

**PAROLE CHIAVE ►****1. Le modulazioni angolari**

Lo scopritore della modulazione FM è considerato **Edwin Armstrong**, in realtà lui dimostrò nel 1936 che la tecnica FM a larga banda migliorava la qualità rispetto alla AM. Fino ad allora si era studiato solo la FM a banda stretta. La sua idea fu contrastata dalla RCA (Radio Corporation of America) che dominava in America grazie agli impianti AM. Solo nel dopoguerra la tecnica FM ebbe il sopravvento ma continuò la battaglia legale tra RCA e Armstrong per brevetti e licenze.

Nella sezione precedente si è discusso di come trasferire il segnale informativo a frequenze alte, modificando i parametri di un segnale portante.

Si consideri ora il caso classico di portante sinusoidale:

$$p(t) = A_{pt} \cos(2\pi f_{pt} t + \varphi_{pt})$$

1

Se si lega il segnale modulante $m(t)$ alla frequenza f_{pt} o alla fase φ_{pt} della portante, si ottiene, rispettivamente, la **modulazione di frequenza (FM)** e di fase (PM).

Entrambi i parametri influenzano la variazione angolare dell'onda portante senza modificarne l'ampiezza. Gli effetti di queste due modulazioni sono quindi simili, per questo motivo possono essere analizzate globalmente come **modulazioni angolari** ed anche i sistemi di trasmissione hanno apparati che possono essere utilizzati per entrambe le modulazioni.

2. La modulazione di frequenza (FM)

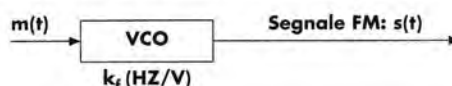
Nella modulazione di frequenza (**FM Frequency Modulation**) il segnale informativo $m(t)$ modifica la frequenza istantanea $f(t)$ dell'onda portante sinusoidale $p(t)$ intorno alla sua frequenza iniziale f_0 (chiamata anche **frequenza di libera oscillazione** o di *free run*) secondo la seguente proporzionalità:

$$f(t) = f_0 + k_f \cdot m(t)$$

2

dove k_f esprime la costante di proporzionalità del modulatore.

L'apparato modulatore utilizzato è solitamente un **VCO** (*Voltage Controlled Oscillator*, **Oscillatore controllato in tensione**) (fig. 1): un oscillatore (generatore di sinusoidi) che può variare la frequenza del segnale di uscita in funzione del segnale d'ingresso mantenendo sempre la forma sinusoidale d'uscita.

**Figura 1**

Schema di un apparato di modulazione FM.

Deviazione al
picco della
frequenza per
modulazione FM

La costante k_f , definita anche come **sensibilità** dell'apparato, è espressa in Hz/V.
La massima variazione di frequenza Δf_{0MAX} della frequenza istantanea $f(t)$ dell'onda portante, rispetto alla frequenza di libera oscillazione f_0 , è chiamata **deviazione di picco**, ed è data da

$$\Delta f_{0MAX} = k_f \cdot |m(t)|_{picco}$$

3

In figura 2 sono mostrati gli andamenti del segnale modulato FM nei casi di modulante sinusoidale e modulante ad onda quadra.

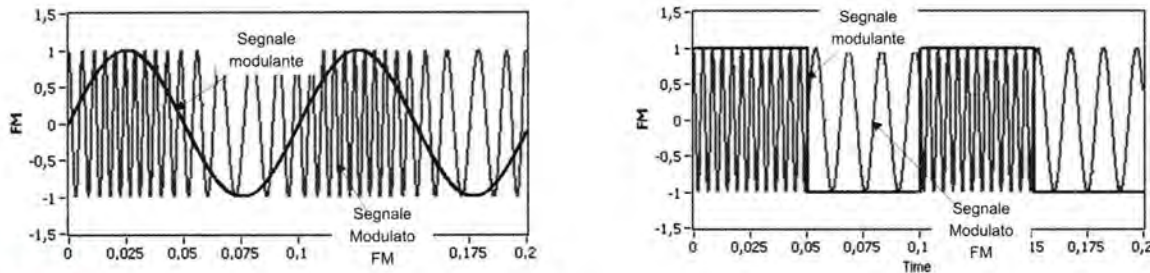


Figura 2
Andamento di segnale modulato FM.

3. L'indice di modulazione

Anche per la modulazione FM si è individuato un parametro per misurare l'entità di modulazione del segnale. Tale parametro è l'**indice di modulazione β** definito come la deviazione di picco della fase del segnale modulato (rispetto alla fase della portante non modulata) e si può dimostrare¹ che, nel caso di portante e modulante entrambe sinusoidali, risulta:

$$\beta = \Delta\phi_{picco} = \frac{k_f A_{mt}}{f_{mt}} = \frac{\Delta f_{0MAX}}{f_{mt}}$$

4

1. Si consideri l'onda portante sinusoidale data dalla **1**, se la sua frequenza varia secondo la **2**, si ottiene che il segnale modulato $s(t)$ ha espressione

$$s(t) A_{pt} \cos[(2\pi f_0 + k_f \cdot m(t))t + \phi_{pt}]$$

Sapendo che la pulsazione $\omega(t)$ descrive la velocità angolare dell'onda sinusoidale, per avere l'angolo $\theta(t)$ compiuto dal segnale occorre integrare detta pulsazione:

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt$$

La pulsazione può essere ottenuta dalla frequenza $f(t)$ moltiplicandola per il fattore 2π , quindi attraverso la **2** si ottiene che la fase $\theta(t)$ è data da:

$$\theta(t) = \int 2\pi(f_0 + k_f \cdot m(t))dt = 2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int m(t)dt + \theta_0$$

Il primo termine rappresenta l'angolo compiuto dall'onda portante non modulata, θ_0 la fase iniziale al tempo t_0 e il secondo termine l'effetto della modulazione FM. Consideriamo, per semplicità, un segnale modulante sinusoidale:

$$m(t) = A_{mt} \cos(2\pi f_{mt} t)$$

Il secondo termine della (3) diventa

$$\theta(t)_2 = 2\pi k_f \int A_{mt} \cos(2\pi f_{mt} t) dt = \frac{2\pi f_f A_{mt}}{2\pi f_{mt}} \sin(2\pi f_{mt} t)$$

Con le opportune semplificazioni, la fase del segnale modulato FM diventa

$$\theta(t) = 2\pi f_0 t + \theta_0 + \frac{k_f A_{mt}}{f_{mt}} \sin(2\pi f_{mt} t)$$

La variazione di fase dovuta alla modulazione è quindi ancora sinusoidale (anche se in quadratura rispetto al segnale modulante) e il suo valore di picco è espresso dalla **4**.

