale non smorzata*.

Espressioni analoghe, a meno del simbolo di soprasegno, valgono anche per i poli. Sostituendo alla precedente espressione, si ha:

$$W(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{\bar{\mu}} (1 + s\bar{T}_i)^{\bar{m}_i} \cdot \prod_{k=1}^{\bar{\nu}} \left[ 1 + \frac{2\bar{\zeta}_i}{\bar{\omega}_{ni}} \cdot s + \frac{s^2}{\bar{\omega}_{ni}^2} \right]^{\bar{m}_k}}{s^{m_1} \cdot \prod_{i=2}^{\mu} (1 + sT_i)^{m_i} \cdot \prod_{k=1}^{\nu} \left[ 1 + \frac{2\zeta_i}{\omega_{ni}} \cdot s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2} \right]^{m_k}}$$

dove

$$K = K_w \cdot \frac{\prod_{i=2}^{\mu} T_i^{m_i} \cdot \prod_{k=1}^{\bar{\nu}} (\omega_{ni}^2)^{\bar{\nu}}}{\prod_{i=1}^{\bar{\mu}} T_i^{m_i} \cdot \prod_{k=1}^{\nu} (\omega_{ni}^2)^{\nu}}$$

viene definito come *guadagno*.

Bisogna stare molto attenti nel corso dello studio a non confondere fattore di trasferimento e guadagno perché sono due parametri riferiti a due differenti espressioni della  $W(s)$ .

Notiamo anche che:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} W(s) \cdot s^{\Delta}$$

### Passaggio tra le due rappresentazioni.

La rappresentazione con zeri e poli è la più immediata e quella che offre un significato fisico. Talvolta può essere utile transitare da una rappresentazione all'altra. Solo nel caso di poli tutti distinti si ha che:

$$W(s) = K_w \cdot \frac{\prod_{i=1}^{\bar{r}} (s - z_i)^{\bar{m}_i}}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \sum_{j=1}^n \frac{R_j}{s - p_j}$$

In questa espressione abbiamo i poli e ci mancano i residui. Ogni polo, avendo molteplicità 1, avrà un solo residuo.

$$R_j = \lim_{s \rightarrow p_j} K_w \cdot \frac{\prod_{i=1}^{\bar{r}} (s - z_i)^{\bar{m}_i}}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \cdot (s - p_j) = K_w \cdot \frac{\prod_{i=1}^{\bar{r}} (p_j - z_i)^{\bar{m}_i}}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (p_i - p_j)}$$

$(p_j - z_i)$  E' il j-esimo polo collegato con un segmento a tutti gli zeri. Si tratta di un vettore.

$(p_j - p_i)$  Si tratta di un vettore di collegamento tra il j-esimo polo e tutti gli altri poli.

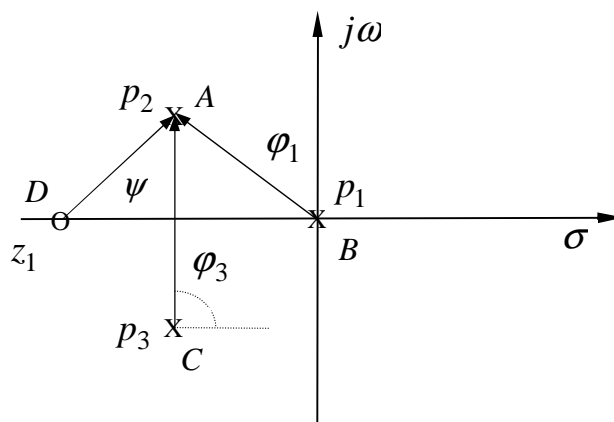
$$|R_j| = |K_w| \cdot \frac{\prod_{i=1}^{\bar{r}} |p_j - z_i|^{m_i}}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |p_j - p_i|}$$

$$\angle R_j = \sum_{i=1}^{\bar{r}} m_i \cdot \angle(p_j - z_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \angle(p_j - p_i) + \angle K_w$$

$$\text{con } \angle K_w = \begin{cases} 0 \\ \pm \pi \end{cases} \quad \text{a seconda se } K_w < 0 \text{ o } K_w > 0.$$

Se  $K_w$  varia tra 0 e 1 diremo di essere in presenza di attenuazione.

Come esempio vediamo il caso in cui abbiamo due poli complessi coniugati, un polo nell'origine ed uno zero reale.



Supponiamo di voler calcolare il residuo di  $p_2$  :

$$|R_2| = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB} + \overline{AC}} \cdot |K_w|$$

$$\angle R_2 = \psi - \phi_1 - \phi_3 + \angle K_w$$

### **Rappresentazione di $W(j\omega)$ .**

$W(j\omega)$  è una funzione complessa della variabile reale  $\omega$ . In buona sostanza si tratta della  $W(s)$  definita mediante i valori che  $s$  assume lungo l'asse immaginario. Essa può essere rappresentata a mezzo di parte reale e parte immaginaria o di modulo e fase.

$$W(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega) = M(\omega) \cdot e^{j\alpha(\omega)}$$

Le formule di passaggio tra le due rappresentazioni sono:

$$R(\omega) = M(\omega) \cdot \cos \alpha$$

$$I(\omega) = M(\omega) \cdot \sin \alpha$$

$$M(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$$

$$\alpha(\omega) = \arctg \frac{I(\omega)}{R(\omega)}$$

La  $W(j\omega)$  è suscettibile di tre differenti tipi di rappresentazione:

1. *Diagrammi logaritmici o di Bode.*
2. *Diagrammi polari o di Nyquist.*
3. *Diagrammi cartesiani o di Nichols.*

### **Diagrammi logaritmici o di Bode.**

E' una rappresentazione del modulo e della fase di  $W(j\omega)$ . Sia per la rappresentazione del modulo che per quella della fase in ascisse si riporta il logaritmo decimale di  $\omega$  (su carta semilogaritmica riportiamo direttamente i valori di  $\omega$ ) mentre in ordinate per il modulo riportiamo il valore del modulo in dB, cioè venti volte il logaritmo decimale del modulo, mentre per la fase riportiamo direttamente il valore della fase in gradi.

$$\text{Ascisse} \rightarrow \log_{10} \omega$$

$$\text{Ordinate} \rightarrow M_{dB} = 20 \log_{10} M(\omega)$$

### **Diagrammi cartesiani o di Nichols.**

Si sfruttano le *carte di Nichols*, diagrammi che consentono di passare dallo studio del sistema a catena aperta a quello a catena chiusa.

Si riporta in ordinate  $M_{dB} = 20\log_{10} M(\omega)$  come per Bode ma con scala aritmetica normale. In ascisse si introducono i corrispondenti valori di fase espressi in gradi. Così facendo ogni punto della curva è ben definito.  $\omega$  è la taratura delle curve che sono descritte al variare di  $\omega$ . Il vantaggio è di potere usufruire di una rappresentazione unica che raccoglie tutte le informazioni.

### **Diagrammi polari o di Nyquist.**

Sugli assi si hanno due scale aritmetiche normali e si può rappresentare con modulo e fase o con parte reale e parte immaginaria. Per ogni valore di  $\omega$  ho un solo punto e al variare di  $\omega$  viene descritta una curva, detta polare. Importante è sottolineare che da questa curva è possibile trarre informazioni sulla stabilità o sulla instabilità del sistema.



## ESERCITAZIONE N°3

### I DIAGRAMMI DI BODE.

Ci occuperemo in questa sede dei diagrammi di Bode, che, come detto nella precedente esercitazione servono alla rappresentazione della funzione complessa di variabile reale  $W(j\omega)$ .

Diamo due definizioni utili:

- *Decade*: Intervallo dei valori di  $\omega$  che stanno tra loro in rapporto 10.
- *Ottava*: Intervallo dei valori di  $\omega$  che stanno tra loro in rapporto 2.

Nei diagrammi di Bode si ricorre a scale logaritmiche dal momento che sono oggetto di studio grandezze che hanno un range di escursione piuttosto ampio. Dunque, in questo modo, si ha una sorta di compressione del range dinamico della variabile  $\omega$ .

Per il tracciamento di  $W(j\omega)$  facciamo riferimento all'espressione in cui figura il guadagno  $K$ , cioè:

$$W(j\omega) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{\bar{\mu}} (1 + j\omega \bar{T}_i)^{\bar{m}_i} \cdot \prod_{k=1}^{\bar{\nu}} \left[ 1 + \frac{2\bar{\zeta}_k}{\bar{\omega}_{nk}} \cdot (j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\bar{\omega}_{nk}^2} \right]^{\bar{\nu}}}{(j\omega)^{m_1} \cdot \prod_{i=2}^{\mu} (1 + j\omega T_i)^{m_i} \cdot \prod_{k=1}^{\nu} \left[ 1 + \frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} \cdot (j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{nk}^2} \right]^{\nu}}$$

Vediamo l'espressione del modulo logaritmico:

$$\begin{aligned} Lm[W(j\omega)] = & Lm(K) + \sum_{i=1}^{\bar{\mu}} \bar{m}_i \cdot Lm(1 + j\omega \bar{T}_i) + \sum_{k=1}^{\bar{\nu}} \bar{m}_K \cdot Lm \left( 1 + \frac{2\bar{\zeta}_k}{\bar{\omega}_{nk}} \cdot (j\omega) - \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_{nk}^2} \right) + \\ & + m_1 \cdot Lm(j\omega)^{-1} + \sum_{i=2}^{\mu} m_i \cdot Lm(1 + j\omega T_i)^{-1} + \sum_{k=1}^{\nu} m_k \cdot Lm \left( 1 + \frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} \cdot (j\omega) - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Occupiamoci adesso della fase: i termini al numeratore danno un contributo positivo, quelli al denominatore un contributo negativo.

$$\begin{aligned} \angle W(j\omega) = & \angle K + \sum_{i=1}^{\bar{\mu}} \bar{m}_i \cdot \angle(1 + j\omega \bar{T}_i) + \sum_{k=1}^{\bar{\nu}} \bar{m}_k \cdot \angle \left( 1 + \frac{2\bar{\zeta}_k}{\bar{\omega}_{nk}} \cdot (j\omega) - \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_{nk}^2} \right) + \\ & + m_1 \cdot \angle(j\omega)^{-1} + \sum_{i=2}^{\mu} m_i \cdot \angle(1 + j\omega T_1)^{-1} + \sum_{k=1}^{\nu} \angle \left( 1 + \frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} \cdot (j\omega) - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Il diagramma ottenuto riportando in ordinate il logaritmo del modulo espresso in decibel e in ascisse il logaritmo di  $\omega$  espresso in decadi (o ottave) costituisce il *diagramma del modulo logaritmico o diagramma di attenuazione o guadagno*. Il diagramma ottenuto riportando la fase espressa in gradi in ordinate e il logaritmo di  $\omega$  espresso in decadi (o ottave) in ascisse costituisce il *diagramma logaritmico di fase o diagramma di fase*. Entrambi questi diagrammi forniscono la rappresentazione di Bode della  $W(j\omega)$ . Nell'espressione della  $W(j\omega)$  rintracciamo 4 fattori fondamentali a cui ridurre lo studio di modulo e fase:

$K$	fattore costante.
$(j\omega)^{\pm 1}$	fattore monomio.
$(1 + j\omega T)^{\pm 1}$	fattore binomio.
$\left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} \cdot (j\omega) - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]^{\pm 1}$	fattore trinomio.

L'esponente negativo significa che il fattore compare al denominatore, quello positivo al numeratore. La rappresentazione complessiva della  $W(j\omega)$  risulta dalla composizione delle rappresentazioni dei fattori semplici che risultano nella sua espressione. Visto che tale rappresentazione risulta sovente complessa, per semplificare ulteriormente lo studio, si ricorre all'uso di rappresentazioni asintotiche onde poi effettuare correzioni per pervenire all'andamento esatto. Poniamoci allo studio dei singoli fattori.

•Fattori costanti.

La costante  $K$  non dipende da  $\omega$  per cui il diagramma del modulo logaritmico è:

$$LmK = 20\log K \text{ dB}$$

Questa è una retta orizzontale. Questo fattore eleva le curve logaritmiche del modulo di un valore fisso. La fase è 0 se  $K$  è positiva mentre è di  $\pm \pi$  se  $K$  è negativa.

•Fattore monomio.

$$Lm(j\omega)^{-1} = -20\log \omega$$

Si tratta di una retta che passa per 0 dB per  $\omega = 1$  con una pendenza di  $-20$  dB/decade o di  $-6$  dB/ottava. Se ho molteplicità la pendenza viene moltiplicata per la molteplicità. L'angolo di fase è costantemente uguale a  $-90^\circ$ . Se il fattore compare al numeratore le pendenze sono positive ( $20$  dB/decade o di  $6$  dB/ottava) e la fase è costantemente uguale a  $90^\circ$ . Se ho molteplicità la pendenza viene moltiplicata per la molteplicità.

Fino a questo punto non abbiamo fatto alcuna approssimazione.

•Fattore binomio.

$$Lm \frac{1}{1+j\omega T} = 20\log \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| = -20\log \sqrt{1+\omega^2 T^2}$$

Premettiamo che il segno di  $T$  non influisce sul modulo ma solo, eventualmente, sulla fase. Il diagramma del modulo presenta due asintoti:

$$\text{Per } \omega T \ll 1 \text{ abbiamo che } Lm \frac{1}{1+j\omega T} \rightarrow \log 1 = 0$$

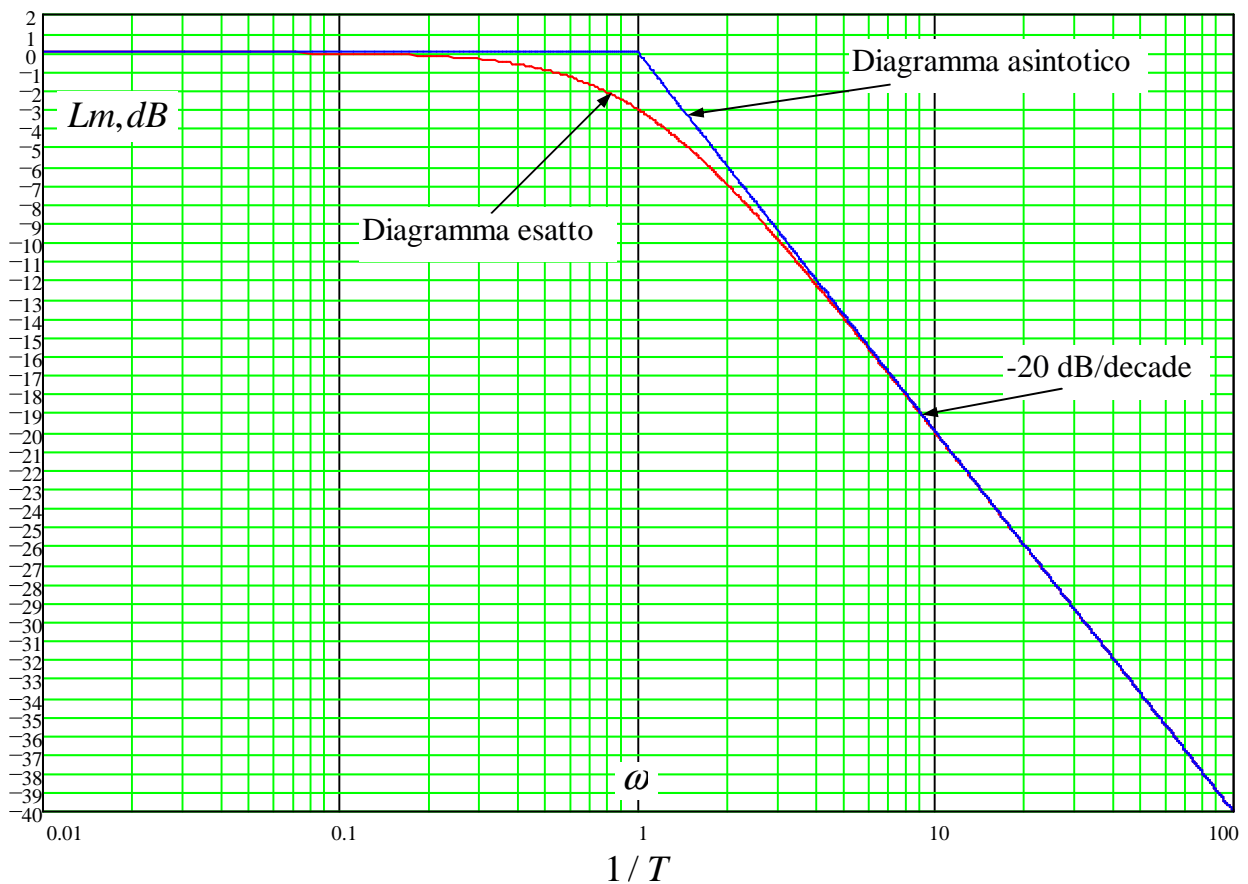
Quindi, per bassi valori di  $\omega$  l'asintoto coincide con l'asse delle ascisse.

Per  $\omega T \gg 1$  abbiamo che  $Lm \frac{1}{1 + j\omega T} \rightarrow 20 \log \left| \frac{1}{j\omega T} \right| = -20 \log \omega T$

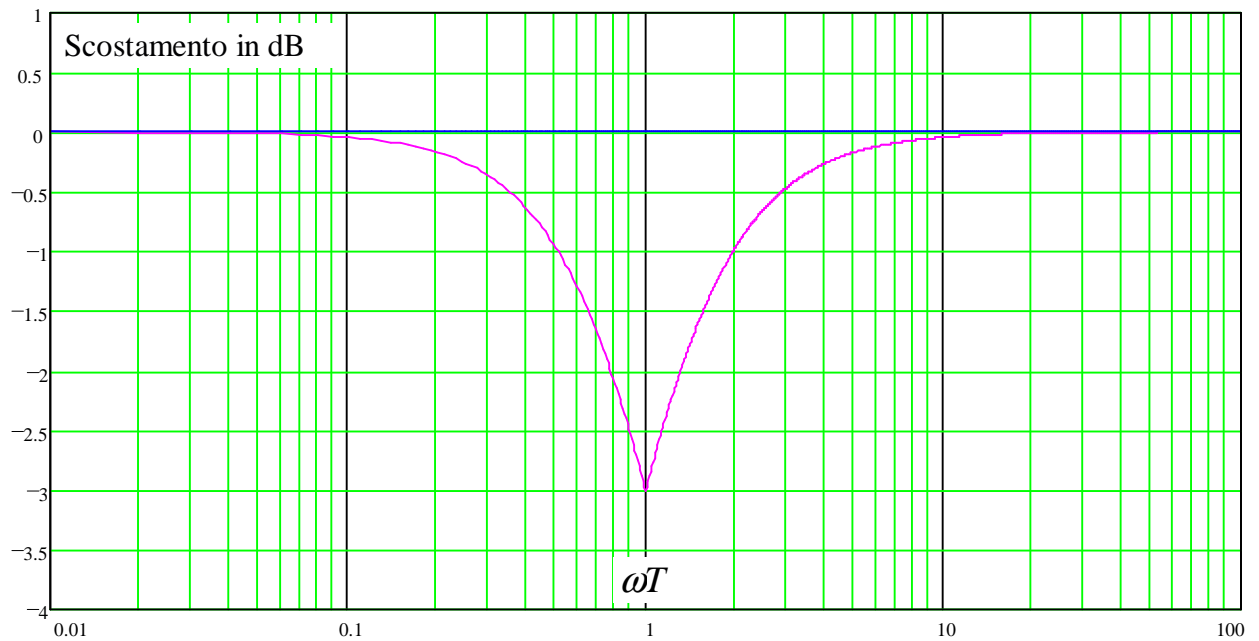
L'asintoto è, in tal caso, una retta con una pendenza negativa di 6 dB/ottava o 20 dB/decade che interseca l'asse delle ascisse per  $\omega = \frac{1}{T}$ , detto *punto di rottura*. Abbiamo che l'intersezione dei due asintoti costituisce una spezzata detta diagramma asintotico del modulo di tale fattore.

Ovviamente le cose si capovolgono se il fattore figura al numeratore ed in entrambi i casi eventuali molteplicità vanno a fattore.

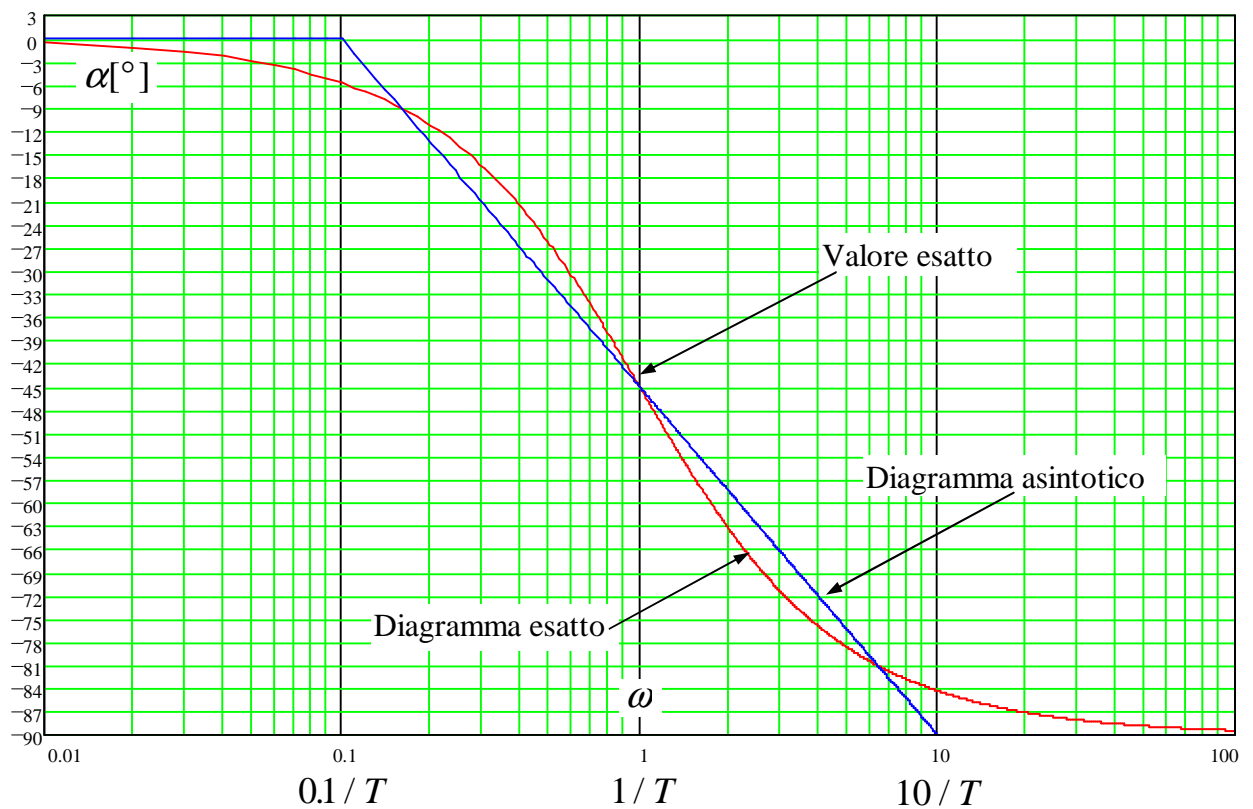
In figura è possibile vedere l'andamento approssimato e quello esatto del modulo logaritmico del fattore binomio.



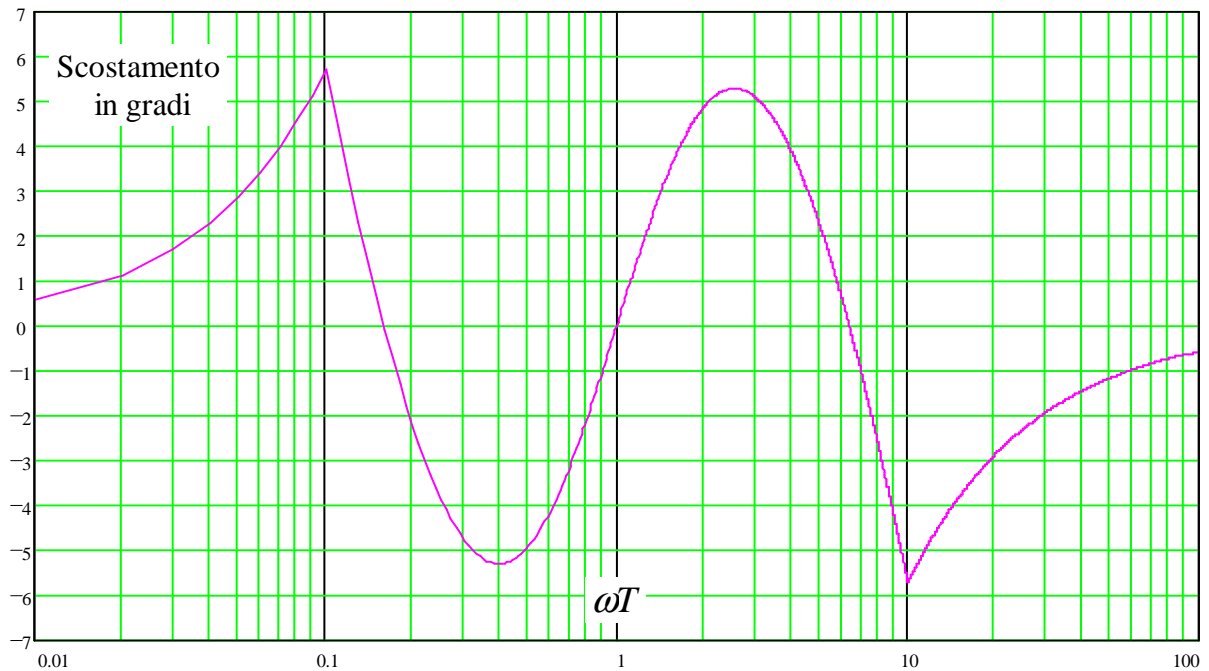
Per quanto riguarda lo scostamento del diagramma esatto da quello asintotico, questo è di -3 dB alla rottura e di -1 dB un'ottava sopra e un'ottava sotto la rottura. Esiste un diagramma detto di correzione:



Anche per la fase si ha un diagramma asintotico:



Le correzioni per il diagramma asintotico di fase sono di  $-6^\circ$  una decade sotto la rottura e di  $6^\circ$  una decade sopra la rottura. Alla rottura abbiamo proprio il valore esatto ( $-45^\circ$ ). Non è superfluo ricordare che se tale fattore si trova a numeratore i segni si invertono ed eventuali molteplicità vanno a fattorizzarsi. Vediamo il diagramma di correzione per la fase:



•Fattore trinomio.

$$\left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} \cdot (j\omega) - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]^{\pm 1}$$

$\zeta$  è il *fattore di smorzamento*.

$\omega_n$  è la *pulsazione naturale*.

Se  $|\zeta| \in (0;1)$  (ciò avviene se  $\omega$  è reale) avremo a che fare con un modo oscillatorio smorzato. Il fattore trinomio si può scindere nel prodotto di due radici complesse coniugate.

Se  $|\zeta| = 1$  avremo a che fare con un moto oscillatorio smorzato. Il fattore trinomio si scinde nel prodotto di due radici reali e coincidenti.

Se  $|\zeta| > 1$  (ciò avviene per determinati valori di  $\omega$  complessa) avremo a che fare con un moto oscillatorio smorzato. Il fattore trinomio si scinde nel prodotto di due radici reali e distinte.

$$Lm \left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} \cdot (j\omega) - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]^{-1} = -20 \log \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( \frac{2\zeta}{\omega_n} \right)^2}$$

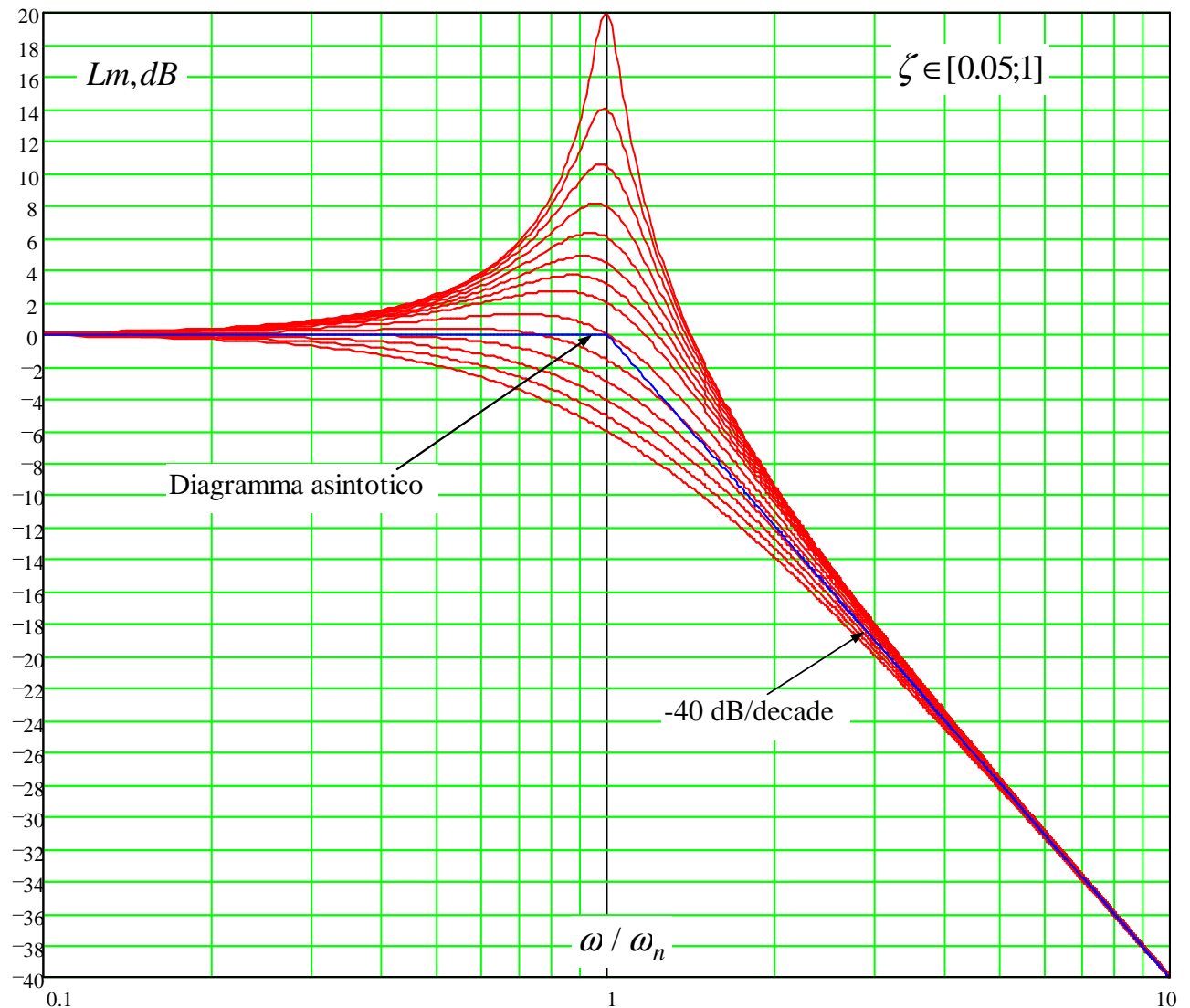
Non ci occuperemo del segno di  $\zeta_i$  perché non influisce sul modulo logaritmico ma solo sulla fase. Vediamo gli asintoti:

$$\text{Se } \frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \quad \text{si ha che } Lm \left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} \cdot (j\omega) - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]^{-1} \rightarrow -20 \log 1 = 0$$

Questo è un primo asintoto.

$$\text{Se } \frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \quad \text{si ha che } Lm \left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} \cdot (j\omega) - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]^{-1} \rightarrow -40 \log \frac{\omega}{\omega_n}$$

Questo è un secondo asintoto, una semiretta che parte da  $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$  e prosegue con una pendenza di  $-40$  dB/decade. I due asintoti si intersecano proprio per  $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ , dando origine al diagramma asintotico del modulo. Nella figura successiva vediamo l'andamento asintotico e quello reale del fattore trinomio.



La rottura si ha alla pulsazione naturale. Nel caso di molteplicità o di grandezza al numeratore si lavora come già visto per i fattori precedenti.

La curva non presenta massimi per  $\zeta > 0.707$  mentre poi si raggiunge un massimo di valore pari a:

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\zeta}$$

Il valore di  $Lm$  per  $\omega = \omega_r$  è:

$$M_r = -20 \cdot \log(2|\zeta| \cdot \sqrt{1 - \zeta^2})$$

Al variare di  $\zeta$  il massimo si ha per un diverso valore di  $\omega$ .

