

Equazioni differenziali lineari

- Da un punto di vista dinamico, i sistemi lineari stazionari sono descritti da equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x$$

o con notazione più compatta:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}$$

dove $y(t)$ è la funzione *uscita* ed $x(t)$ è la funzione *ingresso*.

- Condizione di fisica realizzabilità: $n \geq m$.

$$\begin{cases} \text{se } n > m & \text{il sistema è strettamente proprio} \\ \text{se } n = m & \text{il sistema è proprio} \\ \text{se } n < m & \text{il sistema è improprio} \end{cases}$$

- Per risolvere l'equazione differenziale occorre conoscere

i) le condizioni iniziali:

$$y(0^-), \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0^-}, \quad \dots, \quad \left. \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-}$$

ii) il segnale di ingresso:

$$x(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

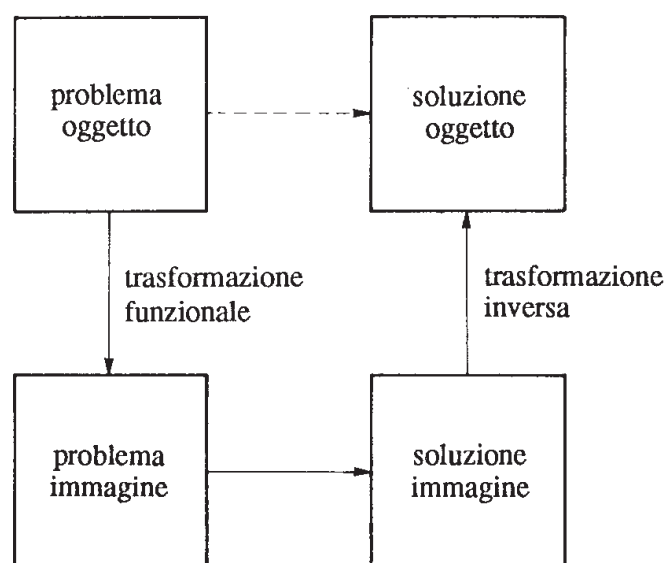
- Si suppone che la funzione $x(t)$ sia *continua a tratti*, *limitata per ogni t finito* e che le condizioni iniziali della funzione $x(t)$ all'istante $t = 0^-$ sono tutte nulle:

$$x(0^-) = 0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0^-} = 0, \quad \dots, \quad \left. \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-} = 0$$

- La soluzione dell'equazione differenziale è la somma di due funzioni:

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t)$$

1. *l'evoluzione libera* $y_0(t)$, cioè la soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata che si ottiene ponendo uguale a zero il segnale di ingresso: $x(t) \equiv 0, 0 \leq t \leq T$.
 2. *l'evoluzione forzata* $y_1(t)$, cioè la soluzione particolare che si ottiene ponendo a zero tutte le condizioni iniziali.
- Per la soluzione delle equazioni differenziali sono di notevole utilità le *trasformazioni funzionali*, in particolare la *trasformazione di Laplace*.
 - Le trasformazioni funzionali stabiliscono una corrispondenza *biunivoca* fra *funzioni oggetto*, normalmente funzioni del tempo, e *funzioni immagine*.



- Tipicamente il *problema immagine* è di più facile soluzione. Esempio:

$$a \cdot b = e^{\ln(a \cdot b)} = e^{(\ln a + \ln b)}$$

- Le equazioni differenziali si trasformano in equazioni algebriche, per cui la loro soluzione è immediata.
- Dalla soluzione immagine si passa poi alla soluzione oggetto eseguendo sulle funzioni immagine l'operazione di *antitrasformazione*.

Un'equazione differenziale è correttamente orientata (con una causalità di tipo integrale) se la variabile di uscita del sistema è quella a cui è associato il massimo grado di derivazione all'interno dell'equazione differenziale. Questa regola è equivalente alla condizione di fisica realizzabilità: $n \geq m$. Per meglio comprendere questa condizione si consideri il seguente sistema lineare:

L'energia accumulata nel sistema è: $E(t) = \frac{1}{2} C V^2(t)$. Tale energia varia nel tempo solo se è presente un flusso di potenza $p(t) = \dot{E}(t) = V(t) I(t)$ in ingresso al sistema. Da un punto di vista *matematico* il sistema può essere orientato in due modi diversi:

Da un punto di vista *energetico* solo l'orientamento b), cioè $I(s)$ in ingresso e $V(s)$ in uscita, è fisicamente realizzabile perchè è l'unico compatibile con una scelta arbitraria del segnale $I(s)$ in ingresso. L'orientamento a) non è compatibile con un gradino di tensione $V(t)$ in ingresso perchè questa condizione implicherebbe, per $t = 0$, una variazione istantanea dell'energia $E(t)$ accumulata nel sistema e quindi un flusso di potenza $p(t)$ infinito per $t = 0$.

