Sviluppo in serie di Fourier

- Consideriamo una funzione periodica $\overline{f}$ di periodo T:

$$\overline{f}(t) = \overline{f}(t+T) \quad \forall t$$

- Qualunque funzione periodica di periodo T può essere rappresentata mediante lo sviluppo in serie di Fourier:

$$\overline{f}(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n\, e^{jn\omega_0 t}$$

dove

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad\qquad e^{j\omega\, t} = \cos(\omega\, t) + j\, \sin(\omega\, t)$$

- Lo sviluppo in serie di Fourier può essere rappresentato con formule equivalenti:

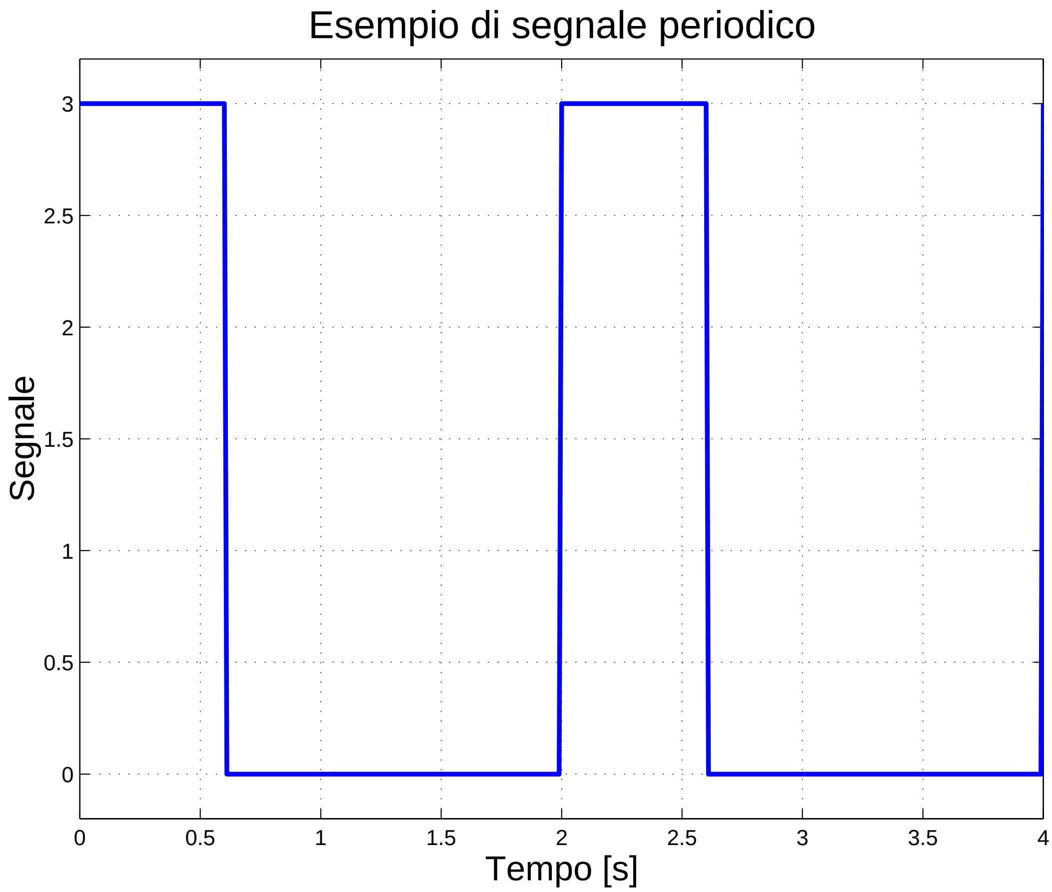
$$\begin{aligned}
\overline{f}(t) \;&=\; \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n\, e^{jn\omega_0 t}\\
\overline{f}(t) \;&=\; a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} r_n\, \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)\\
\overline{f}(t) \;&=\; a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n\, \cos(n\omega_0 t) + b_n\, \sin(n\omega_0 t)
\end{aligned}$$