Per ciò che riguarda la fase si ha che:

$$\alpha(\omega) = -\arctg \frac{\frac{2\zeta_i \omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \begin{cases} -\arctg \frac{\frac{2\zeta_i \omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} & \text{Per } \zeta_i > 0 \\ \arctg \frac{\frac{2|\zeta_i| \omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} & \text{Per } \zeta_i < 0 \end{cases}$$

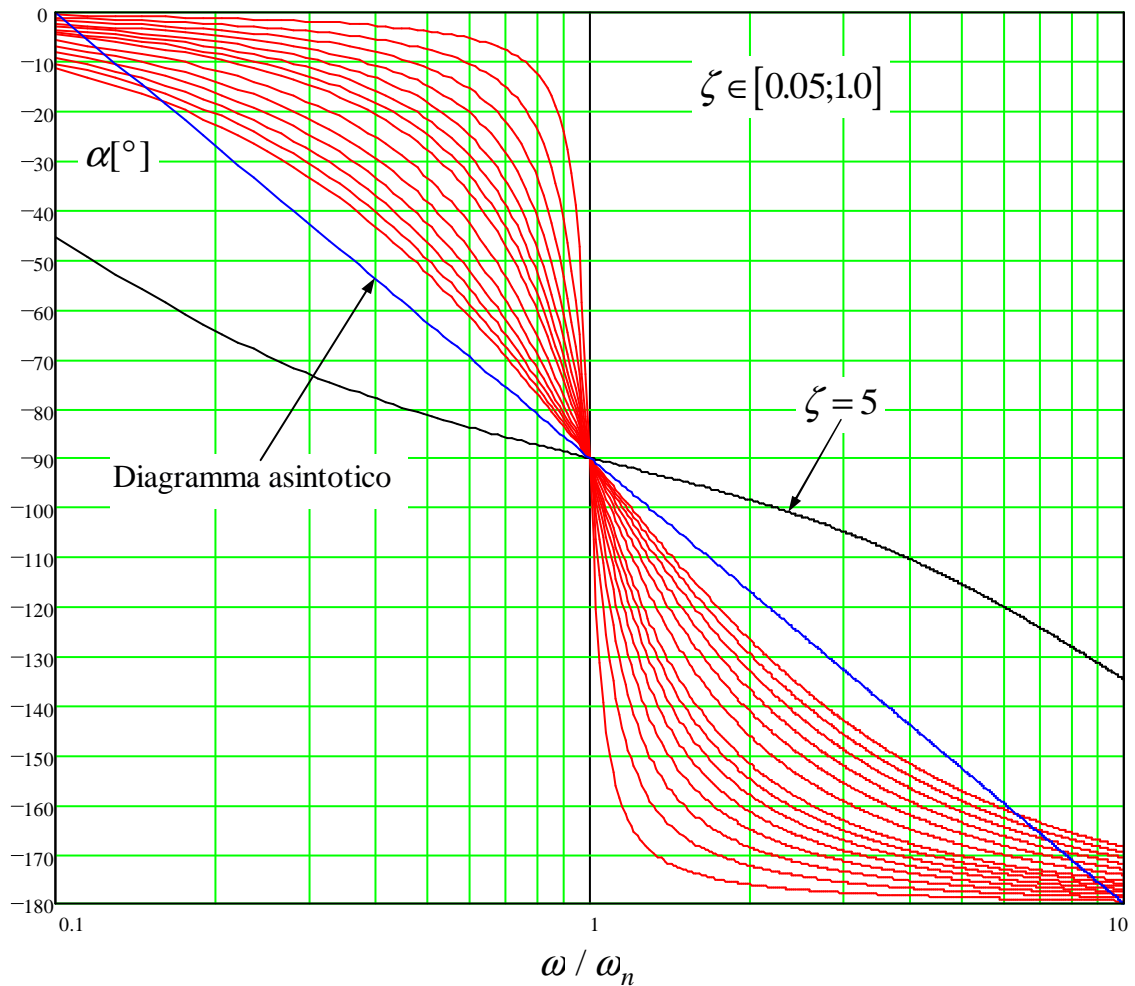
Se  $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$  si ha che  $\alpha(\omega) \rightarrow -\arctg 0 = 0^\circ$ .

Se  $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$  si ha che  $\alpha(\omega) \rightarrow -\arctg(-0) = -180^\circ$

Se  $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$  si ha che  $\alpha(\omega) \rightarrow -\arctg \infty = -90^\circ$

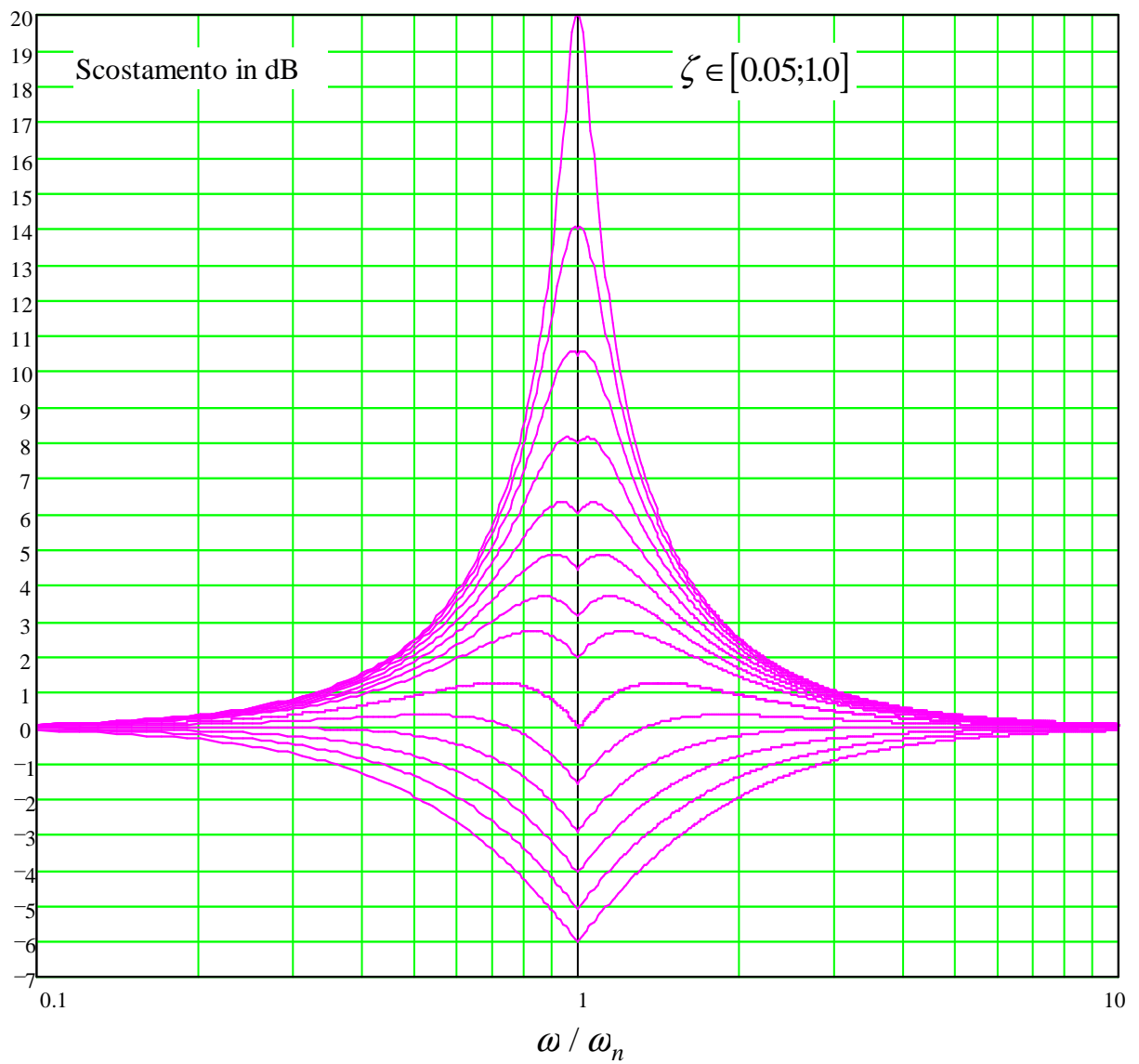
Dunque abbiamo due asintoti: uno coincidente con l'asse delle ascisse fino a  $\frac{\omega}{\omega_n} = 0.1$  e

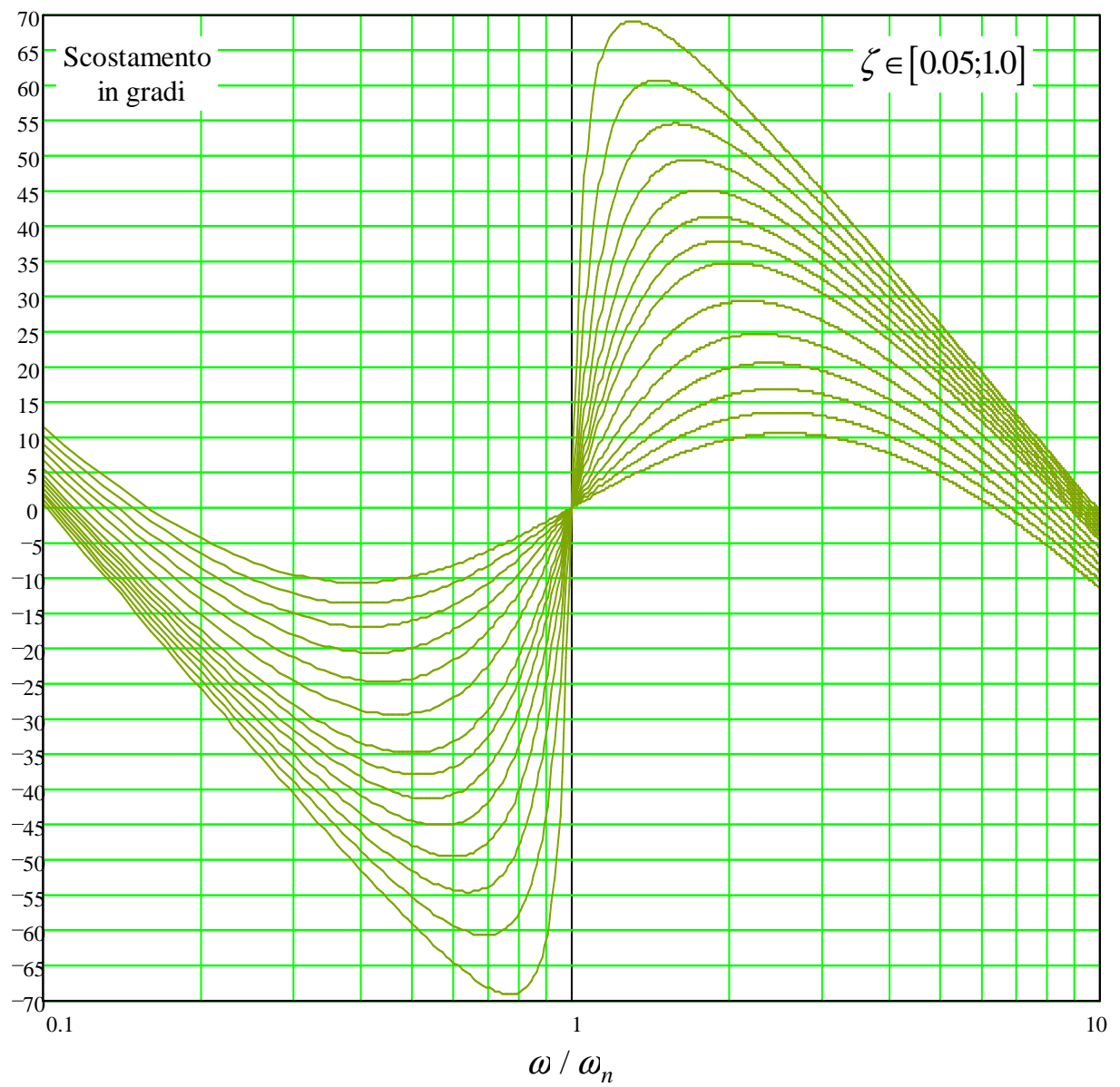
l'altro pari a  $-180^\circ$  per  $\frac{\omega}{\omega_n} \geq 10$ . Il diagramma asintotico e quello reale sono qui di seguito riportati:



Vediamo, a questo punto, i diagrammi di correzione, sia per il modulo che per la fase. Anche essi sono tracciati al variare del fattore di smorzamento .

Si può notare che per  $\zeta = 1$  l'errore è esattamente il doppio di quello commesso nel caso del fattore binomio. Per  $\zeta \in [0;1)$  si ha una risonanza che assume valore tanto più elevato quanto più piccolo è il valore di  $\zeta$ . Gli spostamenti dal diagramma effettivo dipendono dal valore di  $\zeta$  e possono essere molto elevati, tendendo ad infinito per  $\zeta \rightarrow 0$ .





### Esercizio n°11

Tracciare i diagrammi di Bode della seguente funzione:

$$W(j\omega) = \frac{10 \cdot (1 + j\omega 0.01)}{j\omega \cdot (1 + j\omega 0.1)}$$

Tale funzione possiede un numeratore in cui figura un fattore costante e un fattore binomio mentre al denominatore rinveniamo un fattore monomio e un fattore binomio.

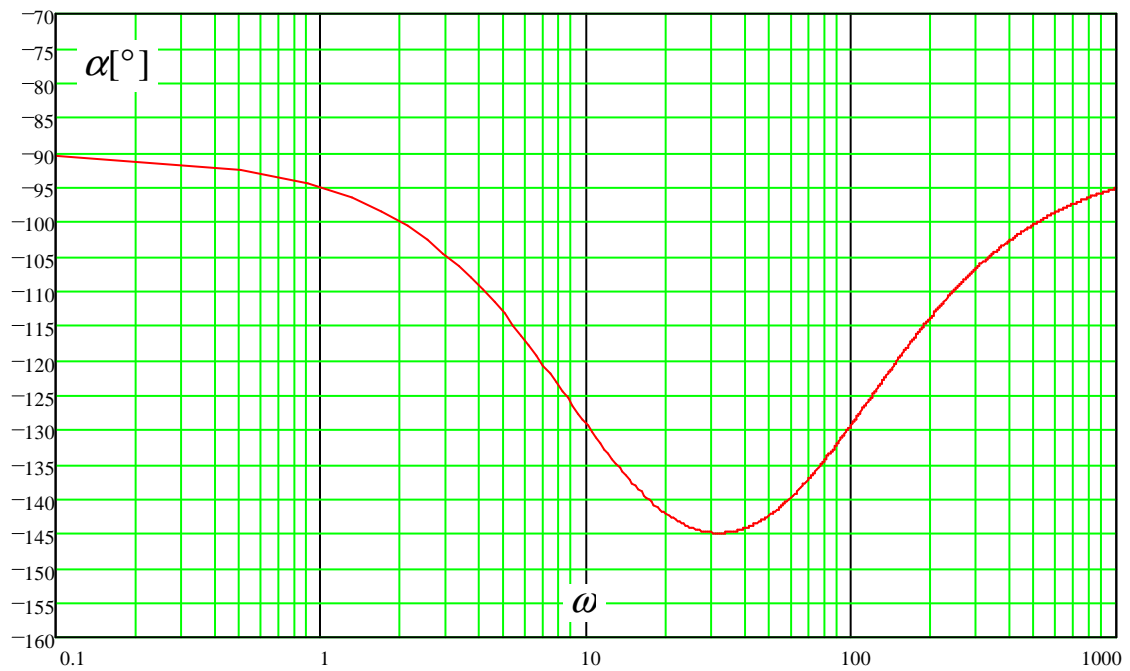
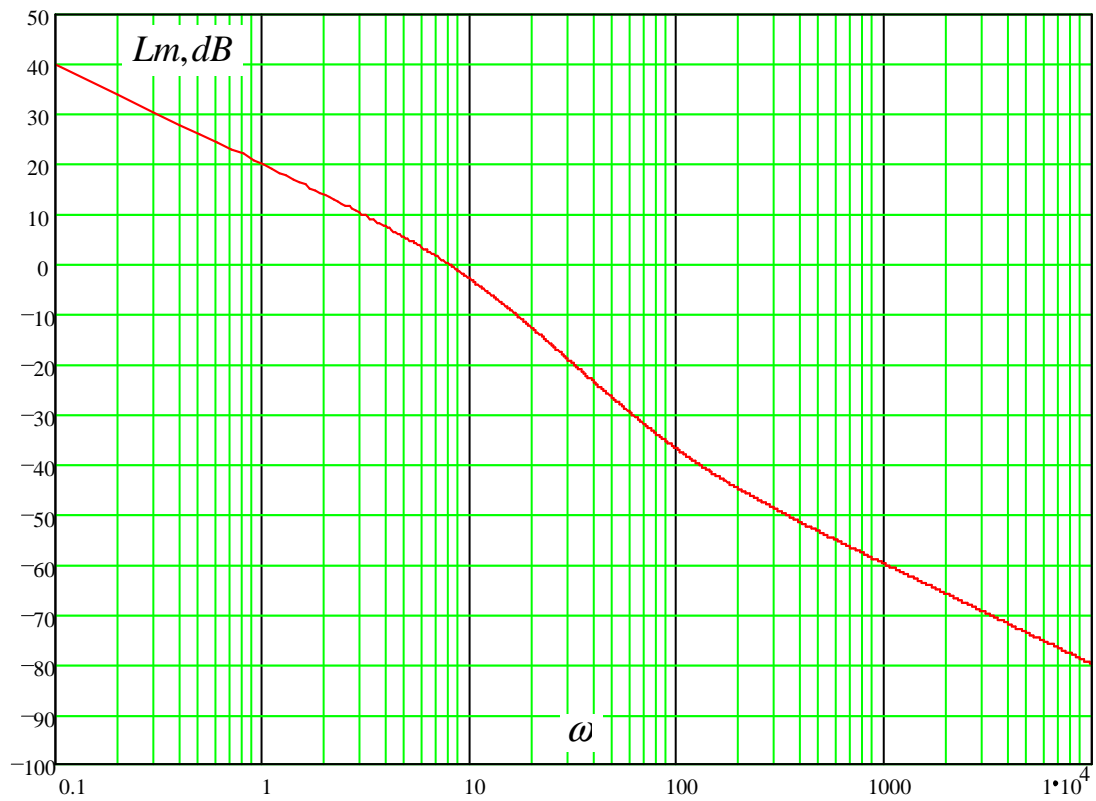
#### Considerazioni sul numeratore:

- Il termine costante offre un contributo pari a  $20 \log 10 = 20$  al modulo logaritmico e un contributo nullo alla fase.
- Il fattore binomio offre uno zero per  $\omega = 100$  che contribuisce al modulo logaritmico solo da  $\omega = 100$  in poi con una crescita di 20 dB/decade. Per la fase si parte da un contributo nullo fino a  $\omega = 10$ , per pervenire a  $+45^\circ$  per  $\omega = 100$  e mantenersi costante a  $+90^\circ$  da  $\omega = 1000$  in poi.

#### Considerazioni sul denominatore:

- Il polo nell'origine da un contributo pari a  $-20$  dB/decade per ogni valore di  $\omega$  ed un contributo costantemente uguale a  $-90^\circ$  per la fase.
- Vi è un secondo polo per  $\omega = 10$ . Esso, per ciò che riguarda il modulo, comincia a farsi sentire proprio da  $\omega = 10$  in poi, con un contributo di  $-20$  dB/decade. Per la fase il contributo è nullo fino a  $\omega = 1$ , giunge a  $-45^\circ$  per  $\omega = 10$  e si mantiene costante a  $-90^\circ$  da  $\omega = 100$  in poi.

Riportiamo qui di seguito i diagrammi di modulo logaritmico e fase:



## ESERCITAZIONE N°4

### APPLICAZIONE DI DIAGRAMMI DI BODE.

#### Esercizio n°12

Tracciare i diagrammi di Bode della seguente funzione:

$$W(j\omega) = \frac{(1 + j\omega 0.125)}{(1 + j\omega 0.2) \cdot (1 + j\omega 0.01)}$$

Tale funzione possiede un numeratore in cui figura un fattore binomio mentre al denominatore rinveniamo due fattori binomi.

#### Considerazioni sul numeratore:

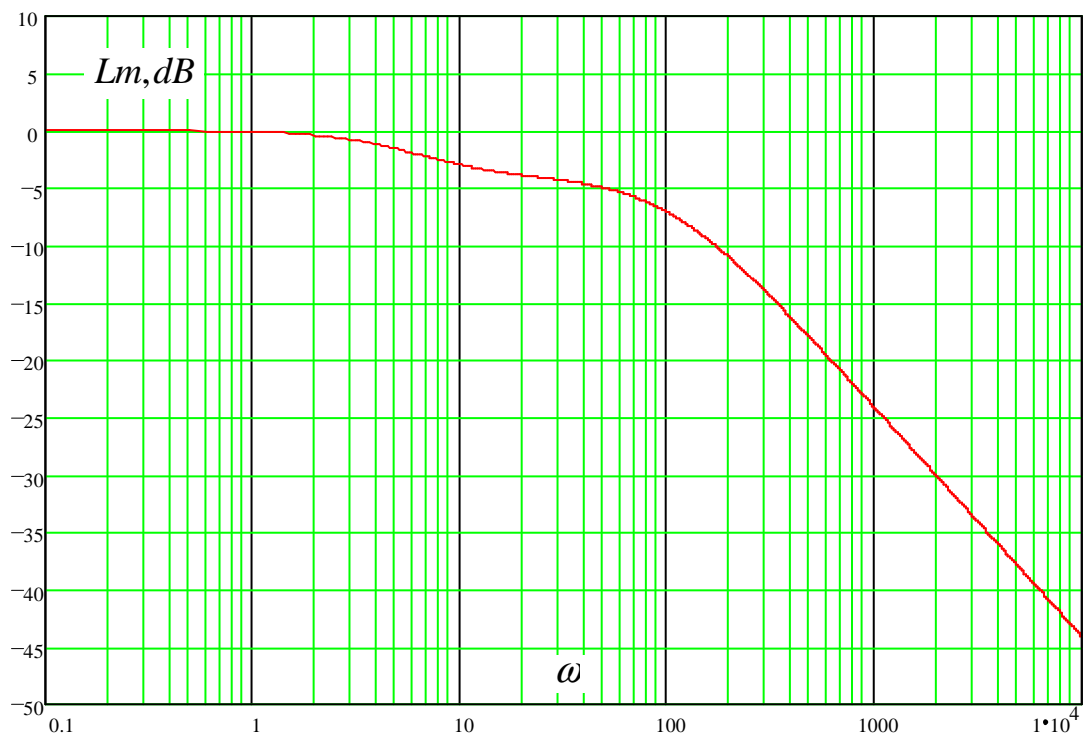
• Il fattore binomio offre uno zero per  $\omega = 8$  che contribuisce al modulo logaritmico solo da  $\omega = 8$  in poi con una crescita di 20 dB/decade. Per la fase si parte da un contributo nullo fino a  $\omega = 0.8$ , per pervenire a  $+45^\circ$  per  $\omega = 8$  e mantenersi costante a  $+90^\circ$  da  $\omega = 80$  in poi.

#### Considerazioni sul denominatore:

• Il primo fattore binomio offre un polo per  $\omega = 5$  ed un contributo pari a  $-20$  dB/decade per ogni valore di  $\omega$  superiore ad  $\omega = 5$ .  $-90^\circ$ . Per la fase si parte da un contributo nullo fino a  $\omega = 0.5$ , per pervenire a  $-45^\circ$  per  $\omega = 5$  e mantenersi costante a  $-90^\circ$  da  $\omega = 50$  in poi.

• Vi è un secondo polo per  $\omega = 100$ . Esso, per ciò che riguarda il modulo, comincia a farsi sentire proprio da  $\omega = 100$  in poi, con un contributo di  $-20$  dB/decade. Per la fase il contributo è nullo fino a  $\omega = 10$ , giunge a  $-45^\circ$  per  $\omega = 100$  e si mantiene costante a  $-90^\circ$  da  $\omega = 1000$  in poi.

Riportiamo qui di seguito i diagrammi di modulo logaritmico e fase:



**Esercizio n°13**

**Tracciare i diagrammi di Bode della seguente funzione:**

$$W(j\omega) = \frac{10 \cdot (1 + j\omega 2)}{j\omega \cdot (1 + j\omega 50)^2}$$

Tale funzione possiede un numeratore in cui figura un fattore costante e un fattore binomio mentre al denominatore rinveniamo un fattore monomio e un fattore binomio con molteplicità due.

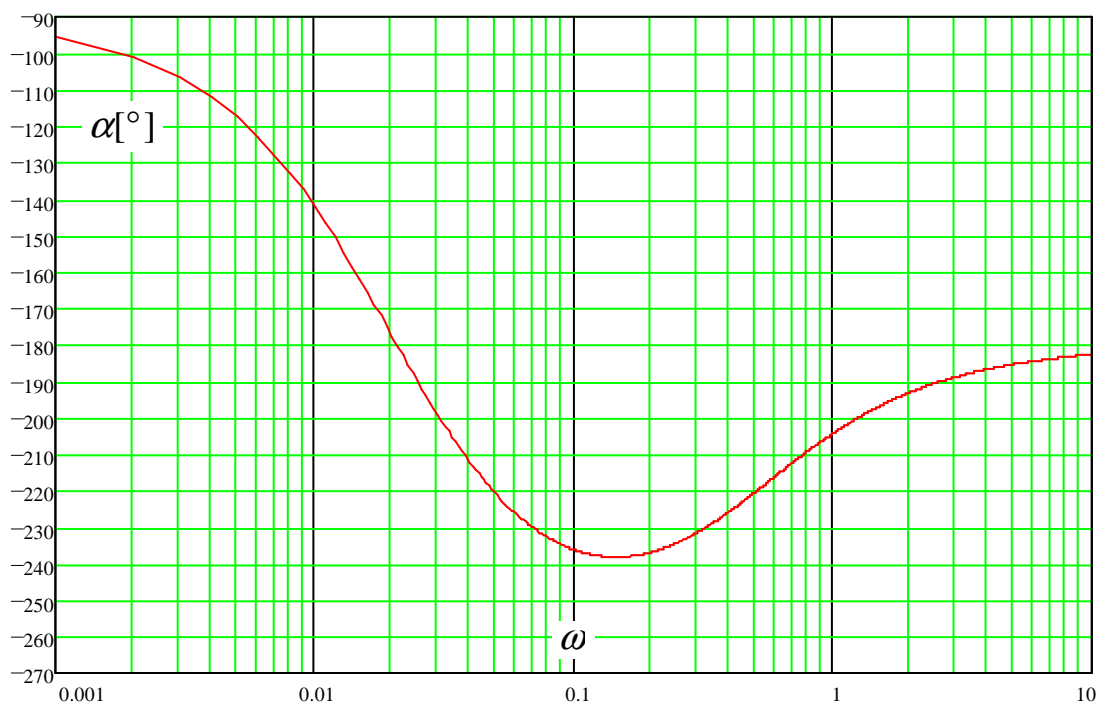
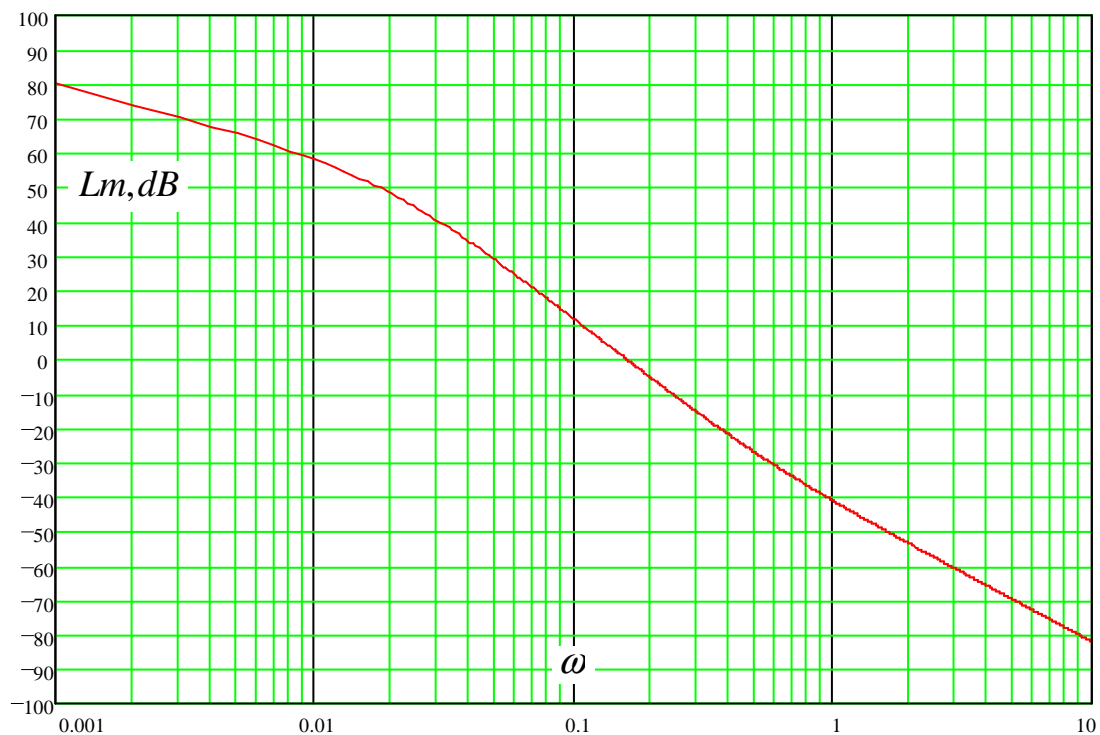
Considerazioni sul numeratore:

- Il termine costante offre un contributo pari a  $20\log 10 = 20$  al modulo logaritmico e un contributo nullo alla fase.
- Il fattore binomio offre uno zero per  $\omega = 0.5$  che contribuisce al modulo logaritmico solo da  $\omega = 0.5$  in poi con una crescita di  $20\text{dB/decade}$ . Per la fase si parte da un contributo nullo fino a  $\omega = 0.05$ , per pervenire a  $+45^\circ$  per  $\omega = 0.5$  e mantenersi costante a  $+90^\circ$  da  $\omega = 5$  in poi.

Considerazioni sul denominatore:

- Il polo nell'origine da un contributo pari a  $-20\text{dB/decade}$  per ogni valore di  $\omega$  ed un contributo costantemente uguale a  $-90^\circ$  per la fase.
- Vi è un secondo polo per  $\omega = 0.02$  con molteplicità due. Esso, per ciò che riguarda il modulo, comincia a farsi sentire proprio da  $\omega = 0.02$  in poi, con un contributo di  $-40\text{dB/decade}$ . Per la fase il contributo è nullo fino a  $\omega = 0.002$ , giunge a  $-90^\circ$  per  $\omega = 0.02$  e si mantiene costante a  $-180^\circ$  da  $\omega = 0.2$  in poi.

Riportiamo qui di seguito i diagrammi di modulo logaritmico e fase:



**Esercizio n°14**

**Tracciare i diagrammi di Bode della seguente funzione:**

$$W(j\omega) = \frac{j\omega - 5}{j\omega + 2}$$

Innanzitutto è opportuno riportare la  $W(j\omega)$  nella sua forma canonica:

$$W(j\omega) = -\frac{5}{2} \cdot \frac{(1 - j\omega 0.2)}{(1 + j\omega 0.5)}$$

Tale funzione possiede un numeratore in cui figura un fattore costante e un fattore binomio mentre al denominatore rinveniamo un fattore binomio.