L'orientamento b) è invece compatibile con un gradino di corrente $I(t)$:

2. SISTEMI DINAMICI LINEARI

Trasformate di Laplace

- La trasformata di Laplace associa in modo biunivoco a una generica funzione reale del tempo $f(t)$ una funzione complessa $F(s)$ della variabile complessa s :

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

È definita nel modo seguente:

$$F(s) := \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

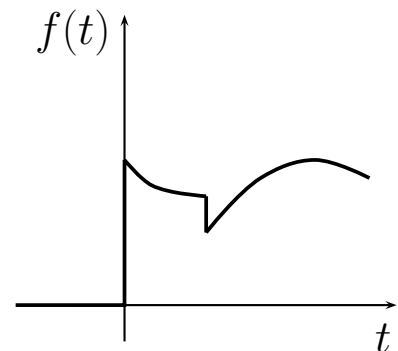
- La trasformazione inversa viene detta antitrasformata di Laplace:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

È definita nel modo seguente:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

- La funzione $F(s)$ è definita in un *dominio di convergenza* che consiste in un semipiano del piano s posto a destra di una retta parallela all'asse immaginario
- La funzione $f(t)$ è trasformabile secondo Laplace se:
 - $f(t) = 0$ per $t < 0$;
 - $f(t)$ è continua a tratti e limitata al finito per $t \geq 0$;
 - l'integrale $\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt$ esiste per un qualche valore reale di σ .



- Si tiene conto della *storia passata* della variabile $f(t)$ per $t < 0$ considerando opportune *condizioni iniziali* all'istante $t = 0$.

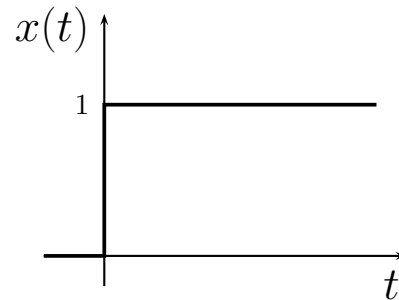
• Trasformate di Laplace dei segnali di uso più comune

$$\mathcal{L} [t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$$

Come casi particolari di questa relazione si ottengono le trasformate di Laplace dei seguenti segnali:

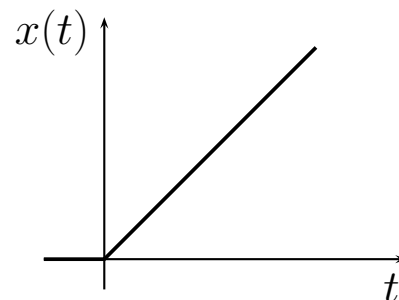
a) **Gradino unitario** ($n = 0, a = 0$):

$$x(t) = u(t) \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s}$$



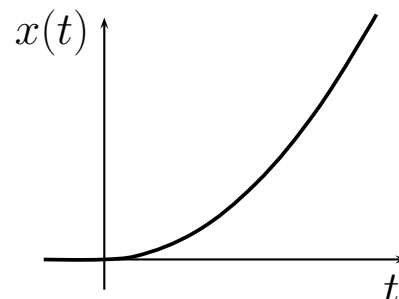
b) **Rampa unitaria** ($n = 1, a = 0$):

$$x(t) = t \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s^2}$$



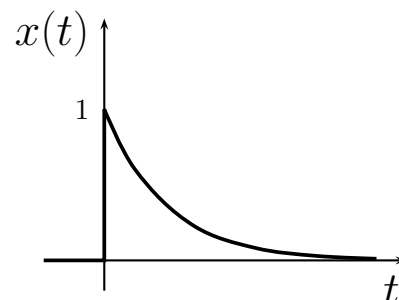
c) **Parabola unitaria** ($n = 2, a = 0$):

$$x(t) = \frac{t^2}{2} \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s^3}$$



d) **Esponenziale** ($n = 0, a < 0$):

$$x(t) = e^{at} \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s - a}$$



e) **Sinusoide:** $x(t) = \sin \omega t$. Tale segnale si ricava dalla composizione di due esponenziali:

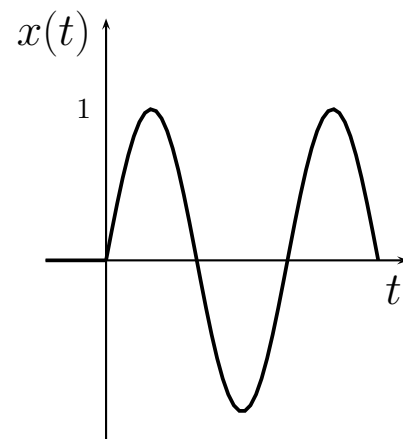
$$x(t) = \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