Lezione
multimediale **12B.1**

AULADIGITALE
Scheda integrativa **12B.1**
Il demodulatore a PLL

La FM agisce sulla
frequenza della
portante in funzione
dell'ampiezza
istantanea della
modulazione.

Nella modulazione FM l'indice di modulazione può essere anche maggiore di 1 senza problemi di sovramodulazione.

dove A_{m_i} e f_{m_i} sono rispettivamente l'ampiezza e la frequenza della modulante sinusoidale e si è applicata la **3** al segnale modulante per ottenere la **deviazione di picco** Δf_{0MAX} della frequenza istantanea $f(t)$ dell'onda portante.

Il valore di β è quindi *direttamente proporzionale sia all'ampiezza del segnale modulante che alla sensibilità del VCO*, ma è *inversamente proporzionale alla frequenza del segnale modulante*. Tale parametro è adimensionale e generalmente misurato in radianti ed assume spesso valori superiori all'unità senza i problemi di sovramodulazione visti nella modulazione AM.

Con passaggi matematici che si omettono il segnale modulato espresso in funzione dell'indice di modulazione risulta:

$$s(t) = A_{p_i} \cos[2\pi f_0 t + \theta_0 + \beta \sin(2\pi f_{m_i} t)] \quad \mathbf{5}$$

dove θ_0 esprime la fase iniziale.

Nel caso generale di segnale $m(t)$ qualsiasi, l'espressione **5** diventa

$$s(t) = A_{p_i} \cos\left[2\pi f_0 t + \theta_0 + 2\pi k_f \int_0^t m(t) dt\right] \quad \mathbf{6}$$

Si noti che in entrambe le espressioni la *modulazione incide solo su variazioni di fase, senza modificare l'ampiezza (e quindi la potenza) dell'onda portante*.

4. Lo spettro del segnale modulato FM

Lezione multimediale **12B.2**

Lo spettro di un segnale FM è diverso da quello di un segnale AM, perché la natura della modulazione oltre a effettuare una traslazione di frequenza intorno alla frequenza della portante modifica in ogni istante il valore delle armoniche, creando così uno spettro "allargato" in frequenza.

Per semplicità di trattazione si analizza solo il caso di modulante (co)sinusoidale e si semplifica la trattazione nei due casi di *piccola deviazione di frequenza* (**NBFM**, *Narrow Band*) quando l'indice β è $< 0,25$ e di *grande deviazione di frequenza* (**WBFM** *Wide Band*) quando l'indice β è $> 0,25$.

FM a banda stretta (NBFM)

Se l'indice di modulazione è piccolo ($\beta < 0,25$) al segnale modulato in frequenza, dato dalla **5**, conviene applicare la formula trigonometrica:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \quad \mathbf{7}$$

la **11** diventa:

$$s(t) = A_{p_i} [\cos(2\pi f_0 t) \cos(\beta \sin(2\pi f_{m_i} t)) - \sin(2\pi f_0 t) \cdot \sin(\beta \sin(2\pi f_{m_i} t))] \quad \mathbf{8}$$

Per l'ipotesi iniziale di β piccolo, è possibile fare le seguenti approssimazioni:

$$\cos(\beta \sin(2\pi f_{m_i} t)) \approx 1 \quad \sin(\beta \sin(2\pi f_{m_i} t)) \approx \beta \sin(2\pi f_{m_i} t) \quad \mathbf{9}$$

Quindi la **14** si semplifica nella:

$$s(t) = A_p [\cos(2\pi f_0 t) - \sin(2\pi f_0 t) \cdot (\beta \sin(2\pi f_{m_i} t))] \quad \mathbf{10}$$

Il primo termine rappresenta la portante trasmessa e il secondo termine una modulazione in ampiezza (AM) con portante in quadratura e modulante di ampiezza β .

Segnale FM a banda stretta (NBFM)

Lo spettro del segnale modulato è quindi simile a uno spettro del segnale AM DSB-TC, con le due bande laterali e la portante trasmessa. La banda occupata dal segnale vale:

$$B_{freq} = 2 \cdot f_{mt} \quad \text{11}$$

Questa tipologia di modulazione FM a banda stretta è valida solo per basse deviazione di frequenza, cioè per bassi valori di β .

FM a banda larga (WBFM)

Nel caso di modulazione in cui l'indice di modulazione β sia maggiore di 0,25, lo spettro diventa molto più ampio. Per calcolarlo occorre sviluppare i due termini della **3** che moltiplicano la portante, questi possono essere espressi mediante uno sviluppo in serie di termini sinusoidali di frequenza multiple della frequenza modulante f_{mt} :

$$\cos(\beta \sin(2\pi f_{mt}t)) = J_0(\beta) + 2 \sum_{n=2}^{\infty} J_n \cos(2\pi n f_{mt}t) \quad \text{per } n \text{ pari} \quad \text{12}$$

$$\sin(\beta \sin(2\pi f_{mt}t)) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n \sin(2\pi n f_{mt}t) \quad \text{per } n \text{ dispari} \quad \text{13}$$

Le ampiezze di queste sinusoidi sono date dai coefficienti J_n , i loro valori derivano da funzione matematiche note come **funzioni di Bessel del primo ordine**, che possono essere ricavate o da tabelle note su testi matematici o da programmi scientifici (tab. 1) o visualizzate mediante grafici (fig. 3).

di figura specie

Modulazione FM a banda larga (WBFM)

Funzioni di Bessel

Tabella 1

Funzioni di Bessel del primo ordine (valori approssimati al 99%).

