

Scomposizione in fratti semplici

- La determinazione dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata di un sistema lineare stazionario richiede l'antitrasformazione di una funzione razionale fratta di questo tipo:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} := \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- La differenza $r = n - m$ fra i gradi del denominatore e del numeratore prende il nome di **grado relativo** della funzione razionale $Y(s)$.
- La funzione $Y(s)$ può essere *scomposta in fratti semplici* solo se è strettamente propria, cioè se presenta un grado relativo $r \geq 1$. Se la funzione $Y(s)$ ha grado relativo $r = 0$ può essere scomposta nel seguente modo:

$$Y(s) = y_0 + Y_1(s)$$

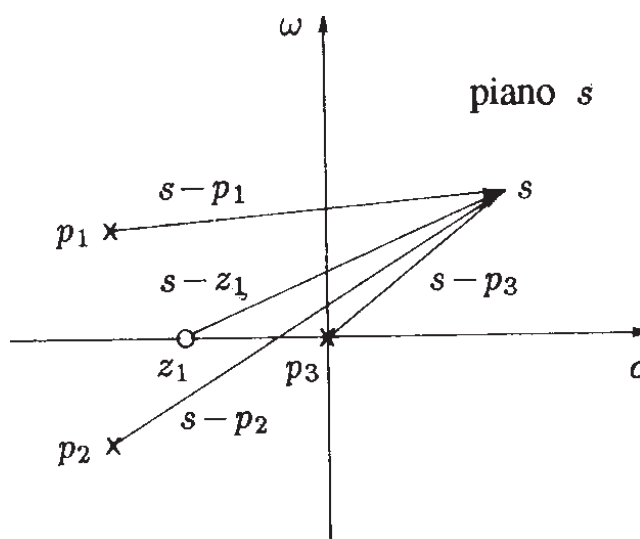
dove la costante y_0 e la funzione $Y_1(s)$, con grado relativo $r \geq 1$, sono:

$$y_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} Y(s), \quad Y_1(s) = Y(s) - y_0.$$

- La funzione $Y(s)$ può sempre essere espressa anche in forma fattorizzata:

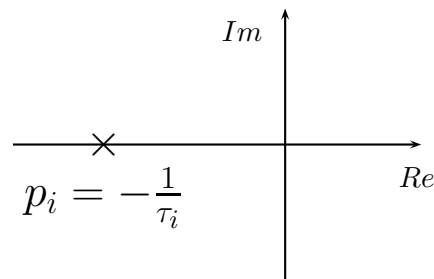
$$Y(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

- Le costanti complesse z_1, \dots, z_m e p_1, \dots, p_n vengono dette, rispettivamente, **zeri** e **poli** della funzione $Y(s)$.
- Valutazione grafica della funzione $Y(s)$:



- Ad ogni *polo reale* p_i della funzione $Y(s)$ viene associata una **costante di tempo** τ_i così definita:

$$\tau_i = -\frac{1}{p_i}$$



La costante di tempo τ_i è positiva solo se il polo reale p_i è negativo. In modo analogo, per gli *zeri reali* z_j vale la relazione: $\tau_j = -1/z_j$.

- Nel caso di *poli complessi coniugati*, $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$, (σ è la parte reale e ω è la parte immaginaria del polo) si utilizza anche la seguente parametrizzazione di “tipo polare”:

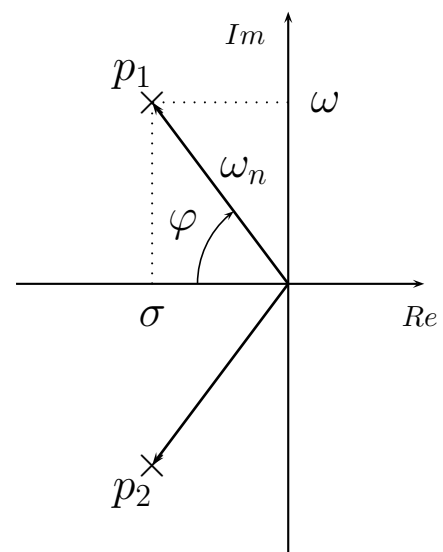
$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \sigma \pm j\omega \\ &= -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} \\ &= -\omega_n \cos\varphi \pm j\omega_n \sin\varphi \end{aligned}$$

dove ω_n è detta pulsazione naturale:

$$\omega_n = |p_1| = |p_2| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$$

e δ è detto coefficiente di smorzamento:

$$\delta = \cos\varphi = \frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}$$



Valgono le relazioni seguenti:

$$\sigma = -\delta\omega_n, \quad \omega = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$

- In relazione all'antitrasformazione si distinguono due casi:

- tutti i poli della funzione $Y(s)$ sono semplici;
- la funzione $Y(s)$ ha anche poli multipli.