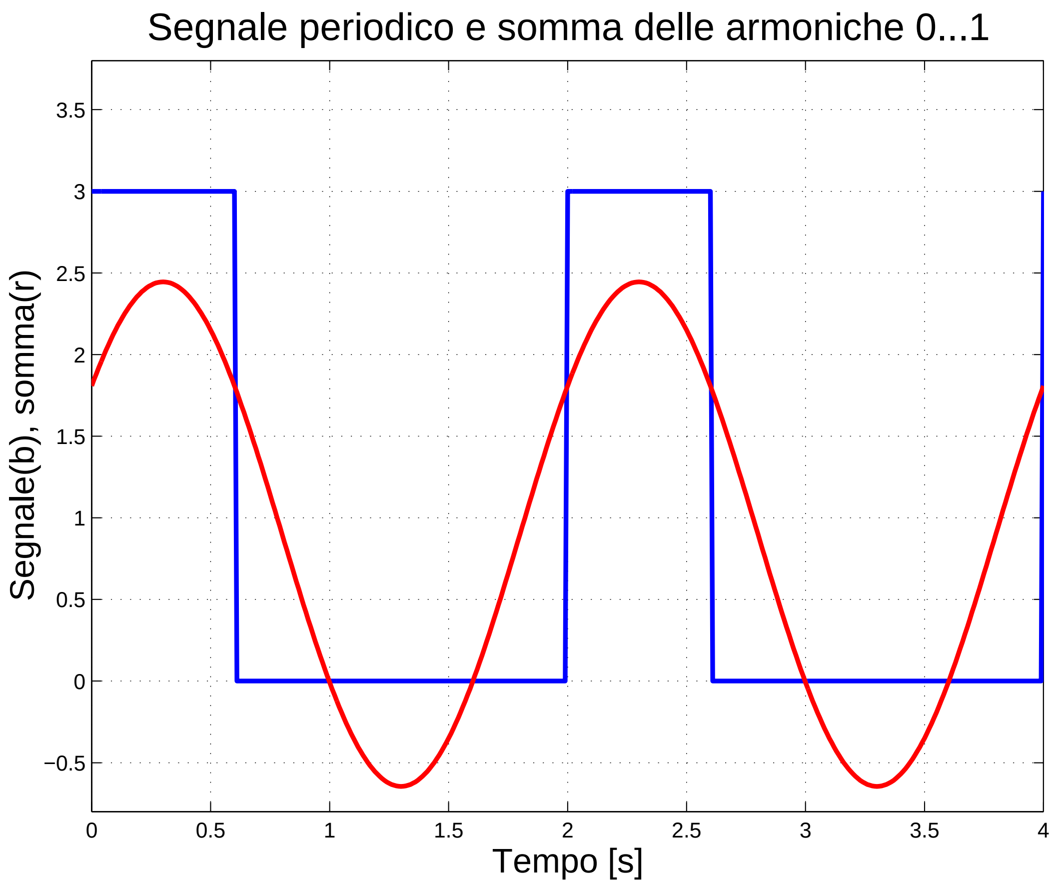
- Il termine costante a_0 è detto componente continua e coincide con il valore medio di $\overline{f}(t)$ in un periodo.

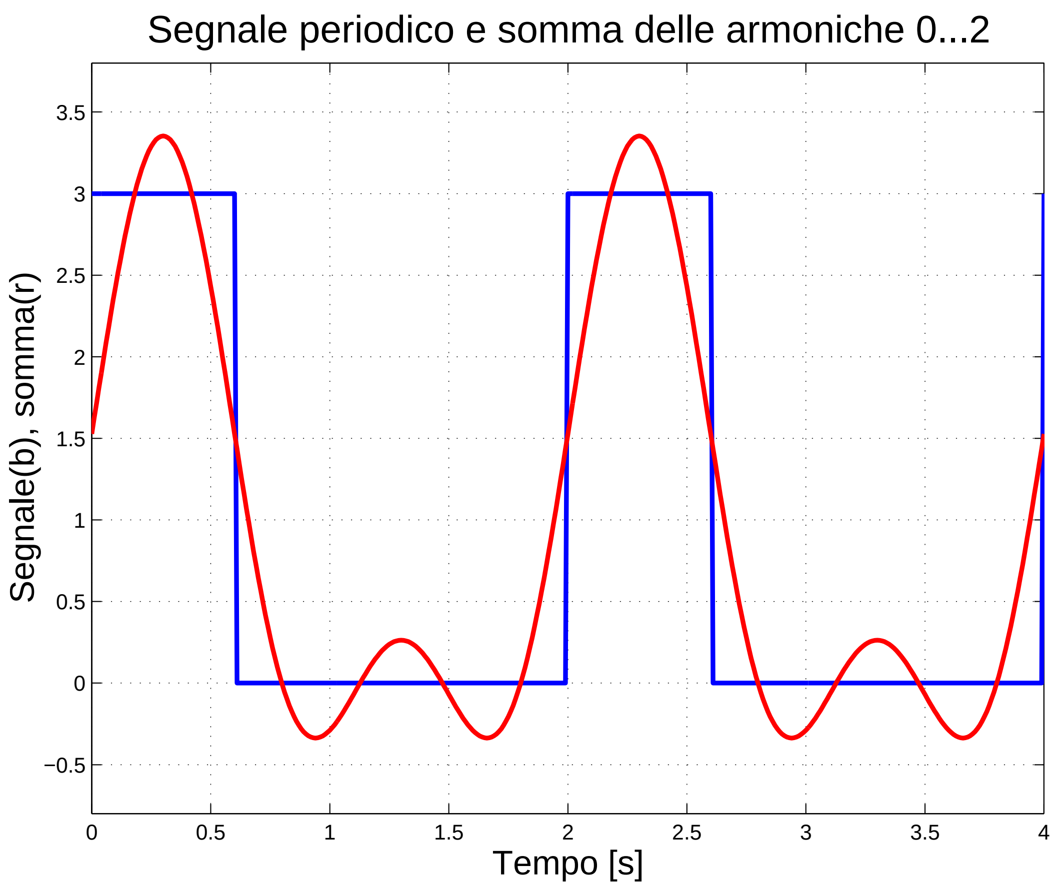
- Qualunque funzione periodica è quindi "scomponibile" nella somma di infinite funzioni sinusoidali con periodo ∞ (componente continua), T, $T/2$,..., T/n ,... o equivalentemente con pulsazione 0, ω_0, $2\omega_0$,..., $n\,\omega_0$,...