β	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	J_{11}	J_{12}	J_{13}	J_{14}
0	1	-													
0,2	0,99	0,10													
0,25	0,98	0,12	0,01	-											
0,5	0,94	0,24	0,03	-											
1	0,77	0,44	0,11	0,02	-										
1,5	0,51	0,56	0,23	0,06	0,01	-									
2	0,22	0,58	0,35	0,13	0,03	0,01	-								
2,4	0,00	0,52	0,43	0,20	0,06	0,02	-								
2,5	-0,05	0,5	0,45	0,22	0,07	0,02	-								
3	-0,26	0,34	0,49	0,31	0,13	0,04	0,01	-							
3,5	-0,38	0,14	0,46	0,39	0,2	0,08	0,03	0,01	-						
4	-0,4	-0,07	0,36	0,43	0,28	0,13	0,05	0,02	-						
4,5	-0,32	-0,23	0,22	0,42	0,35	0,19	0,08	0,03	0,01	-					
5	-0,18	-0,33	0,05	0,36	0,39	0,26	0,13	0,05	0,02	0,01	-				
5,5	-0,01	-0,34	-0,12	0,26	0,4	0,32	0,19	0,09	0,03	0,01	-				
6	0,15	-0,28	-0,24	0,11	0,36	0,36	0,25	0,13	0,06	0,02	0,01	-			
6,5	0,26	-0,15	-0,31	-0,04	0,27	0,37	0,3	0,18	0,09	0,04	0,01	-			
7	0,3	0	-0,3	-0,17	0,16	0,35	0,34	0,23	0,13	0,06	0,02	0,01	-		
7,5	0,27	0,14	-0,23	-0,26	0,02	0,28	0,35	0,28	0,17	0,09	0,04	0,02	0,01	-	
8	0,17	0,23	-0,11	-0,29	-0,11	0,19	0,34	0,32	0,22	0,13	0,06	0,03	0,01	-	
8,5	0,04	0,27	0,02	-0,26	-0,21	0,07	0,29	0,34	0,27	0,17	0,09	0,04	0,02	0,01	-
9	-0,09	0,25	0,14	-0,18	-0,27	-0,06	0,2	0,33	0,31	0,21	0,12	0,06	0,03	0,01	-
9,5	-0,19	0,16	0,23	-0,07	-0,27	-0,16	0,1	0,29	0,32	0,26	0,17	0,09	0,04	0,02	0,01
10	-0,25	0,04	0,25	0,06	-0,22	-0,23	-0,01	0,22	0,32	0,29	0,21	0,12	0,06	0,03	0,01

Si può notare che il numero di coefficienti con valore maggiore di 0 dipende da β , al crescere dell'indice di modulazione, cresce anche il loro numero.

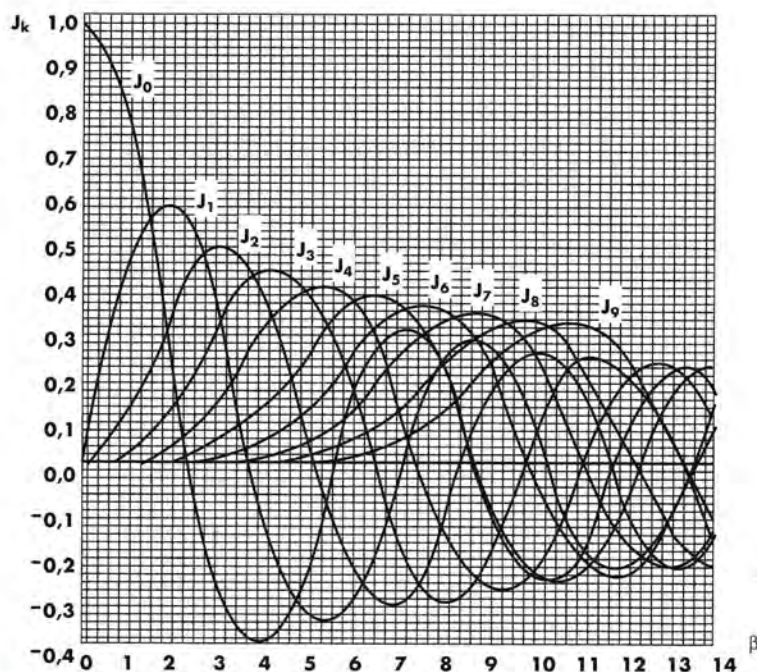


Figura 3
 Ampiezza delle funzioni di Bessel J_n del primo ordine.

Applicando questo sviluppo al segnale modulante e sviluppando il prodotto tra sinusoidi come svolto per la modulazione AM si ottiene:

$$\begin{aligned}
 s(t) = & A_{pt} J_0(\beta) \cos(2\pi f_0 t) + \\
 & + A_{pt} J_1(\beta) [\sin(2\pi(f_0 + f_{mt})t) - \sin(2\pi(f_0 - f_{mt})t)] + \\
 & + A_{pt} J_2(\beta) [\cos(2\pi(f_0 + 2f_{mt})t) - \cos(2\pi(f_0 - 2f_{mt})t)] + \\
 & + A_{pt} J_3(\beta) [\sin(2\pi(f_0 + 3f_{mt})t) - \sin(2\pi(f_0 - 3f_{mt})t)] + \dots
 \end{aligned}$$

14

L'esame della **14** porta quindi a capire che lo spettro del segnale FM è dato da una somma di armoniche posizionate in modo simmetrico attorno alla frequenza della portante distanziate da essa di un multiplo della frequenza del segnale modulante ed aventi ampiezze date dai prodotti del picco della portante (non modulata) per i valori delle funzioni di Bessel. Maggiore è il valore dell'indice di modulazione β , maggiore è il numero delle funzioni di Bessel, maggiori sono le righe e la loro distanza dalla portante, quindi maggiore è la banda. La banda è quindi data da

Calcolo della
 banda con Bessel

$$B_{freq} = 2N_J(\beta) \cdot f_{mt}$$

15

dove $N_J(\beta)$ è il numero delle funzioni di Bessel avente un valore diverso da 0 e tale numero dipende da β come si può osservare sia dalla **tabella 1** che dalla **figura 3**, quindi la banda occupata dal segnale modulato cresce per una maggiore profondità di modulazione.