Antitrasformazione nel caso di poli semplici

- Nel caso di poli semplici la funzione può essere scomposta come segue:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i}$$

- Le costanti K_i (dette *residui*) sono reali in corrispondenza dei poli reali e complesse coniugate in corrispondenza delle coppie di poli complessi coniugati. Le costanti K_i si ricavano utilizzando la seguente formula:

$$K_i = (s - p_i)Y(s) \Big|_{s=p_i}$$

- Una volta che la funzione $Y(s)$ è stata scomposta in fratti semplici, è immediato antitrasformarla:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}$$

- Esempio. Sia

$$Y(s) := \frac{5s + 3}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} = \frac{K_1}{s + 1} + \frac{K_2}{s + 2} + \frac{K_3}{s + 3}$$

I residui si calcolano nel modo seguente:

$$K_1 = \frac{5(-1) + 3}{(-1 + 2)(-1 + 3)} = -1$$

$$K_2 = \frac{5(-2) + 3}{(-2 + 1)(-2 + 3)} = 7$$

$$K_3 = \frac{5(-3) + 3}{(-3 + 1)(-3 + 2)} = -6$$

per cui si può scrivere

$$Y(s) = -\frac{1}{s + 1} + \frac{7}{s + 2} - \frac{6}{s + 3}$$

e quindi

$$y(t) = -e^{-t} + 7e^{-2t} - 6e^{-3t}$$

Quando si hanno coppie di *poli complessi coniugati*

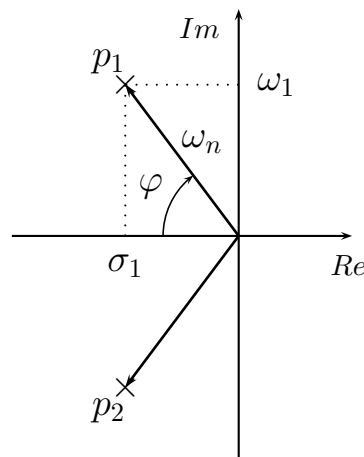
$$p_1 = \sigma_1 + j\omega_1, \quad p_2 = \sigma_1 - j\omega_1$$

anche i residui sono complessi coniugati

$$K_1 = u_1 + jv_1, \quad K_2 = u_1 - jv_1$$

La somma di fratti semplici ad essi relativa è

$$\frac{u_1 + jv_1}{s - \sigma_1 - j\omega_1} + \frac{u_1 - jv_1}{s - \sigma_1 + j\omega_1}$$



Posto

$$M_1 := 2|K_1| = 2\sqrt{u_1^2 + v_1^2}, \quad \varphi_1 := \arg K_1 = \arg(u_1 + jv_1),$$

si può scrivere

$$\frac{M_1}{2} \left(\frac{e^{j\varphi_1}}{s - \sigma_1 - j\omega_1} + \frac{e^{-j\varphi_1}}{s - \sigma_1 + j\omega_1} \right),$$

da cui, antitrasformando, si ottiene

$$\frac{M_1}{2} (e^{\sigma_1 t + j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{\sigma_1 t - j(\omega_1 t + \varphi_1)}),$$

funzione che può essere posta nella forma

$$M_1 e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

oppure

$$M_1 e^{\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1 + \pi/2)$$

Esempio. Sia:

$$Y(s) := \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 1 - j2} + \frac{K_3}{s + 1 + j2}$$