Considerazioni sul numeratore:

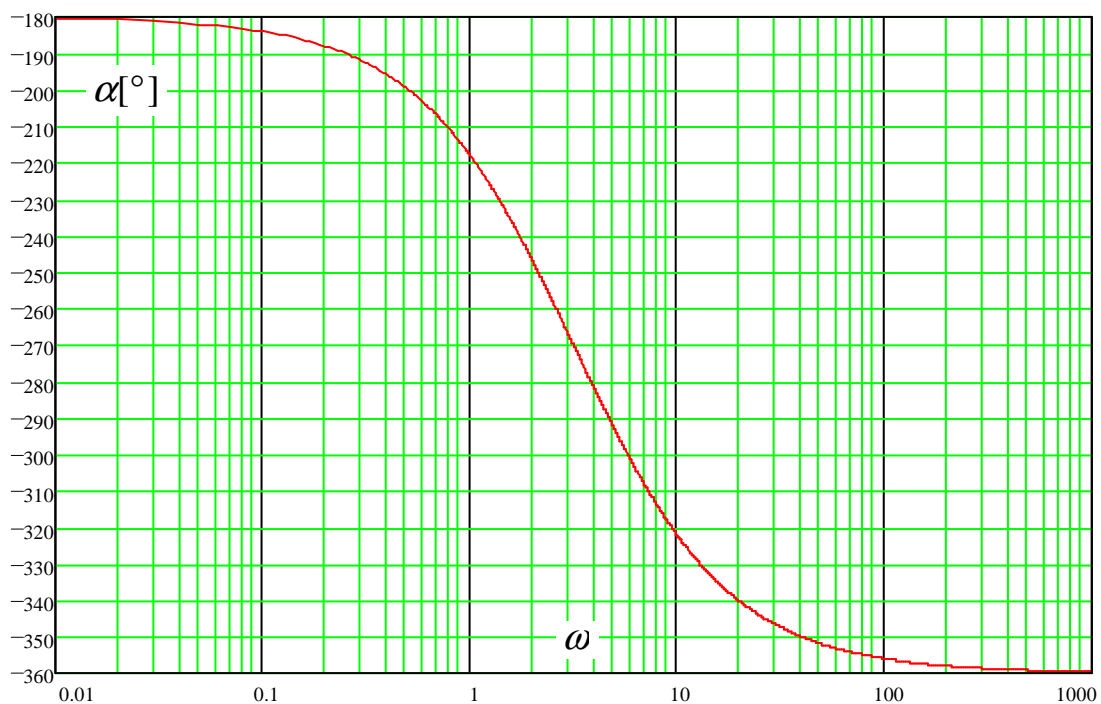
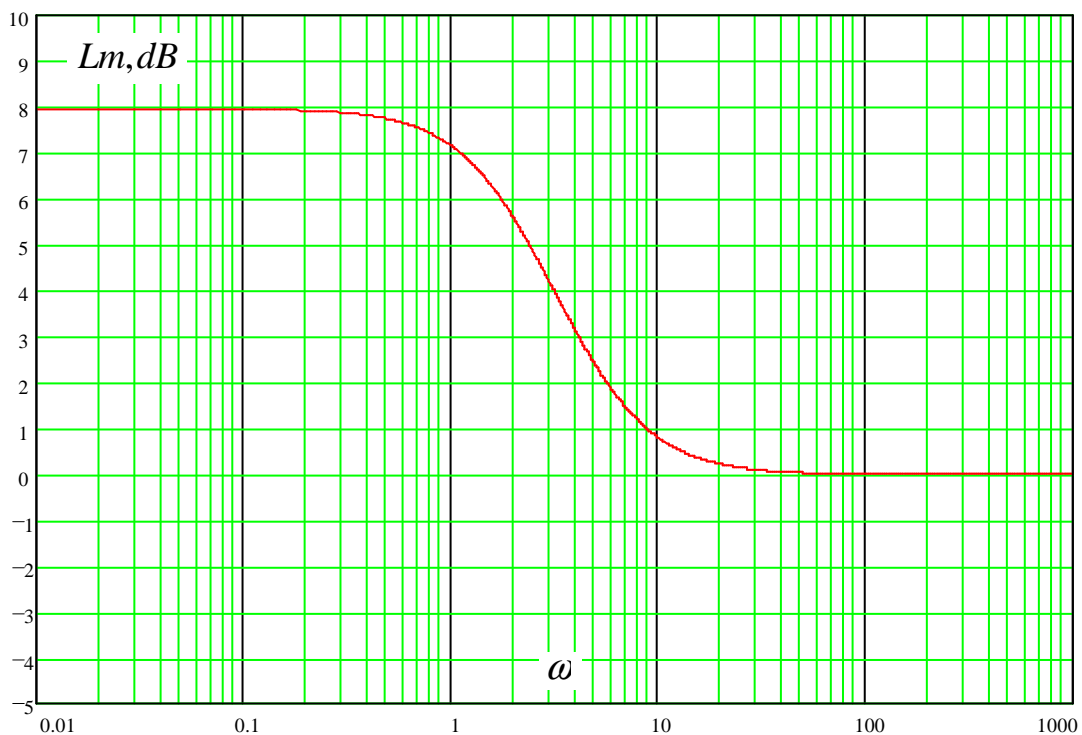
- Il termine costante offre un contributo pari a  $20 \log \frac{5}{2} = 7.959$  al modulo logaritmico e un contributo di  $-\pi$  alla fase.

- Il fattore binomio offre uno zero per  $\omega = 5$  che contribuisce al modulo logaritmico solo da  $\omega = 5$  in poi con una crescita di 20 dB/decade. Per la fase si parte da un contributo nullo fino a  $\omega = 0.5$ , per pervenire a  $-45^\circ$  per  $\omega = 5$  e mantenersi costante a  $-90^\circ$  da  $\omega = 50$  in poi. Tutto ciò perché  $T$  ha un valore negativo e lo zero, ai fini della fase, si comporta come un polo.

Considerazioni sul denominatore:

- Vi è un polo per  $\omega = 2$ . Esso, per ciò che riguarda il modulo, comincia a farsi sentire proprio da  $\omega = 2$  in poi, con un contributo di  $-20$  dB/decade. Per la fase il contributo è nullo fino a  $\omega = 0.2$ , giunge a  $-45^\circ$  per  $\omega = 2$  e si mantiene costante a  $-90^\circ$  da  $\omega = 20$  in poi.

Riportiamo qui di seguito i diagrammi di modulo logaritmico e fase:



**Esercizio n°15**

**Tracciare i diagrammi di Bode della seguente funzione:**

$$W(j\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{1 + j\omega 0.5}$$

Il modulo di  $W(j\omega)$  è:

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{|1 + j\omega 0.5|}$$

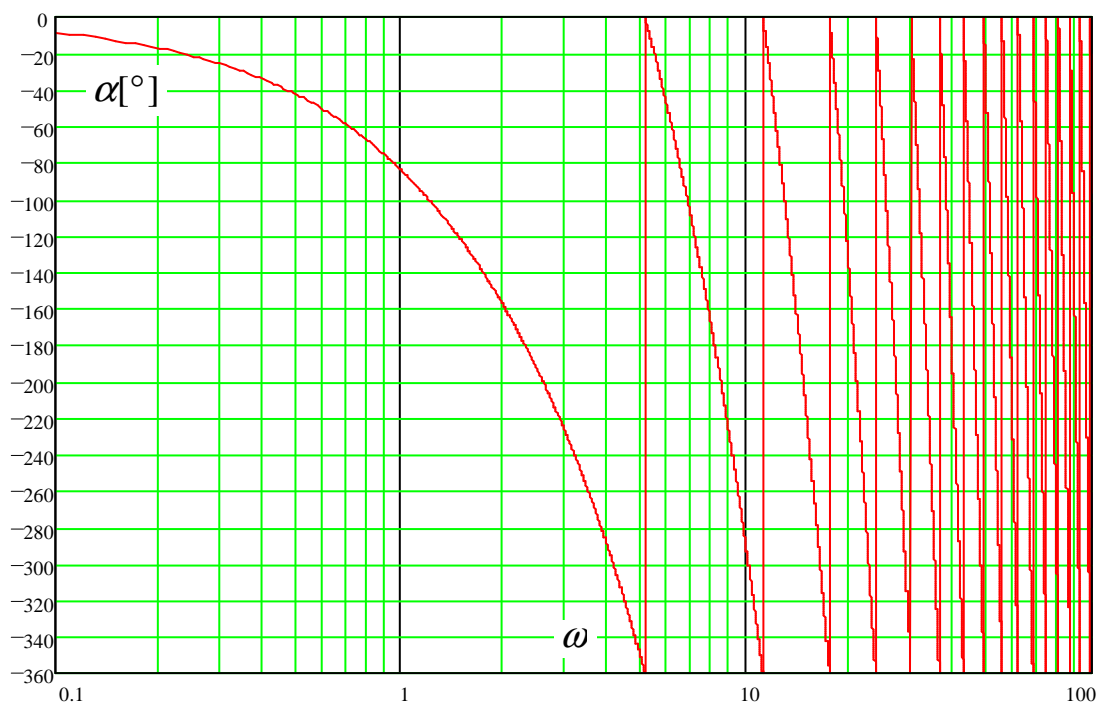
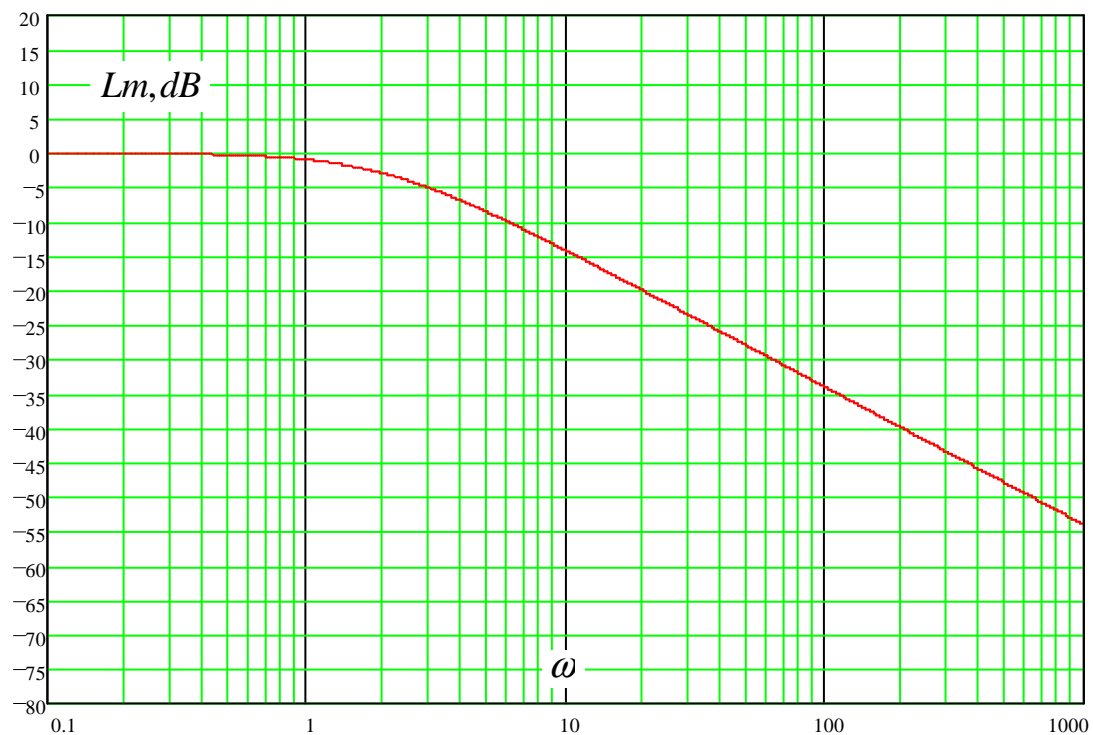
Tale funzione possiede un denominatore con un fattore binomio. Questo offre un polo per  $\omega = 2$  e proprio da tale valore in poi si ha un contributo di  $-20\text{dB/decade}$ . Quindi, complessivamente, il modulo logaritmico è influenzato esclusivamente da tale fattore.

Per ciò che riguarda la fase, il numeratore da un contributo costantemente pari a  $-\omega$ , mentre il denominatore da contributo nullo fino ad  $\omega = 0.2$ , si porta a  $-45^\circ$  per  $\omega = 2$  e si mantiene pari a  $-90^\circ$  da  $\omega = 20$  in poi. Il valore esatto della fase è:  $\angle W(j\omega) = -\omega - \arctg(0.5\omega)$

Per un più preciso tracciamento del diagramma di fase è utile disporre di un set di valori della fase stessa, valori ottenuti al variare di  $\omega$ .

$\omega$	$\arctg(\omega)$	$\alpha_{\text{rad}}$	$\alpha^\circ$
0,01	0,004999958	-0,014999958	-0,859434305
0,05	0,024994794	-0,074994794	-4,29688516
0,1	0,049958396	-0,149958396	-8,591983177
0,2	0,099668652	-0,299668652	-17,16974904
0,5	0,244978663	-0,744978663	-42,68413322
0,8	0,380506377	-1,180506377	-67,6380331
1,6	0,674740942	-2,274740942	-130,3330555
2	0,785398163	-2,785398163	-159,591559
3	0,982793723	-3,982793723	-228,197271
4	1,107148718	-5,107148718	-292,6180669

Riportiamo qui di seguito i diagrammi di modulo logaritmico e fase:



**Esercizio n°16**

**Tracciare i diagrammi di Bode della seguente funzione:**

$$W(j\omega) = \frac{4 \cdot (1 + j\omega 0.5)}{j\omega \cdot (1 + j\omega 2) \cdot \left[ 1 + j\omega 0.05 + \left( \frac{j\omega}{8} \right)^2 \right]}$$

Tale funzione possiede un numeratore in cui figura un fattore costante e un fattore binomio mentre al denominatore rinveniamo un fattore monomio, un fattore binomio e un fattore trinomio.

Considerazioni sul numeratore:

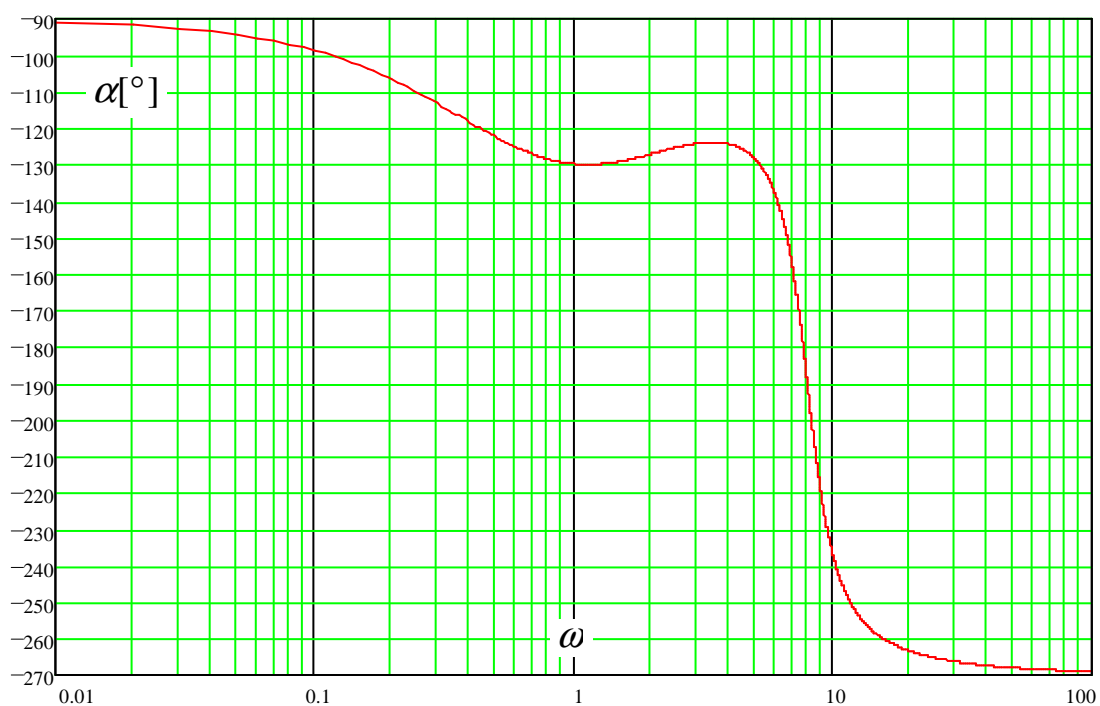
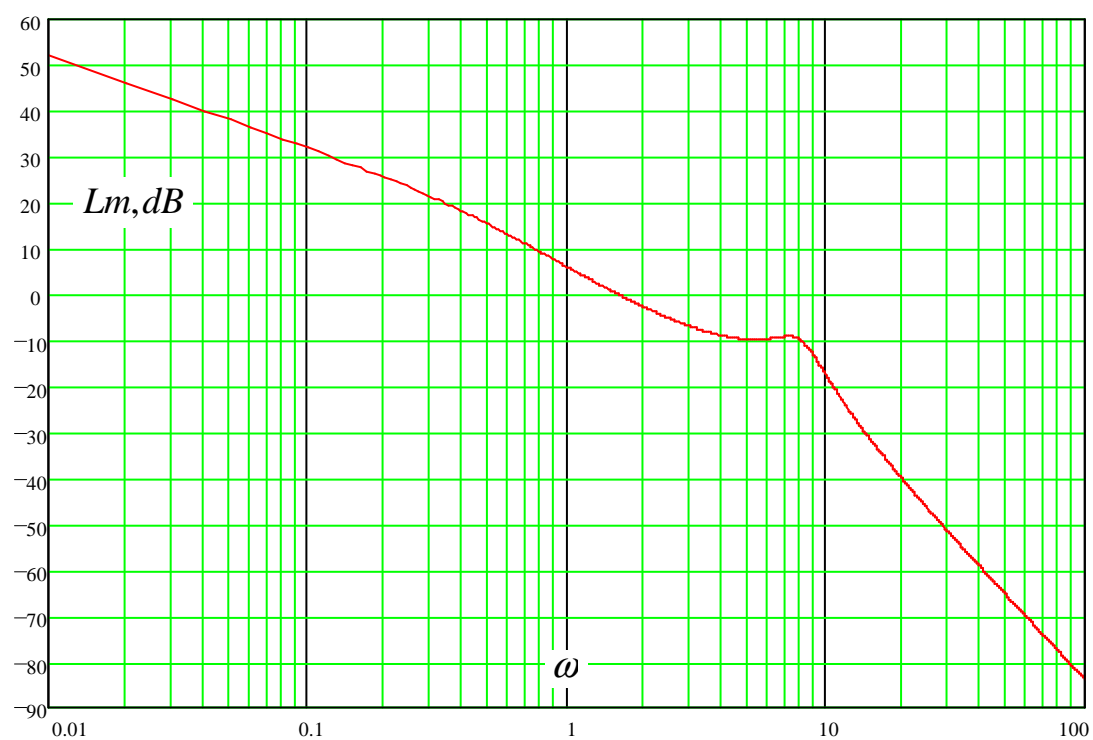
- Il termine costante offre un contributo pari a  $20\log 4 = 12.0412$  al modulo logaritmico e un contributo nullo alla fase.
- Il fattore binomio offre uno zero per  $\omega = 2$  che contribuisce al modulo logaritmico solo da  $\omega = 2$  in poi con una crescita di 20 dB/decade. Per la fase si parte da un contributo nullo fino a  $\omega = 0.2$ , per pervenire a  $+45^\circ$  per  $\omega = 2$  e mantenersi costante a  $+90^\circ$  da  $\omega = 20$  in poi.

Considerazioni sul denominatore:

- Il polo nell'origine da un contributo pari a  $-20$  dB/decade per ogni valore di  $\omega$  ed un contributo costantemente uguale a  $-90^\circ$  per la fase.
- Vi è un secondo polo per  $\omega = 0.5$ . Esso, per ciò che riguarda il modulo, comincia a farsi sentire proprio da  $\omega = 0.5$  in poi, con un contributo di  $-20$  dB/decade. Per la fase il contributo è nullo fino a  $\omega = 0.05$ , giunge a  $-45^\circ$  per  $\omega = 0.5$  e si mantiene costante a  $-90^\circ$  da  $\omega = 5$  in poi.
- Studiamo, adesso, il fattore trinomio: in esso notiamo che la pulsazione naturale è  $\omega_n = 8$ .

Da tale valore è possibile ricavare:  $\frac{2\zeta}{\omega_n} = 0.05$ , per cui  $\zeta = 0.05 \cdot \frac{\omega_n}{2} = 0.2$ . Facendo uso dei

diagrammi asintotici e, in seguito, degli opportuni diagrammi di correzione si ottengono andamenti del modulo e della fase come qui di seguito riportato:



## ESERCITAZIONE N°5

### DIAGRAMMI POLARI O DI NYQUIST.

Come abbiamo già avuto modo di dire  $W(j\omega): R \rightarrow C$ .

I diagrammi polari perseguono una rappresentazione della  $W(j\omega)$  sul piano complesso tramite parte reale e parte immaginaria oppure tramite modulo e fase, in via del tutto equivalente.

$$W(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega) = M(\omega) \cdot e^{j\alpha(\omega)}$$

Ricordiamo che  $R(\omega)$  e  $M(\omega)$  sono due funzioni pari di  $\omega$  mentre  $I(\omega)$  e  $\alpha(\omega)$ .

Il tracciamento dei diagrammi polari viene effettuato ricavando una collezione di valori delle due coppie di grandezze e rinvenendo così dei punti che testimoniano l'andamento della grandezza, cioè una rappresentazione completa del sistema. Si tratta di una curva esatta, anche se per i nostri scopi è sufficiente tracciare un andamento qualitativo.

Le nostre azioni si articoleranno in tre passi:

1. Calcoleremo i seguenti limiti:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} M(\omega)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \alpha(\omega)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} M(\omega)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \alpha(\omega)$$

Ciò sarà fatto col preciso scopo di valutare l'andamento di  $W(j\omega)$  agli estremi dell'intervallo di osservazione  $]0^+, +\infty[$ . Per quanto riguarda l'intervallo  $]-\infty, 0^-[$  ci si rifà al fatto che essendo il modulo una funzione pari e la fase una funzione dispari, la rappresentazione sarà la simmetrica di quella dell'intervallo  $]0^+, +\infty[$  rispetto all'asse reale.

2. Si cercano eventuali intersezioni con gli assi:

$R(\omega) = 0$  è l'equazione che offre eventuali intersezioni con l'asse immaginario;

$I(\omega) = 0$  è l'equazione che offre eventuali intersezioni con l'asse reale;

3. Può accadere che per certi valori di  $\omega$  (tipicamente  $\omega = 0$  da sinistra o da destra) la  $W(j\omega)$  tenda asintoticamente ad un dato valore. Può essere utile stabilire se tale asintoto sia effettivamente un asse o qualche retta ad uno degli assi parallela. Questa informazione può essere ricavata osservando se tenda a 0 più velocemente la parte reale o la parte immaginaria di  $W(j\omega)$ .

Studiamo, adesso, qualche caso interessante.

$$W(j\omega) = \frac{K_0}{(1 + j\omega T_1) \cdot (1 + j\omega T_2)} \quad \text{con } K_0, T_1, T_2 \in R^+.$$

Trattasi di una funzione di trasferimento avente un fattore costante a numeratore e due fattori binomio a denominatore, cioè due poli.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} W(j\omega) = K_0 \quad \angle 0^\circ.$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} W(j\omega) = 0 \quad \angle -180^\circ.$$

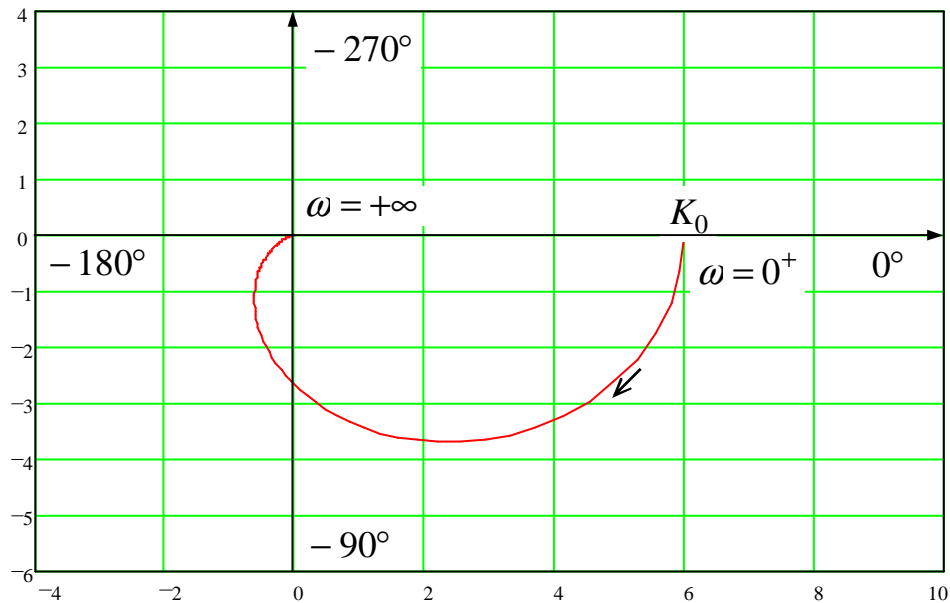
Vediamo le eventuali intersezioni con gli assi:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{K_0}{(1 + j\omega T_1) \cdot (1 + j\omega T_2)} = \frac{K_0}{1 - \omega^2 T_1 T_2 + j\omega(T_1 + T_2)} = \\ &= \frac{K_0 [1 - \omega^2 T_1 T_2 - j\omega(T_1 + T_2)]}{[(1 - \omega^2 T_1 T_2)^2 - \omega^2 (T_1 + T_2)^2]}. \end{aligned}$$

$$R(\omega) = 0 \Rightarrow 1 - \omega^2 T_1 T_2 = 0 \Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}}$$

$$I(\omega) = 0 \Rightarrow \omega(T_1 + T_2) = 0 \Rightarrow \omega = 0.$$

Dunque abbiamo una intersezione con l'asse immaginario per  $\omega = \pm \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}}$  e una con l'asse reale, proprio nell'origine del riferimento con  $\omega = 0$ . La rappresentazione non possiede asintoti. Il suo andamento qualitativo (in dipendenza dai valori assunti da  $T_1, T_2$ ) sarà:



Vediamo cosa succede se all'espressione già analizzata aggiungiamo un ulteriore polo:

$$W(j\omega) = \frac{K_0}{(1 + j\omega T_1) \cdot (1 + j\omega T_2) \cdot (1 + j\omega T_3)} \quad \text{con } K_0, T_1, T_2, T_3 \in \mathbb{R}^+.$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} W(j\omega) = K_0 \quad \angle 0^\circ.$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} W(j\omega) = 0 \quad \angle -270^\circ.$$

Vediamo le eventuali intersezioni con gli assi:

$$\begin{aligned}
 W(j\omega) &= \frac{K_0}{(1 + j\omega T_1) \cdot (1 + j\omega T_2) \cdot (1 + j\omega T_3)} = \\
 &= \frac{K_0}{1 - \omega^2(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) + j[\omega(T_1 + T_2 + T_3) - \omega^3 T_1 T_2 T_3]} = \\
 &= \frac{K_0 \cdot \left\{ 1 - \omega^2(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) - j[\omega(T_1 + T_2 + T_3) - \omega^3 T_1 T_2 T_3] \right\}}{a^2 - b^2}.
 \end{aligned}$$

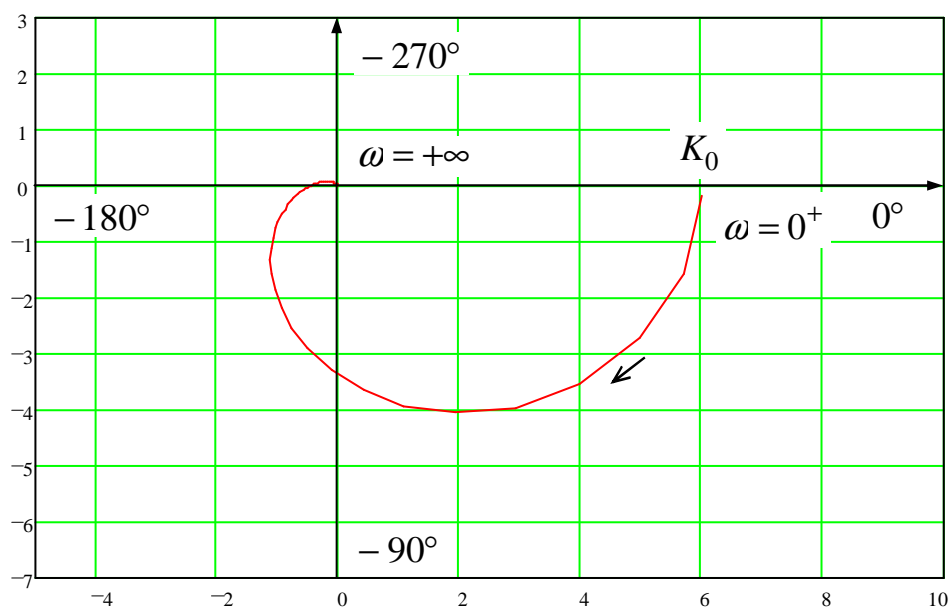
$$a = 1 - \omega^2(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3),$$

$$b = \omega(T_1 + T_2 + T_3) - \omega^3 T_1 T_2 T_3.$$

$$R(\omega) = 0 \Rightarrow 1 - \omega^2(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) = 0 \Rightarrow \omega = \pm \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3}}$$

$$I(\omega) = 0 \Rightarrow \omega(T_1 + T_2 + T_3) - \omega^3 T_1 T_2 T_3 = 0 \Rightarrow \omega = 0, \omega = \pm \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}}$$

Dunque abbiamo una intersezione con l'asse immaginario per  $\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3}}$  e due con l'asse reale, una proprio nell'origine del riferimento per  $\omega = 0$  e l'altra per  $\omega = \pm \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}}$ . La rappresentazione non possiede asintoti. Il suo andamento qualitativo (in dipendenza dai valori assunti da  $T_1, T_2, T_3$ ) sarà:



Come si evince dalla rappresentazione polare, l'aggiunta di un polo fa ruotare il diagramma di  $90^\circ$  in senso orario. Intuitivamente apprendiamo che uno zero sortirebbe un effetto contrario.

Occupiamoci, adesso, dello studio della situazione che si viene a creare quando aggiungiamo uno zero: intuitivamente si comprende che il comportamento varierà al variare della posizione relativa dello zero rispetto ai poli.

$$W(j\omega) = \frac{K_0 \cdot (1 + j\omega\bar{T}_1)}{(1 + j\omega T_1) \cdot (1 + j\omega T_2) \cdot (1 + j\omega T_3)} \quad \text{con } K_0, T_1, T_2, T_3, \bar{T}_1 \in R^+.$$

Studiamo i limiti:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} W(j\omega) = K_0 \quad \angle 0^\circ.$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} W(j\omega) = 0 \quad \angle -180^\circ.$$

Vediamo le eventuali intersezioni con gli assi:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{K_0 \cdot (1 + j\omega\bar{T}_1)}{(1 + j\omega T_1) \cdot (1 + j\omega T_2) \cdot (1 + j\omega T_3)} = \\ &= \frac{K_0 \cdot (1 + j\omega\bar{T}_1)}{1 - \omega^2(T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3) + j[\omega(T_1 + T_2 + T_3) - \omega^3T_1T_2T_3]} = \\ &= \frac{K_0 \cdot \left\{ 1 - \omega^2(T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3) - j[\omega(T_1 + T_2 + T_3) - \omega^3T_1T_2T_3] \right\} \cdot (1 + j\omega\bar{T}_1)}{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

$$a = 1 - \omega^2(T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3),$$

$$b = \omega(T_1 + T_2 + T_3) - \omega^3T_1T_2T_3.$$

$$R(\omega) = 0 \Rightarrow 1 - \omega^2 (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) + \omega \bar{T}_1 \cdot [\omega (T_1 + T_2 + T_3) - \omega^3 T_1 T_2 T_3] = 0$$

$$\Rightarrow \omega^4 (T_1 T_2 T_3 \bar{T}_1) - \omega^2 (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 - \bar{T}_1 T_2 - \bar{T}_1 T_3 - \bar{T}_1 T_1) - 1 = 0$$

$$Q = \omega^2$$

$$A = (T_1 T_2 T_3 \bar{T}_1),$$

$$B = (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 - \bar{T}_1 T_2 - \bar{T}_1 T_3 - \bar{T}_1 T_1)$$

$$\Rightarrow A Q^2 - B Q - 1 = 0$$

$$Q_{1,2} = \frac{-\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} + 4A}}{2A} \Rightarrow \omega_{1,2} = \pm \sqrt{Q_1}, \omega_{3,4} = \pm \sqrt{Q_2}$$

$$I(\omega) = 0 \Rightarrow [1 - \omega^2 (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)] \cdot \omega \bar{T}_1 - [\omega (T_1 + T_2 + T_3) - \omega^3 T_1 T_2 T_3] = 0$$

$$\Rightarrow \omega \cdot \left\{ (T_1 T_2 \bar{T}_1 + T_1 T_3 \bar{T}_1 + T_2 T_3 \bar{T}_1 - T_1 T_2 T_3) \cdot \omega^2 - \bar{T}_1 + T_1 + T_2 + T_3 \right\} = 0$$

$$C = T_1 T_2 \bar{T}_1 + T_1 T_3 \bar{T}_1 + T_2 T_3 \bar{T}_1 - T_1 T_2 T_3$$

$$D = \bar{T}_1 + T_1 + T_2 + T_3$$

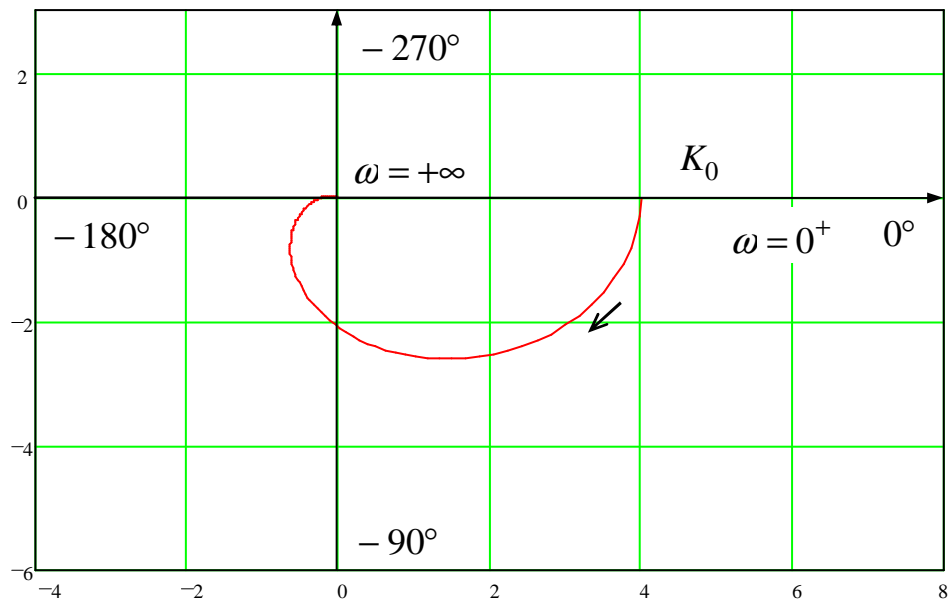
$$\Rightarrow \omega_1 = 0, \omega_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{D}{C}}$$

In conclusione, abbiamo due intersezioni con l'asse reale e due con l'asse immaginario. I corrispondenti valori di  $\omega$ .