Per la linearità della trasformata di Laplace si ha infatti che:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right] = \frac{1}{2j} \left[\frac{2\omega j}{s^2 + \omega^2} \right]$$

da cui si ricava:

$$x(t) = \sin \omega t \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

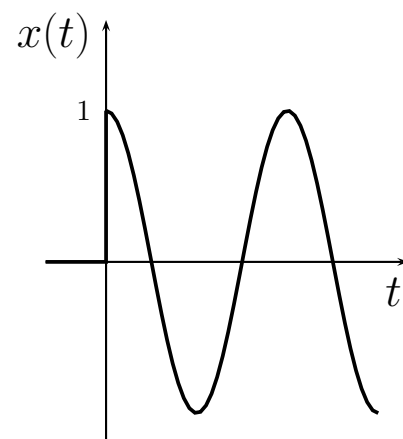


f) **Cosinusoide:** $x(t) = \cos \omega t$. Per tale funzione valgono le relazioni:

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2s}{s^2 + \omega^2} \right]$$

da cui si ottiene:

$$x(t) = \cos \omega t \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$



Proprietà della trasformata di Laplace

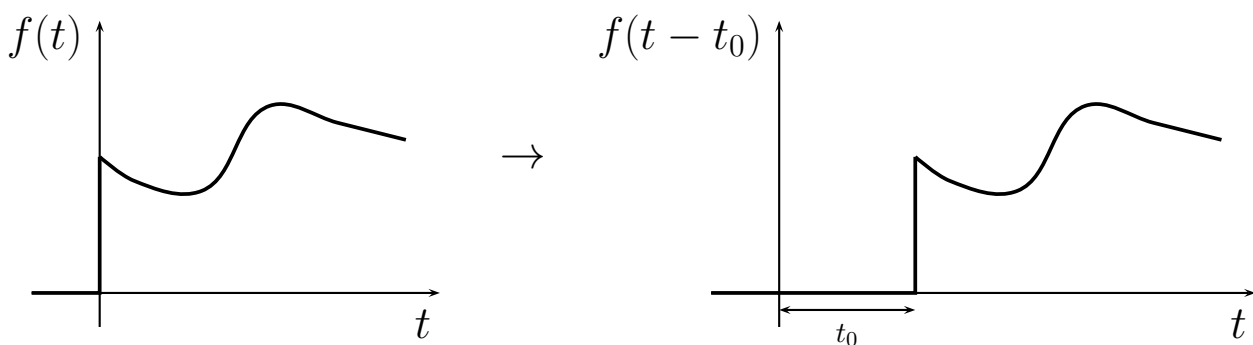
- **Linearità.** Dette c_1 e c_2 due costanti complesse arbitrarie, $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ due funzioni del tempo le cui trasformate siano rispettivamente $F_1(s)$ e $F_2(s)$, vale la relazione

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

- **Traslazione nel tempo.** Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$, nulla per $t < 0$. Vale la relazione

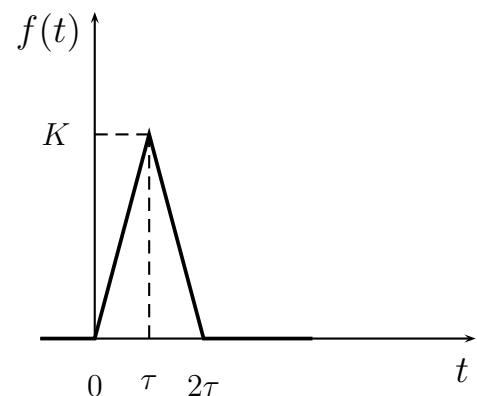
$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$$

cioè moltiplicare per la funzione $e^{-t_0 s}$ nello spazio trasformato vuol dire, nel tempo, traslare in ritardo la funzione $f(t)$ della quantità t_0 .



Esempio: Il segnale $f(t)$ è scomponibile nella somma di tre rampe, di pendenze K/τ , $-2K/\tau$ e K/τ , applicate rispettivamente agli istanti $t=0$, $t=\tau$ e $t=2\tau$ utilizzando il teorema della traslazione nel tempo, si deduce

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{K}{\tau s^2} (1 - 2e^{-\tau s} + e^{-2\tau s}) \\ &= \frac{K}{\tau s^2} (1 - e^{-\tau s})^2 \end{aligned}$$



- **Trasformata dell'integrale.** Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} F(s)$$

Moltiplicare per $\frac{1}{s}$ una funzione $F(s)$ vuol dire calcolare l'integrale del segnale $f(t)$.

- **Trasformata della derivata generalizzata.** Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione

$$\mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right] = s F(s) - f(0^-)$$

dove $f(0^-)$ è il valore che la funzione $f(t)$ assume all'istante $t = 0^-$. Nel caso di condizioni iniziali nulle, moltiplicare per s una funzione $F(s)$ vuol dire calcolare la derivata del segnale $f(t)$.