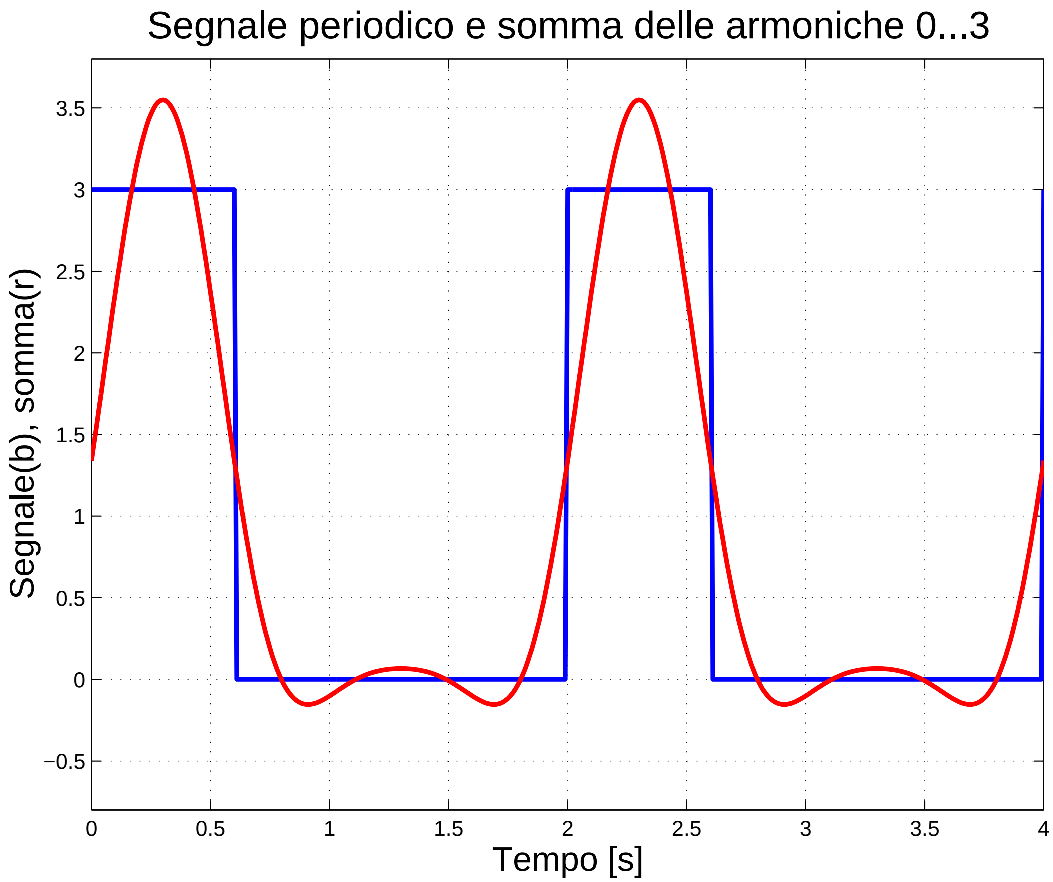
- Le componenti sinusoidali di un segnale periodico sono dette armoniche. La sinusoide $r_1\, \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$ avente lo stesso periodo della funzione $\overline{f}(t)$ è detta armonica fondamentale. La sinusoide $r_n\, \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$ si dice n-esima armonica.