I residui sono i seguenti:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{7 \cdot 0 - 8 \cdot 0 + 5}{(0 + 1 - j2)(0 + 1 + j2)} = 1 \\ K_2 &= \frac{7(-1 + j2)^2 - 8(-1 + j2) + 5}{(-1 + j2)(-1 + j2 + 1 + j2)} = 3 + j4 \\ K_3 &= \frac{7(-1 - j2)^2 - 8(-1 - j2) + 5}{(-1 - j2)(-1 - j2 + 1 - j2)} = 3 - j4 \end{aligned}$$

e pertanto

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3 + j4}{s + 1 - j2} + \frac{3 - j4}{s + 1 + j2},$$

da cui, antitrasformando,

$$y(t) = 1 + 10 e^{-t} \cos(2t + \varphi),$$

dove $10 = 2|K_2| = 2\sqrt{3^2 + 4^2}$ e $\varphi = \arctan(4/3) = 53.13^\circ$.

Antitrasformazione nel caso di poli multipli

- Si suppone che la funzione razionale $Y(s)$ abbia h poli distinti p_i ($i = 1, \dots, h$), ciascuno caratterizzato da un ordine di molteplicità $r_i \geq 1$:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)^{r_1} (s - p_2)^{r_2} \dots (s - p_h)^{r_h}} = \sum_{i=1}^h \sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(s - p_i)^{r_i - \ell + 1}}$$

- Le costanti $K_{i\ell}$ si ricavano mediante la formula

$$K_{i\ell} = \frac{1}{(\ell - 1)!} \frac{d^{\ell-1}}{ds^{\ell-1}} \left[(s - p_i)^{r_i} Y(s) \right] \Big|_{s=p_i}$$

dove ($i = 1, \dots, h; \ell = 1, \dots, r_i$). Antitrasformando la $Y(s)$ si ottiene:

$$y(t) = \sum_{i=1}^h \sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(r_i - \ell)!} t^{r_i - \ell} e^{p_i t}$$

- I coefficienti $K_{i\ell}$ sono complessi coniugati in corrispondenza di poli complessi coniugati. I termini complessi coniugati corrispondono a prodotti di esponenziali reali e funzioni trigonometriche, e si ottengono con un procedimento del tutto analogo a quello seguito nel caso di poli distinti.
- Esempio:

$$Y(s) = \frac{1}{(s + 2)(s + 1)^2} = \frac{K_{11}}{s + 2} + \frac{K_{22}}{s + 1} + \frac{K_{21}}{(s + 1)^2}$$

dove

$$K_{11} = [(s + 2) Y(s)] \Big|_{s=-2} = 1$$

$$K_{22} = \frac{d}{ds} [(s + 1)^2 Y(s)] \Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s + 2} \right] \Big|_{s=-1} = -1$$

$$K_{21} = [(s + 1)^2 Y(s)] \Big|_{s=-1} = 1$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(t) = e^{-2t} - e^{-t} + t e^{-t}$$

Sviluppi in somme di fratti semplici

- Si consideri il rapporto di polinomi

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- Valgono le seguenti proprietà:

i) se è $n = m + 1$, la somma dei residui di $Y(s)$ è $\frac{b_m}{a_n}$;

ii) se è $n > m + 1$, la somma dei residui di $Y(s)$ è zero.

Si ricorda che, nello sviluppo in fratti, i residui di $Y(s)$ sono i coefficienti dei termini con polinomio a denominatore di primo grado.

- Esempio 1:

$$Y(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} = \frac{A}{s - p_1} + \frac{B}{s - p_2} + \frac{C}{s - p_3}$$

Calcolati A e B , il calcolo del residuo C è immediato: $C = -(A + B)$.

- Esempio 2:

$$Y(s) = \frac{1}{(s - p_1)^2 (s - p_2)} = \frac{A}{(s - p_1)^2} + \frac{B}{s - p_1} + \frac{C}{s - p_2}$$

Il coefficiente A e il residuo C si possono calcolare immediatamente:

$$A = \frac{1}{p_1 - p_2}, \quad C = \frac{1}{(p_2 - p_1)^2}$$

Applicando la proprietà ii si deduce: $B = -C$.