- **Teorema del valore iniziale.** Sia $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$. Vale la relazione:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s X(s)$$

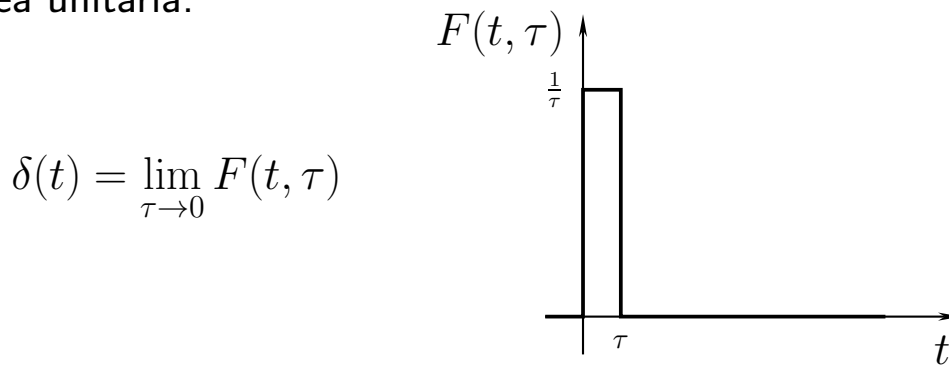
Questo teorema è valido per qualsiasi funzione $X(s)$.

- **Teorema del valore finale.** Sia $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$. Vale la relazione:

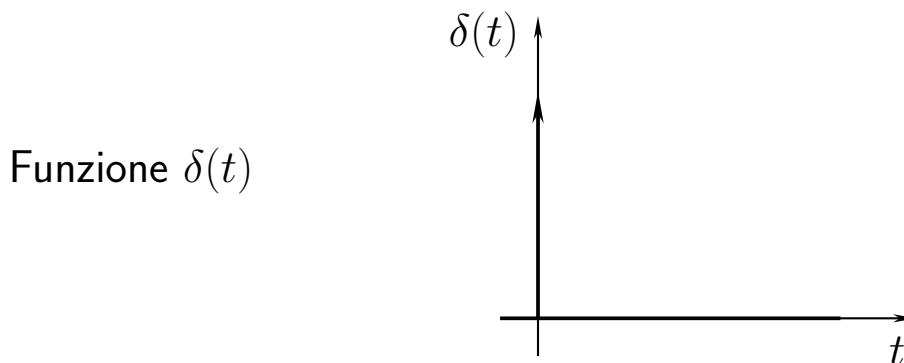
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s)$$

Questo teorema è valido solamente per funzioni $X(s)$ che abbiamo tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per un polo nell'origine.

- **Impulso di Dirac:** $\delta(t)$. È un segnale ideale che approssima un impulso di area unitaria.



- L'impulso di Dirac viene rappresentato nel modo seguente:



- La trasformata di Laplace dell'impulso di Dirac è:

$$F(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

Valgono infatti le seguenti relazioni:

$$F(s) = \mathcal{L}[\lim_{\tau \rightarrow 0} F(t, \tau)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{L}[F(t, \tau)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} F(s, \tau)$$

Essendo

$$F(s, \tau) = \frac{1}{\tau s} - \frac{1}{\tau s} e^{-\tau s} = \frac{1}{\tau s} (1 - e^{-\tau s})$$

si ha che

$$F(s) = \lim_{\tau \rightarrow 0} F(s, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{d\tau}(1 - e^{-\tau s})}{\frac{d}{d\tau}(\tau s)} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{s e^{-\tau s}}{s} = 1$$

- La risposta di un sistema all'impulso di Dirac coincide con l'antitrasformata della funzione di trasferimento:

$$Y(s) = G(s) \underbrace{X(s)}_1 = G(s) \quad \rightarrow \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$$

- **Teorema della traslazione in s .** Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:

$$\mathcal{L} [e^{-at} f(t)] = F(s + a)$$

- **Derivate di ordine superiore al primo.** Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$ e siano $f(0^-)$, $\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0^-}$, $\left. \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-}$, \dots le condizioni iniziali della funzione $f(t)$ e delle sue derivate all'istante 0^- . Valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right] &= s F(s) - f(0^-) \\ \mathcal{L} \left[\frac{d^2 f}{dt^2} \right] &= s^2 F(s) - s f(0^-) - \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0^-} \\ &\dots \dots \dots \\ \mathcal{L} \left[\frac{d^i f}{dt^i} \right] &= s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j \left. \frac{d^{i-j-1} f(t)}{dt^{i-j-1}} \right|_{t=0^-} \end{aligned}$$

- **Teorema della trasformata del prodotto integrale.** Siano $F_1(s)$ e $F_2(s)$ le trasformate di Laplace delle funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$. Vale la relazione

$$\mathcal{L} \left[\int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] = F_1(s) F_2(s)$$

L'integrale di convoluzione delle funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$ gode della proprietà commutativa:

$$\int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^\infty f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau$$

Funzione di trasferimento

- Si consideri l'equazione differenziale:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}$$

Sostituendo alle funzioni e alle loro derivate le rispettive trasformate, si ottiene la relazione

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i Y(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^i X(s) + \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j \left. \frac{d^{i-j-1} y(t)}{dt^{i-j-1}} \right|_{t=0^-}$$

in cui con $X(s)$ e $Y(s)$ si indicano le trasformate di Laplace dei segnali di ingresso e uscita $x(t)$ e $y(t)$.