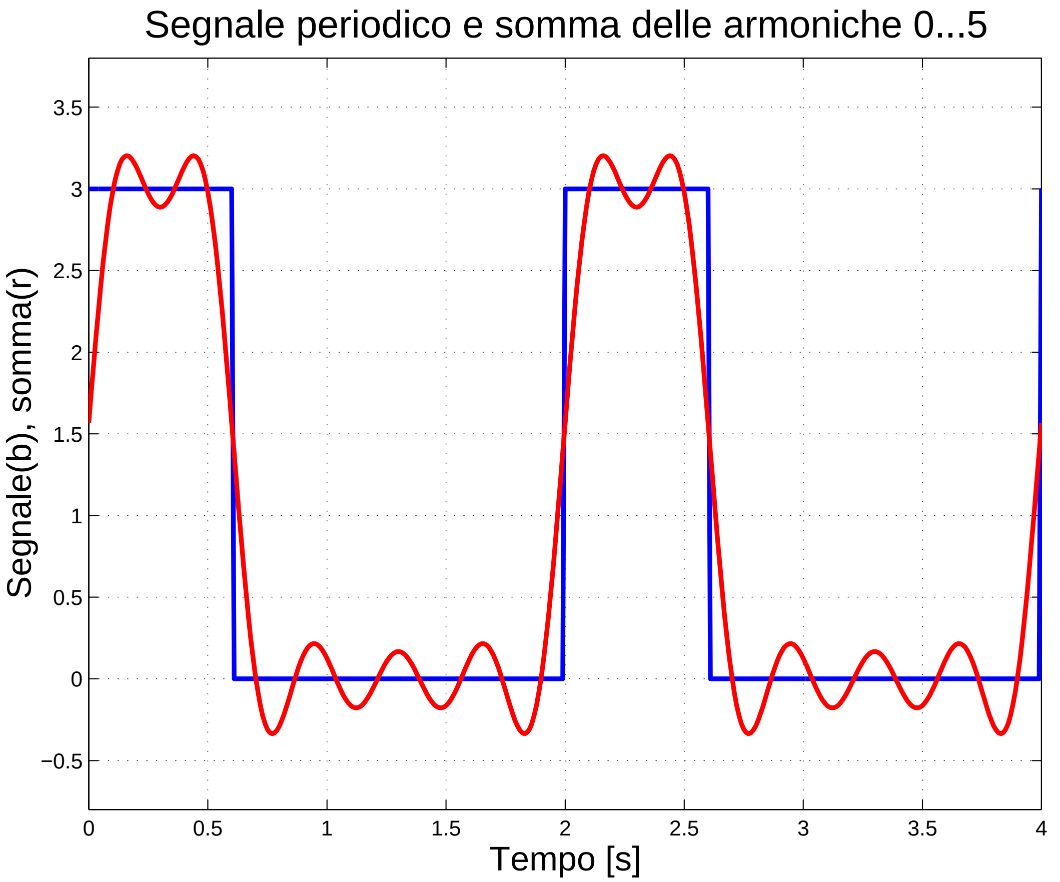
Consideriamo come esempio un impulso rettangolare periodico:

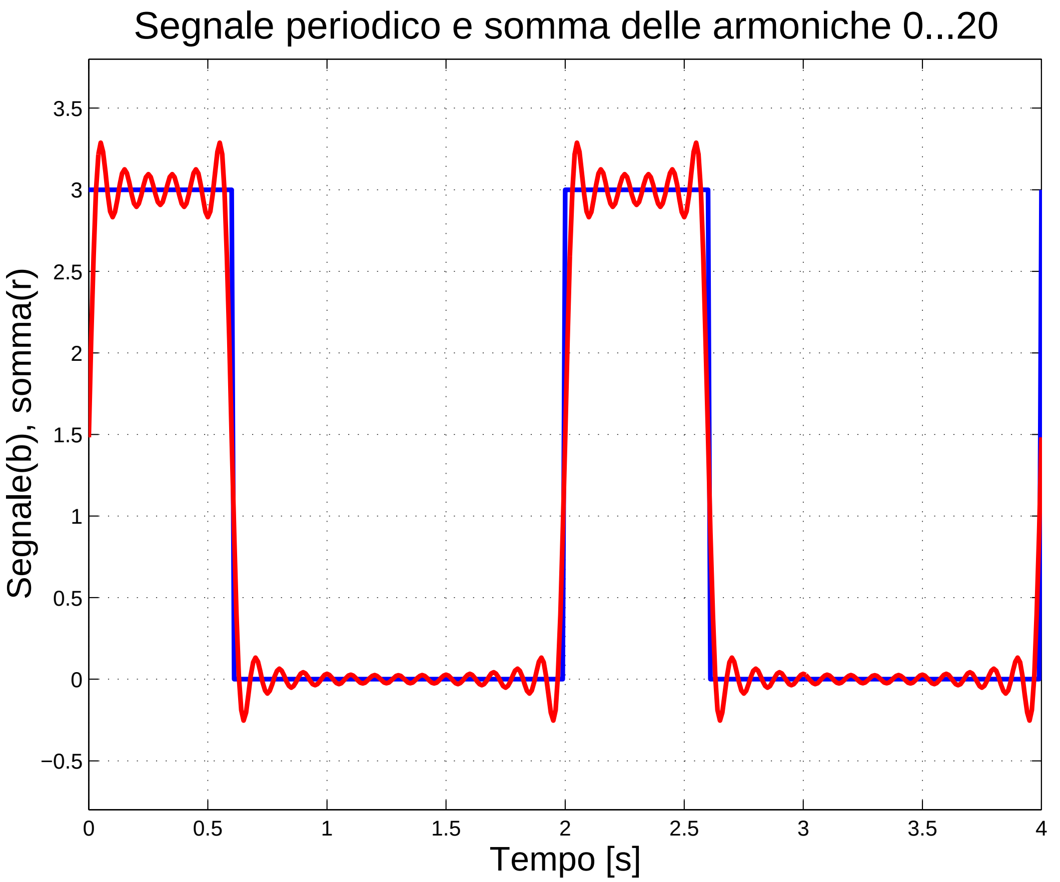




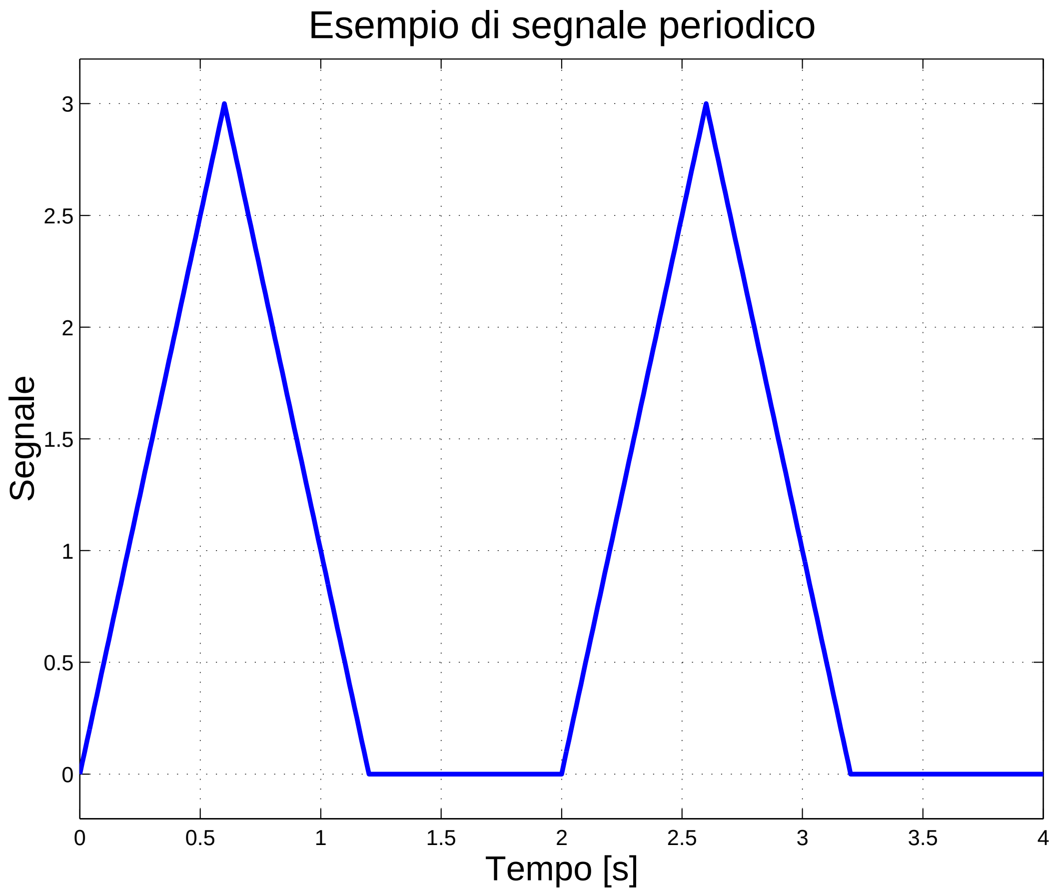

Segnale periodico e somma delle armoniche 0...2
Segnale(b), somma(r)
Tempo [s]
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