Esempio 1

Una modulante sinusoidale di frequenza 10 MHz che modula una portante con indice di modulazione 2 determina una banda:

$$B_{freq} = 2N_J(\beta) \cdot f_{mt} = 2 \cdot 5 \cdot 10 \text{ MHz} = 100 \text{ MHz}$$

La stessa modulante con un indice di modulazione 3 determinerebbe una banda:

$$B_{freq} = 2N_J(\beta) \cdot f_{mt} = 2 \cdot 6 \cdot 10 \text{ MHz} = 120 \text{ MHz}$$

+ per quelle pari
 - per quelle dispari

non è
 detto:

è vero e pari
 freq. modulante
 ma

l'indice di modul.
 è inversam. proporz.
 alla freq. della modulante

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{k \cdot V_m}{f_m}$$

è dovuto all'aumento
 di Δf e all'aumento
 della V_m (ma non della f_m)

Esempi di spettri per 4 indici di modulazione diversi sono riportati in **figura 4** (tutti con $f_0 = 200$ Hz, $A_{pt} = 1$ V e $f_{mt} = 20$ Hz).

Dalla **tabella 1** e dal primo spettro di **figura 4** si nota che compiono solo i coefficienti J_1 , quindi 2 sole righe laterali, come previsto dalla trattazione per la NBFM. L'esame dei 4 spettri di **figura 4** mostra come aumentando l'indice β aumentano le righe dello spettro ma diminuiscono le ampiezze di queste, ciò è spiegabile in quanto la potenza totale del segnale modulato non viene influenzato dalla profondità di modulazione, pertanto la somma delle potenze delle righe deve rimanere costante, quindi se aumentano le righe la potenza si distribuisce su più armoniche diminuendo l'ampiezza di ciascuna.

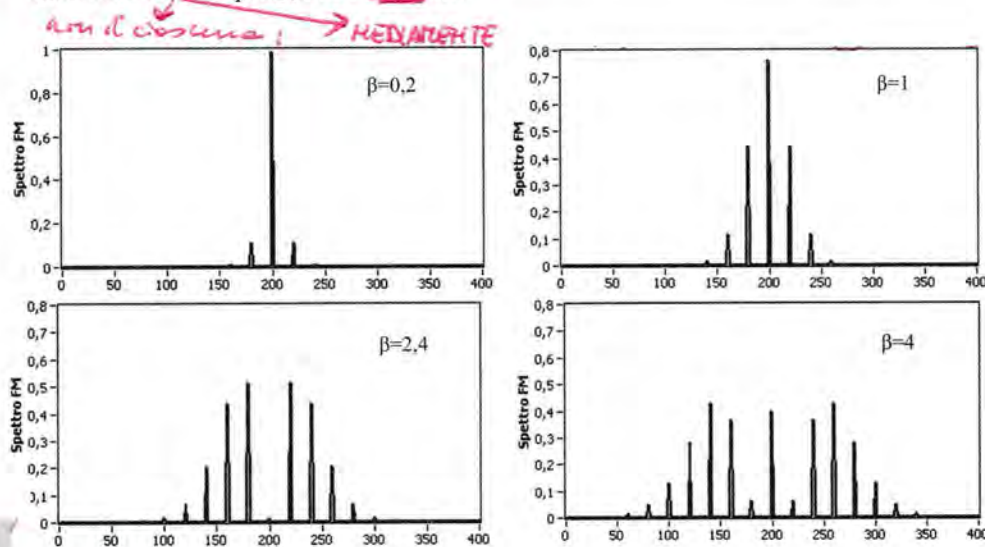


Figura 4

Spettro di segnale modulato FM per 4 valori di β .

Gli spettri di **figura 4** sono spettri di ampiezza, si noti che sia nella **tabella 1** delle funzioni di Bessel sia nell'espressione **14** compaiono dei segni negativi, il loro effetto sul segnale è quello di sfasare di 180° l'armonica interessata.

FM con modulante non sinusoidale

Nel caso il segnale modulante $m(t)$ non sia sinusoidale, l'analisi della banda richiederebbe di scomporlo in sinusoidi e poi valutare gli effetti complessivi, con una certa difficoltà di calcolo.

Ai fini pratici si utilizza una formula approssimata che permette di ricavare la banda occupata da circa il 90% della potenza del segnale e che è ampiamente utilizzata nei progetti reali. Tale intervallo di frequenze nota come **Banda di Carson** è così calcolata

Banda di Carson

$$B_{Carson} = 2(f_{max} + \Delta f_{0MAX})$$

16

dove f_{max} è la massima frequenza (la banda) del segnale modulante e Δf_{0MAX} la massima variazione di frequenza della frequenza istantanea $f(t)$ dell'onda portante calcolata secondo la **3**.

Nel caso di segnale sinusoidale avente $f_{max} = f_{mt}$, applicando la **16** si trova:

↳

$$B_{Carson} = 2f_{mt}(1 + \beta)$$

17

non vale x segnale sinusoidale.

Al crescere dell'indice di modulazione cresce la banda ma diminuiscono le ampiezze delle armoniche presenti, perché la potenza non cambia.

Esempio 2

Un segnale sinusoidale ha ampiezza $A_{mt} = 5$ V e frequenza $f_{mt} = 12,5$ kHz e modula una portante sinusoidale mediante un VCO avente sensibilità $k_f = 5$ kHz/V. Determinare l'indice di modulazione β e la banda occupata, calcolata sia mediante le funzioni di Bessel sia mediante la formula di Carson.