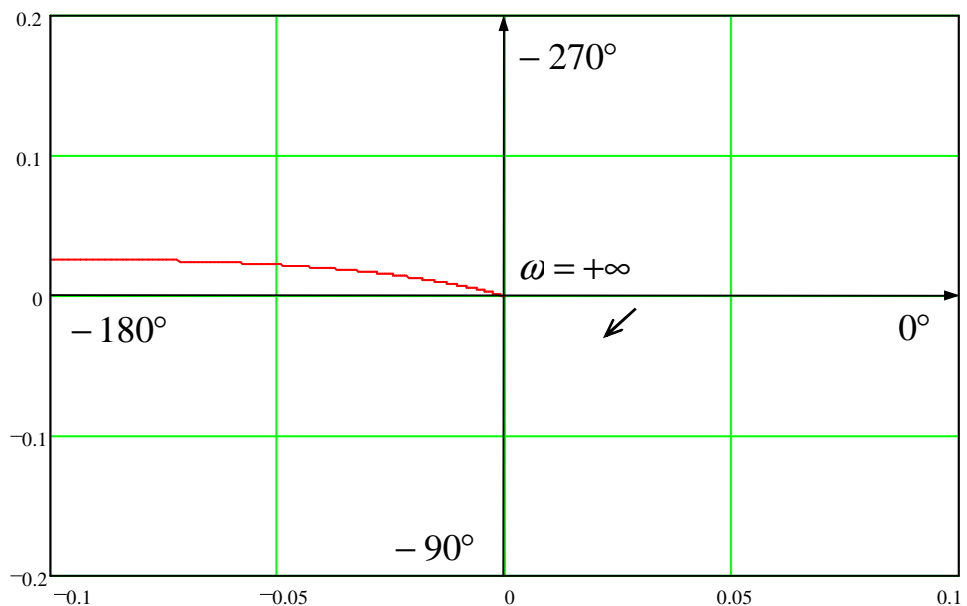
Vediamo, adesso, le varie situazioni:

$$1. \bar{T}_1 < T_1 < T_2 < T_3$$

Incontreremo prima i tre poli e poi lo zero:

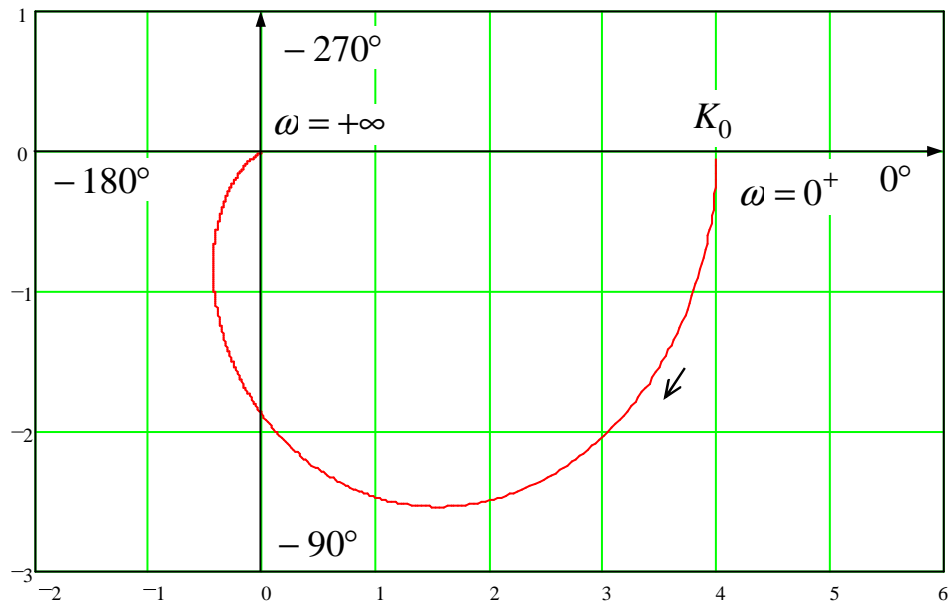


Vediamo il dettaglio attorno all'origine:

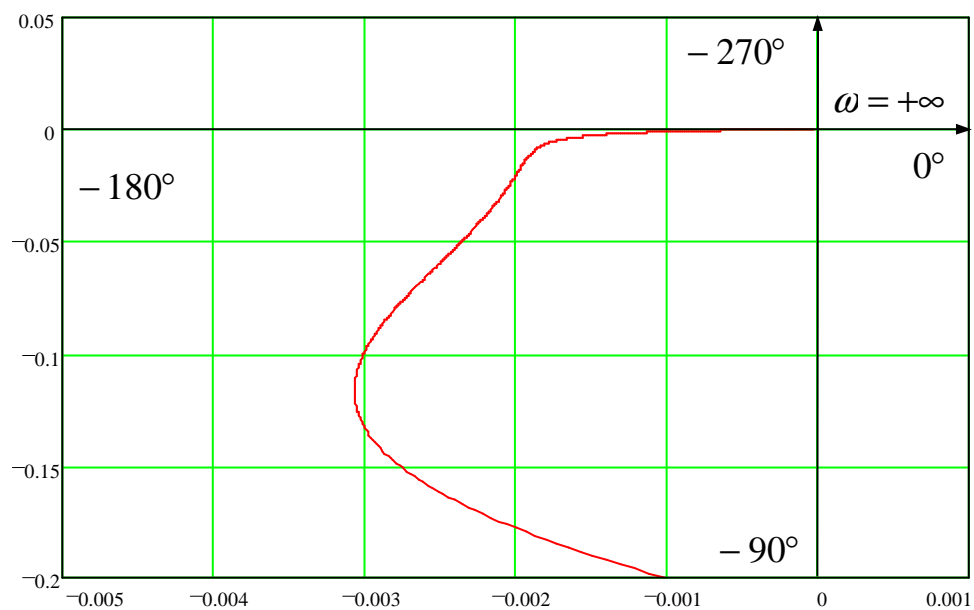


$$2. T_1 < \bar{T}_1 < T_2 < T_3$$

Incontreremo prima due poli e poi lo zero, quindi l'ultimo polo:

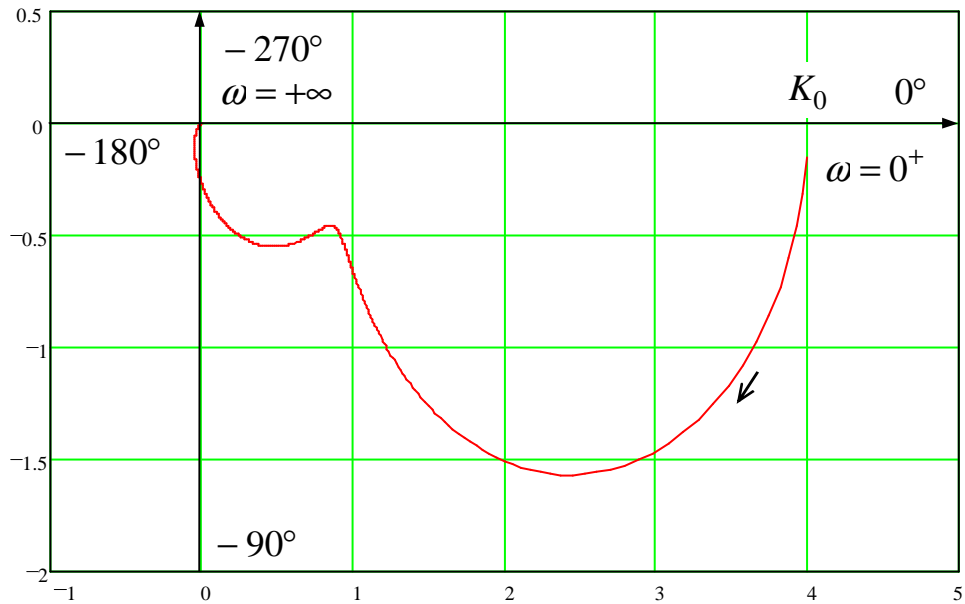


Vediamo il dettaglio attorno all'origine:

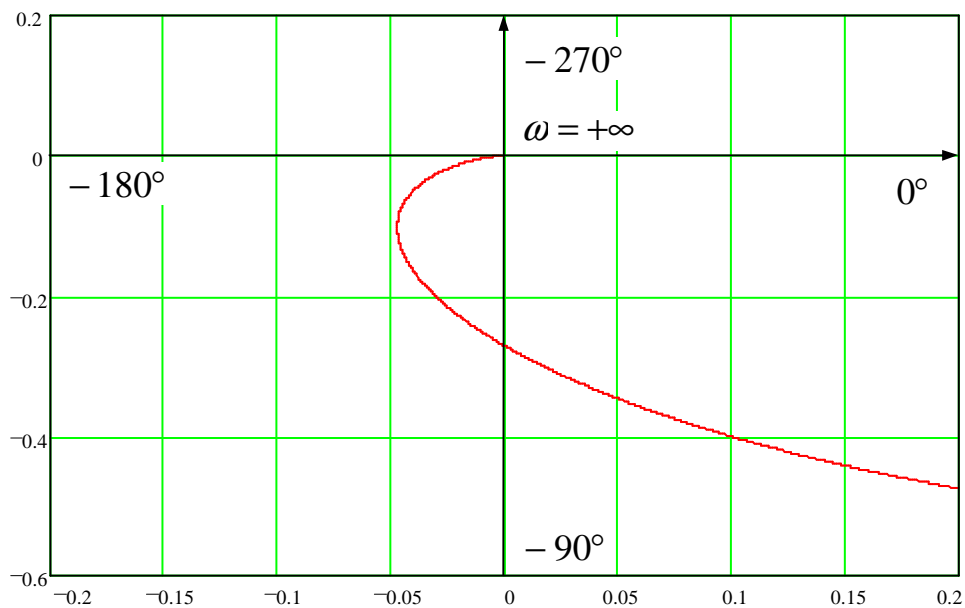


$$3. T_1 < T_2 < \bar{T}_1 < T_3$$

Incontreremo prima un polo, poi lo zero, quindi gli altri due poli:

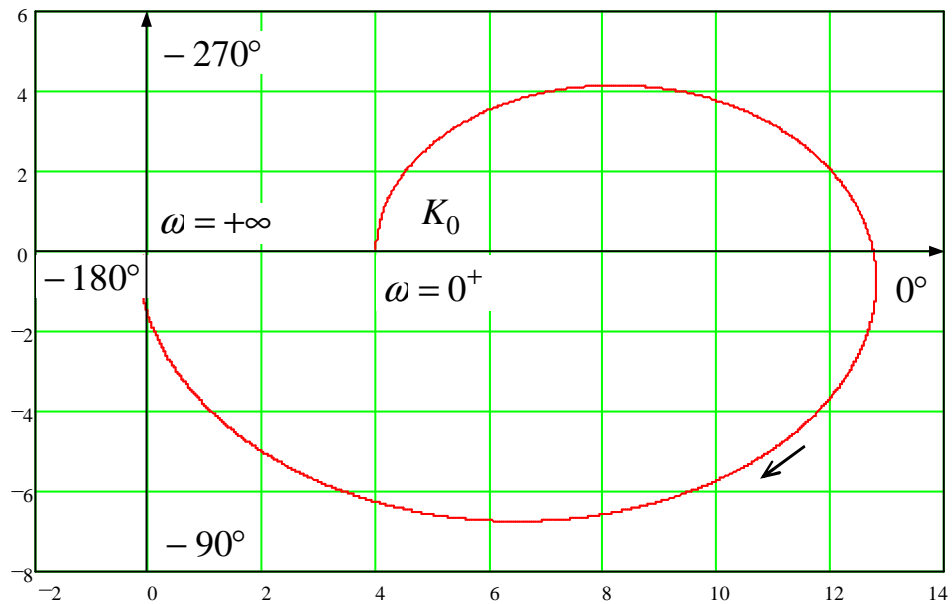


Vediamo il dettaglio attorno all'origine:

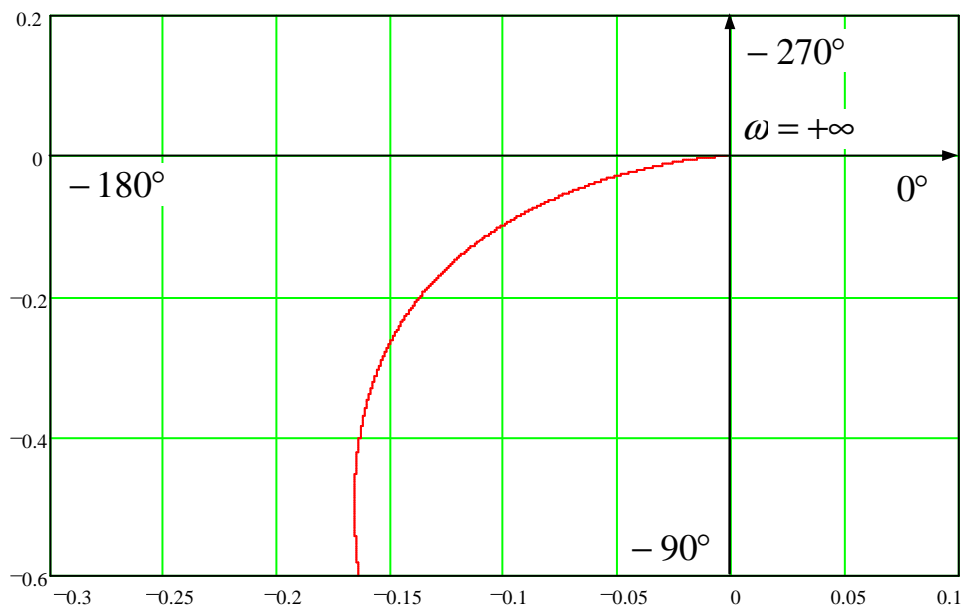


$$4. T_1 < T_3 < T_2 < \bar{T}_1$$

Incontreremo prima lo zero e poi i tre poli:



Vediamo il dettaglio attorno all'origine:



### Diagrammi polari inversi.

La metodologia di studio indicata mantiene la sua validità anche nel caso in cui dia oggetto del nostro studio la  $W^{-1}(j\omega)$ . Applicheremo, quindi, la stessa sequenza di passi già evidenziata. Ricorriamo subito a qualche esempio:

$$W^{-1}(j\omega) = \frac{1}{K_0} \cdot (1 + j\omega T_1) \cdot (1 + j\omega T_2).$$

Effettuiamo lo studio dei limiti:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} W(j\omega) = \frac{1}{K_0} \quad \angle 0^\circ.$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} W(j\omega) = +\infty \quad \angle 180^\circ.$$

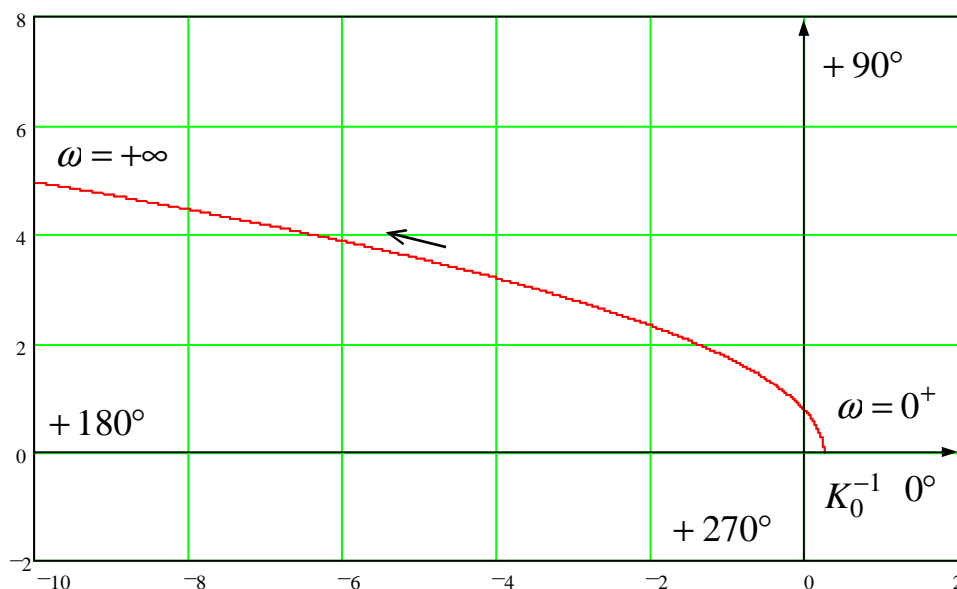
Vediamo eventuali intersezioni con gli assi:

$$R(\omega) = 0 \Rightarrow 1 - \omega^2 T_1 T_2 = 0 \Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}}$$

$$I(\omega) = 0 \Rightarrow \omega(T_1 + T_2) = 0 \Rightarrow \omega \rightarrow 0^+.$$

Si osserva quindi un'intersezione con l'asse immaginario e nessuna con l'asse reale (la funzione di trasferimento si avvicina indefinitamente all'asse reale per  $\omega \rightarrow 0^+$ ).

Graficando, si ha che:



Prima di affrontare una diversa questione teorica soffermiamoci a svolgere un paio di esercizi:

**Esercizio n°17**

**Ricavare il diagramma polare per la seguente funzione di trasferimento:**

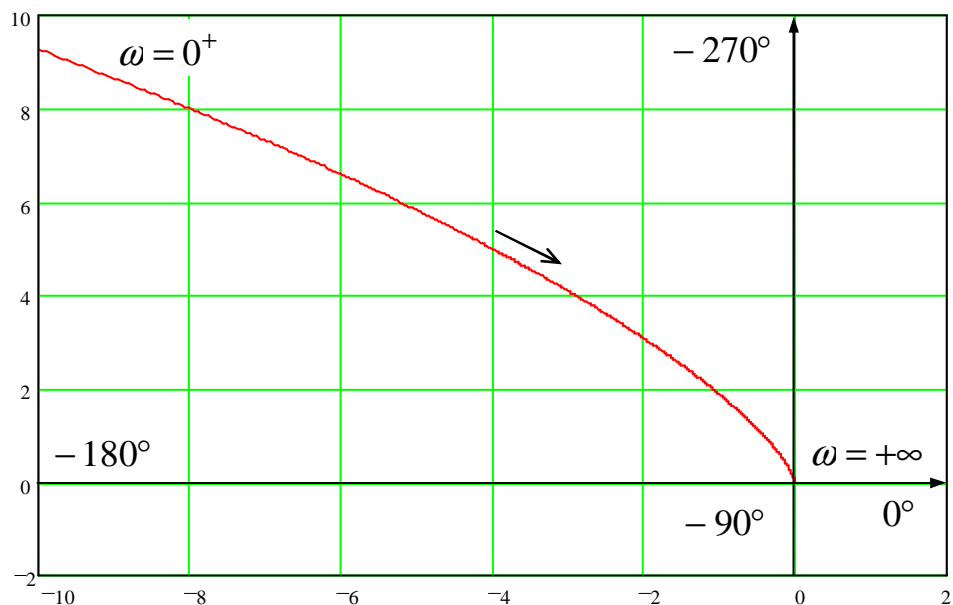
$$W(\omega) = \frac{K_o}{(j\omega)^2 \cdot (1 + j\omega T)}$$

Procedendo con la solita metodologia:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} W(j\omega) = +\infty \quad \angle -180^\circ.$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} W(j\omega) = 0 \quad \angle -270^\circ.$$

Non vi sono intersezioni con gli assi se non con l'origine per  $\omega \rightarrow +\infty$  ne asintoti.



**Esercizio n°18 (proposto dal Prof. Ing. Tommaso Raimondi).**

**Ricavare il diagramma polare per la seguente funzione di trasferimento:**

$$W(\omega) = \frac{K \cdot (1 + j\omega T)}{(j\omega) \cdot (j\omega T_1 - 1)}$$

Per prima cosa riconduciamo la  $W(j\omega)$  nella sua forma canonica:

$$W(\omega) = -\frac{K \cdot (1 + j\omega T)}{(j\omega) \cdot (1 - j\omega T_1)}$$

Procedendo con la solita metodologia:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} W(j\omega) = +\infty \quad + \angle 90^\circ.$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} W(j\omega) = 0 \quad \angle + 270^\circ.$$

Studiamo le eventuali intersezioni con gli assi:

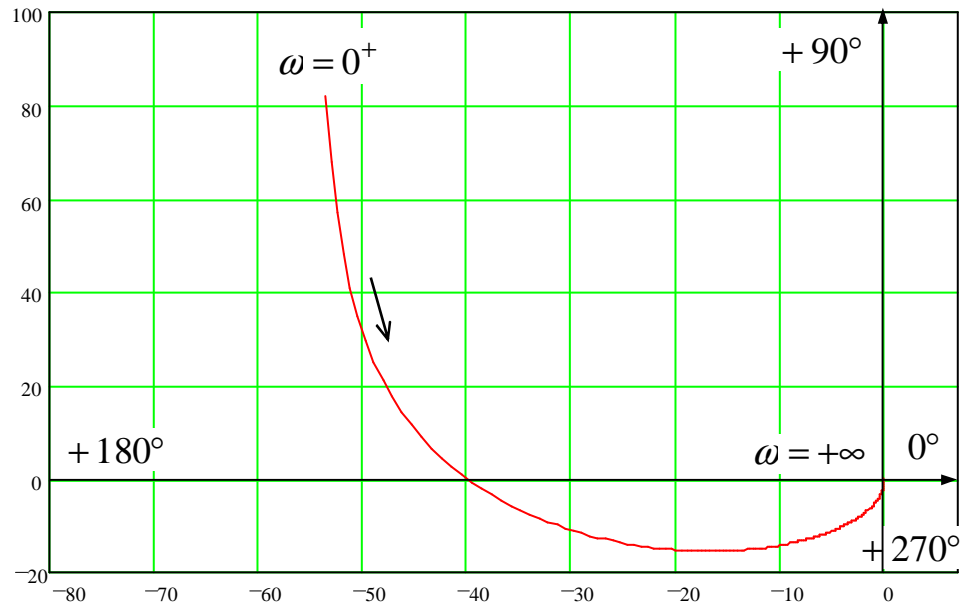
$$\begin{aligned} W(\omega) &= -\frac{K \cdot (1 + j\omega T)}{(j\omega) \cdot (1 - j\omega T_1)} = -\frac{K \cdot (1 + j\omega T)}{\omega^2 T_1 + j\omega} = -\frac{K \cdot (1 + j\omega T) \cdot (\omega^2 T_1 - j\omega)}{\omega^4 T_1^2 + \omega^2} = \\ &= -\frac{K}{\omega^4 T_1^2 + \omega^2} \cdot [\omega^2 (T_1 + T) + j\omega(\omega^2 T T_1 - 1)]. \end{aligned}$$

$$R(\omega) = 0 \Rightarrow \omega^2 (T_1 + T) = 0 \Rightarrow \omega \rightarrow 0^+.$$

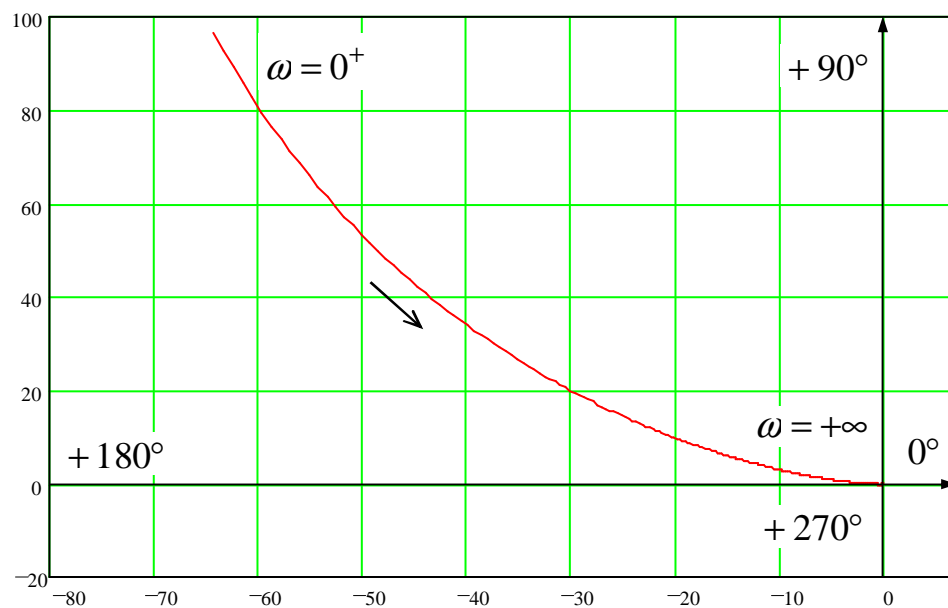
$$I(\omega) = 0 \Rightarrow \omega(\omega^2 T T_1 - 1) = 0 \Rightarrow \omega \rightarrow 0^+, \omega = \pm \sqrt{\frac{1}{T T_1}}.$$

Dunque abbiamo una sola intersezione con l'asse reale, oltre al tendere all'origine al divergere di  $\omega$ . Dovremo analizzare separatamente i due casi che possono emergere in dipendenza della posizione relativa dello zero e del polo.

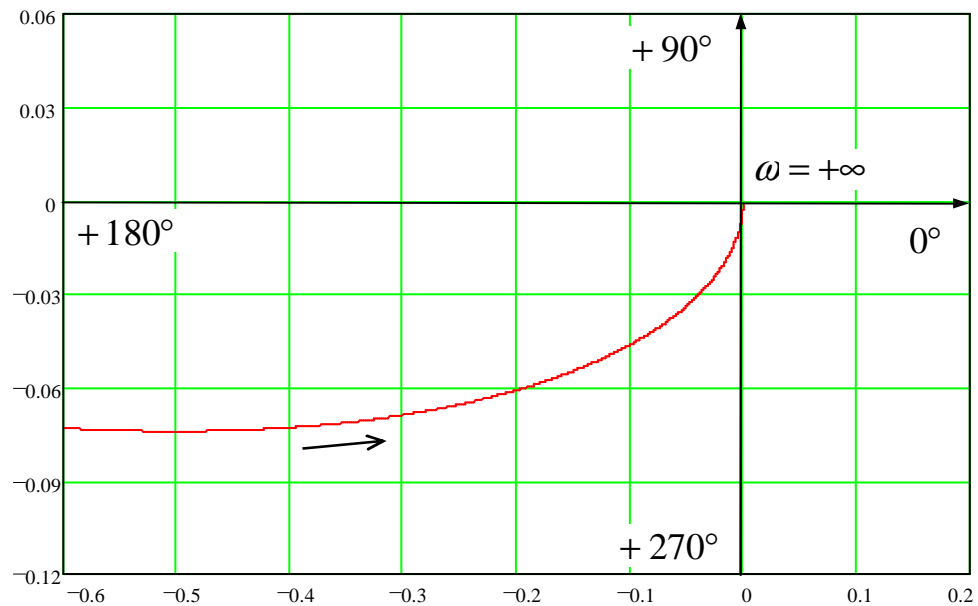
1.  $T > T_1$ , si ha prima lo zero e poi il polo:



2.  $T < T_1$ , si ha prima il polo e poi lo zero:



Vediamo il dettaglio attorno all'origine:



Esercizio n°19

Ricavare il diagramma polare per la seguente funzione di trasferimento:

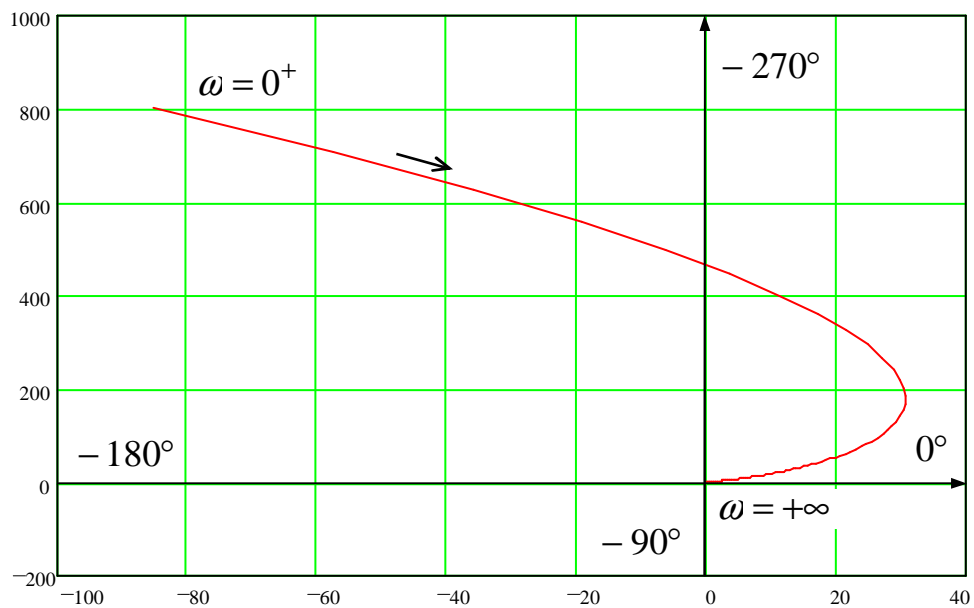
$$W(\omega) = \frac{K_o \cdot (1 + j\omega \bar{T}_1)}{(j\omega)^2 \cdot (1 + j\omega T_2) \cdot (1 + j\omega T_3) \cdot (1 + j\omega T_4)}$$

Procedendo con la solita metodologia:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} W(j\omega) = +\infty \quad \angle -180^\circ.$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} W(j\omega) = 0 \quad \angle -360^\circ.$$

Ipotizziamo che sia:  $\frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_3} < \frac{1}{\bar{T}_1} < \frac{1}{T_4}$ . Si incontrano prima due poli, poi lo zero, poi un ultimo polo.



**Relazione fra parte reale e parte immaginaria e fra modulo e fase.**

Abbiamo appena illustrato i diversi modi di assegnare una funzione di variabile complessa attraverso i valori che essa assume in corrispondenza all'asse immaginario: in tutti i modi illustrati si trattava di dare, per ogni valore di  $\omega$  nell'intervallo  $]0; +\infty[$ , due parametri caratterizzanti la funzione stessa (parte reale e immaginaria ovvero modulo e fase).

Per determinate classi di funzioni, molto importanti dal punto di vista applicativo, le  $W(s)$  possono essere assegnate dando un solo parametro, una sola parte delle informazioni relative ai valori assunti dalla funzione stessa in corrispondenza all'asse immaginario, ad esempio quelle relative alla sola parte reale.

Tali proprietà sono state studiate da numerosi autori; le formule più note per passare dalla parte assegnata della  $W(j\omega)$  a quella mancante vanno sotto il nome di Kramers-König quando ci si riferisce alle espressioni analitiche, indipendentemente dal loro possibile significato fisico, e di Bayard-Bode quando ci si riferisce alla teoria delle reti elettriche.