- La trasformata di Laplace $Y(s)$ è data quindi dalla somma di due funzioni:

$$Y_0(s) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j \left. \frac{d^{i-j-1} y(t)}{dt^{i-j-1}} \right|_{t=0^-} \bigg/ \sum_{i=0}^n a_i s^i$$

$$Y_1(s) = \left(\sum_{i=0}^m b_i s^i \bigg/ \sum_{i=0}^n a_i s^i \right) X(s)$$

che sono, rispettivamente, le trasformate dell'*evoluzione libera* $y_0(t)$ e dell'*evoluzione forzata* $y_1(t)$.

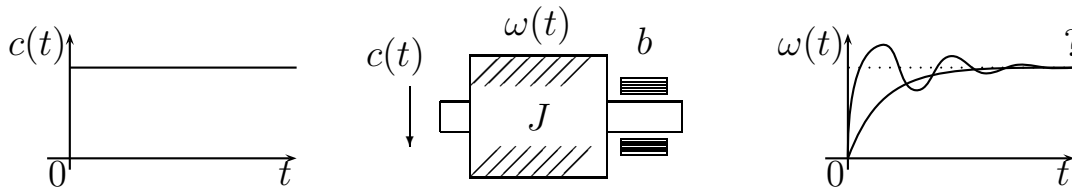
- La seguente funzione di trasferimento del sistema

$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

$X(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y_1(s)$

è definita a partire da *condizioni iniziali identicamente nulle*.

Esempio. Si consideri un elemento meccanico con inerzia J , coefficiente di attrito lineare b che ruota alla velocità angolare ω al quale venga applicata una coppia esterna $c(t)$.



Si richiede di determinare la risposta del sistema al gradino unitario.

Per rispondere esattamente a questa domanda occorre determinare il modello dinamico del sistema. L'equazione differenziale che caratterizza il sistema è la seguente:

$$\frac{d[J\omega(t)]}{dt} = c(t) - b\omega(t) \quad \Leftrightarrow \quad J\dot{\omega}(t) + b\omega(t) = c(t)$$

Partendo da condizioni iniziali nulle e trasformando secondo Laplace si ottiene:

$$J s \omega(s) + b \omega(s) = C(s) \quad \Leftrightarrow \quad \omega(s) = \frac{1}{b + J s} C(s)$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ che caratterizza il sistema è quindi la seguente:

$$G(s) = \frac{1}{b + J s} \quad \begin{array}{c} G(s) \\ \begin{array}{c} C(s) \rightarrow \boxed{\frac{1}{b + J s}} \rightarrow \omega(s) \\ c(t) \quad \quad \quad \omega(t) \end{array} \end{array}$$

I coefficienti di questa funzione sono in corrispondenza biunivoca con i coefficienti dell'equazione differenziale. Posto $C(s) = \frac{1}{s}$, la risposta al gradino del sistema in ambito trasformato è la seguente:

$$\omega(s) = G(s) C(s) \quad \rightarrow \quad \omega(s) = \frac{1}{(b + J s)s}$$

Alcune informazioni sull'andamento di $\omega(t)$ si possono ricavare direttamente da $\omega(s)$ anche senza antitrasformare. Applicando il teorema del valore iniziale, per esempio, si ricava il valore di $\omega(t)$ per $t = 0^+$:

$$\omega(0^+) = \omega(t)|_{t \rightarrow 0} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \omega(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{(b + J s)s} = 0$$

Applicando invece il teorema del valore finale si ricava il valore di $\omega(t)$ per $t \rightarrow \infty$:

$$\omega(\infty) = \omega(t)|_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \omega(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{(b + J s)s} = \frac{1}{b}$$

Applicando il teorema del valore iniziale è anche possibile calcolare il valore dell'accelerazione $\dot{\omega}(t)$ per $t = 0^+$:

$$\dot{\omega}(0^+) = \dot{\omega}(t)|_{t \rightarrow 0} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \underbrace{[s \omega(s)]}_{\dot{\omega}(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{(b + J s)s} = \frac{1}{J}$$