- Esempio 3:

$$Y(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)^3 (s - p_2)} = \frac{A}{(s - p_1)^3} + \frac{B}{(s - p_1)^2} + \frac{C}{s - p_1} + \frac{D}{s - p_2}$$

Il coefficiente A e il residuo D si calcolano immediatamente. Applicando la proprietà ii si deduce: $C = -D$. Moltiplicando ambo i membri dello sviluppo per $(s - p_1)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{s - z_1}{(s - p_1)^2 (s - p_2)} &= \frac{A}{(s - p_1)^2} + \frac{B}{s - p_1} + C + D \frac{s - p_1}{s - p_2} \\ &= \frac{A}{(s - p_1)^2} + \frac{B}{s - p_1} + \frac{E}{s - p_2} \end{aligned}$$

da cui si calcola

$$E = \frac{p_2 - z_1}{(p_2 - p_1)^2}$$

Applicando la proprietà ii al nuovo sviluppo, si ottiene $B = -E$.

Approccio diretto all'antitrasformazione: poli semplici

- Nel caso in cui la funzione $Y(s)$ sia posta nella seguente forma:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s+a_1) \dots (s+a_p) [(s+\sigma_1)^2 + \omega_1^2] \dots [(s+\sigma_q)^2 + \omega_q^2]}$$

caratterizzata da p poli reali semplici in $p_i = -a_i$ e da q poli complessi coniugati semplici in $p_j = -\sigma_j \pm j\omega_j$, la funzione antitrasformata $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ può essere calcolata anche nel seguente modo:

$$y(t) = \sum_{i=1}^p K_i e^{-a_i t} + \sum_{j=1}^q \frac{|\bar{H}_j|}{\omega_j} e^{-\sigma_j t} \sin(\omega_j t + \arg \bar{H}_j)$$

dove i coefficienti K_i e \bar{H}_j si calcolano utilizzando le seguenti formule:

$$\begin{aligned} K_i &= (s+a_i) Y(s) \Big|_{s=-a_i} \\ \bar{H}_j &= [(s+\sigma_j)^2 + \omega_j^2] Y(s) \Big|_{s=-\sigma_j + j\omega_j} \end{aligned}$$

Esempio. Si calcoli la risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Occorre antitrasformare la seguente funzione di uscita:

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

La funzione $Y(s)$ ha poli semplici in 0 e in $-\delta\omega_n \pm j\omega$ dove $\omega = \omega_n \sqrt{1-\delta^2}$. I coefficienti K_1 e \bar{H}_1 hanno il seguente valore:

$$\begin{aligned} K_1 &= s Y(s) \Big|_{s=0} = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \Big|_{s=0} = 1 \\ \bar{H}_1 &= (s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2) Y(s) \Big|_{s=-\delta\omega_n + j\omega} = \frac{\omega_n^2}{-\delta\omega_n + j\omega} = \omega_n e^{j(-\pi+\varphi)} \end{aligned}$$

dove $\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} = \arccos \delta$. Il calcolo di $y(t)$ è ora immediato:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + \frac{\omega_n}{\omega} e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t - \pi + \varphi) \\ &= 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Modi della risposta temporale

- L'unica difficoltà nell'antitrasformazione di funzioni razionali fratte $Y(s)$ è la fattorizzazione del polinomio a denominatore.
- Il comportamento temporale della funzione antitrasformata $y(t)$ è essenzialmente legato alla posizione dei poli p_i della funzione $Y(s)$. Ai poli semplici $s_i = -\sigma$ e ai poli complessi coniugati $s_j = -\sigma \pm j\omega$ sono associati termini temporali $y_i(t)$ e $y_j(t)$, detti *modi*, del seguente tipo:

$$(s + \sigma) \Rightarrow y_i(t) = K e^{-\sigma t}$$

$$(s + \sigma)^2 + \omega^2 \Rightarrow y_j(t) = M e^{-\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