Applicando la **4** si ricava l'indice di modulazione

$$\beta = \frac{k_f A_{mt}}{f_{mt}} = \frac{5 \cdot 5}{12,5} = 2 \text{ rad}$$

Dalla **tabella 1**, per $\beta = 2$ si trovano 5 funzioni di Bessel, per cui applicando la **15** si ottiene la banda con approssimazione al 99%:

$$B_{freq} = 2 \cdot 5 \cdot 12,5 = 125 \text{ kHz}$$

Invece mediante la **17** si ricava la banda di Carson ridotta rispetto a quella sopra calcolata perché racchiude una potenza inferiore di segnale:

$$B_{Carson} = 2 \cdot 12,5 \cdot (1 + 2) = 75 \text{ kHz}$$

5. La potenza del segnale modulato FM

Lezione
multimediale **12B.1**

L'esame dell'espressione del segnale modulato FM dato dalla **5** o dalla **6** mostra che la modulazione influenza solo la fase dell'onda portante, quindi la potenza totale (normalizzata cioè *misurata su una resistenza unitaria*) del segnale modulato è quella di una sinusoide:

$$\overline{s^2(t)} = \Pi_{TR} = \frac{(\text{ampiezza}_{picco})^2}{2} = \frac{(A_{pt})^2}{2} \quad \mathbf{18}$$

Un modo alternativo per calcolare la potenza (nel caso di modulante sinusoidale) è quello di sommare le potenze delle armoniche che compaiono nello spettro, sapendo che ogni armonica è sinusoidale e che il loro prodotto incrociato dà potenza nulla, si ottiene:

$$\overline{s^2(t)} = \frac{(A_{pt} J_0(\beta))^2}{2} + 2 \frac{(A_{pt} J_1(\beta))^2}{2} + 2 \frac{(A_{pt} J_2(\beta))^2}{2} + \dots \quad \mathbf{19}$$

I risultati della **18** e della **19** sono identici a meno dell'approssimazione scelta per i coefficienti $J_n(\beta)$ di Bessel. Normalmente si sceglie un'approssimazione dello 1% per tali coefficienti per cui l'approssimazione della potenza calcolata con la **19** ha precisioni ancora superiori.

Il primo termine dà la potenza della riga portante quando viene modulata mentre gli altri termini danno la potenza dell'informazione distribuita sulle righe laterali.

Si definisce **efficienza di trasmissione** η_{FM} per la modulazione FM il **rapporto tra la potenza la potenza delle bande laterali e la potenza totale trasmessa**:

$$\eta_{FM} = \frac{2 \sum_{n=1}^{+\infty} (A_{pt} J_n(\beta))^2}{(A_{pt})^2} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (J_n(\beta))^2 = 1 - (J_0(\beta))^2 \quad \mathbf{20}$$

Si noti il caso particolare di $\beta = 2,4$ dove il valore di $J_0(\beta)$ è 0: in questo caso *l'efficienza è massima perché l'informazione è totalmente distribuita sulle bande laterali dello spettro*. È un caso questo molto utilizzato nella pratica per inviare segnali di prova e misurare i parametri dei sistemi reali.

Efficienza di
trasmissione

Con l'indice di
modulazione 2,4
l'efficienza di
trasmissione è
massima.

6. La modulazione di fase (Phase Modulation PM)

La modulazione di fase è la modulazione angolare maggiormente utilizzata per trasmissioni satellitari. I motivi che la fanno preferire alla modulazione FM (con la quale condivide il vantaggio di essere una modulazione efficiente per il filtraggio del rumore) sono dovuti alla generazione della portante, che può essere ottenuta da un oscillatore molto controllato in frequenza, alla quale viene successivamente modulata la fase senza interferire con la stabilità della sua frequenza f_0 .

Inoltre viene largamente utilizzata nei modem per trasmissioni digitali perché permette di trasmettere pacchetti di bit senza aumentare la banda di modulazione.

Considerando la portante sinusoidale:

$$p(t) = A_{pt} \cos(2\pi f_0 t + \varphi_{pt}) \quad 21$$

si ha modulazione PM se la fase $\varphi_{pt}(t)$ varia nel tempo in funzione del segnale modulante $m(t)$:

$$\varphi_{pt}(t) = k_\varphi \cdot m(t) \quad 22$$

ove k_φ è la **sensibilità del modulatore** misurata in rad/V.

Sostituendo la 22 nella 21 si ottiene l'espressione del segnale modulato

$$s(t) = A_{pt} \cos(2\pi f_0 t + k_\varphi \cdot m(t)) \quad 23$$

Se si confronta questa relazione con la 6 relativa alla modulazione FM si nota come le espressioni siano simili a meno di un'operazione di integrazione che permette di passare dalla frequenza alla fase.

Se si considera anche in questo caso un segnale modulante sinusoidale

$$m(t) = A_{mt} \cos(2\pi f_{mt} t) \quad 24$$

Si ottiene

$$s(t) = A_{pt} \cos[2\pi f_0 t + k_\varphi A_{mt} \cos(2\pi f_{mt} t)] \quad 25$$

Poiché nelle modulazioni angolari la definizione dell'indice di modulazione β rimane la deviazione di picco della fase del segnale modulato (rispetto alla fase della portante non modulata), si ottiene per la modulazione di fase

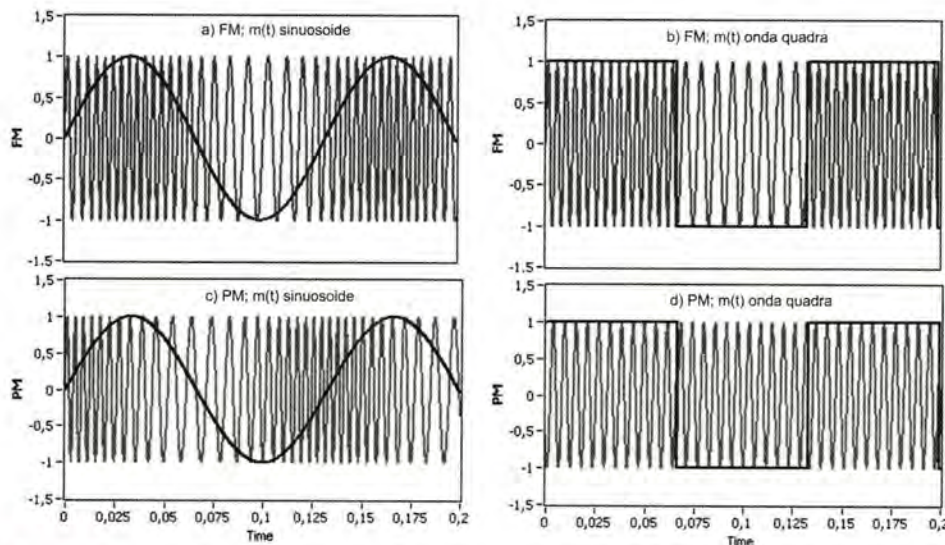
$$\beta = \Delta\varphi_{picco} = k_\varphi A_{mt} \quad 26$$