Infatti, in ambito trasformato, l'accelerazione $\dot{\omega}(s)$ si ottiene semplicemente moltiplicando la velocità $\omega(s)$ per la variabile s (che rappresenta l'operatore "derivata" di Laplace). Per ottenere esattamente l'andamento temporale $\omega(t)$ occorre antitrasformare la funzione $\omega(s)$. Il modo più semplice per farlo è utilizzare la scomposizione in fratti semplici. Nel caso in esame, esistono sempre due coefficienti α e β che permettono di scomporre la funzione $\omega(s)$ nel modo seguente:

$$\omega(s) = \frac{1}{(b + Js)s} \quad \leftrightarrow \quad \omega(s) = \frac{\alpha}{b + Js} + \frac{\beta}{s}$$

I coefficienti α e β si determinano (per esempio) imponendo l'uguaglianza fra le due espressioni:

$$\omega(s) = \frac{\alpha}{b + Js} + \frac{\beta}{s} = \frac{\alpha s + \beta(b + Js)}{(b + Js)s} = \frac{(\alpha + \beta J)s + \beta b}{(b + Js)s} = \frac{1}{(b + Js)s}$$

Risolvendo si ricava:

$$\begin{cases} \alpha + \beta J = 0 \\ \beta b = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{J}{b} \\ \beta = \frac{1}{b} \end{cases}$$

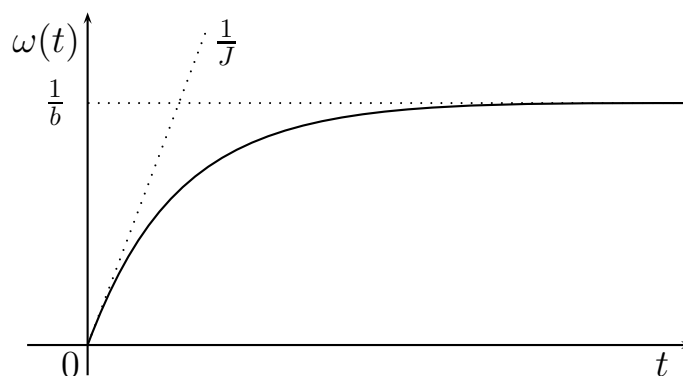
per cui si ha

$$\omega(s) = \frac{1}{(b + Js)s} = \frac{1}{b} \left[\frac{1}{s} - \frac{J}{b + Js} \right] = \frac{1}{b} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{b}{J}} \right]$$

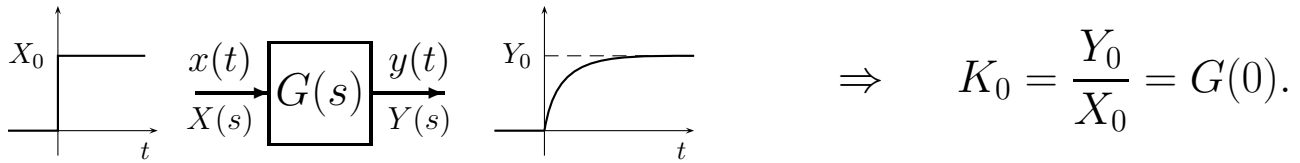
Antitrasformando i singoli elementi si ricava la funzione $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \frac{1}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{J}t} \right)$$

L'andamento temporale è di tipo esponenziale:



• Il **guadagno statico** K_0 di un sistema $G(s)$ è definito come il rapporto Y_0/X_0 tra l'ampiezza Y_0 del segnale in uscita $y(t)$ che si ottiene a regime quanto il sistema $G(s)$ è sollecitato in ingresso con un gradino costante di ampiezza X_0 .



Utilizzando il criterio del valore finale è facile dimostrare che il guadagno statico K_0 di un sistema $G(s)$ coincide con $G(0) = G(s)|_{s=0}$, cioè con il valore della funzione $G(s)$ per $s = 0$:

$$Y_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) \frac{X_0}{s} = G(0) X_0 \Rightarrow K_0 = \frac{Y_0}{X_0} = G(0).$$

Da un punto di vista pratico il guadagno statico è definibile solo per sistemi $G(s)$ asintoticamente stabili (gli unici per i quali l'uscita a regime tende ad un valore costante), ma per estensione è prassi parlare di guadagno statico $G(0)$ anche per i sistemi $G(s)$ instabili o semplicemente stabili.