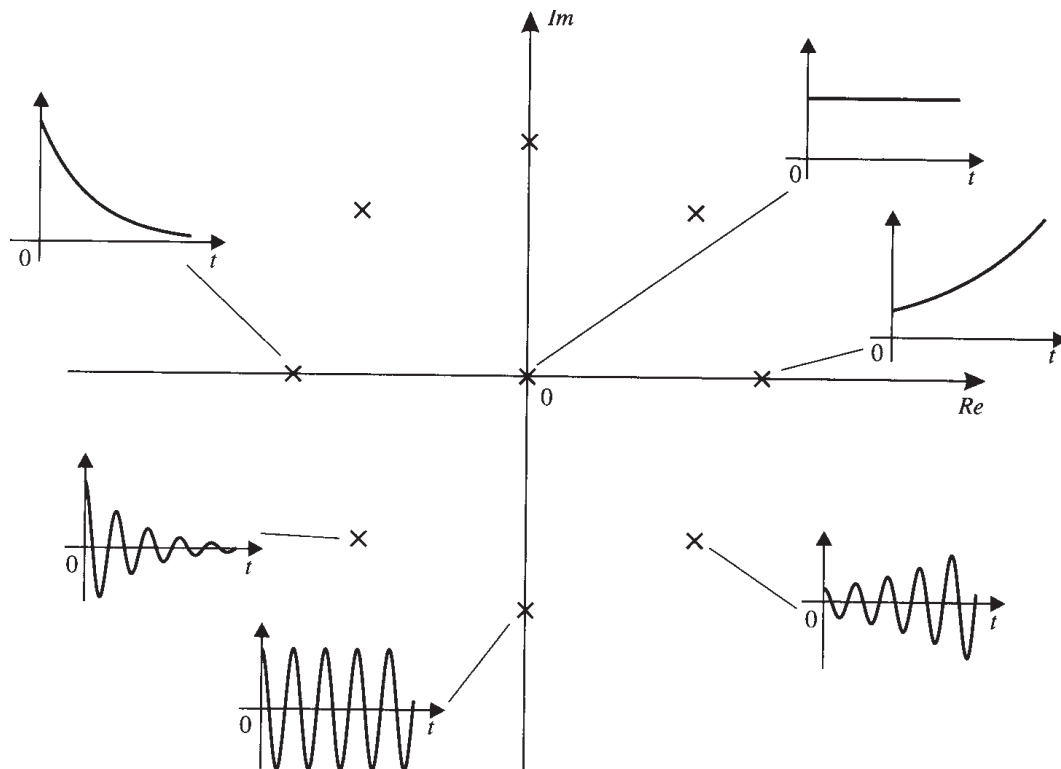
Nel caso di poli multipli con grado molteplicità r si hanno i seguenti *modi*:

$$(s + \sigma)^r \Rightarrow y_i(t) = \sum_{n=0}^r K_n t^n e^{-\sigma t}$$

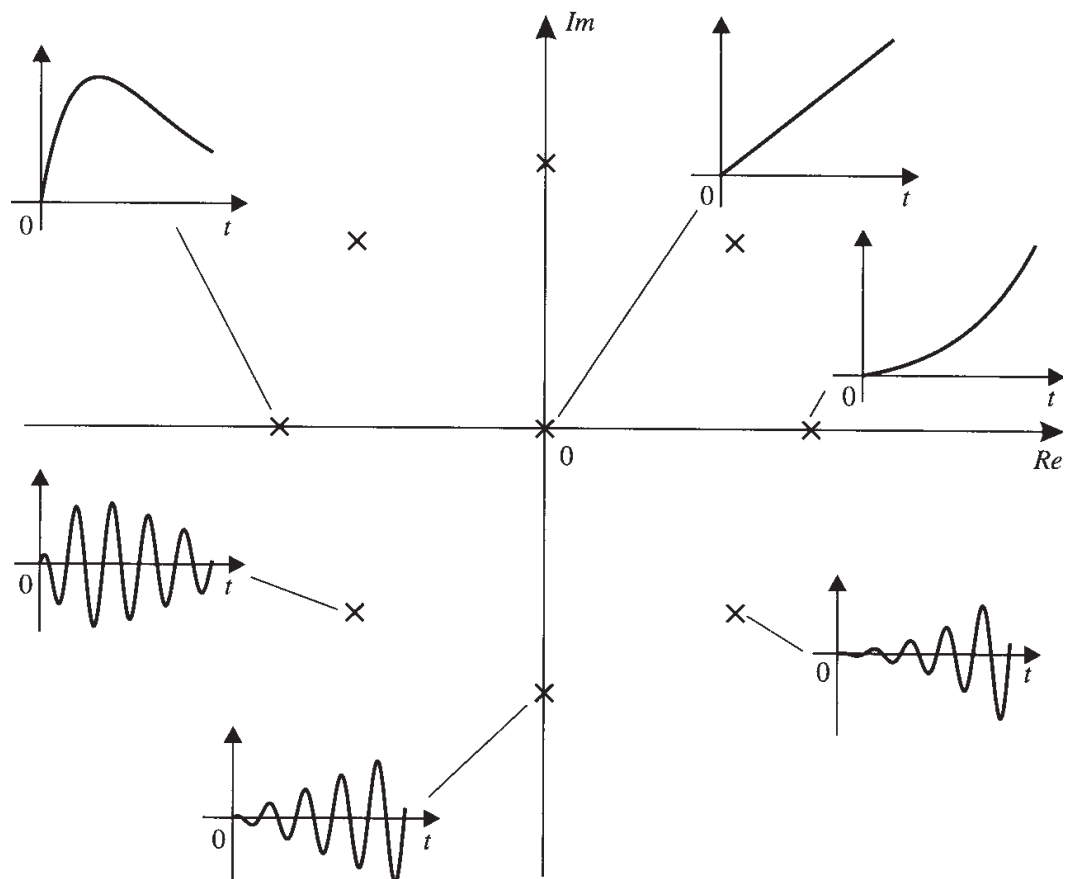
$$[(s + \sigma)^2 + \omega^2]^r \Rightarrow y_j(t) = \sum_{n=0}^r M_n t^n e^{-\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