Sostituendo tale valore nella 25 si ottiene che il segnale modulato PM è

$$s(t) = A_{pt} \cos[2\pi f_0 t + \theta_0 + \beta \cos(2\pi f_{mt} t)] \quad 27$$

Confrontando la 27 con la 5 si conferma la somiglianza con la modulazione FM. In figura 5 sono rappresentati segnali modulati FM e PM per modulante sinusoidale e a onda quadra, in tutti i quattro casi si sono scelti valori delle sensibilità di modulazione tali da avere un indice di modulazione $\beta = 10$ per entrambe le modulazioni. Nel caso di modulante sinusoidale si può notare come il segnale modulato FM sia molto simile a quello PM, tra i due vi è solamente uno sfasamento di 90° (la differenza di fase tra seno della 5 ed il coseno della 27).

Nel caso di onda quadra si vede che il segnale PM non ha variazioni di frequenza ma solo un salto di fase in corrispondenza alle variazioni dell'onda quadra, ciò perché le variazioni di frequenza dipendono dalla derivata del segnale modulante.


Figura 5

 Confronto tra segnale modulato FM e PM per modulante sinusoidale ed onda quadra con $\beta = 10$.

7. Lo spettro del segnale modulato PM

Dal confronto sopra evidenziato si capisce che una volta calcolato l'indice di modulazione β per la modulazione PM secondo la **26**, lo spettro del segnale PM è simile a quello esaminato per il caso FM: valgono le stesse considerazioni per la Narrow Band se $\beta \leq 0,25$ e la stessa analisi spettrale ricavate mediante le funzioni di Bessel per $\beta > 0,25$.

Le formule per il calcolo della banda sono rispettivamente la **11** e la **15**.

Nel caso di segnale modulante $m(t)$ qualsiasi si utilizza ancora la formula approssimata di Carson data dalla **16**. Il calcolo di Δf_{0MAX} in questo caso si ottiene prima ricavando la frequenza, mediante la derivata della fase e divisa per 2π , poi ricavandone il picco:

$$\Delta f_{0MAX} = k_f \frac{1}{2\pi} \left[\frac{d(m(t))}{dt} \right]_{\text{picco}} \quad 28$$

Applicando la **28** al caso di segnale $m(t)$ sinusoidale si ottiene la stessa formula **17** della modulazione FM:

$$B_{Carson} = 2f_{mt}(1 + \beta) \quad 29$$

8. Confronto tra modulazioni angolari FM e PM

Viste le somiglianze tra le modulazioni angolari, occorre domandarsi quale siano le differenze importanti dal punto di vista applicativo. Oltre alla stabilità maggiore del modulatore di fase e alla preferenza di questa per le modulazioni digitali vi è una differenza sugli effetti di modulazione per segnali modulanti di spettro distribuito. Se il segnale è formato da armoniche di ampiezza simile applicando la **4** per modulazione FM si nota che le armoniche con frequenza maggiore hanno un indice di modulazione inferiore di quelle a frequenza bassa. Ciò fa sì che l'effetto della modulazione agisce in modo diverso sulle varie componenti dello stesso segnale informativo. Questa caratteristica rischia di penalizzare la parte di informazione trasmessa e contenuta nelle frequenze alte.

Lezione multimediale **12B.3**

Deviazione di picco della frequenza per modulazione PM

Banda di Carson

Lezione multimediale **12B.3**

Lezione multimediale **12B.4**

AULADIGITALE
Lezione multimediale **12B.5**
Confronto tra le modulazioni analogiche

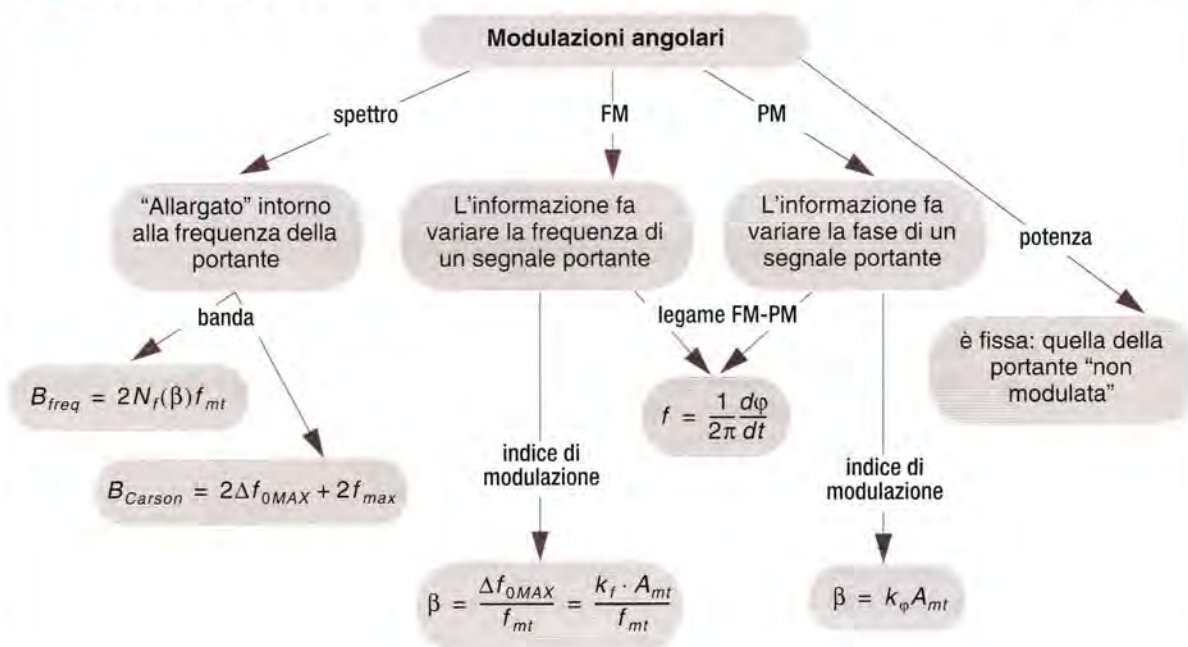
Enfasi e deenfasi

Per tale motivo si fa precedere al modulatore FM un circuito (detto di **enfasi**) che amplifica le frequenze alte in modo proporzionale alla frequenza stessa per rendere il valore di β , dato dalla **4**, costante in frequenza. In ricezione per riavere il segnale originale dovrà essere posto in cascata al demodulatore un circuito (detto di **deenfasi**) che agisca in modo inverso e attenui le ampiezze delle armoniche alte.