Sia la funzione  $W(s)$  analitica in tutto il semipiano destro, frontiera compresa, ciò che equivale per le funzioni razionali fratte fin qui considerate a non avere poli con parte reale maggiore o uguale a zero. La  $I$  in funzione della  $R$  è data da:

$$I(\omega_0) = \frac{2\omega_0}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{R(\omega) - R(\omega_0)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \quad \text{fissato il valore di } \omega_0.$$

Inoltre si ha che:

$$R(\omega_0) - R(0) = -\frac{2\omega_0^2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\frac{I(\omega)}{\omega} - \frac{I(\omega_0)}{\omega_0}}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega.$$

Si ha anche che:

$$\ln[W(j\omega)] = \ln[M(\omega) \cdot e^{j\alpha(\omega)}] = \ln[M(\omega)] + j\alpha(\omega).$$

A questa espressione possiamo applicare le regole già viste per parte reale e parte immaginaria. Valgano le stesse ipotesi e inoltre che non vi siano zeri con parte reale positiva. (Queste ipotesi devono essere fatte per garantire l'analiticità).

$$I(\omega) \Rightarrow \alpha(\omega)$$

$$R(\omega) \Rightarrow \ln[M(\omega)]$$

$$\alpha(\omega_0) = \frac{2\omega_0}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\ln[M(\omega)] - \ln[M(\omega_0)]}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega$$

$$\ln[M(\omega_0)] - \ln[M(0)] = -\frac{2\omega_0^2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\frac{\alpha(\omega)}{\omega} - \frac{\alpha(\omega_0)}{\omega_0}}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega.$$

In questa espressione, però, figura il logaritmo naturale mentre nei diagrammi di Bode vi è il logaritmo decimale. Dobbiamo pervenire a quest'ultimo.

$$Q \stackrel{\Delta}{=} \ln|W(j\omega)| = \ln M$$

$$\mu \stackrel{\Delta}{=} \ln \frac{\omega}{\omega_0}$$

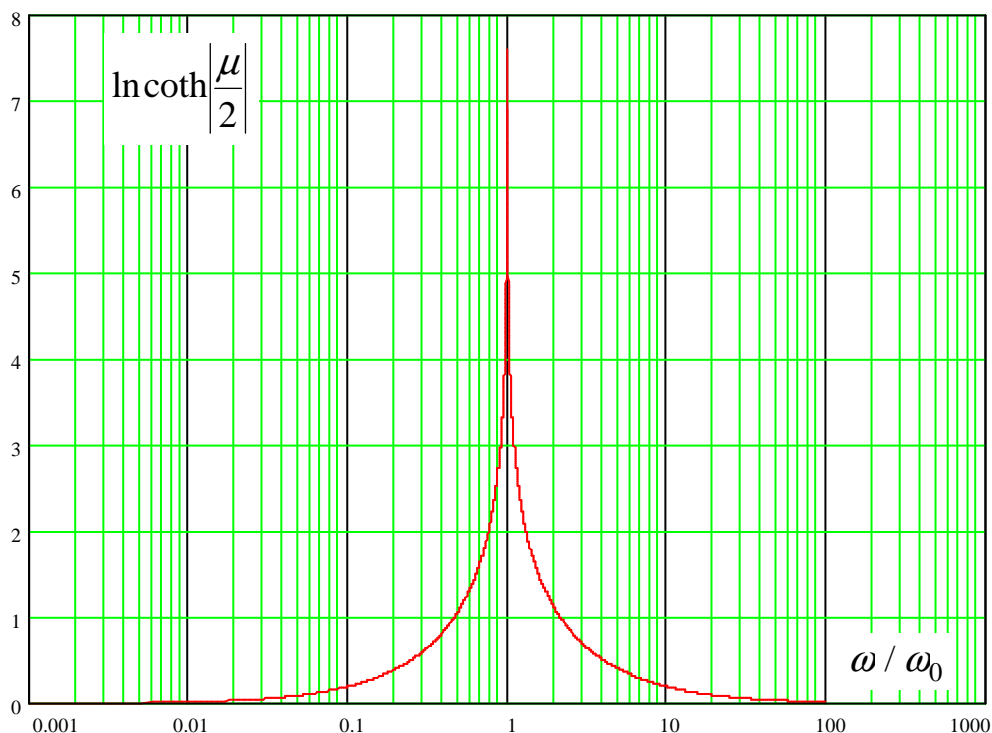
Da questa definizione deriva che se  $\mu = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0$ .

$$\alpha(\omega_0) = \frac{\pi}{2} \cdot \left( \frac{dQ}{d\mu} \right)_{\mu=0} + \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{dQ}{d\mu} - \left( \frac{dQ}{d\mu} \right)_{\mu=0} \right] \cdot \ln \left( \coth \left| \frac{\mu}{2} \right| \right) d\mu$$

Il primo termine dell'integrale rappresenta la differenza di pendenza tra  $\omega_0$  e un punto vicino. La seconda parte è una funzione peso.

$\frac{dQ}{d\mu}$  rappresenta la pendenza del diagramma dei moduli per la  $\omega$  normalizzata, espressa in

neper /unità  $\mu$ . Devo portarmi a pendenze di dB/decade.  $1 \frac{\text{neper}}{\text{unità } \mu} = 20 \frac{\text{dB}}{\text{decade}} = 6 \frac{\text{dB}}{\text{ottava}}.$



Osserviamo che il termine di peso va tenuto in conto solo per  $\omega = \omega_0$  perché altrove il peso non dà contributo. Nei punti a pendenza costante il fattore integrale può essere trascurato.

Avremo che:

$$\alpha(\omega_0) \cong \frac{\pi}{2} \cdot \left( \frac{dQ}{d\mu} \right)_{\mu=0} = \frac{\pi}{2} \cdot \left( \frac{d \log M}{d \log \omega} \right)_{\omega=\omega_0} \quad \text{Per cui si ha la stessa pendenza.}$$

Dividendo per 20 ambo i membri:

$$\alpha(\omega_0) = \frac{\pi}{40} \cdot \left( \frac{dMdB}{d \log \omega} \right)_{\omega=\omega_0} \quad \text{che è la pendenza di Bode per } \omega = \omega_0.$$

## ESERCITAZIONE N°6

### SISTEMI A FASE MINIMA.

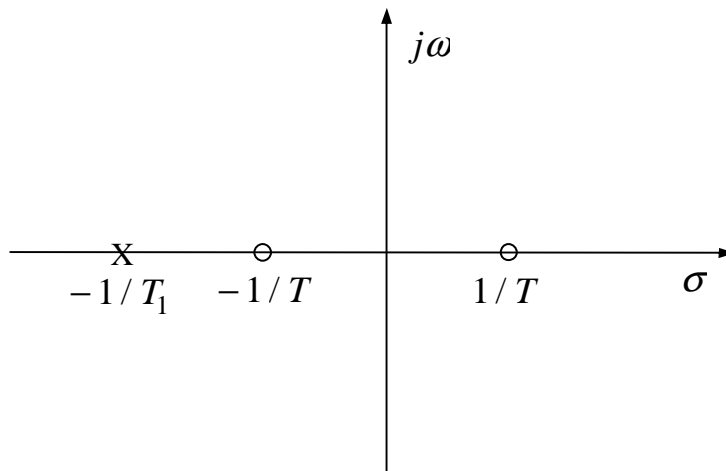
Un sistema è a fase minima se è caratterizzato da una funzione di trasferimento non avente poli o zeri con parte reale positiva o nulla. Come visto in precedenza, i sistemi a fase minima sono anche caratterizzati dalla proprietà che parte reale e parte immaginaria oppure modulo e fase sono tra loro legati.

Consideriamo adesso una funzione a fase minima e una a fase non minima:

$$W(j\omega) = \frac{j\omega T + 1}{j\omega T_1 + 1} = M \cdot e^{j\alpha} \quad \text{zero con parte reale negativa.}$$

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{j\omega T - 1}{j\omega T_1 + 1} = \bar{M} \cdot e^{j\bar{\alpha}} \quad \text{zero con parte reale positiva.}$$

Graficamente:



Dove è  $T > T_1$ .

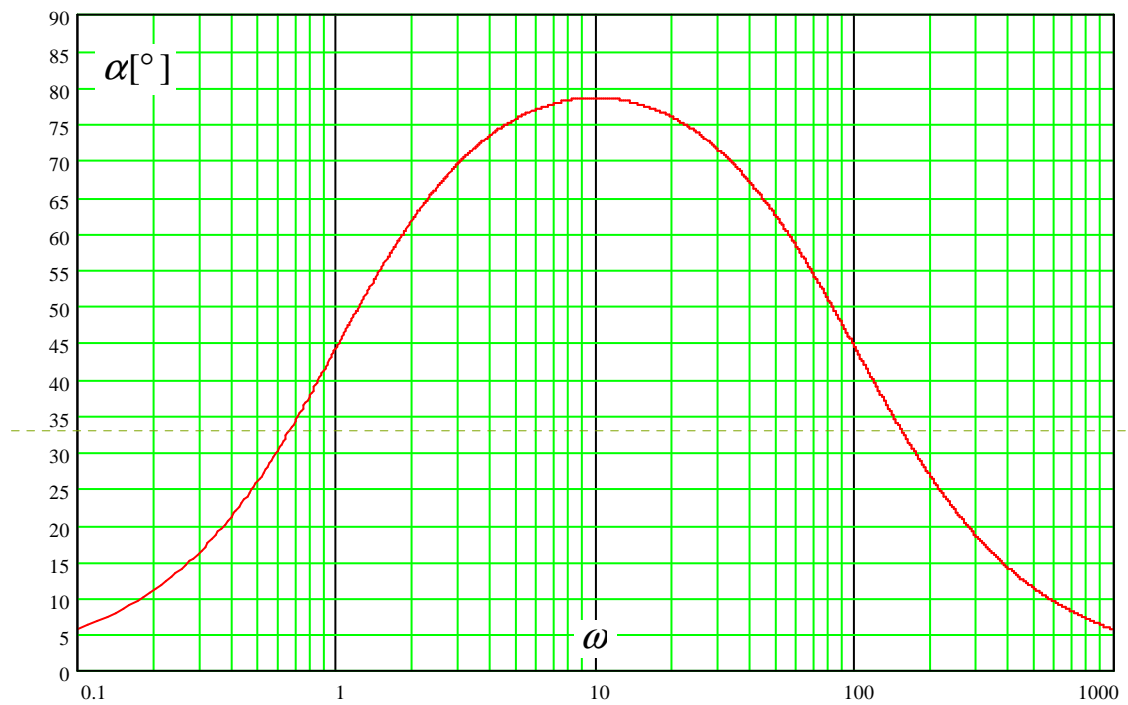
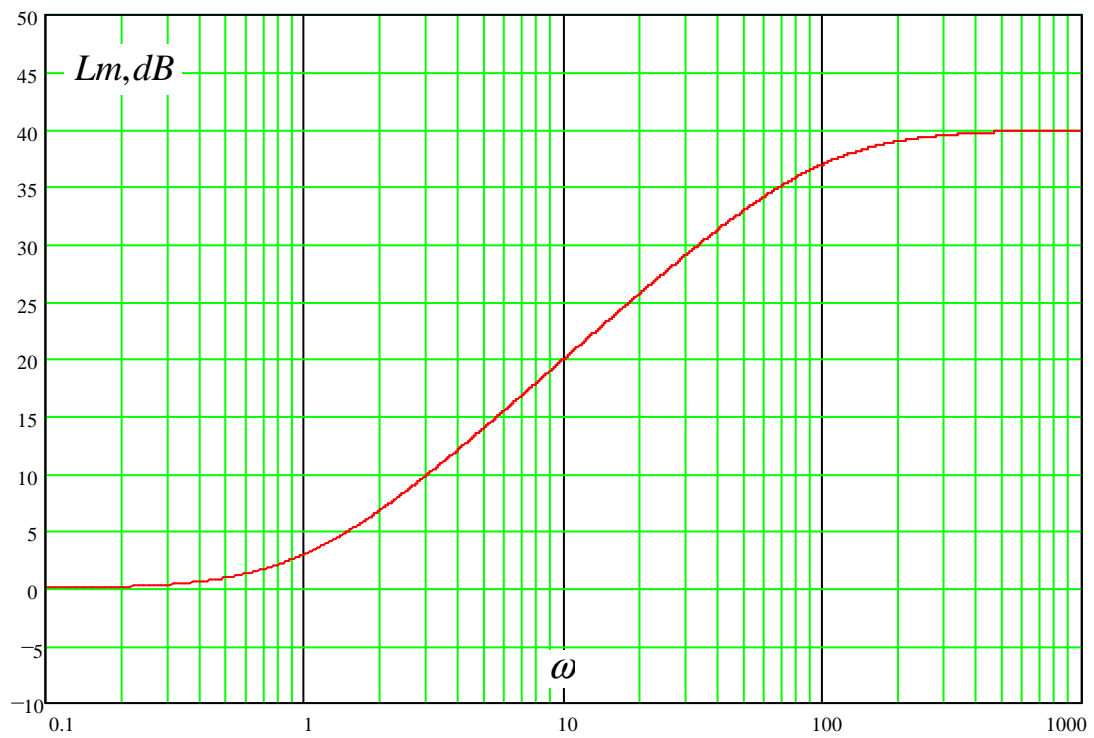
Notiamo che:

$$M = \bar{M} = \sqrt{\frac{\omega^2 T^2 + 1}{\omega^2 T_1^2 + 1}}$$

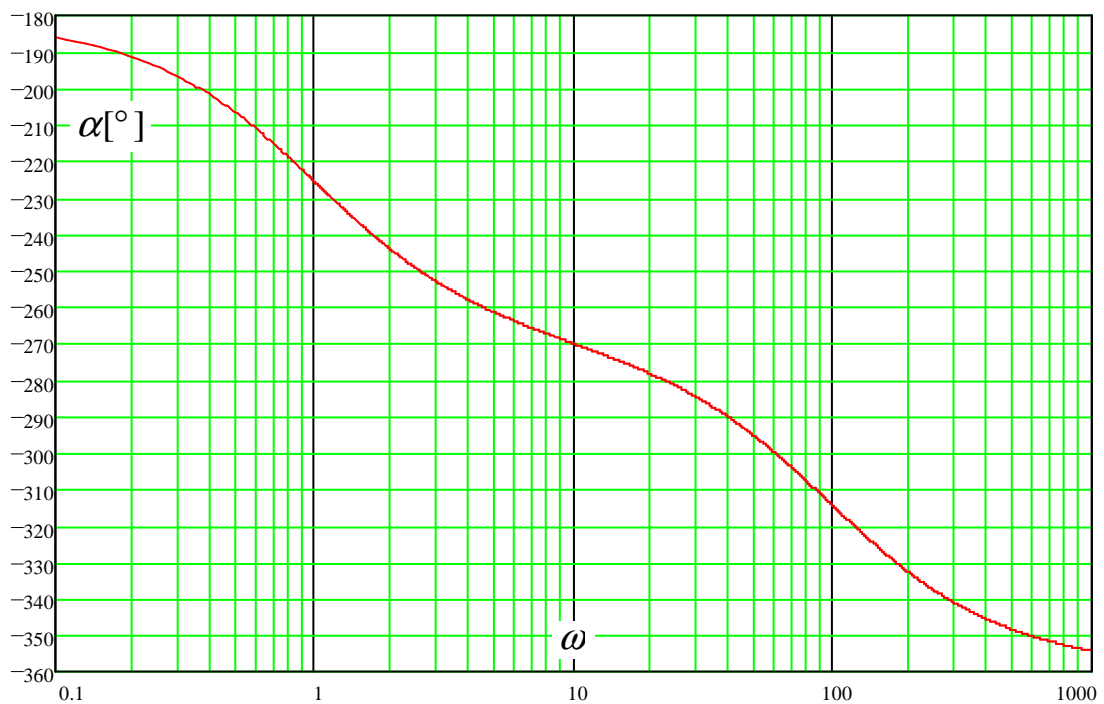
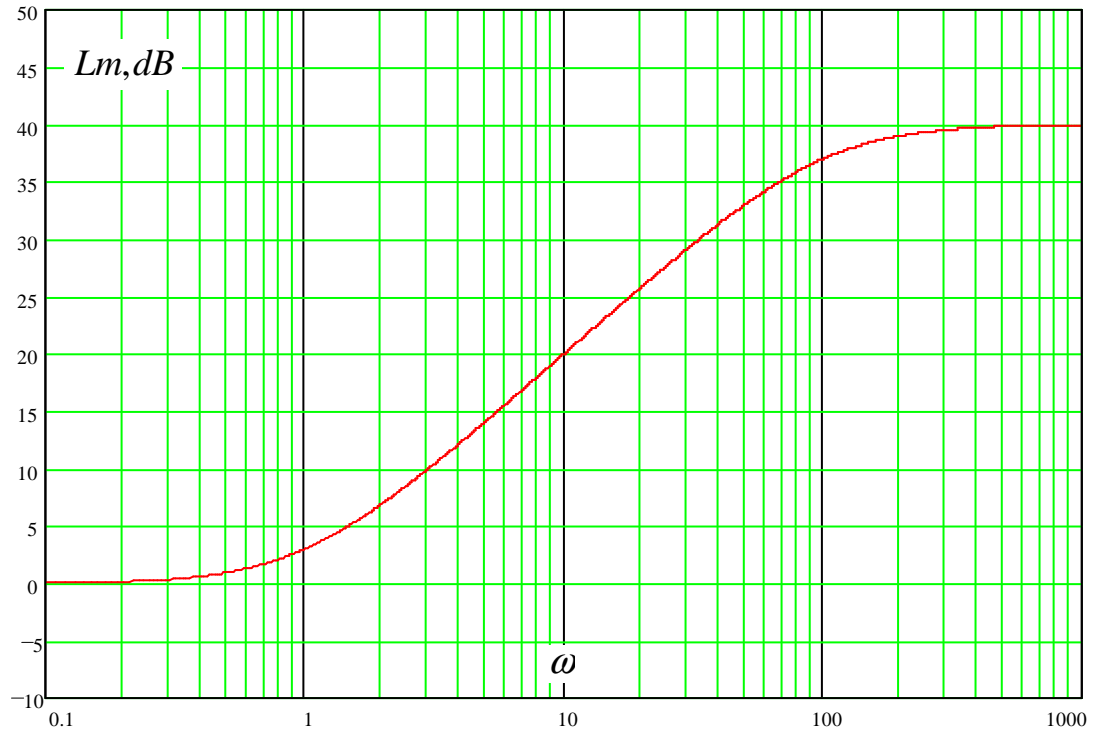
$$\alpha = \arctg \omega T - \arctg \omega T_1$$

$$\bar{\alpha} = 180^\circ - \arctg \omega T - \arctg \omega T_1$$

Vediamo i diagrammi di  $W(j\omega)$ :



Vediamo i diagrammi di  $\bar{W}(j\omega)$ :



Come è evidente dai grafici appena riportati nei sistemi a fase minima il diagramma di fase presenta valore minimo.

A questo punto, con il preciso scopo di dedurre ulteriori informazioni, calcoliamo la risposta in regime transitorio dei due sistemi, cioè la risposta al gradino, anche detta risposta indiciale.

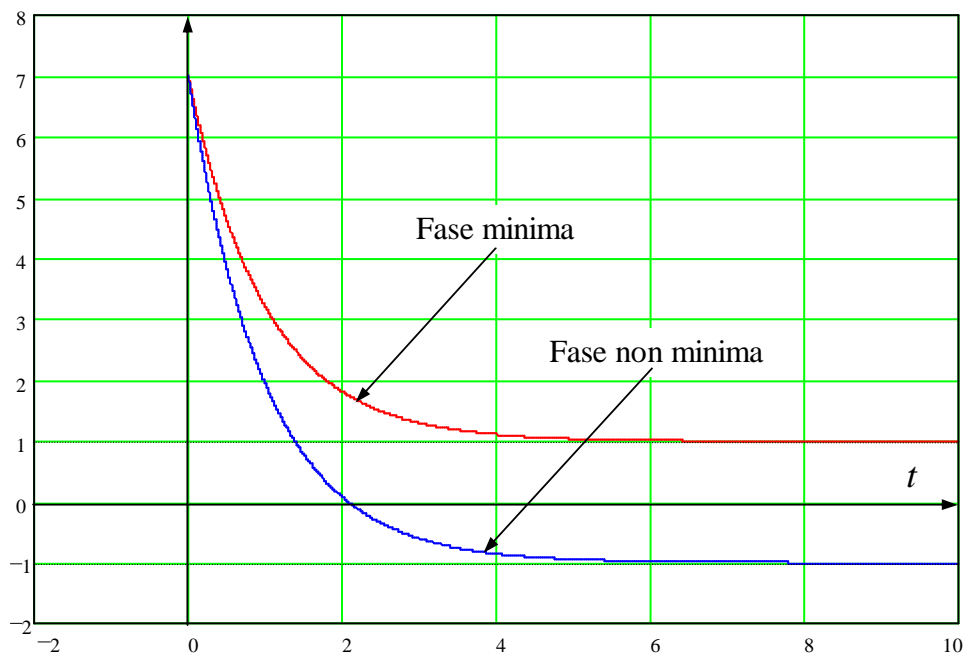
Antitrasformando le due espressioni si ha che:

$$w_{-1}(t) = 1 + \left( \frac{T}{T_1} - 1 \right) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

$$\bar{w}_{-1}(t) = -1 + \left( \frac{T}{T_1} + 1 \right) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

Una modalità di verifica di queste espressioni può essere il limite per  $t \rightarrow +\infty$ .

Graficamente si ha che:

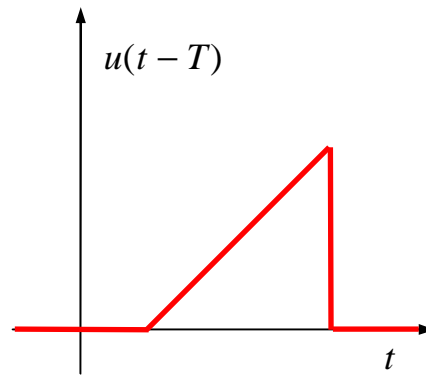
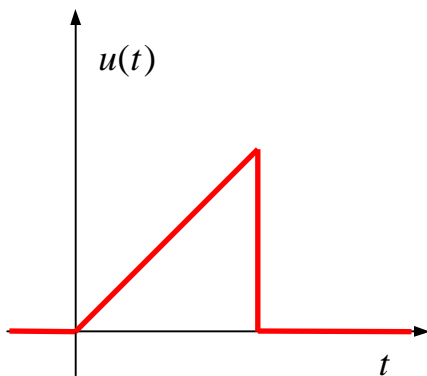


Notiamo, innanzi tutto, che ad una sollecitazione di ampiezza unitaria si ottiene una risposta di ampiezza maggiore di uno in entrambi i casi. Ciò è conseguenza del fronte ripido del gradino. Quindi si vede anche che il sistema a fase non minima implica una inversione di segno dell'uscita. Inoltre il comportamento nel transitorio del sistema a fase non minima è meno rapido. Il sistema a fase minima, invece, tende a raggiungere il regime più in fretta. Così si può concludere che il sistema a fase non minima ha una scarsa prontezza di risposta.

Consideriamo, a titolo di esempio, un elemento a ritardo finito:



Si ha che:  $y(t) = u(t - T)$ .



$$Y(s) = U(s) \cdot e^{-Ts}$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-Ts} \cong 1 - Ts$$

Ciò per  $T \cong 0$ .

Abbiamo uno zero con parte reale negativa. Dunque il sistema corrispondente è a fase non minima.

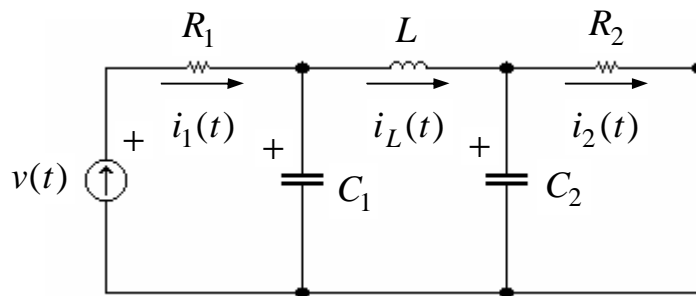
Viceversa, è possibile affermare che un sistema a fase non minima presenterà in  $t$  un ritardo  $T$ . Ecco che è possibile affermare che un sistema a fase non minima parte sempre con un certo ritardo e risponde meno velocemente ad una sollecitazione.

## ESERCITAZIONE N°7

### ANALISI MODALE.

#### Esercizio n°20

Calcolare la risposta libera nello stato del sistema elettrico di figura.



Come noto, lo stato è una variabile del sistema che configura la storia e l'evoluzione passata del sistema stesso e ciò indipendentemente dagli ingressi applicati in istanti precedenti a quello a cui lo stato è noto. A partire da esso, e in corrispondenza ai successivi valori di ingresso, è possibile individuare l'uscita in modo univoco. Affinchè il modello sia completamente caratterizzato è necessario che lo stato sia completo: in caso contrario il comportamento del sistema non risponderà alle prerogative per esso ipotizzate.

Nel caso in questione scegliamo come variabili di stato le tensioni sui condensatori e le correnti negli induttori: la scelta non è casuale poiché quelle scelte sono le grandezze che tengono conto dell'energia immagazzinata nella rete. Bisogna porre molta attenzione nella scelta delle polarità.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_{L1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Come variabile di ingresso scegliamo la tensione applicata ( $u(t) = v(t)$ ) mentre come variabile d'uscita scegliamo la corrente che scorre attraverso il resistore  $R_1$  ( $y(t) = i_{R1}(t)$ ). Questo è solo il nostro punto di vista e da questa scelta dipende il modello che ricaveremo.

Scriviamo le equazioni del circuito, allo scopo di ricondurre il sistema ad una rappresentazione di tipo implicito:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{d} \cdot \mathbf{u}(t)$$

Dall'equazione del nodo A:

$$i_1 = i_{C1} + i_L = C_1 \cdot \dot{v}_{C1} + i_L$$

$$i_1 = \frac{u - v_{C1}}{R_1}$$

$$v_{C1} - L \cdot \dot{i}_L = v_{C1}$$

$$\dot{v}_{C1} = \frac{1}{C_1} \cdot (i_1 - i_L) = \frac{1}{R_1 C_1} \cdot (u - v_{C1}) - \frac{1}{C_1} \cdot i_L$$

$$\dot{v}_{C2} = \frac{1}{C_2} \cdot (i_L - \frac{v_{C2}}{R_2})$$

$$\dot{i}_L = \frac{v_{C1} - v_{C2}}{L}$$

Partendo dalle ultime tre equazioni, che legano tra di loro le variabili di stato e gli ingressi, si ha:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C1} \\ \dot{v}_{C2} \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_1 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_L \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = R_2 = 1[\Omega]$$

Dal momento che:

$$L = 9[H]$$

$$C_1 = C_2 = 1[F]$$

Si ha che la matrice A è:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & 0 \end{bmatrix}$$

La risposta libera nello stato, nella sua forma spettrale, è:

$$\mathbf{x}_l(t) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_0) \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \mathbf{v}_i$$

$$\text{con } (\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_j) = \delta_{ij}.$$

**1° passo:** determinazione degli autovalori della matrice A.

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & -1 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1) \cdot \left[ \lambda^2 + \lambda + \frac{2}{9} \right]$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -\frac{2}{3}$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{3}$$

**2° passo:** determinazione degli autovettori:

Tale scopo può essere perseguito per mezzo della formula  $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$  oppure ricorrendo alla costruzione della matrice modale. Questa è una matrice a blocchi di n colonne, ciascuna delle quali è proporzionale ad una qualsiasi colonna della matrice  $(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})^a$ . Facendo appello alle regole note:

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})^a = \begin{bmatrix} \lambda_i^2 + \lambda_i + \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -(\lambda_i + 1) \\ \frac{1}{9} & \lambda_i^2 + \lambda_i + \frac{1}{9} & \lambda_i + 1 \\ \frac{\lambda_i + 1}{9} & -\frac{\lambda_i + 1}{9} & (\lambda_i + 1)^2 \end{bmatrix}$$

Particolarizziamo la matrice modale per i vari autovalori:

$$(-\mathbf{I} - \mathbf{A})^a = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ per il primo;}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^a = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{27} & -\frac{1}{27} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \text{ per il secondo;}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^a = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{27} & -\frac{2}{27} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \text{ per il terzo.}$$

Per ognuna delle matrici si sceglie una colonna che sia diversa dal vettore nullo: si dimostra che il corrispondente autovettore è ottenibile da tale colonna moltiplicata per una costante arbitraria. Il valore della costante si determina imponendo la condizione di normalizzazione.

$$\mathbf{v}_1 = k_1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{81} \cdot k_1^2 + \frac{1}{81} \cdot k_1^2} = 1 \Rightarrow k_1 = \frac{9}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = k_2 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{9} \cdot k_2^2 + \frac{1}{9} \cdot k_2^2 + \frac{1}{81} \cdot k_2^2} = 1 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{\sqrt{19}} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{19}} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = k_3 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix} \Rightarrow \sqrt{\frac{4}{9} \cdot k_3^2 + \frac{4}{9} \cdot k_3^2 + \frac{4}{81} \cdot k_3^2} = 1 \Rightarrow k_3 = \frac{9}{2\sqrt{22}} \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{22}} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \{k_1 \mathbf{v}_1 : k_2 \mathbf{v}_2 : k_3 \mathbf{v}_3\}$$

Con l'altra metodologia si perviene, ovviamente, agli stessi risultati.

**3° passo:** determinazione dei vettori della base reciproca.

Si sfrutta la relazione:  $(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$  e si perviene a:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_2 = \sqrt{19} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_3 = \sqrt{22} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determiniamo, infine, i coefficienti dati dai prodotti scalari per il completamento della formula:

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{x}_0) \stackrel{\Delta}{=} \alpha_1(0) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$(\mathbf{r}_2, \mathbf{x}_0) \stackrel{\Delta}{=} \alpha_2(0) = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{19}}{3} & \frac{\sqrt{19}}{3} & -\sqrt{19} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{19}}{3}$$

$$(\mathbf{r}_3, \mathbf{x}_0) \stackrel{\Delta}{=} \alpha_3(0) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{22}}{6} & -\frac{\sqrt{22}}{6} & \sqrt{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{\sqrt{22}}{6}$$

La rappresentazione spettrale della risposta libera nello stato, allora, è data da:

$$\mathbf{x}_l(t) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_0) \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \mathbf{v}_i = \alpha_1(0) \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2(0) \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \mathbf{v}_2 + \alpha_3(0) \cdot e^{\lambda_3 t} \cdot \mathbf{v}_3$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x_{l1}(t) \\ x_{l2}(t) \\ x_{l3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \cdot e^{-t} - e^{-\frac{2}{3}t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t}{3}} \\ \frac{5}{2} \cdot e^{-t} + e^{-\frac{2}{3}t} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t}{3}} \\ \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{2}{3}t} - \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{t}{3}} \end{bmatrix}$$

**Esercizio n°21**

**Per il sistema lineare stazionario la cui matrice dinamica  $\mathbf{A}$  è data da:**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

**determinare la risposta libera nello stato e disegnare la corrispondente traiettoria nel caso in cui lo stato iniziale sia dato da:**

$$\mathbf{x}_l(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Anche in questo secondo esercizio il nostro scopo è di pervenire alla rappresentazione spettrale della risposta libera nello stato, che ha la solita forma:

$$\mathbf{x}_l(t) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_0) \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \mathbf{v}_i$$

Adoperando la solita metodologia:

$$|\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

Gli autovalori associati sono dunque:  $\lambda_1 = -1 + j$  e  $\lambda_2 = -1 - j$ .

