PROPRIETÀ O TEOREMI DELLA TRASFORMATA

- *linearità*

$$f(t) = a\, f_1(t) + b\, f_2(t) \qquad \rightarrow \qquad F(s) = a\, F_1(s) + b\, F_2(s)$$

- *derivazione nel tempo [moltiplicazione per s]*

(alla derivata della funzione CORRISPONDE la moltiplicazione per s della Trasformata – Val Iniz della funzione)

$$f'(t) \qquad \rightarrow \qquad s\,F(s) - f_0$$

$$f''(t) \qquad \rightarrow \qquad s[sF(s) - f_0] - f'_0 = s^2 F(s) - s\, f_0 - f'_0$$

$$f'''(t) \qquad \rightarrow \qquad s[s^2 F(s) - s\, f_0 - f'_0] - f''_0 = s^3 F(s) - s^2 f_0 - s\, f'_0 - f''_0$$

- *derivazione complessa (nelle frequenze) / moltiplicazione per t*

(alla moltiplicazione per t della funzione CORRISPONDE derivata della Trasformata cambiata di segno)

$$g(t) = t\, f(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = -F'(s)$$ - derivata della Trasformata di f(t)

$$g(t) = t^n\, f(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = (-1)^n \frac{d^{(n)}}{ds^n} F(s)$$

- *integrazione nel tempo [divisione per s]*

(all'integrale della funzione CORRISPONDE divisione per s della Trasformata)

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{F(s)}{s}$$

- *integrazione complessa (nelle frequenze) / divisione per t*

(alla divisione per t della funzione CORRISPONDE integrale della Trasformata)

$$g(t) = \frac{f(t)}{t} \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$$

- *traslazione nel tempo / moltiplicazione per un esponenziale*

(alla traslazione nel tempo della funzione CORRISPONDE la moltiplicazione per un esponenziale della Trasformata)

$$g(t) = f(t-\tau)\, 1(t-\tau) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = e^{-\tau s} F(s)$$

- *traslazione complessa (nelle frequenze) / moltiplicazione per un esponenziale*

(alla moltiplicazione per un esponenziale della funzione CORRISPONDE la traslazione nel tempo della Trasformata)

$$g(t) = e^{-at} f(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = F(s+a)$$

- *cambiamento di scala*

$$g(t) = f(\omega t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{1}{\omega} F(\frac{s}{\omega})$$

- *funzione periodica*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_T(t)[1(t-nT) - 1(t-(n+1)T)] \qquad \rightarrow \qquad F(s) = \frac{F_T(s)}{1-e^{-Ts}}$$

- *prodotto di convoluzione*

$$f(t) = f_1(s) * f_2(s) = \int_0^{+\infty} f_1(t)\, f_2(t-\tau)\, d\tau) \qquad \rightarrow \qquad F(s) = F_1(s) F_2(s)$$

- *valore iniziale*

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\, F(s)$$

valido per qualsiasi funzione F(s)

- *valore finale*

$$\lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\, F(s)$$

valido solamente per funzioni F(s) che abbiamo tutti i poli a parte reale negativa, tranne al più un polo semplice nell'origine s=0 [es. app. scorretta sin(ωt)]

- *impulsi* di ordine superiore

$$\delta''(t) = \frac{d}{dt}\delta'(t) = \frac{d^2}{dt^2}\delta(t) = \frac{d^3}{dt^3} 1(t) \qquad \delta''(t) \quad \rightarrow \quad s^3 \cdot \frac{1}{s} - 0 = s^2$$

$$\delta^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}\delta(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} 1(t) \qquad \delta^{(n)}(t) \quad \rightarrow \quad s^n$$

- *linearità*

$$f(t) = a\, f_1(t) + b\, f_2(t) \qquad \rightarrow \qquad F(s) = a\, F_1(s) + b\, F_2(s)$$

- $f(t) = \cos\omega t = \frac{1}{2} e^{j\omega t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega t} \rightarrow \qquad F(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s + j\omega} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

- *derivazione nel tempo [moltiplicazione per s]*

(alla derivata della funzione CORRISPONDE la moltiplicazione per s della Trasformata – Val Iniz della funzione)

$$f'(t) \qquad \rightarrow \qquad s\,F(s) - f_0$$

$$f''(t) \qquad \rightarrow \qquad s\,[sF(s) - f_0] - f'_0 = s^2 F(s) - s\, f_0 - f'_0$$

$$f'''(t) \qquad \rightarrow \qquad s\,[s^2 F(s) - s\, f_0 - f'_0] - f''_0 = s^3 F(s) - s^2 f_0 - s\, f'_0 - f''_0$$

- $\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) \qquad \delta(t) \qquad \rightarrow \qquad s \cdot \frac{1}{s} - 0 = 1$

  impulso = derivata del gradino $\rightarrow$ la trasformata del gradino moltiplicata per s – Val Iniz del gradino

- $1(t) = \frac{d}{dt} r(t) \qquad 1(t) \qquad \rightarrow \qquad s \cdot \frac{1}{s^2} - 0 = \frac{1}{s}$

  gradino = derivata della rampa $\rightarrow$ la trasformata della rampa moltiplicata per s – Val Iniz della rampa