Nel caso della modulazione PM come si vede dalla **23** l'indice di modulazione è indipendente dalla frequenza delle componenti del segnale modulante per cui l'effetto della modulazione è simile per tutte le componenti, dipendendo solo dalla loro ampiezza, non vi è quindi bisogno di utilizzare circuiti particolari prima o dopo i (de)modulatori.

Infine si dovrebbe analizzare l'effetto delle modulazioni angolari sulla qualità del segnale rispetto a rumori additivi che si sovrappongono nel canale di trasmissione. Senza appesantire la trattazione con dimostrazioni, si può solo ricordare che, come aveva provato Armstrong nel 1936 sia teoricamente che con dimostrazioni pratiche, nelle modulazioni angolari (FM e PM) il processo di demodulazione riduce il disturbo sul segnale in uscita, migliorando la qualità rispetto ad una trasmissione in banda base o ad una modulazione AM. Tale miglioramento è tanto maggiore quanto maggiore è l'indice di modulazione β : per questo motivo le modulazioni angolari vengono dette **efficienti**. Tale vantaggio è però compensato da un aumento della banda occupata nella trasmissione, con riduzione della possibilità di inviare molti segnali in contemporanea sullo stesso canale. Occorre quindi scegliere un compromesso tra miglioramento della qualità del segnale e banda occupata.

**Rapporto
segnale/rumore
dei segnali
modulati FM e PM**

**acciamo il punto****Modulazioni angolari**

Test

- Par. 2 **1** In un modulatore FM la deviazione picco-picco di frequenza del segnale modulato è proporzionale a:
 a ☐ frequenza del segnale modulante;
 b ☐ ampiezza del segnale modulante;
 c ☐ derivata del segnale modulante;
 d ☐ integrale del segnale modulante.
- Par. 4 **2** Le funzioni di Bessel permettono di:
 a ☐ calcolare il rapporto S/N;
 b ☐ calcolare la banda di Carson;
 c ☐ tracciare lo spettro di un segnale FM;
 d ☐ stabilire se l'onda portante è modulata in FM o in PM.
- Par. 4 **3** Qual è la banda di Carson di un segnale modulato FM avente deviazione di picco di 20 kHz e frequenza del segnale modulante di 4 kHz?
 a ☐ 8 KHz;
 b ☐ 20 KHz;
 c ☐ 24 KHz;
 d ☐ 48 KHz.
- Par. 6 **4** L'indice di modulazione di un segnale PM è dato da:
 a ☐ rapporto tra ampiezza del segnale modulante e ampiezza del segnale portante;
 b ☐ rapporto tra deviazione picco-picco di frequenza del segnale modulato e frequenza del segnale modulante;
 c ☐ rapporto tra deviazione picco-picco di fase del segnale modulato e fase del segnale modulante;
 d ☐ deviazione di picco di fase del segnale modulato.
- Par. 6 **5** Una portante di 200 MHz modulata in PM è deviata di 50 kHz_{pp} da un segnale sinusoidale di 5 kHz, l'indice di modulazione vale:
 a ☐ 5;
 b ☐ 10;
 c ☐ 40;
 d ☐ 50.

Problemi svolti



Problemi integrativi

Il numero dei pallini ● indica il grado di difficoltà.

- Parr. 2, 3 e 4 **1** ●●● Un VCO lineare produce una portante a 200 MHz non modulata di 3 V_p ed ha una sensibilità di modulazione $k_f = 15 \text{ kHz/V}$. Se il VCO è modulato da un segnale cosinusoidale a 5 kHz e 1000 mV_p, determinare:
 a) deviazione picco-picco della frequenza della portante;
 b) l'indice di modulazione;
 c) la banda di Carson e la banda al 99%.

Soluzione

Applicando la **3** si ricava la deviazione di picco ed essendo la variazione sinusoidale, moltiplicando per 2 si ricava il valore picco-picco della deviazione di frequenza Δf_{opp} :

$$\Delta f_{opp} = 2 \cdot k_f \cdot |m(t)|_{picco} = 2 \cdot 15 \cdot 1 = 30 \text{ kHz}$$

Dalla **4** si ricava il valore dell'indice di modulazione β :

$$\beta = \frac{k_f A_{mt}}{f_{mt}} = \frac{15 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^3} = 3$$

Applicando la **17** si ricava la banda di Carson:

$$B_{Carson} = 2f_{mt}(1 + \beta) = 2 \cdot 5 \cdot (1 + 3) = 40 \text{ kHz}$$

La banda al 99% di approssimazione è data dalla **15**, occorre esaminare la **tabella 1** delle funzioni di Bessel, per $\beta = 3$ vi sono 6 coefficienti di valore maggiore di 0,01 quindi:

$$B_{freq} = 2 \cdot N_J(\beta) \cdot f_{mt} = 2 \cdot 6 \cdot 5 = 60 \text{ kHz}$$

Come discusso nella teoria, la seconda banda calcolata è più ampia in quanto contiene anche le armoniche di potenza minore.

Parr. 2, 3 e 4

2

Ripetere il problema 1 per ciascuna delle seguenti modifiche:

- a) solo la tensione di modulazione (in ingresso al VCO) viene raddoppiata;
- b) solo la frequenza di modulazione (in ingresso al VCO) viene raddoppiata;
- c) solo l'ampiezza della portante (in ingresso al VCO) viene raddoppiata.