Per determinare gli autovettori corrispondenti possiamo operare con la matrice modale o con l'equazione matriciale:  $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ . Scegliamo questa seconda strada, avendo già applicato il primo metodo. Ovviamente, partendo da due autovalori complessi coniugati, mi aspetto di trovare due autovettori anch'essi complessi coniugati. Eseguendo i calcoli e applicando la condizione di normalizzazione si perviene al seguente risultato:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{bmatrix} 1+j \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{bmatrix} 1-j \\ -2 \end{bmatrix}$$

Scomponendo parte reale e parte immaginaria:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{1a} + j \cdot \mathbf{v}_{1b} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + j \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{2a} + j \cdot \mathbf{v}_{2b} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - j \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A partire dagli autovettori, calcoliamo i vettori della base reciproca:  $(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$ , ricordando che abbiamo a che fare con prodotti scalari tra vettori complessi. Otterremo 4 relazioni da ogni prodotto scalare.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{1a} + j \cdot \mathbf{r}_{1b} = \sqrt{6} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} + j \cdot \sqrt{6} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Ovviamente l'altro vettore della base reciproca è il complesso coniugato:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{2a} + j \cdot \mathbf{r}_{2b} = \sqrt{6} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} - j \cdot \sqrt{6} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo, infine,

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_1, \mathbf{x}_0) &\stackrel{\Delta}{=} \alpha_1(0) = (\mathbf{r}_{1a} + j \cdot \mathbf{r}_{1b}, \mathbf{x}_0) = (\mathbf{r}_{1a}, \mathbf{x}_0) - j \cdot (\mathbf{r}_{1b}, \mathbf{x}_0) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} - j \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Allo stesso modo si ha che:

$$(\mathbf{r}_2, \mathbf{x}_0) \stackrel{\Delta}{=} \alpha_2(0) = \frac{1}{2}$$

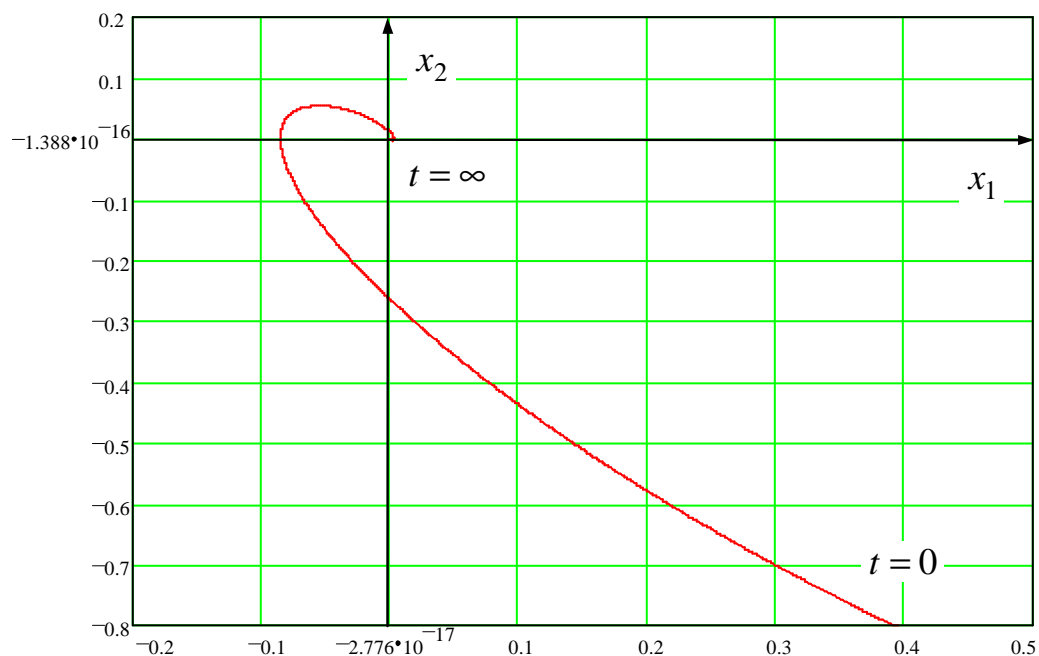
Dunque la rappresentazione spettrale è:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_l(t) &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_0) \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \mathbf{v}_i = \alpha_1(0) \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2(0) \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \mathbf{v}_2 = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot e^{(-1+j)t} \cdot (v_{1a} + j \cdot v_{1b}) + \frac{1}{2} \cdot e^{(-1-j)t} \cdot (v_{2a} + j \cdot v_{2b}) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot e^{-t} \cdot \left[ e^{jt} \cdot (v_{1a} + j \cdot v_{1b}) + e^{-jt} \cdot (v_{1a} - j \cdot v_{1b}) \right] = \\
 &= e^{-t} \cdot [\cos(t \cdot v_{1a}) - \sin(t \cdot v_{1b})].
 \end{aligned}$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_1''(t) \end{bmatrix} = e^{-t} \cdot \left\{ \cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-t}}{\sqrt{6}} \cdot (\cos t - \sin t) \\ -\frac{2e^{-t}}{\sqrt{6}} \cdot \cos t \end{bmatrix}.$$

Non ci rimane che disegnare la traiettoria, cioè l'andamento della risposta libera nello stato sul piano delle due componenti  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ .



**Esercizio n°22**

**Per il sistema lineare stazionario la cui matrice dinamica  $\mathbf{A}$  è data da:**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

**si determini la rappresentazione spettrale della risposta libera nello stato nell'ipotesi in cui il sistema si evolva a partire dallo stato iniziale:**

$$\mathbf{x}_l(0) = \mathbf{x}_0 = [1 \quad 2 \quad 4]$$

La rappresentazione spettrale della risposta libera nello stato nel caso in cui gli autovalori della matrice dinamica siano tutti distinti, assume la forma già evidenziata:

$$\mathbf{x}_l(t) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_0) \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \mathbf{v}_i$$

dove, come noto,  $n$  è la dimensione della rappresentazione del sistema che nel caso in questione è 3,  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  è l'insieme degli autovalori della matrice dinamica,  $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$  è l'insieme dei corrispondenti autovettori e  $\{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^n$  è l'insieme dei vettori della base reciproca, legati agli autovettori dalla relazione:  $(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$ , con  $i, j = 1 \dots n$ .

Sfruttando l'equazione caratteristica, procediamo alla valutazione degli autovalori:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -2 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 3) + 2 + 2 \cdot (\lambda - 2) - 2 \cdot (\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = 3$$

A partire dall'equazione matriciale  $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$  determiniamo i corrispondenti autovettori (si tralasciano i calcoli effettuati):

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ad un analogo risultato si sarebbe arrivati applicando il metodo della matrice modale.

Passiamo, adesso, alla determinazione dei vettori della base rciproca. Omettendo, anche in questo caso, i calcoli:

$$\mathbf{r}_1 = \sqrt{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_2 = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_3 = \sqrt{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Determiniamo, infine, i coefficienti dati dai prodotti scalari per il completamento della formula:

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{x}_0) \overset{\Delta}{=} \alpha_1(0) = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -2\sqrt{2} + \frac{4}{2}\sqrt{2} = 0$$

$$(\mathbf{r}_2, \mathbf{x}_0) \stackrel{\Delta}{=} \alpha_2(0) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 + 6 = 9$$

$$(\mathbf{r}_3, \mathbf{x}_0) \stackrel{\Delta}{=} \alpha_3(0) = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} & \sqrt{6}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \sqrt{6} + 2\sqrt{6} + \frac{4}{2}\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$

La rappresentazione spettrale della risposta libera nello stato, allora, è data da:

$$\mathbf{x}_l(t) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_0) \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \mathbf{v}_i = \alpha_1(0) \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2(0) \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \mathbf{v}_2 + \alpha_3(0) \cdot e^{\lambda_3 t} \cdot \mathbf{v}_3$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x_{l1}(t) \\ x_{l2}(t) \\ x_{l3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cdot e^{2t} - 5e^{3t} \\ -3 \cdot e^{2t} + 5 \cdot e^{3t} \\ -6 \cdot e^{2t} + 10 \cdot e^{3t} \end{bmatrix}$$

## ESERCITAZIONE N°8

### PROCEDIMENTI DI CONVOLUZIONE E DECONVOLUZIONE.

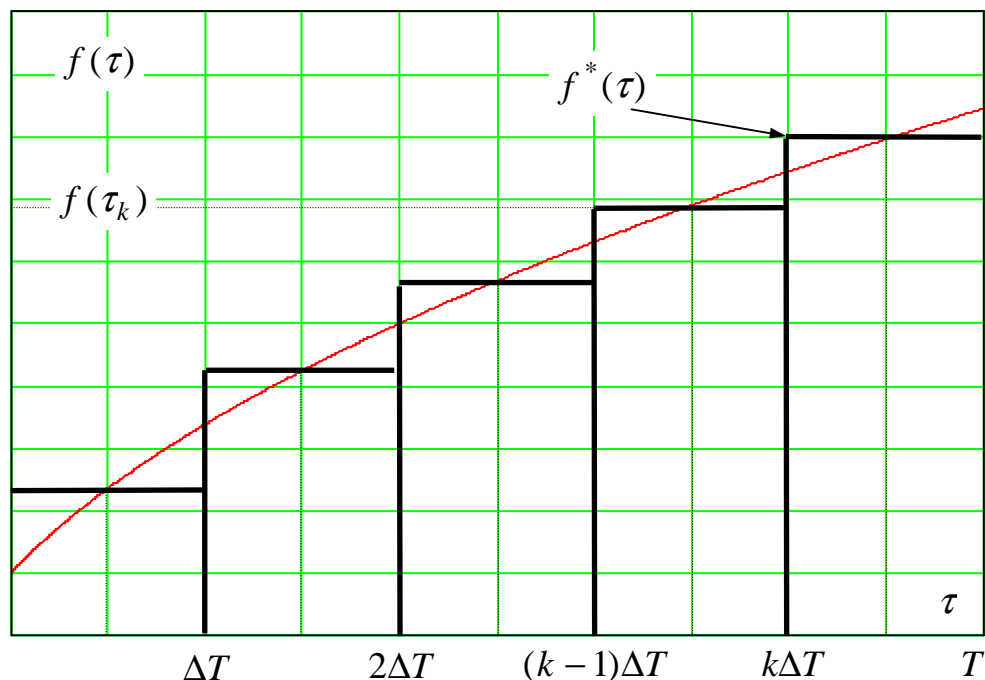
L'integrale di convoluzione viene adoperato per il calcolo della risposta forzata nell'uscita di un sistema lineare, stazionario, a tempo continuo, differenziale proprio e, in questo caso, monodimensionale, nota che sia la funzione di ingresso e la risposta impulsiva. La forma è:

$$y_f(t) = \int_0^t w(t - \tau) \cdot u(\tau) d\tau$$

Purtroppo, sovente,  $w(t)$  e  $u(t)$  hanno espressioni matematiche alquanto complesse oppure sono note nella sola forma grafica o numerica. Potremmo trovarci nella situazione di non avere una espressione delle funzioni nel continuo ma solo una serie di valori numerici, frutto di rilevazioni sul sistema, correlati ai valori del tempo.

In tutte queste situazioni risulta conveniente l'adozione di metodi approssimati, derivati dal calcolo numerico, e, nel caso particolare, di quei metodi approssimati che prevedono il calcolo dell'integrale di convoluzione. In buona sostanza, tutto si riduce a considerare un andamento approssimato a scala per le funzioni  $w(t)$  e  $u(t)$ .

Allo scopo, consideriamo una generica funzione  $f(\tau)$  nella sua forma grafica continua e suddividiamo l'intervallo di osservazione  $[0, T]$  in  $n$  intervalli di uguale ampiezza  $\Delta T$ , come si può evincere dalla figura qui sotto riportata.



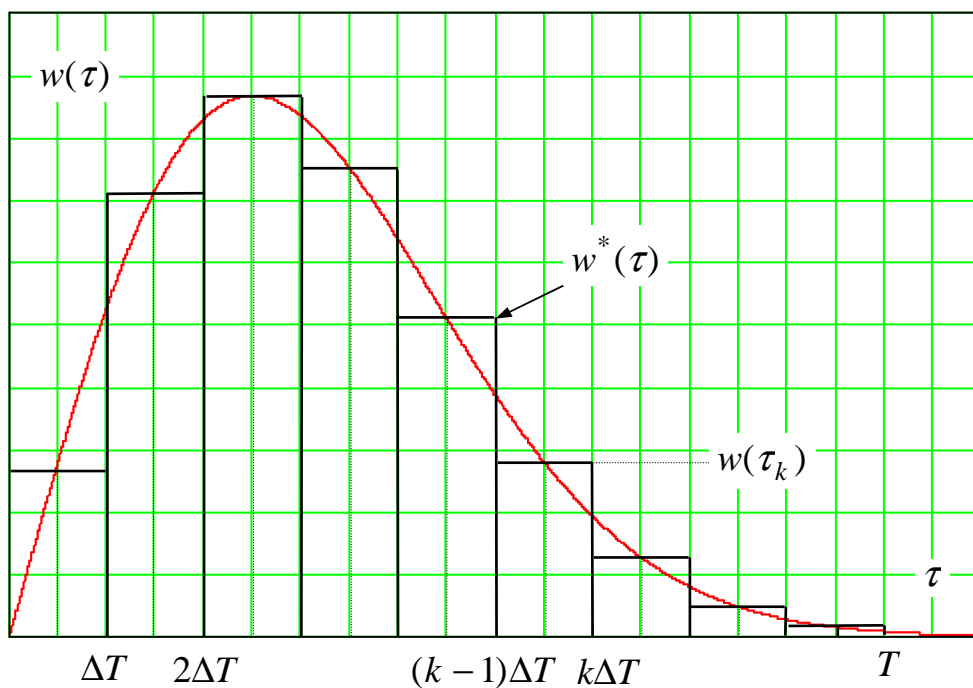
La funzione a scala corrispondente alla  $f(\tau)$  è data dalla funzione ottenuta prelevando i valori della funzione di partenza nel punto medio degli intervalli prescelti e assegnando tale valore a tutto l'intervallo, secondo un andamento del tipo:

$$f(\tau_k) = f[(k - 0.5)\Delta T]$$

Si avrà quindi che:

$$f^*(\tau) = f(\tau_k) \rightarrow \forall \tau \in [(k - 1)\Delta T, \Delta T]$$

con  $k = 1, 2, \dots, n$



A questo punto, ricaviamo la nuova espressione della risposta forzata nell'uscita:

$$y_f(n\Delta T) \cong \int_0^{n\Delta T} w^*(n\Delta T - \tau) \cdot u^*(\tau) d\tau$$

e cioè:

$$y_f(n\Delta T) = \sum_{k=1}^n w^*(n\Delta T - \tau) \cdot u^*(\tau) \cdot \Delta T$$

Se adesso facciamo le seguenti posizioni:

$$\alpha_k^\Delta = u(\tau_k)$$

$$\beta_k^\Delta = w(\tau_k)$$

si ottiene che:

$$y_f(\Delta T) \cong \beta_1 \alpha_1 \Delta T$$

$$y_f(2\Delta T) \cong [\beta_2 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_2] \cdot \Delta T$$

$$y_f(3\Delta T) \cong [\beta_3 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 + \beta_1 \alpha_3] \cdot \Delta T$$

⋮

$$y_f(n\Delta T) \cong \Delta T \cdot \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_{n-k+1} = \Delta T \cdot \sum_{k=1}^n \beta_k \alpha_{n-k+1}$$

L'ultima espressione trovata, dovuta a *Floyd*, approssima l'integrale di convoluzione.

Bisogna porre attenzione al fatto che mentre l'ingresso e la risposta impulsiva vengono approssimate col valore esatto nel punto medio degli intervalli scelti, la risposta forzata nell'uscita viene approssimata, in ogni intervallo, col valore assunto alla fine dell'intervallo.

Poiché tale ogni valore determinato per la risposta forzata nell'uscita contribuirà alla determinazione del corrispondente valore nell'intervallo successivo, l'errore che si compie è additivo e, nel caso peggiore, all'ultimo punto oggetto della nostra attenzione potremmo rinvenire un valore che si discosta notevolmente da quello effettivo. Attenzione, dunque!!!

Spesso sorge un altro problema: come noto l'impulso unitario è praticamente impossibile da realizzare e, allora, sovente si ricorre ad un'altro tipo di studio. Si ha a disposizione l'ingresso e la risposta forzata nell'uscita che questo ha determinato. A partire dai due si desidera calcolare la risposta impulsiva del sistema. Per fare ciò si procede con le formule inverse di quelle già determinate:

$$\beta_1 = \frac{\gamma_1}{\alpha_1 \cdot \Delta T}$$

$$\beta_2 = \frac{\gamma_2}{\alpha_1 \cdot \Delta T} - \frac{\alpha_2 \gamma_1}{\alpha_1^2 \cdot \Delta T}$$

⋮

$$\beta_k = \sum_{l=1}^k (-1)^{l+1} \cdot \frac{\gamma_{k-l+1} \cdot D_{n-l}}{\alpha_1^l \cdot \Delta T}$$

$$\text{dove: } \gamma_k^\Delta = y_f(k \cdot \Delta T) \text{ e } D_l = \sum_{j=1}^l (-1)^{j-1} \alpha_1^{j-1} \alpha_{j+1} D_{l-j} \text{ con } D_0 = 1.$$

Con questa metodologia si possono ottenere espressioni matriciali che coinvolgono matrici sottodiagonali fortemente sparse e, dunque, facilmente analizzabili per mezzo del calcolatore.

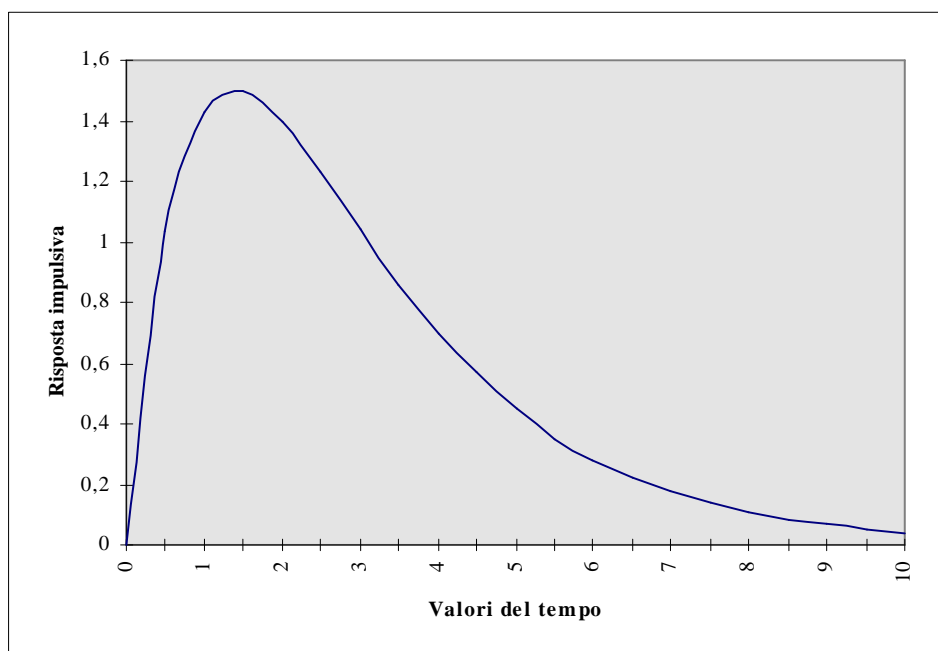
Esercizio n°24

Si determini la risposta forzata nell'uscita di un sistema lineare e stazionario sollecitato dall'ingresso

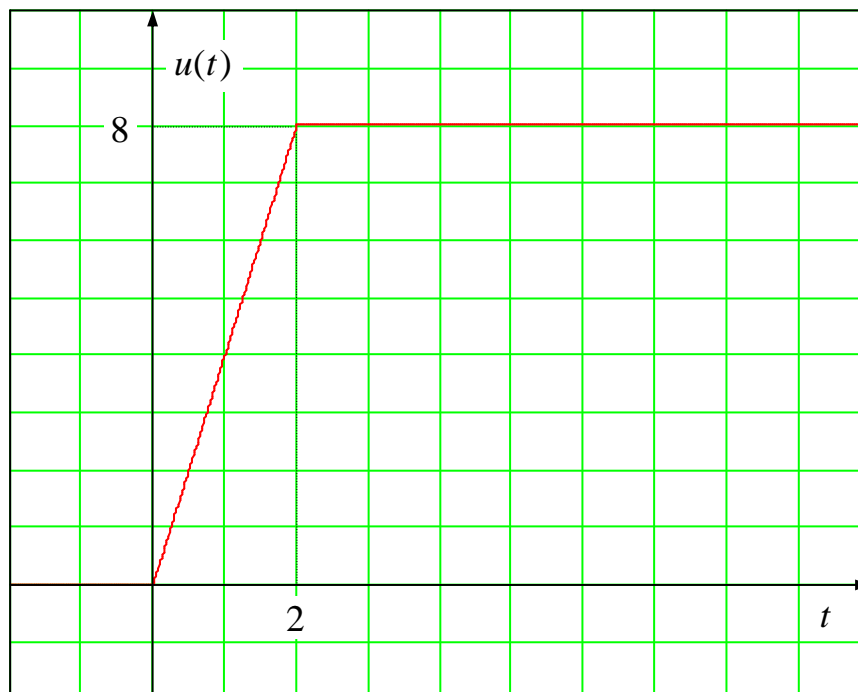
$$u(t) = 4t \cdot [\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t - 2)] + 8\delta_{-1}(t - 2)$$

nell'ipotesi in cui siano noti i seguenti campioni della risposta impulsiva:

$\tau_k$	$w(t)$
0	0
0,5	1,034
1	1,43
1,5	1,5
2	1,4
2,5	1,23
3	1,04
3,5	0,86
4	0,7
4,5	0,57
5	0,45
5,5	0,35
6	0,28
6,5	0,22
7	0,18
7,5	0,14
8	0,11
8,5	0,08
9	0,07
9,5	0,05
10	0,04



Ovviamente il procedimento di risoluzione è basato sul metodo approssimato. Per prima cosa diamo rappresentazione grafica all'ingresso:

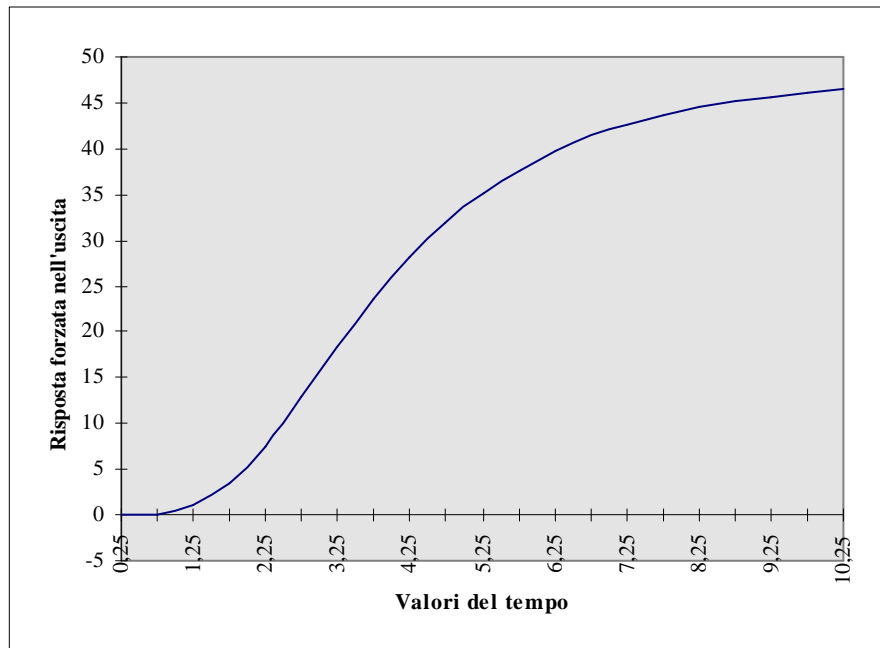


Corrispondentemente, si ha che:

$k$	$\tau_k$	$\beta_k$	$\alpha_k$	$t_k = \tau_k + 0,25$	$y_f(t_k)$
1	0	0	0	0,25	0
2	0,5	1,034	2	0,75	0
3	1	1,43	4	1,25	1,034
4	1,5	1,5	6	1,75	3,498
5	2	1,4	8	2,25	7,462
6	2,5	1,23	8	2,75	12,826
7	3	1,04	8	3,25	18,386
8	3,5	0,86	8	3,75	23,556
9	4	0,7	8	4,25	28,086
10	4,5	0,57	8	4,75	31,916
11	5	0,45	8	5,25	35,086
12	5,5	0,35	8	5,75	37,666
13	6	0,28	8	6,25	39,736
14	6,5	0,22	8	6,75	41,386
15	7	0,18	8	7,25	42,686
16	7,5	0,14	8	7,75	43,716
17	8	0,11	8	8,25	44,536
18	8,5	0,08	8	8,75	45,186
19	9	0,07	8	9,25	45,696
20	9,5	0,05	8	9,75	46,096
21	10	0,04	8	10,25	46,406

Riprendendo le considerazioni fatte a proposito degli istanti in cui la risposta forzata nell'uscita viene calcolata, ci accorgiamo che essa va calcolata a partire da  $t = -0.25$  con un passo pari a  $0.5$ . Per il calcolo si è sfruttata la formula nota:

$$y_f(n\Delta T) \cong \Delta T \cdot \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_{n-k+1} = \Delta T \cdot \sum_{k=1}^n \beta_k \alpha_{n-k+1}$$



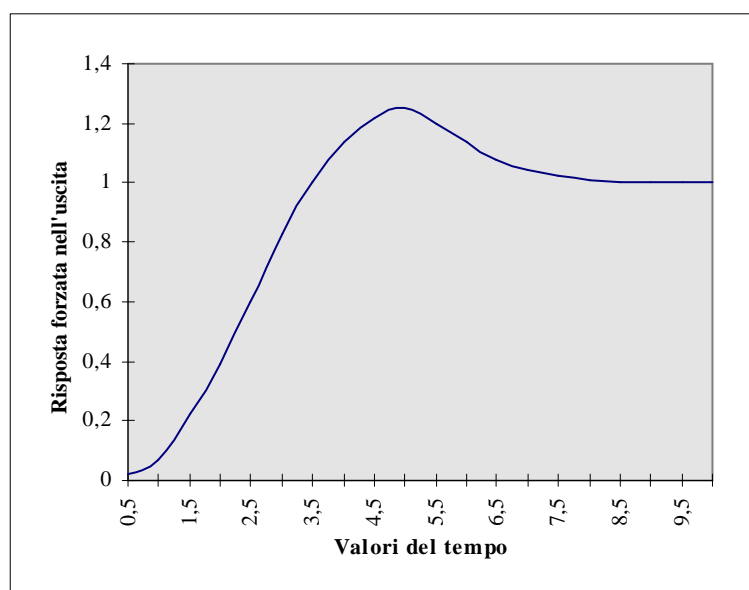
**Esercizio n°25**

Un sistema lineare e stazionario sollecitato dall'ingresso:

$$u(t) = 0.5t \cdot [\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-2)] + \delta_{-1}(t-2)$$

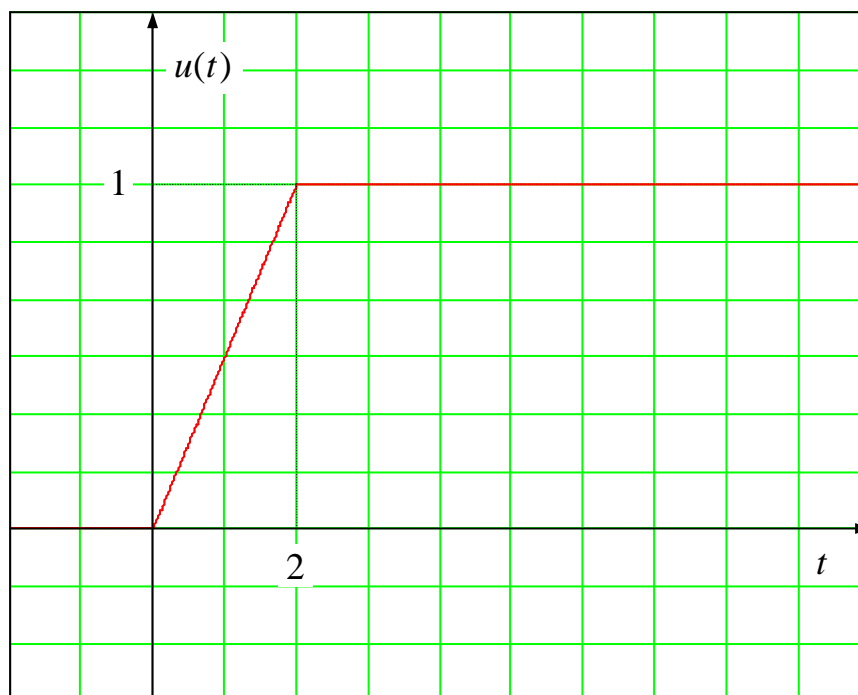
fornisce la risposta forzata nell'uscita  $y_f(t)$  individuata dai seguenti valori:

$t$	$y_f(t)$
0,5	0,02
1	0,07
1,5	0,22
2	0,39
2,5	0,6
3	0,825
3,5	1
4	1,14
4,5	1,22
5	1,25
5,5	1,2
6	1,135
6,5	1,08
7	1,04
7,5	1,02
8	1,01
8,5	1
9	1
9,5	1
10	1
$\infty$	1



**Determinare la risposta impulsiva.**

Ovviamente il procedimento di risoluzione è basato sul metodo approssimato. Per prima cosa diamo rappresentazione grafica all'ingresso:



$t$	$\tau_k = t_k - 0.25$	$y_f(t)$	$u(t_k)$
0,5	0,25	0,02	0,25
1	0,75	0,07	0,5
1,5	1,25	0,22	0,75
2	1,75	0,39	1
2,5	2,25	0,6	1
3	2,75	0,825	1
3,5	3,25	1	1
4	3,75	1,14	1
4,5	4,25	1,22	1
5	4,75	1,25	1
5,5	5,25	1,2	1
6	5,75	1,135	1
6,5	6,25	1,08	1
7	6,75	1,04	1
7,5	7,25	1,02	1
8	7,75	1,01	1
8,5	8,25	1	1
9	8,75	1	1
9,5	9,25	1	1
10	9,75	1	1
$\infty$		1	1

Per le osservazioni prima fatte i campioni della risposta forzata nello stato sono relativi ai punti finali degli intervalli: per campionare l'ingresso si sono scelti valori che, quindi, differiscono rispetto ai valori della risposta forzata nell'uscita per la semiampiezza dell'intervallo.

$k$	$t_k$	$\tau_k = t_k - 0.25$	$\gamma_k = y_f(t_k)$	$\alpha_k = u(\tau_k)$	$D_{k-1}$	$\beta_k = w(\tau_k)$
1	0,5	0,25	0,02	0,25	1	-8,242E-10
2	1	0,75	0,07	0,5	0,5	6,21*10 <sup>(-9)</sup>
3	1,5	1,25	0,22	0,75	0,156	-7,756E-08
4	2	1,75	0,39	1	0,059	8,398*10 <sup>(-7)</sup>
5	2,5	2,25	0,6	1	0,021	-0,000009291
6	3	2,75	0,825	1	0,008	1,025*10 <sup>(-4)</sup>
7	3,5	3,25	1	1	0,003	-0,001
8	4	3,75	1,14	1	0,001	0,012
9	4,5	4,25	1,22	1	3,625*10 <sup>(-4)</sup>	0,224
10	5	4,75	1,25	1	1,314*10 <sup>(-4)</sup>	-1,209
11	5,5	5,25	1,2	1	4,763*10 <sup>(-5)</sup>	17,326
12	6	5,75	1,135	1	1,727*10 <sup>(-5)</sup>	-184,118
13	6,5	6,25	1,08	1	6,26*10 <sup>(-6)</sup>	2,042*10 <sup>3</sup>
14	7	6,75	1,04	1	-2,269E-06	-25110
15	7,5	7,25	1,02	1	-8,225E-07	2,562*10 <sup>5</sup>
16	8	7,75	1,01	1	-2,982E-07	-2714000
17	8,5	8,25	1	1	-1,081E-07	3,114*10 <sup>7</sup>
18	9	8,75	1	1	-3,919E-08	-320800000
19	9,5	9,25	1	1	-1,421E-08	4,381*10 <sup>9</sup>
20	10	9,75	1	1	-5,151E-08	-28760000000
	$\infty$		1	1		

**ESERCITAZIONE N°9**  
**SUI DIAGRAMMI DI BODE.**

**Esercizio n°26**

**Tracciare i diagrammi di Bode della seguente funzione:**

$$GH(j\omega) = \frac{1 + j\frac{\omega}{2} - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}{j\omega \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{0.5}\right) \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{4}\right)}$$

Tale funzione possiede un numeratore in cui figura un fattore trinomio mentre al denominatore rinveniamo un fattore monomio due fattori binomio.

Considerazioni sul numeratore:

• Studiamo il fattore trinomio: in esso notiamo che la pulsazione naturale è  $\omega_n = 2$ . Da tale valore è possibile ricavare:  $\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{1}{2}$ , per cui  $\zeta = \frac{\omega_n}{4} = \frac{1}{2}$ .