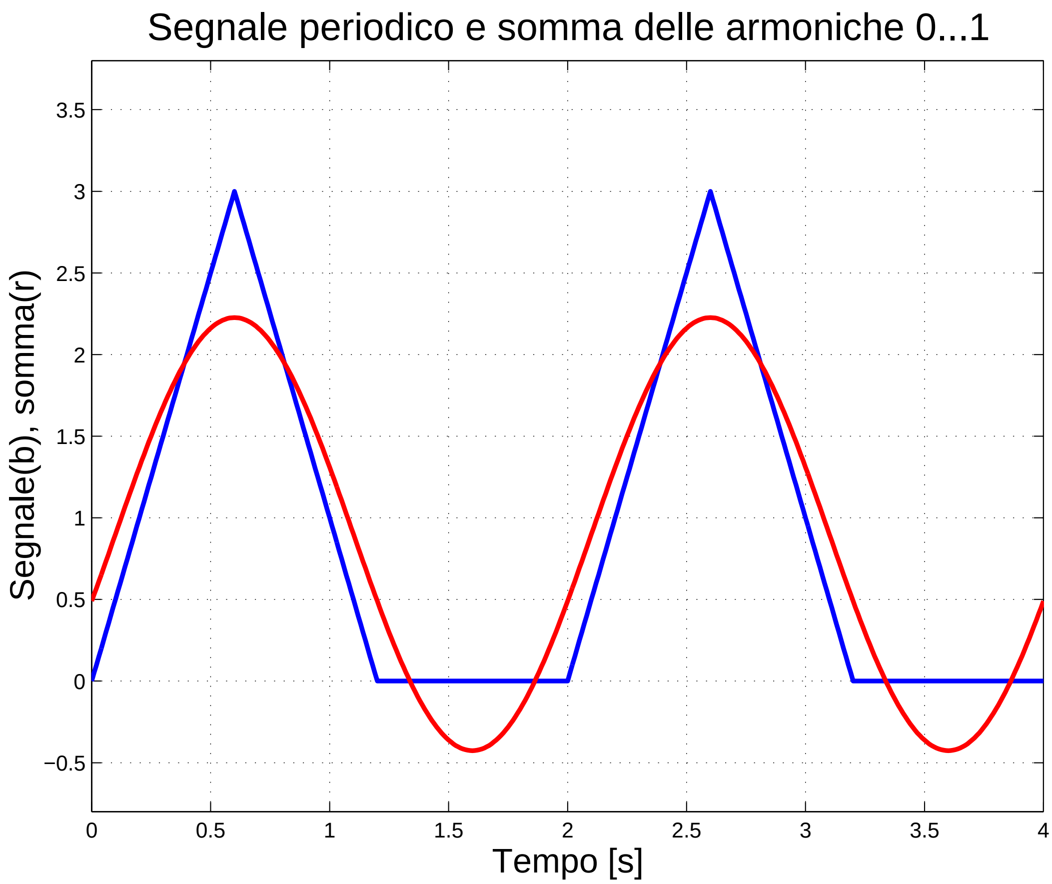

Segnale periodico e somma delle armoniche 0...3
Segnale(b), somma(r)
Tempo [s]
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