• La risposta $y(t)$ al gradino unitario $x(t) = X_0 = 1$ di un sistema dinamico $G(s)$ gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} 1) \quad y(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0) \\ 2) \quad y(0^+) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = G(\infty) \\ 3) \quad \dot{y}(0^+) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{y}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s G(s) \\ 4) \quad \ddot{y}(0^+) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \ddot{y}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^3 Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 G(s) \\ &\vdots = \vdots \end{aligned}$$

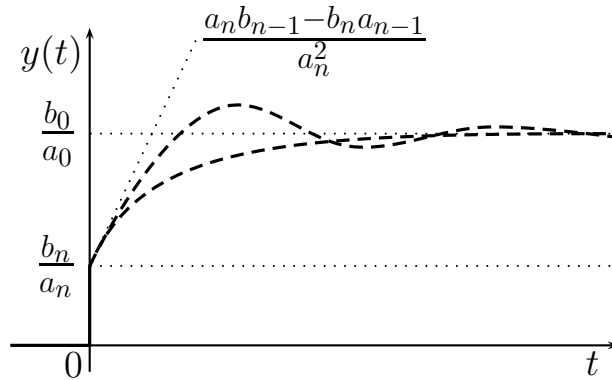
Queste proprietà si ottengono direttamente applicando il teorema del valore finale e il teorema del valore iniziale. La proprietà 1) vale solo per sistemi $G(s)$ asintoticamente stabili, mentre tutte le altre proprietà valgono per un qualunque sistema $G(s)$.

- Si consideri un sistema dinamico caratterizzato dalle seguente funzione $G(s)$:

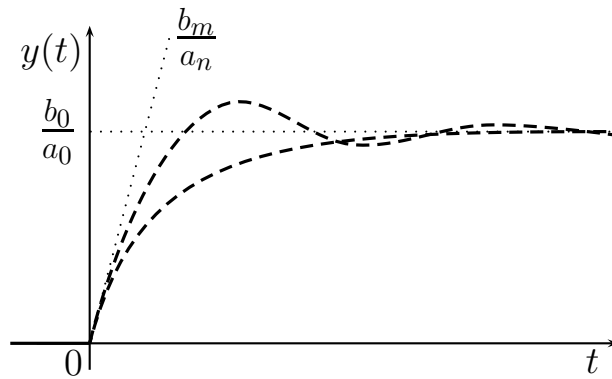
$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Se il sistema è fisicamente realizzabile ($n \geq m$) e asintoticamente stabile (tutti i poli della $G(s)$ sono a parte reale negativa), l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ del sistema $G(s)$ ad un gradino unitario $x(t) = 1$ è il seguente:

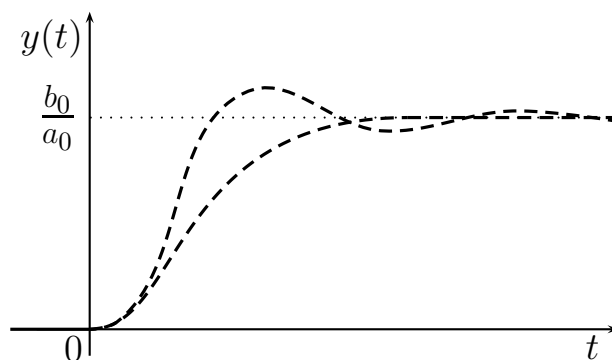
- 1) Per $n = m$:



- 2) Per $n = m + 1$:



- 3) Per $n \geq m + 2$:



Infatti nel caso 1), quando il grado relativo è nullo, la funzione $G(s)$ può sempre essere riscritta nel seguente modo:

$$G(s) = \frac{b_n}{a_n} + \frac{(b_{n-1} - \frac{b_n}{a_n} a_{n-1}) s^{n-1} + (b_{n-2} - \frac{b_n}{a_n} a_{n-2}) s^{n-2} + \dots}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

dove $\frac{b_n}{a_n}$ è un guadagno che moltiplica il gradino unitario in ingresso.

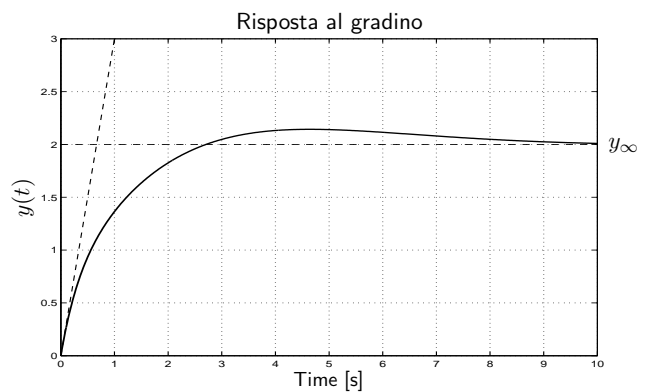
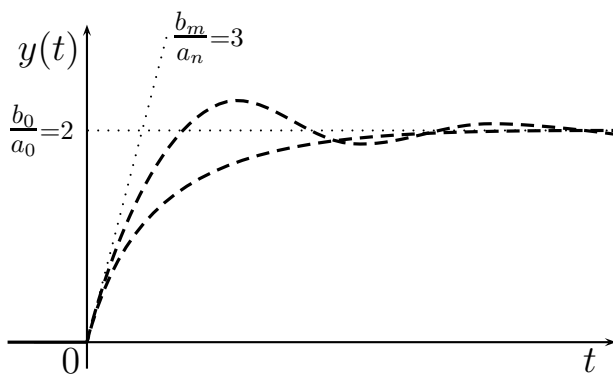
Esempio. Calcolare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ al gradino unitario della seguente equazione differenziale:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = 3\ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) + 2x(t)$$