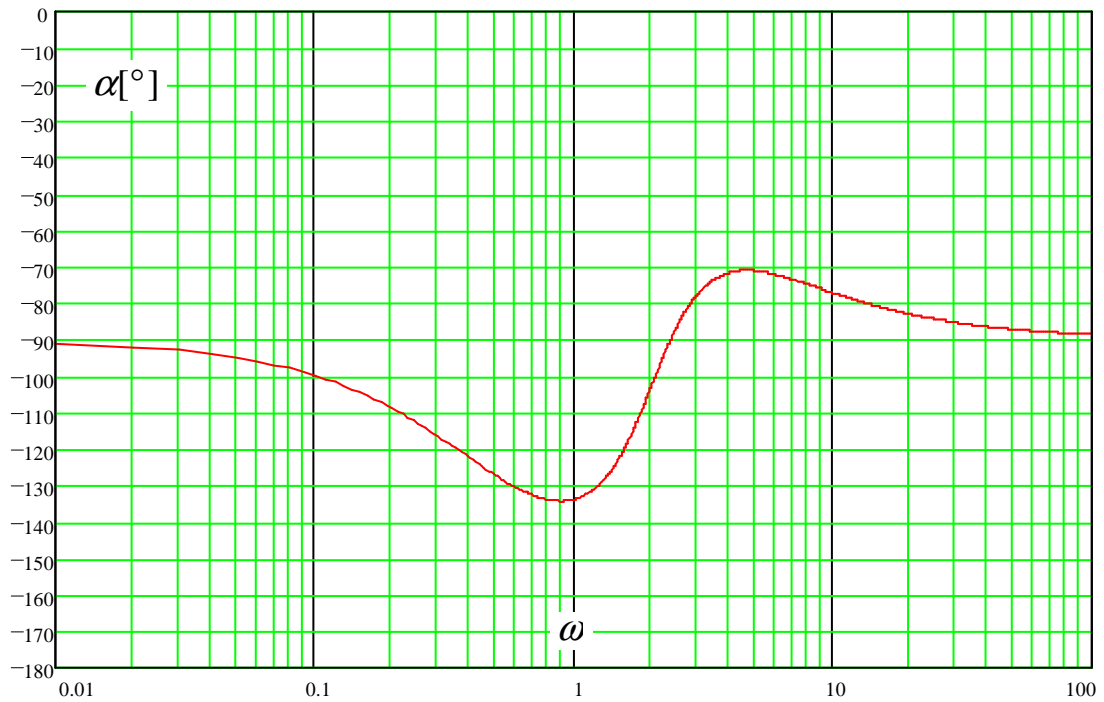
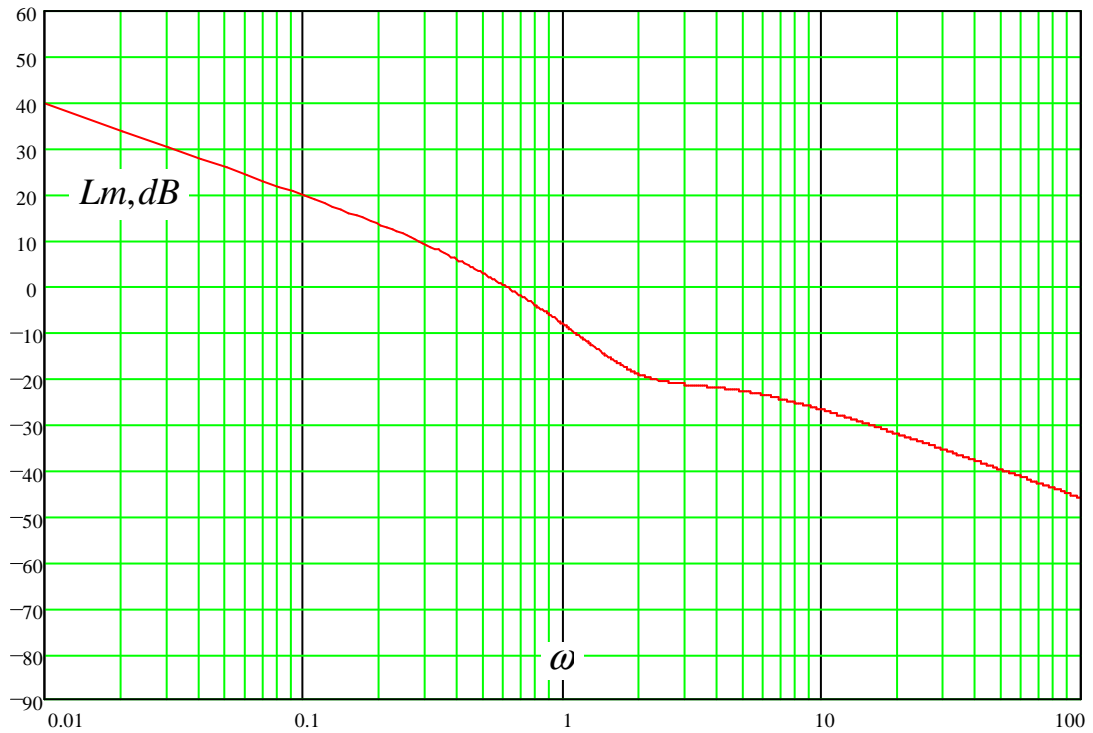
Considerazioni sul denominatore:

• Il polo nell'origine dà un contributo pari a  $-20\text{dB/decade}$  per ogni valore di  $\omega$  ed un contributo costantemente uguale a  $-90^\circ$  per la fase.

• Vi è un secondo polo per  $\omega = 0.5$ . Esso, per ciò che riguarda il modulo, comincia a farsi sentire proprio da  $\omega = 0.5$  in poi, con un contributo di  $-20\text{dB/decade}$ . Per la fase il contributo è nullo fino a  $\omega = 0.05$ , giunge a  $-45^\circ$  per  $\omega = 0.5$  e si mantiene costante a  $-90^\circ$  da  $\omega = 5$  in poi.

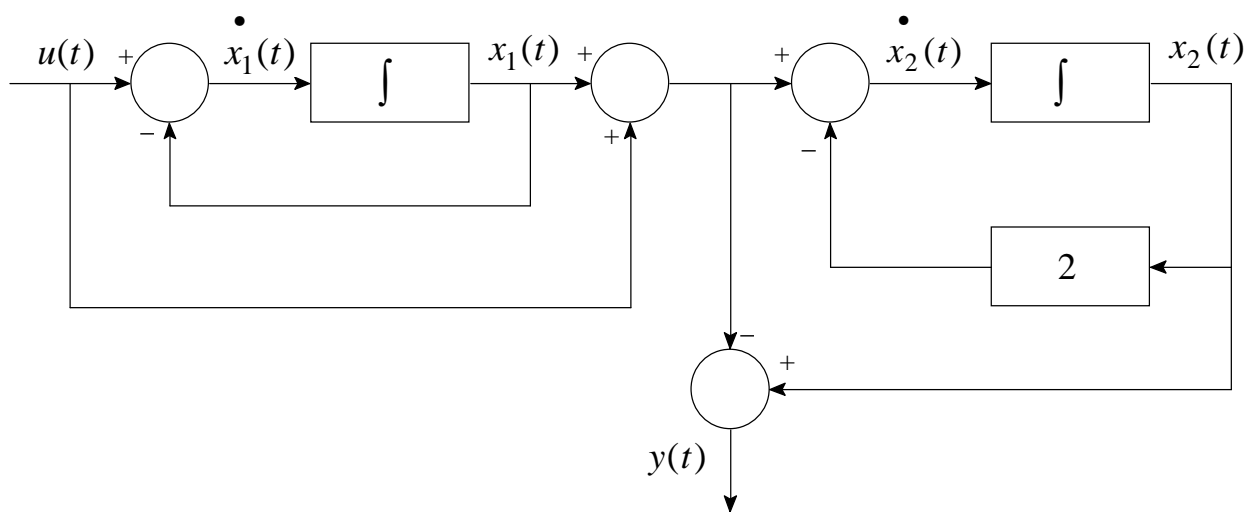
• Il terzo polo è in  $\omega = 4$ . Esso, per ciò che riguarda il modulo, comincia a farsi sentire proprio da  $\omega = 4$  in poi, con un contributo di  $-20\text{dB/decade}$ . Per la fase il contributo è nullo fino a  $\omega = 0.4$ , giunge a  $-45^\circ$  per  $\omega = 4$  e si mantiene costante a  $-90^\circ$  da  $\omega = 40$  in poi.

Facendo uso dei diagrammi asintotici e, in seguito, degli opportuni diagrammi di correzione si ottengono andamenti del modulo e della fase come qui di seguito riportato:



**ESERCITAZIONE N°10****TEORIA DELLA STRUTTURA - GRAFI DI FLUSSO****Esercizio n°27**

Dato il sistema il cui schema a blocchi è riportato in figura, determinare le caratteristiche di controllabilità e di osservabilità.



Come noto, nell'ambito della teoria dei sistemi e del controllo suscita notevole interesse lo studio delle due seguenti proprietà strutturali:

- proprietà di interazione tra ingresso e stato.
- proprietà di interazione tra stato e uscita.

La prima proprietà si riferisce alla possibilità o meno di trasferire, in un intervallo di tempo prefissato, un qualsiasi stato assegnato del sistema in un qualunque altro stato assegnato, per mezzo dell'ingresso. La seconda proprietà si riferisce alla possibilità o meno di determinare il valore del generico stato a partire dall'osservazione dell'uscita.

Precisiamo, innanzi tutto, che parliamo di proprietà strutturali, a proposito di controllabilità e osservabilità, poiché ci riferiamo a proprietà che sono intimamente legate alla struttura e al comportamento del sistema.

Per determinare le caratteristiche di controllabilità e di osservabilità del sistema rappresentato tramite schema a blocchi è opportuno ricavare una sua rappresentazione in termini matriciali, secondo le ben note equazioni:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{x}(t) + d \cdot u(t)$$

Dallo schema a blocchi ricaviamo che:

$$\begin{aligned} \bullet \\ x_1 &= -x_1 + u \\ \bullet \\ x_2 &= x_1 - 2x_2 + u \\ y &= -x_1 + x_2 - u \end{aligned}$$

Corrispondentemente, si ricava che:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d = 1$$

Adesso siamo in grado di costruire le matrici di controllabilità e di osservabilità per determinare le proprietà strutturali:

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & | & \mathbf{b} \cdot \mathbf{A} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} -\mathbf{c}' \\ \hline \mathbf{c}' \cdot \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

Si perviene alle seguenti matrici:

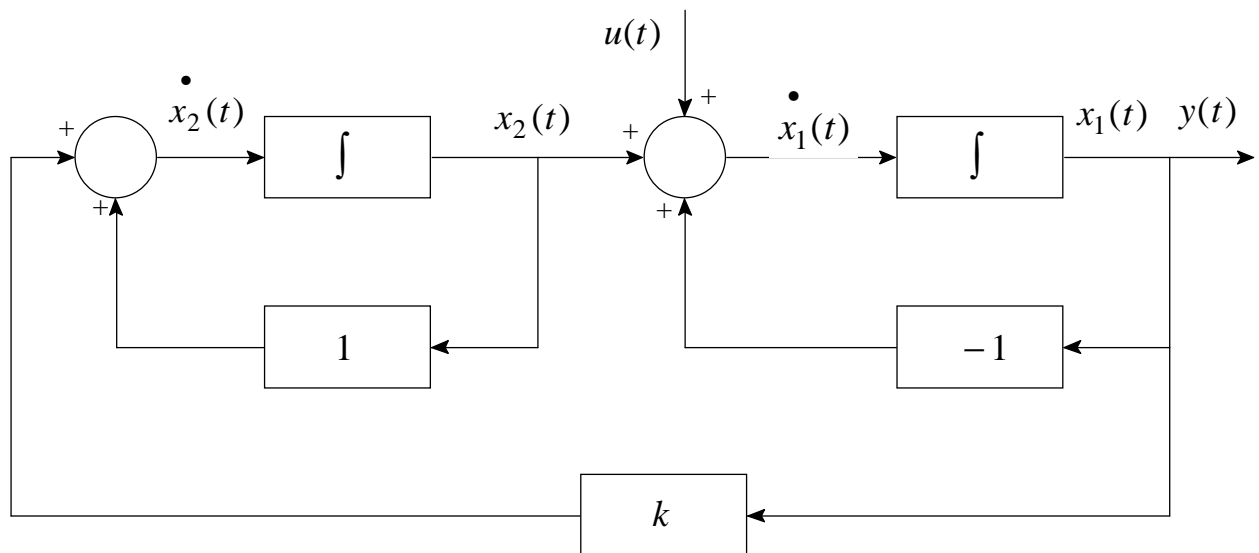
$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{Q}_c| = 0 \Rightarrow \text{rango}(\mathbf{Q}_c) = 1 \neq n = 2$$

$$\mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{Q}_o| = 0 \Rightarrow \text{rango}(\mathbf{Q}_o) = 1 \neq n = 2$$

In base ai criteri di controllabilità ed osservabilità possiamo affermare che la rappresentazione in esame non è completamente controllabile e non è completamente osservabile.

Esercizio n°28

Dato il sistema di figura dimostrare che l'ingresso  $u(t)$  può eccitare tutti i modi del sistema se e solo se  $k$  è diverso da zero.



Sappiamo che un assegnato modo è detto eccitabile attraverso impulsi di ingresso se esso figura nella risposta forzata nello stato corrispondente ad un ingresso impulsivo. Ecco che già si rende necessaria una prima precisazione: l'ingresso considerato deve essere di tipo impulsivo per potere parlare di eccitabilità.

Inoltre, sussiste il seguente risultato: data una rappresentazione  $\mathfrak{R}$  si ammetta che la matrice dinamica  $\mathbf{A}$  corrispondente abbia autovalori  $\lambda_i, i = 1 \dots n$  tutti distinti. In tale caso gli  $n$  modi associati a tali autovalori risultano tutti eccitabili tramite impulsi di ingresso se e solo se la rappresentazione  $\mathfrak{R}$  è completamente controllabile.

Per prima cosa, allora, determiniamo la rappresentazione con lo stato, verifichiamo quindi che la matrice dinamica abbia autovalori tutti distinti e studiamo, infine, la controllabilità.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \cdot u(t)$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = kx_1 + x_2$$

Si ricava che:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -k & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - (1 + k) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{1 + k}$$

Essendo gli autovalori della matrice dinamica distinti, per  $k \neq -1$  (valore per cui non si può avere la completa eccitabilità con impulsi di ingresso), siamo nelle condizioni di applicabilità del risultato prima riportato. Per avere la completa eccitabilità di tutti i modi attraverso impulsi di ingresso non ci rimane che verificare se la rappresentazione determinata è completamente controllabile:

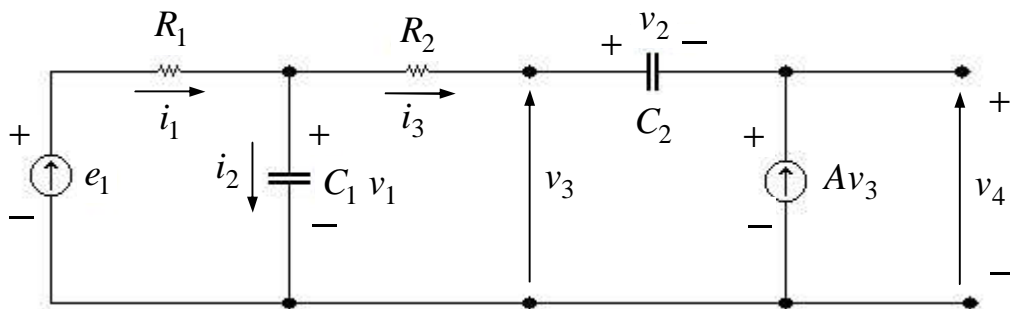
$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & | & \mathbf{b} \cdot \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & k \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{Q}_c| = k \Rightarrow \text{rango}(\mathbf{Q}_c) \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$$

Si ha la completa controllabilità della rappresentazione solo per  $k \neq 0$ . In tal caso tutti i modi associati alla rappresentazione risultano eccitabili attraverso impulsi di ingresso.

Esercizio n°29

Data la rete elettrica di figura, determinare il modello matematico ed il corrispondente grafo di flusso, assumendo come variabile d'uscita  $v_4$  e come variabile di ingresso  $e_1$ . Si supponga di avere condizioni iniziali della tensione sui capacitori pari a zero. Determinare, inoltre, la funzione di trasferimento ingresso-uscita.



•Per prima cosa bisogna determinare le relazioni che legano le variabili che intendiamo evidenziare. Scegliamo di evidenziare:  $e_1, i_1, v_1, v_3, i_3, v_4$ . Si ha che:

$$i_1 = \frac{1}{R_1} e_1 - \frac{1}{R_1} v_1$$

$$v_1 = i_3 R_2 + v_3$$

$$v_3 = \frac{1}{C_2} \int_0^t i_3 dt + A v_3$$

$$i_3 = i_1 - C_1 \frac{dv_1}{dt}$$

$$v_4 = A v_3$$

•Trasformiamo, adesso, nel dominio di Laplace:

$$I_1 = \frac{1}{R_1} E_1 - \frac{1}{R_1} V_1$$

$$V_1 = I_3 R_2 + V_3$$

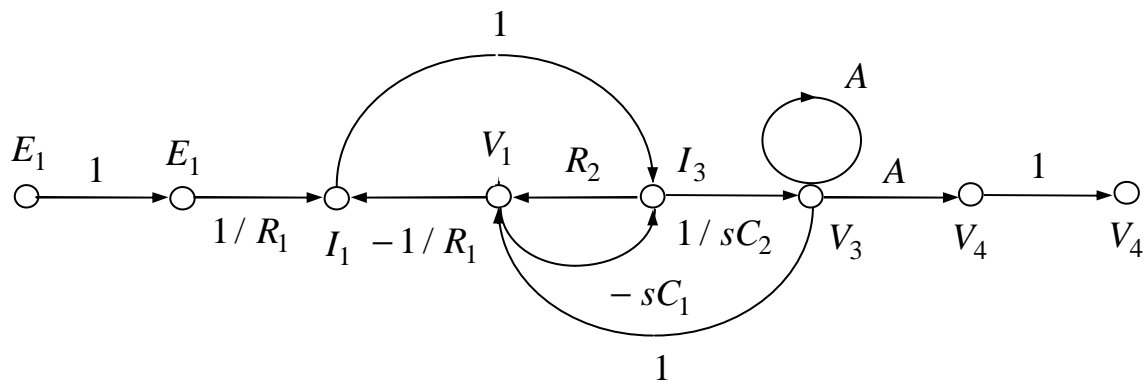
$$V_3 = \frac{1}{sC_2} I_3 + A V_3$$

$$I_3 = I_1 - sC_1 V_1$$

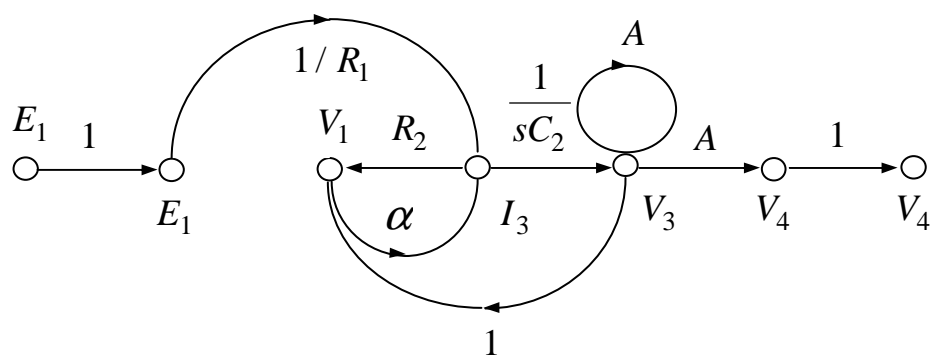
$$V_4 = A V_3$$

Ciò in ipotesi di condizioni iniziali nulle. Si è, così, pervenuti alla formulazione causa-effetto.

•Tracciamo il grafo di flusso e procediamo all'eliminazione successiva dei nodi intermedi:

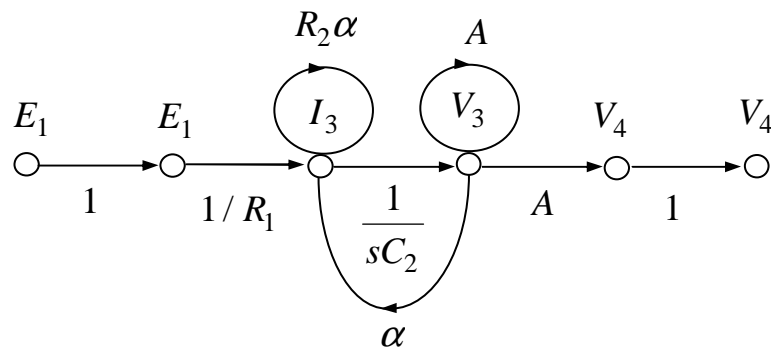


Eliminiamo il nodo  $I_1$ :

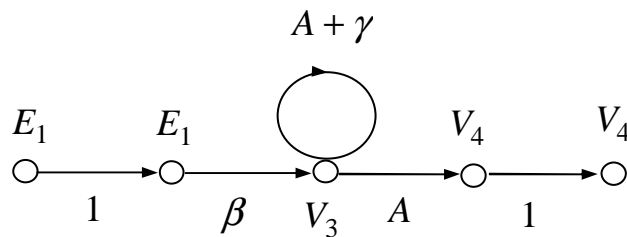


dove:  $\alpha = -\frac{1}{R_1} - sC_1$ .

Eliminiamo il nodo  $V_1$ :



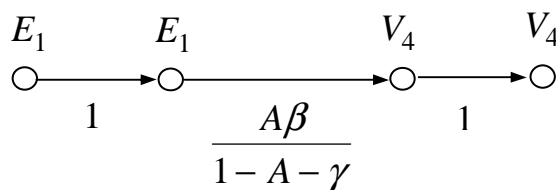
Eliminiamo il nodo  $I_3$ :



dove:

$$\beta = \frac{1}{sR_1C_2(1 - \alpha R_2)} \quad \gamma = \frac{\alpha}{sC_2(1 - \alpha R_2)}$$

Eliminando, infine, il nodo  $V_3$ :



In definitiva, sostituendo a ritroso alle varie posizioni fatte, abbiamo la seguente funzione di trasferimento ingresso-uscita:

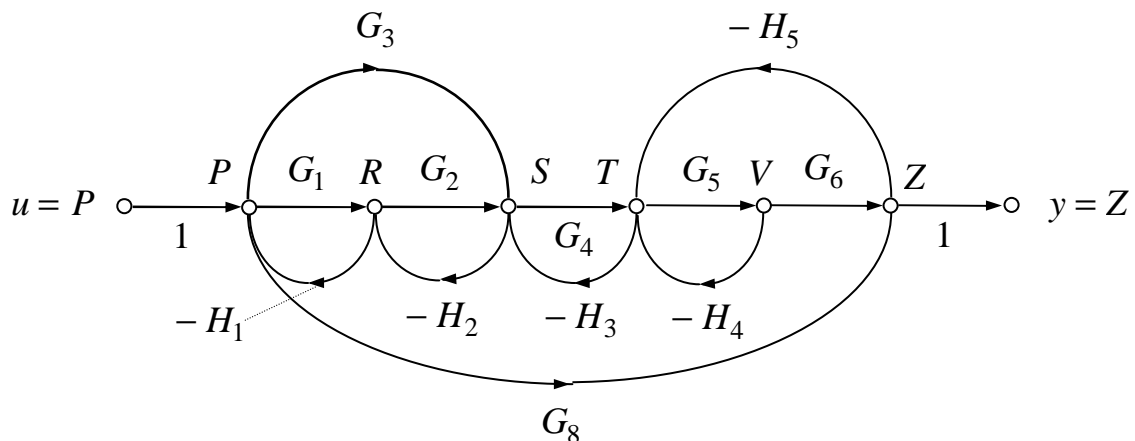
$$W(s) = \frac{A}{R_1R_2C_2(1 - A)s^2 + [R_1C_1 + C_2(R_1 + R_2)(1 - A)]s + 1}$$

## ESERCITAZIONE N°11

### FORMULE DI MASON - SISTEMI A CATENA CHIUSA

#### Esercizio n°30

Determinare la funzione di trasferimento ingresso-uscita del sistema il cui modello matematico è rappresentato dal grafo di flusso di figura applicando la formula di Mason.



Il teorema di Mason prevede per la funzione di trasferimento ingresso-uscita una struttura del tipo:

$$W = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{\Delta}$$

dove:

$$\Delta = 1 - \sum_r L_r + \sum_r \prod_2 L_r - \dots$$

$$\Delta_k = 1 - \sum_s L_{sk} + \sum_s \prod_2 L_{sk} - \dots$$

Nella formula sopra riportata:

$P_k$  è la trasferenza del  $k$ -esimo cammino che collega l'ingresso  $u$  e l'uscita  $y$ .

$L_r$  è la trasferenza dell'  $r$ -esimo ciclo.

$L_{sk}$  è la trasferenza del ciclo  $s$ -esimo che non tocca il  $k$ -esimo cammino.

$\prod_n$  è il prodotto delle trasferenze di tutti i possibili cicli che non si toccano presi ad  $n$  ad  $n$ .

Scopo ultimo del nostro lavoro è la determinazione della matrice di contatto, tabella in base alla quale la determinazione delle grandezze appena descritte risulta notevolmente agevolata. Trattasi di una matrice avente un numero di righe pari ai cicli presenti nel modello del sistema ed un numero di colonne pari al numero di cicli aumentato del numero dei cammini che, partendo dall'ingresso conducono all'uscita. Gli elementi della matrice sono uno o zero a seconda se cicli e cicli o cicli e cammini si toccano oppure no. Non è superfluo ricordare che anche un semplice nodo in comune è un punto di contatto. Procediamo per passi.

•Determiniamo tutti i possibili cammini ingresso-uscita e le trasferenze ad essi associate.

a) P-P-R-S-T-V-Z-Z avente una trasferenza di cammino:  $P_a = G_1 G_2 G_4 G_5 G_6$ .

b) P-P-S-T-Z-Z avente una trasferenza di cammino:  $P_b = G_3 G_4 G_5 G_6$ .

c) P-P-Z-Z avente una trasferenza di cammino:  $P_c = G_8$ .

•Determiniamo tutti i possibili cicli e le trasferenze di ciclo.

A) P-R-P avente una trasferenza di ciclo:  $L_A = -G_1 H_1$ .

B) R-S-R avente una trasferenza di ciclo:  $L_B = -G_2 H_2$ .

C) S-T-S avente una trasferenza di ciclo:  $L_C = -G_4 H_3$ .

D) T-V-T avente una trasferenza di ciclo:  $L_D = -G_5 H_4$ .

E) T-V-Z-T avente una trasferenza di ciclo:  $L_E = -G_5 G_6 H_5$ .

F) P-S-R-P avente una trasferenza di ciclo:  $L_F = G_3 H_1 H_2$ .

G) P-Z-T-S-R-P avente una trasferenza di ciclo:  $L_G = G_8 H_1 H_2 H_3 H_5$ .

•A questo punto siamo in possesso di tutti i dati necessari alla determinazione della matrice di contatto:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>A</i>	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
<i>B</i>	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0
<i>C</i>	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
<i>D</i>	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
<i>E</i>	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
<i>F</i>	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
<i>G</i>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

•Determiniamo le grandezze necessarie alla formula di Mason, a partire dalla matrice di contatto.

$$\Delta = 1 - (L_A + L_B + L_C + L_D + L_E + L_F + L_G) + L_A L_C + L_A L_D + L_A L_E + L_B L_D + L_B L_E + L_D L_F + L_E L_F.$$

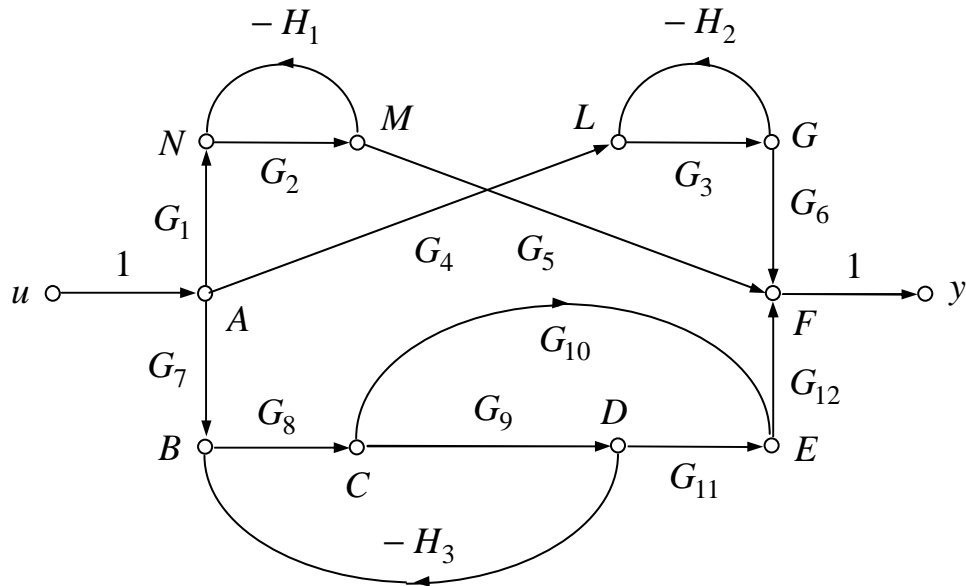
$$\Delta_a = \Delta_b = 1.$$

$$\Delta_c = 1 - (L_B + L_C + L_D) + L_B L_D.$$

A questo punto, con semplice sostituzione nella formula di Mason si perviene alla funzione di trasferimento ingresso-uscita.

Esercizio n°31

Determinare la funzione di trasferimento ingresso-uscita del sistema il cui modello matematico è rappresentato dal grafo di flusso di figura applicando la formula di Mason.



Il teorema di Mason prevede per la funzione di trasferimento ingresso-uscita una struttura del tipo:

$$W = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{\Delta}$$

dove:

$$\Delta = 1 - \sum_r L_r + \sum_r \sum_2 L_r - \dots$$

$$\Delta_k = 1 - \sum_s L_{sk} + \sum_s \sum_2 L_{sk} - \dots$$

Nella formula sopra riportata:

$P_k$  è la trasferenza del  $k$ -esimo cammino che collega l'ingresso  $u$  e l'uscita  $y$ .

$L_r$  è la trasferenza dell'  $r$ -esimo ciclo.

$L_{sk}$  è la trasferenza del ciclo  $s$ -esimo che non tocca il  $k$ -esimo cammino.

$\prod_n$  è il prodotto delle trasferenze di tutti i possibili cicli che non si toccano presi ad  $n$  ad  $n$ .

Scopo ultimo del nostro lavoro è la determinazione della matrice di contatto, tabella in base alla quale la determinazione delle grandezze appena descritte risulta notevolmente agevolata. Trattasi di una matrice avente un numero di righe pari ai cicli presenti nel modello del sistema ed un numero di colonne pari al numero di cicli aumentato del numero dei cammini che, partendo dall'ingresso conducono all'uscita. Gli elementi della matrice sono uno o zero a seconda se cicli e cicli o cicli e cammini si toccano oppure no. Non è superfluo ricordare che anche un semplice nodo in comune è un punto di contatto. Procediamo per passi.

•Determiniamo tutti i possibili cammini ingresso-uscita e le trasferenze ad essi associate.

a) A-L-G-F avente una trasferenza di cammino:  $P_a = G_3 G_4 G_6$ .

b) A-N-M-F avente una trasferenza di cammino:  $P_b = G_1 G_2 G_5$ .

c) A-B-C-D-E-F avente una trasferenza di cammino:  $P_c = G_7 G_8 G_9 G_{11} G_{12}$ .

d) A-B-C-E-F avente una trasferenza di cammino:  $P_d = G_7 G_8 G_{10} G_{12}$ .

•Determiniamo tutti i possibili cicli e le trasferenze di ciclo.

A) N-M-N avente una trasferenza di ciclo:  $L_A = -G_2 H_1$ .

B) L-G-L avente una trasferenza di ciclo:  $L_B = -G_3 H_2$ .

C) B-C-D-B avente una trasferenza di ciclo:  $L_C = -G_8 G_9 H_3$ .