- Nel caso di *poli semplici*, i modi $y_i(t)$ e $y_j(t)$ tendono a zero per t tendente all'infinito se la parte reale del polo è negativa ($-\sigma < 0$), restano limitati se essa è nulla ($\sigma = 0$) e divergono se essa è positiva ($-\sigma > 0$).
- Nel caso di *poli multipli*, i modi tendono a zero se la parte reale del polo è negativa ($-\sigma < 0$) e divergono se essa è positiva o nulla ($-\sigma \geq 0$).
- L'antitrasformata $y(t)$ di una funzione razionale fratta $Y(s)$ rimane limitata se e solo se la funzione $Y(s)$ non presenta alcun polo a parte reale positiva e gli eventuali poli a parte reale nulla sono semplici. In caso contrario la funzione $y(t)$ diverge.
- I poli che caratterizzano la risposta $Y(s) = G(s)X(s)$ di un lineare sistema $G(s)$ ad un segnale in ingresso $X(s)$ (come l'impulso di Dirac, il gradino, la sinusoide) sono quelli della funzione di trasferimento $G(s)$ più quelli relativi al segnale di ingresso $X(s)$.
- Un *sistema* $G(s)$ è *asintoticamente stabile* se tutti i suoi poli sono a parte reale negativa: in questo caso tutti i modi $y_i(t)$ e $y_j(t)$ associati ai poli della funzione $G(s)$ tenderanno sicuramente a zero quando t tendente all'infinito.

• Modi della risposta nel caso di poli distinti ($r = 1$):



• Modi della risposta nel caso di poli multipli ($r = 2$):



Esercizi sulla scomposizione in fratti semplici

Calcolare la risposta impulsiva $g(t)$ delle seguenti funzioni $G(s)$:

1. Somma di funzioni note.

$$G(s) = 3 + \frac{10}{(s+5)^3} \quad \rightarrow \quad g(t) = 3\delta(t) + 5t^2e^{-5t}$$

2. Funzione razionale fratta a grado relativo $r = 0$.

$$G(s) = \frac{s+10}{s+a} = g_0 + G_1(s)$$

In questo caso la funzione $G(s)$ va riscritta come somma di una costante g_0 e di una funzione $G_1(s)$ a grado relativo $r \geq 1$:

$$g_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 1, \quad G_1(s) = G(s) - g_0 = \frac{(10-a)}{s+a}$$

Si procede quindi ad antitrasformare i singoli termini:

$$G(s) = 1 + \frac{(10-a)}{s+a} \quad \rightarrow \quad g(t) = \delta(t) + (10-a)e^{-at}$$

3. Funzione con ritardo puro.

$$G(s) = \frac{e^{-t_0 s}}{s^2} \quad \rightarrow \quad g(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ t - t_0 & t \geq t_0 \end{cases}$$

In questo caso si calcola l'antitrasformata $g_1(t) = t$ della funzione $G_1(s) = \frac{1}{s^2}$ che si ottiene dalla $G(s)$ togliendo il ritardo. La funzione cercata $g(t)$ si ottiene traslando nel tempo la funzione $g_1(t)$ di una quantità pari al ritardo t_0 e ricordando che la funzione $g(t)$ dovrà essere nulla per $t \leq t_0$.