Soluzione

- a) Se raddoppia il valore della tensione di modulazione, raddoppia la variazione di picco-picco e quindi anche il valore dell'indice di modulazione:

$$\Delta f_{opp} = 60 \text{ kHz} \quad \beta = 6$$

Le bande quindi aumentano, applicando la **17** si trova:

$$B_{Carson} = 2f_{mt}(1 + \beta) = 2 \cdot 5 \cdot (1 + 6) = 70 \text{ kHz}$$

Dall'esame della **tabella 1** delle funzioni di Bessel, per $\beta = 6$ vi sono 10 coefficienti di valore maggiore di 0,01 quindi applicando la **15**:

$$B_{freq} = 2 \cdot N_J(\beta) \cdot f_{mt} = 2 \cdot 10 \cdot 5 = 100 \text{ kHz}$$

- b) Se raddoppia il valore della frequenza di modulazione, rimane invariata la variazione di picco-picco mentre si dimezza il valore dell'indice di modulazione:

$$\Delta f_{opp} = 30 \text{ kHz} \quad \beta = 1,5$$

Le bande quindi saranno soggette ad un aumento per l'aumento della frequenza della modulante ed una diminuzione per la riduzione dell'indice di modulazione, l'effetto congiunto dei due fenomeni è dato dall'applicazione della **17**:

$$B_{Carson} = 2f_s(1 + \beta) = 2 \cdot 10 \cdot (1 + 1,5) = 50 \text{ kHz}$$

Dall'esame della **tabella 1** delle funzioni di Bessel, per $\beta = 1,5$ vi sono 4 coefficienti di valore maggiore di 0,01 quindi applicando la **15**:

$$B_{freq} = 2 \cdot N_J(\beta) \cdot f_{mt} = 2 \cdot 4 \cdot 10 = 80 \text{ kHz}$$

- c) Se raddoppia il valore dell'ampiezza della portante, varia solo la potenza del segnale non le sue caratteristiche di modulazione, quindi tutti i valori richiesti coincidono con quanto calcolato nel problema 2.

Par. 4

3

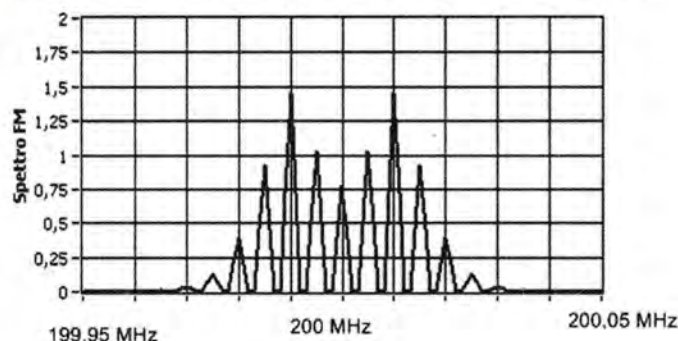
Determinare le ampiezze di picco di tutte le componenti spettrali significative presenti nel segnale FM del problema 1.

Disegnare lo spettro indicando i valori delle frequenze.

Soluzione

Come calcolato nel problema 1 lo spettro sarà formato da 12 righe intorno alla riga della portante separate di 5 kHz (f_{mt}), come mostrato nello spettro di ampiezza in **figura P1**.

Figura P1



Le ampiezze di ogni riga saranno date dal prodotto del valore di picco della portante (non modulata) per il corrispondente coefficiente di Bessel:

per $f = 200$ MHz		ampiezza: $A_{pt}J_0(3) = 3(-0,26) = -0,78V$
per $f = 200,005$ MHz	e $f = 199,995$ MHz	ampiezza: $A_{pt}J_1(3) = 3(0,34) = 1,02V$
per $f = 200,010$ MHz	e $f = 199,990$ MHz	ampiezza: $A_{pt}J_2(3) = 3(0,49) = 1,47V$
per $f = 200,015$ MHz	e $f = 199,985$ MHz	ampiezza: $A_{pt}J_3(3) = 3(0,31) = 0,93V$
per $f = 200,020$ MHz	e $f = 199,980$ MHz	ampiezza: $A_{pt}J_4(3) = 3(0,13) = 0,39V$
per $f = 200,025$ MHz	e $f = 199,975$ MHz	ampiezza: $A_{pt}J_5(3) = 3(0,04) = 0,12V$
per $f = 200,030$ MHz	e $f = 199,970$ MHz	ampiezza: $A_{pt}J_6(3) = 3(0,01) = 0,03V$

Problemi da svolgere



Problemi integrativi

Parr. 4 e 5



4

Determinare la potenza della portante trasmessa, su un sistema a 75Ω se $\beta_{FM} = 5$ e A_{pt} (non modulato) è di $2,5 \text{ kV}_p$. Determinare la potenza di una banda laterale J_4 .

Parr. 2, 3, 4 e 5



5

Un analizzatore di spettro dimostra che un segnale FM trasmesso a 100 MHz , ha componenti di frequenza separate di 10 kHz e che l'ampiezza della portante è uguale alle ampiezze del secondo insieme di bande laterali. Determinare:

- l'indice di modulazione;
- la tensione e la frequenza dell'ingresso di modulazione se $k_f = 30 \text{ kHz/V}$;
- la potenza a $100,02 \text{ MHz}$ in presenza di modulazione se la potenza della portante non modulata è di 10 kW ;
- la minima tensione di ingresso al VCO necessaria per azzerare la potenza della portante.

Parr. 6 e 7



6

Un modulatore di fase con sensibilità di $0,5 \text{ rad/V}$ ha un segnale d'ingresso di modulazione avente espressione $8 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^4 \cdot t)$. Determinare la deviazione di fase di picco e l'indice di modulazione. Se la potenza è di 4 kW e $R = 100 \Omega$, $f_{pt} = 50 \text{ MHz}$, disegnare lo spettro.

Parole chiave

Individuare i termini e i raggruppamenti delle parole chiave di inizio sezione (vedere l'esempio risolto della sezione 2A).