•A questo punto siamo in possesso di tutti i dati necessari alla determinazione della matrice di contatto:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>A</i>	1	0	0	0	1	0	0
<i>B</i>	0	1	0	1	0	0	0
<i>C</i>	0	0	1	0	0	1	1

•Determiniamo le grandezze necessarie alla formula di Mason, a partire dalla matrice di contatto.

$$\Delta = 1 - (L_A + L_B + L_C) + L_A L_B + L_A L_C + L_B L_C - L_A L_B L_C.$$

$$\Delta_a = 1 - (L_A + L_C) + L_A L_C.$$

$$\Delta_b = 1 - (L_B + L_C) + L_B L_C.$$

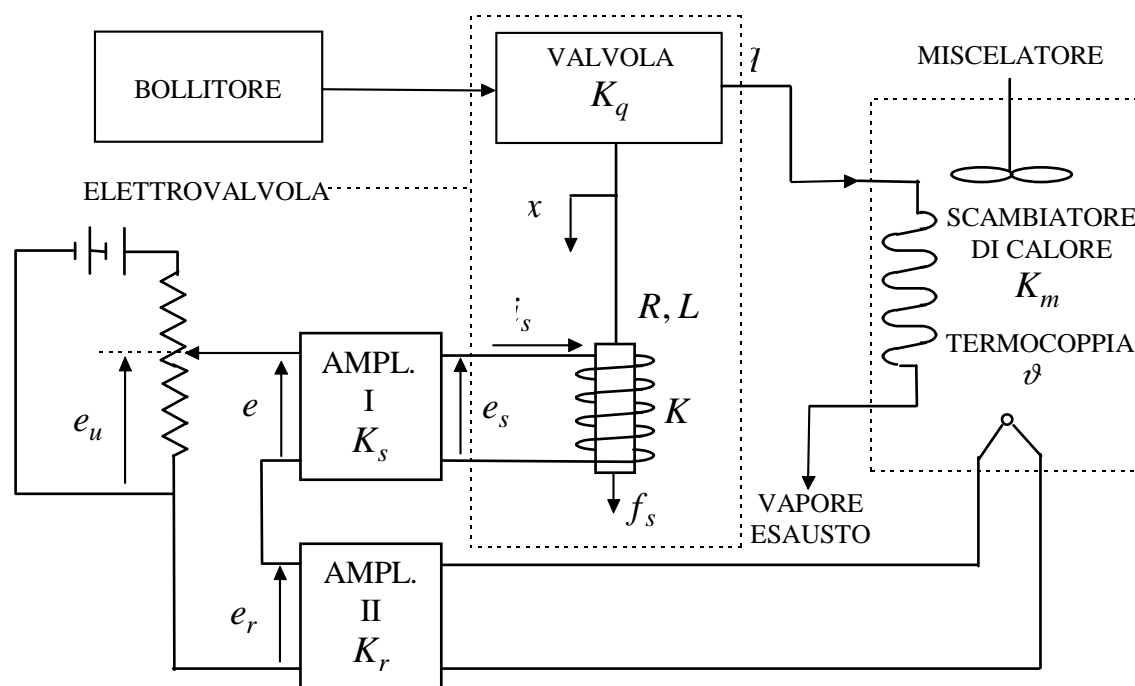
$$\Delta_c = 1 - (L_A + L_B) + L_A L_B.$$

$$\Delta_d = 1 - (L_A + L_B) + L_A L_B.$$

A questo punto, con semplice sostituzione nella formula di Mason si perviene alla funzione di trasferimento ingresso-uscita.

## Esercizio n°32

Nel processo industriale rappresentato in figura in modalità schematica, determinare la funzione di trasferimento dei singoli blocchi costituenti e la funzione di trasferimento complessiva ingresso-uscita. In particolare si fa riferimento ad un sistema di regolazione della temperatura in un mescolatore.



Il liquido contenuto nello scambiatore di calore deve essere mantenuto a temperatura costante. A complicare questa azione c'è il fatto che nell'evoluzione temporale del sistema possono essere effettuati degli spillamenti. Il liquido sottratto viene rimpiazzato con una uguale quantità di liquido, la cui temperatura può essere variata con l'immissione nello scambiatore di vapore, il cui afflusso è regolato da una valvola, proveniente da un bollitore. Ovviamente, questa situazione comporterà una variazione dello stato termico del sistema che, quindi, dovrà essere riportato alle condizioni richieste dalle specifiche di progetto.

Il sistema di regolazione oggetto del nostro studio dovrà, quindi, essere reazionato, per potere provvedere a riportare il liquido nelle condizioni richieste, anche in presenza di disturbi, interni od esterni che siano. Tutto il sistema viene anche denominato *azionamento*.

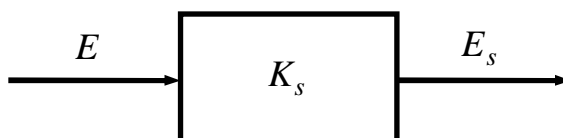
Occupiamoci, allora, della costruzione di un sistema a catena chiusa, in cui una certa informazione viene prelevata dall'uscita per essere confrontata con le grandezze di riferimento, cioè i valori desiderati della grandezza controllata. Vista la comodità dei confronti tra grandezze nel campo elettrico, si cerca di convertire in segnale elettrico le grandezze oggetto del nostro studio: ecco che per mezzo di una termocoppia, dispositivo formato da due diversi metalli e che sottoposto ad una differenza di temperatura produce ai suoi estremi una tensione proporzionale a tale temperatura, si converte la rilevazione termica all'interno dello scambiatore di calore in un valore di tensione continua che varia linearmente con la temperatura. Il valore di tensione rilevato viene

amplificatore  $e$ , successivamente, confrontato con una tensione di riferimento controllabile dall'esterno, offrendo una misura dello scostamento tra valore attuale e valore desiderato della grandezza controllata. Ecco che il potenziometro che costituisce il riferimento può essere tarato direttamente in gradi anziché in valori di tensione. Come visto, se ci sono spillamenti dal bollitore verrà introdotto del vapore che cede del calore di valore proporzionale alla sua portata (Kg/sec). Il vapore viene insufflato perché, avendo basso titolo, non allunga il liquido e lo scambio termico è migliore, più veloce. La portata del vapore va, ovviamente, regolata in modo opportuno.

Il segnale errore (o grandezza agente) è proprio la differenza tra valore effettivo e valore desiderato. Esso viene amplificato ed applicato ad un solenoide avvolto attorno ad un nucleo di ferrite. Questo sistema (elettrovalvola) effettua una conversione inversa, cioè la grandezza elettrica viene trasdotta in meccanica. Infatti al blocco solenoide-nucleo è connessa un'asta a sua volta collegata alla valvola che regola l'afflusso di vapore. La tensione che agisce sul solenoide provoca, in virtù della forza di Lorentz, un movimento in un senso o nell'altro dell'asta e quindi regola la quantità di vapore che affluisce nello scambiatore, in funzione di una maggiore o minore apertura della valvola.

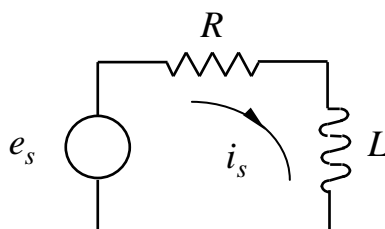
Adesso ci occuperemo di scendere più nel dettaglio per ciò che riguarda i legami tra grandezze entranti ed uscenti da ogni singola componente del sistema. Nello schema a blocchi complessivo, come in quello di ogni singola parte rappresenteremo le grandezze nel dominio di  $s$ .

L'ingresso al sistema può essere considerato il segnale d'errore  $e = e_u - e_r$ , differenza tra il valore desiderato e il valore effettivo della temperatura nello scambiatore. Il segnale  $e$  viene inviato ad un primo amplificatore che ha lo scopo di esaltarne il valore, amplificatore avente una funzione di trasferimento di valore pari a  $K_s$ . Il risultato è il segnale  $e_s$ .



Abbiamo che:  $G_1 = \frac{E_s}{E} = K_s$ .

Il passo successivo consiste nel determinare il legame tra la tensione  $e_s$  e la corrente  $i_s$  che entra nel solenoide. Il circuito elettrico può essere così schematizzato:



I legami matematici sono:

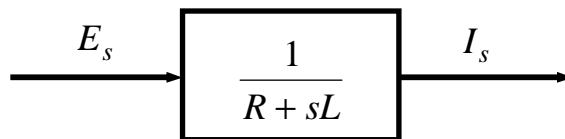
$$e_s - Ri_s - L \frac{di_s}{dt} = 0$$

e, nel dominio di Laplace:

$$E_s - RI_s - sLI_s = 0$$

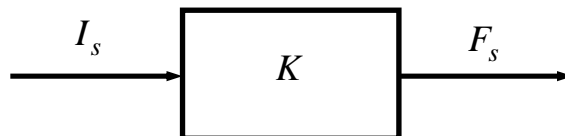
da cui si ricava che:

$$G_2 = \frac{I_s}{E_s} = \frac{1}{R + sL}$$

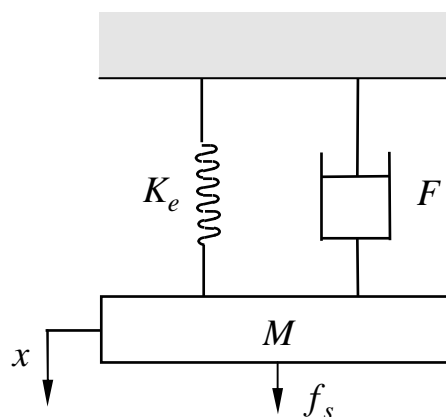


La corrente che entra nel solenoide, come detto, produce una forza di Lorentz pari a:  $\vec{f}_s = i_s \cdot \vec{l} \wedge \vec{B}$ . Nel nostro caso supponiamo che tra la forza prodotta e la corrente entrante nel solenoide vi sia un legame proporzionale, che in s è pari alla costante  $K$ .

$$G_3 = \frac{F_s}{I_s} = K$$



Ovviamente la forza prodotta dalla corrente entrante nel solenoide sarà legata allo spostamento subito dalla sbarra collegata alla valvola che regola l'afflusso del vapore. Vediamo quali forze entrano in gioco nel fenomeno, formalizzando il tutto per mezzo di una analogia di tipo meccanico.



La corrente  $i_s$  che scorre nel solenoide dà luogo alla forza  $f_s = Ki_s$  che agisce anche sulla sbarra collegata alla valvola, schematizzata con la massa  $M$ . Questa forza, però, è attenuata da fenomeni di elasticità e viscosità. Facendo un bilancio di forze (applicazione del 2° principio della dinamica) avremo che la forza di Lorentz è equilibrata dalla forza peso, dalla forza elastica di richiamo del sistema, schematizzata da una molla di costante elastica pari a  $K_e$ , e dalla forza di attrito viscoso, qui schematizzata da un pistone con un coefficiente pari a  $F$ . Come noto la forza di inerzia nel transitorio dinamico è proporzionale all'accelerazione della massa, le forze d'attrito sono proporzionali alla velocità della massa mentre la forza di reazione della molla è proporzionale allo spostamento della massa stessa. Avremo, allora, che:

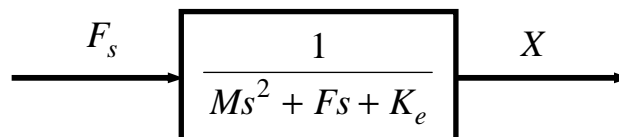
$$f_s = \sum_i f_i = M \ddot{x} + F \dot{x} + K_e x$$

Nel dominio di s abbiamo:

$$F_s = Ms^2 X + FsX + K_e X$$

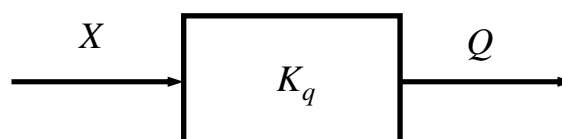
da cui si ricava:

$$G_4 = \frac{X}{F_s} = \frac{1}{Ms^2 + Fs + K_e}$$



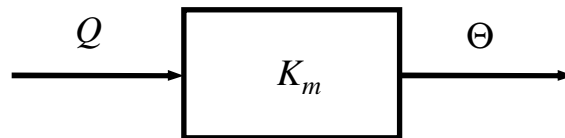
Come abbiamo già avuto modo di dire, lo spostamento della sbarra regola la maggiore o minore aperture della valvola si suppone che tra lo spostamento della sbarra e la portata del liquido vi sia un legame lineare di proporzionalità del tipo:  $q = K_q \cdot x$ . Avremo:

$$G_5 = \frac{Q}{x} = K_q$$



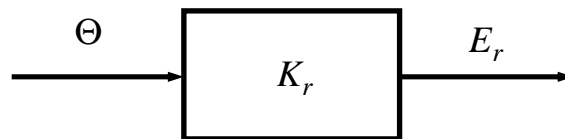
Siamo, così, giunti allo scambiatore di calore: in virtù delle ipotesi fatte tra la temperatura del liquido ed il calore ceduto dal vapore esiste un legame lineare del tipo  $\vartheta = K_m \cdot q$ . Sarà:

$$G_6 = \frac{\Theta}{Q} = K_m$$



Per finire abbiamo il blocco di controreazione che consta del secondo amplificatore: esso impone un legame di proporzionalità tra la tensione rappresentante la temperatura rilevata dalla termocoppia e la tensione in uscita dal secondo amplificatore. Tale legame è:  $e_r = K_r \cdot \vartheta$ .

$$H_1 = \frac{E_r}{\Theta} = K_r$$



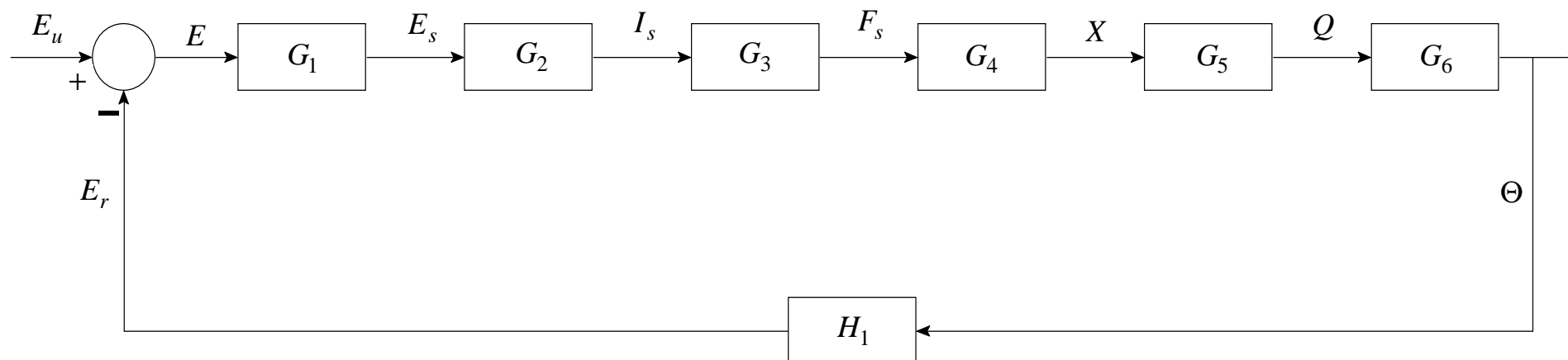
A questo punto possiamo determinare la funzione di trasferimento del sistema a catena chiusa. Questa ha una struttura del tipo:

$$W(s) = \frac{G}{1 + GH}$$

dove  $G = \sum_i G_i$  e  $H = H_1$ .

$$W(s) = \frac{KK_q K_m}{ML \cdot s^3 + (LF + RM) \cdot s^2 + (RF + LK_e) \cdot s + RK_e + KK_q K_m K_r}$$

Graficamente si ha:



## ESERCITAZIONE N°12

### TEORIA DELLA REALIZZAZIONE - STUDIO DI STABILITA' COL METODO DI ROUTH

Nella teoria dei sistemi svolge un ruolo centrale il problema relativo alla *'determinazione di una rappresentazione con lo stato lineare, a dimensione finita e stazionaria che ammetta una assegnata matrice  $q \times q$  di funzioni del tempo o di variabile complessa come matrice, rispettivamente, delle risposte impulsive o di trasferimento'*. Ricordiamo che una assegnata matrice  $W(s)$  di dimensioni  $q \times q$  dicesi **realizzabile** se esiste una terna di matrici ad elementi costanti  $A, B, C$  di dimensioni, rispettivamente,  $n \times n$ ,  $n \times p$ ,  $q \times n$  tali che:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

La terna  $A, B, C$  prende il nome di realizzazione della matrice  $W(s)$  e l'intero  $n$  è la dimensione della realizzazione. Una realizzazione della matrice  $W(s)$  si dice **minima** se non esiste un'altra realizzazione avente dimensione minore.

Data una terna  $A, B, C$  esiste una ed una sola corrispondente matrice  $W(s)$ . Viceversa, esiste, in generale, un numero infinito di modelli ingresso-stato-uscita in corrispondenza ad un'assegnata matrice  $W(s)$ , ossia esiste, in generale, una certa arbitrarietà nella scelta delle variabili di stato per la matrice di cui sopra. Spesso e volentieri lo studio viene condotto nella direzione della determinazione delle realizzazioni minime, realizzazioni che, in base al meraviglioso teorema di Kalman, risultano completamente controllabili, completamente osservabili e uniche nell'ambito della stretta equivalenza.

La strada che conduce alla determinazione della realizzazione minima è la seguente:

- Per prima cosa si determina una realizzazione della matrice  $W(s)$  per mezzo del metodo di ispezione, sotto le ipotesi semplificatrici di ingresso e uscita unidimensionali e di  $W(s)$  con poli semplici. La realizzazione viene determinata con la costruzione di uno *schema funzionale*, rappresentabile a mezzo di schema a blocchi o grafo di flusso. Nell'ipotesi di funzione di trasferimento strettamente propria si possono applicare il *metodo della variabile intermedia* o, in alternativa, il *metodo dell'isolamento della derivata di ordine più elevato*. Le componenti del vettore di stato del sistema saranno le uscite dei blocchi integratori presenti e si perviene, così, alla struttura delle matrici  $A, B, C$ .

- Si verifica se la realizzazione così ottenuta è completamente controllabile e completamente osservabile. Se lo è la realizzazione è minima. In alternativa bisognerà effettuare la decomposizione canonica di Kalman allo scopo di rimuovere tutte quelle componenti che non sono completamente controllabili e completamente osservabili.

Un ultimo importante risultato, valido nel caso di ingresso e uscita monodimensionali, afferma che: *'C.N.S. affinché la realizzazione ( $A, b, c$ ) della funzione di trasferimento  $W(s)$  sia minima è che non esistano cancellazioni polo-zero tra il numeratore e il denominatore della  $W(s)$  stessa'*. Analogo risultato vale nel caso multidimensionale

Esercizio n°33

Data la seguente funzione di trasferimento realizzabile verificare se tale realizzazione è minima e provvedere ad eliminare dalla rappresentazione le eventuali parti non controllabili e inosservabili.

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3s^2 + 2s + 2}{s^4 + 4s^3 + 12s^2 + 16s + 8}$$

La funzione di trasferimento in esame è una funzione razionale fratta strettamente propria: siamo nelle condizioni di applicabilità del metodo della variabile intermedia. Ci aspettiamo, inoltre, in virtù della C.N.S. prima enunciata, che la realizzazione che andremo a costruire sarà minima.

$$\text{Sia } X_1(s) = \frac{1}{s^4 + 4s^3 + 12s^2 + 16s + 8} \cdot U(s)$$

$$X_2 = sX_1$$

$$X_3 = sX_2 = s^2 X_1$$

$$\text{Inoltre siano: } X_4 = sX_3 = s^3 X_1$$

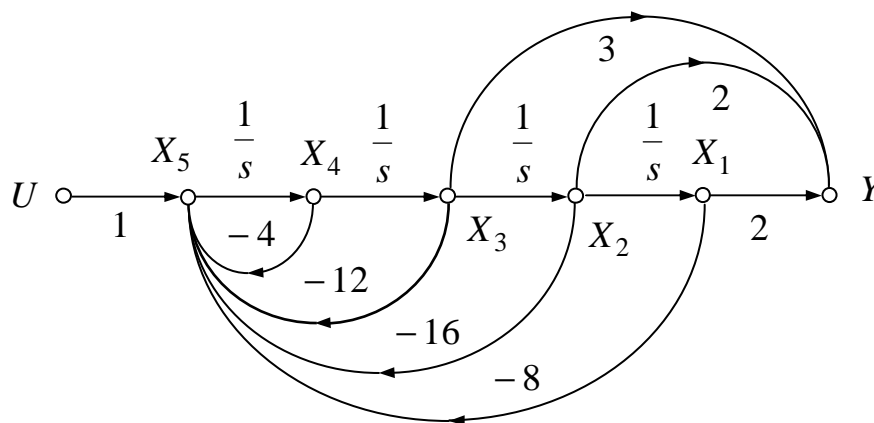
$$X_5 = sX_4 = s^4 X_1$$

$$X_5 = U - 4X_4 - 12X_3 - 16X_2 - 8X_1$$

$$Y = 3X_3 + 2X_2 + 2X_1$$

avendo ommesso per brevità l'argomento delle funzioni.

A partire da questi legami è possibile costruire il grafo di flusso:



Alle equazioni viste, corrispondono, nel dominio del tempo, le seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = x_5(t) = -8x_1(t) - 16x_2(t) - 12x_3(t) - 4x_4(t) + u(t)$$

$$y(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) + 3x_3(t)$$

A partire da esse, ricaviamo la realizzazione:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & -16 & -12 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}' = [2 \quad 2 \quad 3 \quad 0]$$

A titolo di verifica, controlliamo la completa controllabilità e la completa osservabilità della rappresentazione:

Per ciò che concerne la completa controllabilità non c'è neanche bisogno di costruire la matrice di controllabilità perchè la matrice  $\mathbf{A}$  presenta una struttura di **forma canonica riga II** (o di controllo) che è sempre completamente controllabile. Occupiamoci, allora, dell'osservabilità:

$$\mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ -24 & -48 & -34 & -10 \\ 80 & 136 & 72 & 6 \end{bmatrix}$$

essendo:

$$|\mathbf{Q}_o| = 2704 \neq 0$$

la rappresentazione è completamente osservabile. Come ci aspettavamo, in ipotesi di completa controllabilità e completa osservabilità, la rappresentazione realizzazione della funzione di trasferimento risulta minima.

Esercizio n°34

Ricavare il diagramma polare per la seguente funzione di trasferimento:

$$W(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + a^2} \quad \text{con } a > 0$$

Procedendo con la solita metodologia:

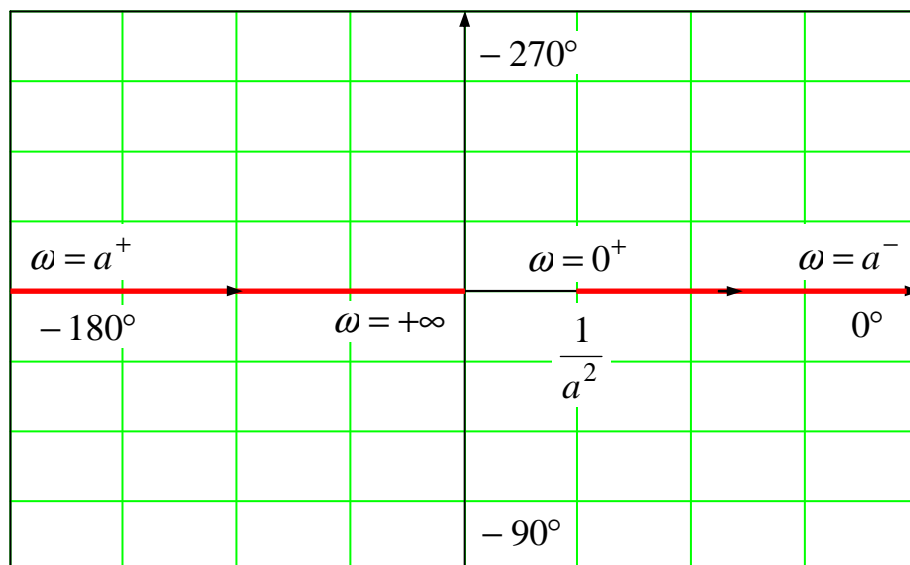
$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} W(j\omega) = \frac{1}{a^2} \quad \angle 0^\circ.$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} W(j\omega) = 0 \quad \angle \pm 180^\circ.$$

Notiamo, inoltre, che

$$\lim_{\omega \rightarrow a^-} W(j\omega) = +\infty \quad \angle 0^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow a^+} W(j\omega) = +\infty \quad \angle \pm 180^\circ$$



**Esercizio n°35**

**Ricavare il diagramma polare per la seguente funzione di trasferimento:**

$$W(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^4 \cdot (j\omega + p)} \quad \text{con } p > 0$$

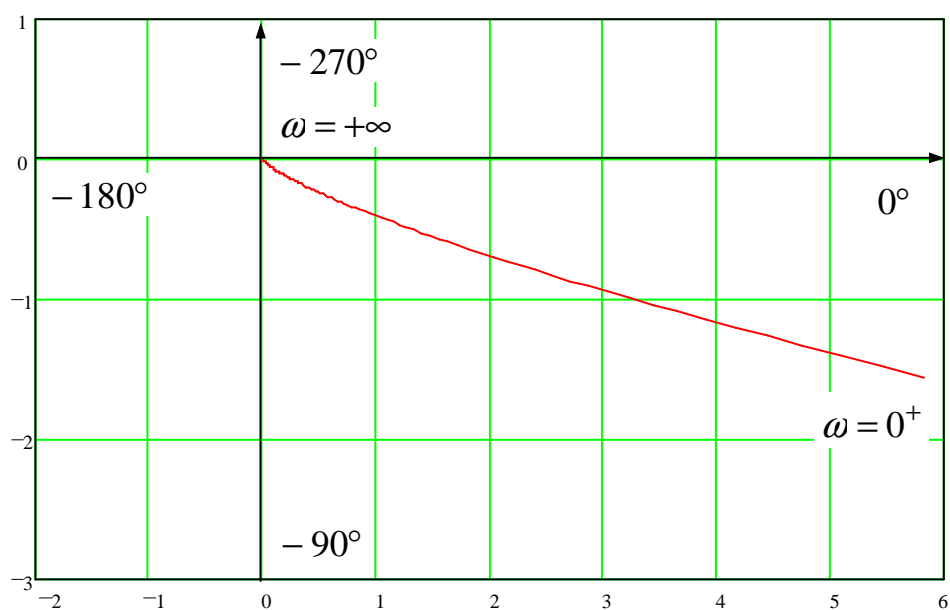
Si ha che:

$$W(\omega) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\omega^4 \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{p}\right)}$$

Procedendo con la solita metodologia:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} W(j\omega) = +\infty \quad \angle 0^\circ.$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} W(j\omega) = 0 \quad \angle -90^\circ.$$



**Esercizio n°36**

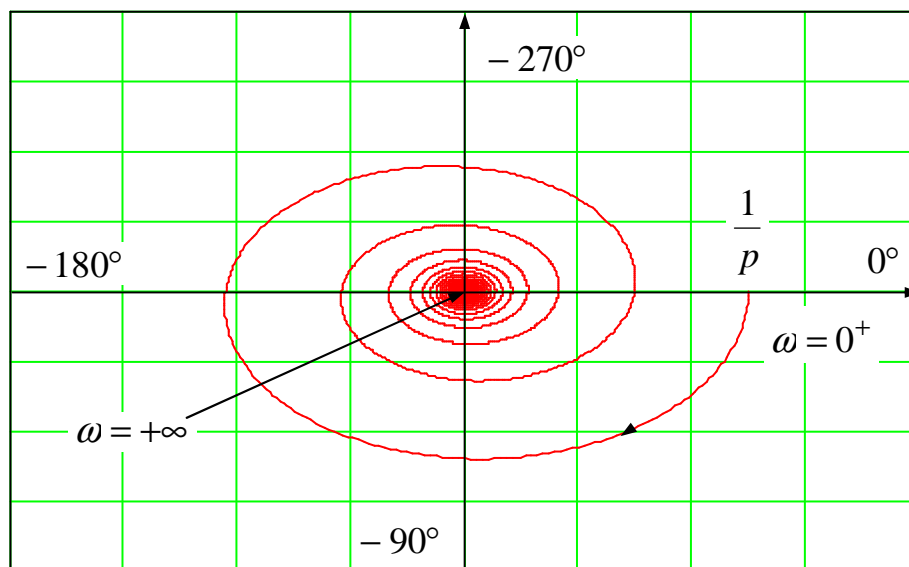
**Ricavare il diagramma polare per la seguente funzione di trasferimento:**

$$W(\omega) = \frac{e^{-j\omega T}}{j\omega + p} \quad \text{con } p, T > 0$$

Procedendo con la solita metodologia:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} W(j\omega) = \frac{1}{p} \quad \angle 0^\circ.$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} W(j\omega) = 0 \quad \angle \text{non precisabile.}$$



**Esercizio n°37**

**Studiare mediante il metodo di Routh e quello di Hurwitz la stabilità del sistema avente la seguente equazione caratteristica:**

$$p^5 + 2p^4 + 2p^3 + 4p^2 + 11p + 10 = 0$$

I criteri sopra citati sono criteri algebrici di stabilità che fanno riferimento alle radici dell'equazione caratteristica. Sappiamo che se l'eq. Caratteristica ha radici con parte reale non negativa si ha instabilità. Spesso e volentieri, però, l'equazione caratteristica è sufficientemente complicata da rendere impossibile la determinazione delle proprie radici. A questo punto entrano in gioco i criteri suddetti: essi consentono di determinare sia la stabilità o l'instabilità del sistema ma, eventualmente, anche il numero di zeri con parte reale non negativa che contribuiscono all'instabilità. Tutto ciò senza risolvere l'equazione caratteristica. Vediamo i vari passi da affrontare, cominciando dal metodo di Routh.

1. Si verifica la C.N. di stabilità (che è N. E S. Nel caso di sistemi del 2° ordine). Questa afferma che se il coefficiente della potenza di ordine massimo è positivo, devono essere presenti tutte le potenze con coefficiente positivo per avere una situazione di stabilità. In caso contrario il sistema è instabile.

2. Se la condizione al punto precedente è verificata si costruisce la tabella di Routh. Essa è formata da  $n + 1$  righe se  $n$  è il grado massimo dell'equazione caratteristica. Nell'esempio in questione la tabella sarà formata da 6 righe. Le prime due righe sono formate dai coefficienti delle potenze pari o dispari (dipendentemente dal fatto che il grado massimo sia pari o dispari). Le righe successive si costruiscono a partire dalle precedenti due secondo la formula:

$$r_{ij} = -\frac{1}{r_{i+1,j}} \cdot \begin{vmatrix} r_{i+2,1} & r_{i+2,j+1} \\ r_{i+1,1} & r_{i+1,j+1} \end{vmatrix} \quad i = 0, 1, \dots, n-2$$

Supponiamo che applicando questa regola si riesca a completare la tabella (il numero di elementi di ciascuna riga è pari a  $(i + 2) / 2$  se la  $i$ -esima riga è pari e  $(i + 1) / 2$  altrimenti) se nella prima colonna non ci sono variazioni di segno, allora il sistema è stabile per la C.N.S. di stabilità e le radici dell'equazione caratteristica saranno tutte con parte reale negativa. Se ci sono variazioni di segno allora il sistema è instabile e il numero delle variazioni indicherà il numero di radici dell'equazione caratteristica aventi parte reale positiva. Vediamo nel nostro caso:

$r_5$	1	2	11
$r_4$	2	4	10
$r_3$	0	6	0

---

**Esercitazione n°12 - Teoria della realizzazione - Studio di stabilità - Metodo di Routh**

---

Abbiamo trovato uno zero come primo elemento della riga  $r_3$ . Ciò ci impedisce di proseguire. In questa situazione è possibile affermare che il sistema è instabile. Per avere altre informazioni su di esso bisogna completare la tabella e possiamo agire in due modi:

1. Si moltiplica l'equazione caratteristica per  $(p + z)$  con  $z > 0$ . Non abbiamo variato niente perchè abbiamo aggiunto una radice reale negativa che non influisce ai fini della stabilità e si può proseguire.

2. Altra strada è quella di inserire al posto dello zero un valore  $\varepsilon$  piccolo. Poi si prosegue.

In entrambi i casi si completa la tabella. Le variazioni di segno nella prima colonna offrono il numero di radici con parte reale positiva. Se non dovessi avere variazioni di segno significa che sono in presenza di due radici immaginarie coniugate, l'unico caso di instabilità se in presenza di radici con parte reale non positiva.

Vediamo nel nostro caso:

$r_5$	1	2	11
$r_4$	2	4	10
$r_3$	$\varepsilon$	6	
$r_2$	$4 - \frac{12}{\varepsilon}$	10	
$r_1$	$\frac{10\varepsilon^2 - 24\varepsilon + 72}{12 - 4\varepsilon}$		
$r_0$	10		

Osservando la prima colonna notiamo che ci sono due variazioni di segno: concludiamo che il sistema è instabile (come era già noto) e l'equazione caratteristica ha due radici con parte reale positiva.