4. Funzione $G(s)$ posta nella forma fattorizzata poli-zeri.

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

In questo caso è possibile scomporre la funzione in fratti semplici utilizzando la regola dei residui:

$$K_1 = s G(s) \Big|_{s=0} = 1, \quad K_2 = (s+1) G(s) \Big|_{s=-1} = -2, \quad K_3 = (s+2) G(s) \Big|_{s=-2} = 1$$

In questo caso in cui il grado relativo della funzione $G(s)$ è maggiore o uguale a 2, si può verificare che la somma dei residui è nulla: $K_1 + K_2 + K_3 = 0$. Antitrasformando si ottiene quindi che:

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \quad \rightarrow \quad g(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}$$

5. Funzione $G(s)$ posta nella forma fattorizzata mista.

$$G(s) = \frac{7}{(4s+1)(s+2)^2}$$

In questo caso, per non commettere errori, prima di antitrasformare è bene porre la funzione $G(s)$ nella forma fattorizzata poli zeri:

$$G(s) = \frac{7}{4(s+0.25)(s+2)^2} = \frac{K_1}{s+0.25} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{(s+2)^2}$$

In questo caso i termini più facili da calcolare sono K_1 e K_3 :

$$K_1 = (s+0.25) G(s) \Big|_{s=-0.25} = \frac{7}{4(-0.25+2)^2} = \frac{4}{7}, \quad K_3 = (s+2)^2 G(s) \Big|_{s=-2} = \frac{7}{4(-2+0.25)} = -1$$

Il termine K_2 può essere facilmente calcolato ricordando che, in questo caso, la somma dei residui è nulla, $K_1 + K_2 = 0$, per cui si ha che $K_2 = -K_1 = -\frac{4}{7}$. Antitrasformando si ottiene quindi che:

$$G(s) = \frac{4}{7(s+0.25)} - \frac{4}{7(s+2)} - \frac{1}{(s+2)^2} \quad \rightarrow \quad g(t) = \frac{4}{7}e^{-0.25t} - \frac{4}{7}e^{-2t} - te^{-2t}$$

6. Funzione $G(s)$ caratterizzata solo da 2 poli complessi coniugati.

$$G(s) = \frac{as+b}{(s+\sigma)^2 + \omega^2}$$

In questo caso si cerca di scomporre la funzione $G(s)$ in due termini, uno proporzionale al seno e l'altro proporzionale al coseno:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{a(s+\sigma-\sigma)+b}{(s+\sigma)^2 + \omega^2} = \frac{a(s+\sigma) + (b-a\sigma)}{(s+\sigma)^2 + \omega^2} \\ &= a \frac{(s+\sigma)}{(s+\sigma)^2 + \omega^2} + \frac{(b-a\sigma)}{\omega} \frac{\omega}{(s+\sigma)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Il fatto che ad ogni termine in s sia associato un termine additivo $+\sigma$ indica che le corrispondenti funzioni $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$ devono essere moltiplicate per un termine esponenziale $e^{-\sigma t}$. Antitrasformando si ottiene quindi la seguente funzione:

$$g(t) = a e^{-\sigma t} \cos(\omega t) + \frac{(b-a\sigma)}{\omega} e^{-\sigma t} \sin(\omega t)$$

7. Funzione $G(s)$ espressa come somme e prodotto di fattori.

$$G(s) = \left[\frac{3b}{(s+a)^2} + 4 \right] \frac{1}{(s+a)^2}$$

In questo caso si riscrive la funzione $G(s)$ come somma di fattori e poi si antitrasforma:

$$G(s) = \frac{3b}{(s+a)^4} + \frac{4}{(s+a)^2} \quad \rightarrow \quad g(t) = \frac{3b}{6} t^3 e^{-at} + 4 t e^{-at}$$