- *derivazione complessa (nelle frequenze) / moltiplicazione per t*

(alla moltiplicazione per t della funzione CORRISPONDE derivata della Trasformata cambiata di segno)

$$g(t) = t\, f(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = -F'(s) \qquad \text{- derivata della Trasformata di f(t)}$$

$$g(t) = t^n\, f(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = (-1)^n \frac{d^{(n)}}{ds^n} F(s)$$

- $g(t) = t^n\, 1(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

- rampa $g(t) = r(t) = t\, 1(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$

  moltiplicazione per t del gradino >> - derivata della Trasformata del gradino

- 2 parabola $g(t) = 2p(t) = t^2 1(t) = t\, r(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^3}$

  moltiplicazione per t della rampa >> - derivata della Trasformata della rampa

- $g(t) = t^n\, e^{-a\,t}\, 1(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

- *integrazione nel tempo [divisione per s]*

(all'integrale della funzione CORRISPONDE divisione per s della Trasformata)

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{F(s)}{s}$$

- $g(t) = r(t) = \int_0^t 1(\tau)\, d\tau \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$

  rampa = integrale del gradino $\rightarrow$ la trasformata del gradino divisa per s

- $g(t) = p(t) = \int_0^t r(\tau)\, d\tau \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^3}$

  parabola = integrale della rampa $\rightarrow$ la trasformata della rampa divisa per s

- *integrazione complessa (nelle frequenze) / divisione per t*
(alla divisione per t della funzione CORRISPONDE integrale della Trasformata)

$$g(t) = \frac{f(t)}{t} \qquad \to \qquad G(s) = \int_s^{\infty} F(\sigma)d\sigma$$

  - $$g(t) = 1(t) = \frac{r(t)}{t} \qquad \to \qquad G(s) = \int_s^{\infty} \frac{1}{\sigma^2} d\sigma = \frac{1}{s}$$
    gradino = rampa / t → integrale della trasformata della rampa
  - $$g(t) = r(t) = \frac{2p(t)}{t} \qquad \to \qquad G(s) = 2\int_s^{\infty} \frac{1}{\sigma^3} d\sigma = \frac{1}{s^2}$$
    rampa = 2 * parabola / t → 2 * integrale della trasformata della parabola
  - $$g(t) = \frac{\sin t}{t} \qquad \to \qquad G(s) = \int_s^{\infty} \frac{1}{\sigma^2+1} d\sigma = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \operatorname{arc}\cot s$$
    funzione $\sin t$ / t → integrale della trasformata della funzione $\sin t$

- *traslazione nel tempo*
(alla traslazione nel tempo della funzione CORRISPONDE la moltiplicazione per un esponenziale della Trasformata)

$$g(t) = f(t-\tau)\, 1(t-\tau) \qquad \to \qquad G(s) = e^{-\tau s} F(s)$$

  - $$g(t) = r(t-\tau) \qquad \to \qquad G(s) = e^{-\tau s} \frac{1}{s^2}$$

- *traslazione complessa (nelle frequenze)*
(alla moltiplicazione per un esponenziale della funzione CORRISPONDE la traslazione nel tempo della Trasformata)

$$g(t) = e^{-at} f(t) \qquad \to \qquad G(s) = F(s+a)$$

  - $$g(t) = e^{-at}\cos(\omega t) \qquad \to \qquad G(s) = \frac{(s+a)}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

- *cambiamento di scala*

$$g(t) = f(\omega t) \qquad \to \qquad G(s) = \frac{1}{\omega} F(\frac{s}{\omega})$$

  - $$g(t) = \sin \omega t \qquad \to \qquad G(s) = \frac{1}{\omega} \frac{1}{(\frac{s}{\omega})^2 + 1} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

- *funzione periodica*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_T(t)[1(t-nT) - 1(t-(n+1)T)] \qquad \to \qquad F(s) = \frac{F_T(s)}{1 - e^{-\mathrm{Ts}}}$$

- *prodotto di convoluzione*

$$f(t) = f_1(s) * f_2(s) = \int_0^{+\infty} f_1(t) f_2(t-\tau)\, d\tau \qquad \to \qquad F(s) = F_1(s) F_2(s)$$

- *valore* iniziale

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\, F(s)$$

valido per qualsiasi funzione F(s)

- *valore* finale

$$\lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\, F(s)$$

valido solamente per funzioni F(s) che abbiamo tutti i poli a parte reale negativa, tranne al più un polo semplice nell’origine s=0 [es. app. scorretta *sin(ωt)*]

- *impulsi* di ordine superiore

$$\delta''(t) = \frac{d}{dt}\delta'(t) = \frac{d^2}{dt^2}\delta(t) = \frac{d^3}{dt^3} 1(t) \qquad \delta''(t) \quad \to \quad s^3 \cdot \frac{1}{s} - 0 = s^2$$

$$\delta^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}\delta(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} 1(t) \qquad \delta^{(n)}(t) \quad \to \quad s^n$$