Utilizzando la trasformata di Laplace si ricava immediatamente la funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{3s^2 + 5s + 2}{s^3 + 4s^2 + 3s + 1}$$

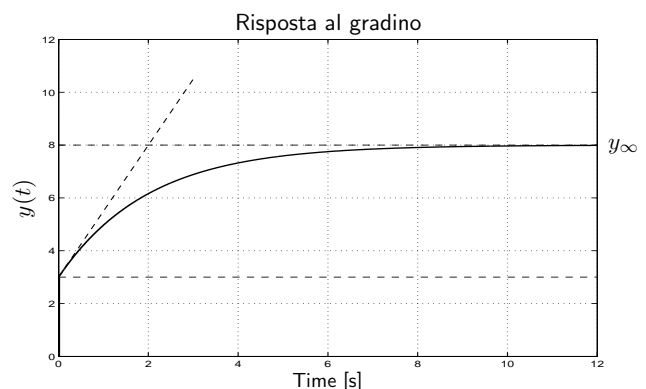
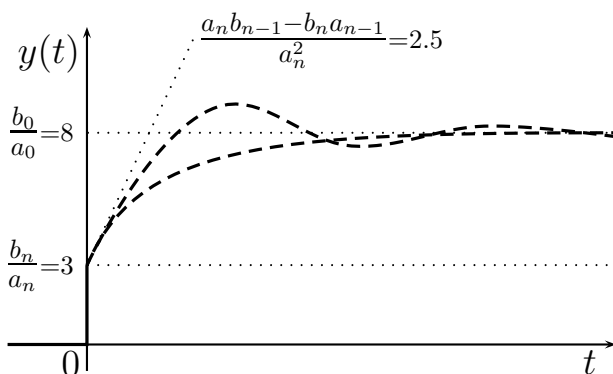
In questo caso il grado relativo della funzione $G(s)$ è $r = n - m = 1$ per cui l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ al gradino unitario è il seguente:



Esempio. Calcolare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ al gradino unitario della seguente funzione di trasferimento $G(s)$:

$$G(s) = \frac{6s + 8}{2s + 1}$$

In questo caso il grado relativo della funzione $G(s)$ è nullo per cui l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ al gradino unitario è il seguente:



La funzione $G(s)$ può infatti essere riscritta nel seguente modo:

$$G(s) = 3 + \frac{5}{2s + 1}$$

Il primo termine corrisponde al gradino di ampiezza 3, mentre il secondo termine rappresenta un segnale di ampiezza 5 la cui pendenza iniziale è $\frac{5}{2} = 2.5$.

Esercizi sull'utilizzo delle Trasformate di Laplace

1. Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali $x(t)$:

$$x_1(t) = 2(1 + t^2) e^{5t}, \quad x_2(t) = 4 + 3 e^{-3t} \sin(7t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{2}{(s-5)} + \frac{4}{(s-5)^3}, \quad X_2(s) = \frac{4}{s} + \frac{21}{(s+3)^2 + 7^2}$$

2. Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali $x(t)$:

$$x_1(t) = 2 e^{5t} \sin(8t), \quad x_2(t) = 2 t^2 e^{-4t}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{16}{(s-5)^2 + 64}, \quad X_2(s) = \frac{4}{(s+4)^3}$$

3. Scrivere, in funzione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3s^2 + b}{s(s^2 + 2s + a)}$$

Soluzione:

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + ay(t) = 3\ddot{x}(t) + bx(t)$$

4. Calcolare la trasformata $Y(s)$ del segnale di uscita corrispondente all'equazione differenziale $3\dot{y}(t) + 4y(t) = 0$ con condizione iniziale $y(0)$. Soluzione. Si trasforma secondo Laplace l'equazione differenziale:

$$\mathcal{L}[3\dot{y}(t) + 4y(t) = 0] \quad \rightarrow \quad 3[sY(s) - y(0)] + 4Y(s) = 0$$

da cui si ricava:

$$Y(s) = \frac{3y(0)}{3s + 4} = \frac{y(0)}{s + \frac{4}{3}} \quad \rightarrow \quad y(t) = y(0) e^{-\frac{4}{3}t}$$

5. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+}$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{bs + 3}{(s+b)(s-a) + 2} \quad \rightarrow \quad y_0 = b$$

6. Calcolare il valore il valore finale $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty}$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s-a}{(bs+3)s} \quad \rightarrow \quad y_\infty = -\frac{a}{3}$$