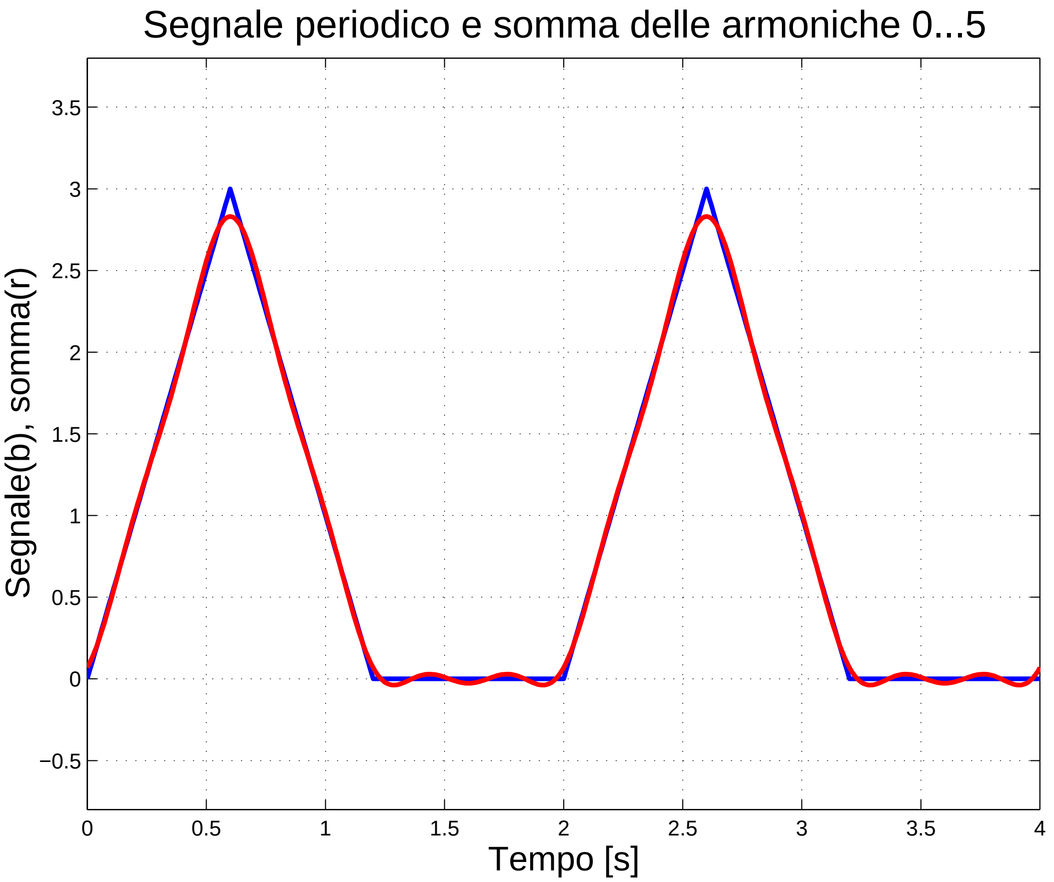

Segnale periodico e somma delle armoniche 0...5
Segnale(b), somma(r)
Tempo [s]
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

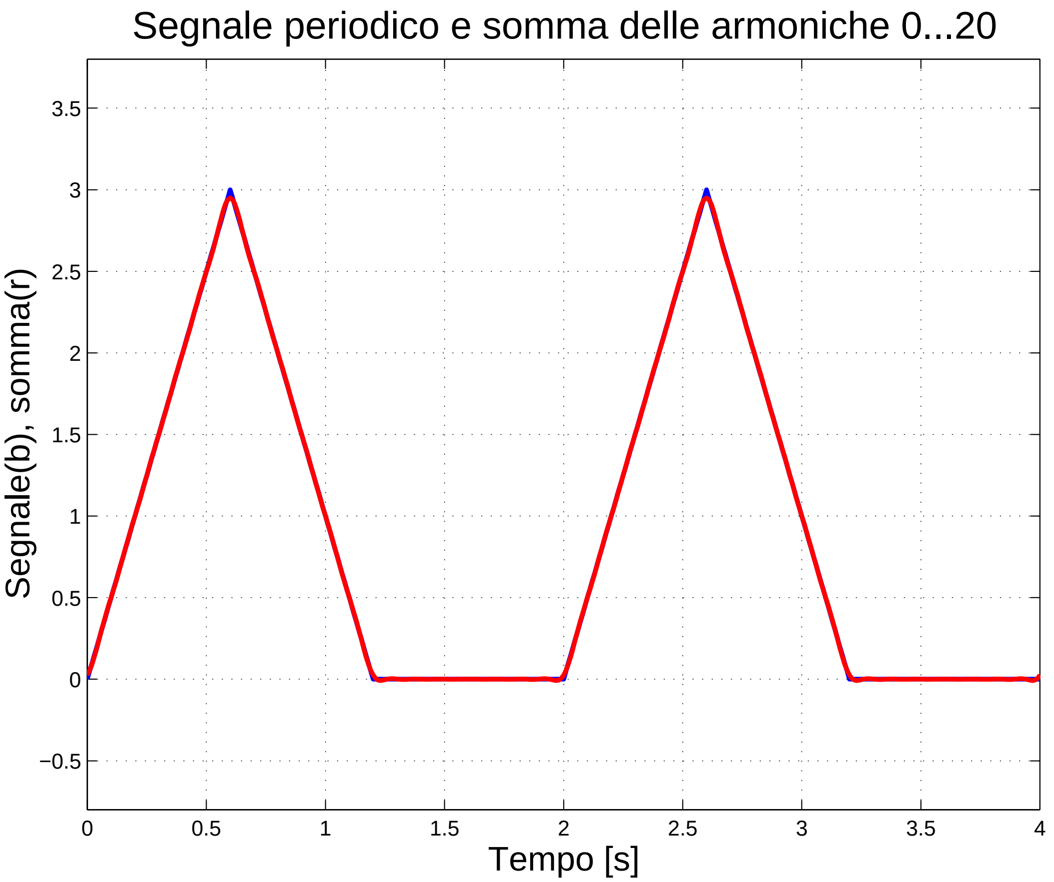

Segnale periodico e somma delle armoniche 0...20
Segnale(b), somma(r)
Tempo [s]
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

Consideriamo come esempio un impulso triangolare periodico:



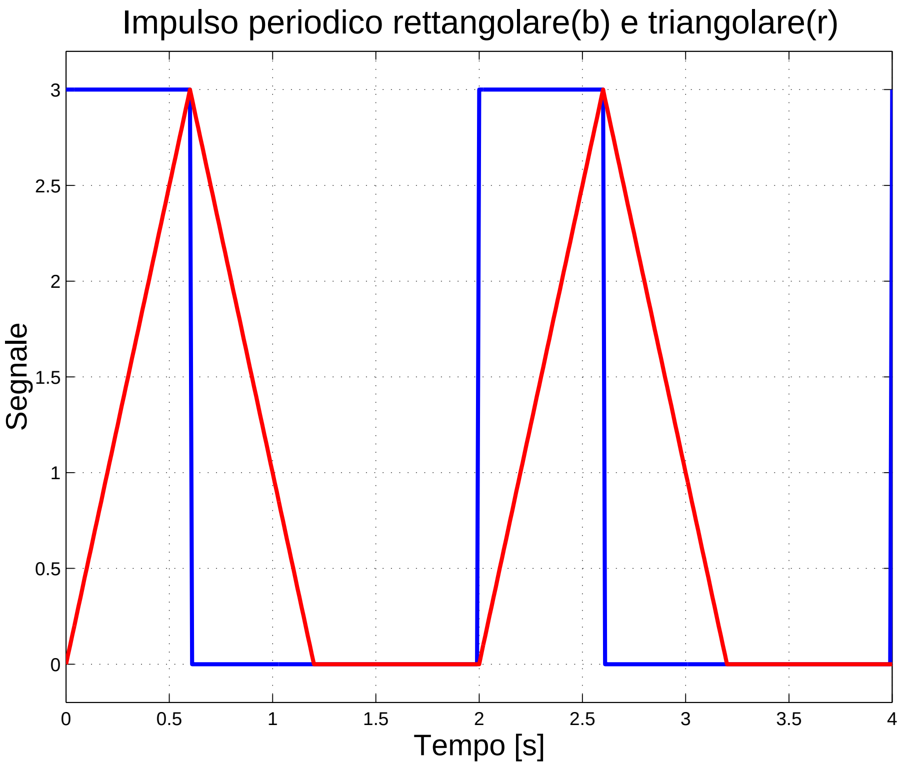


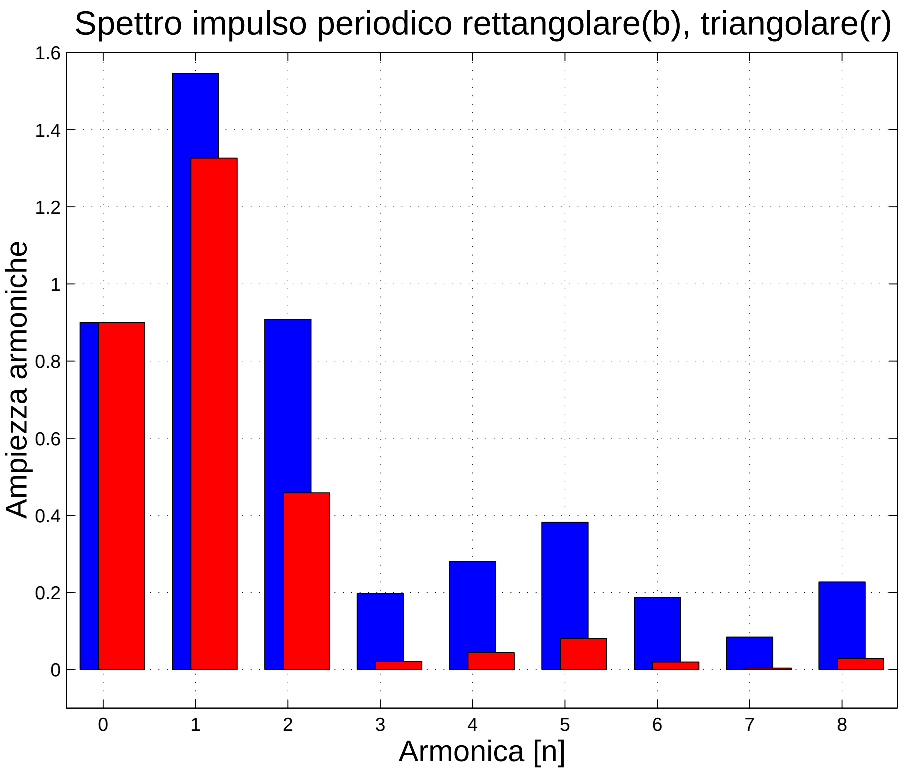

Segnale periodico e somma delle armoniche 0...5
Segnale(b), somma(r)
Tempo [s]
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4


Segnale periodico e somma delle armoniche 0...20
Segnale(b), somma(r)
Tempo [s]
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

- Tipicamente le prime armoniche di un segnale periodico presentano un'ampiezza r_n superiore rispetto alle armoniche con pulsazione più elevata.

- Le armoniche ad alta frequenza di segnali che variano rapidamente hanno tipicamente un'ampiezza maggiore rispetto alle corrispondenti armoniche di segnali che variano lentamente.





Trasformata di Fourier

- Anche le funzioni $f(t)$ non periodiche si possono scomporre nella "somma" di funzioni sinusoidali. In questo caso si parla di trasformata di Fourier:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega\, t} dt$$

$F(j\omega)$ è una funzione complessa della variabile reale ω.

- La funzione $F(\mathbf{j}\omega)$ si dice spettro di $f(t)$. Il modulo di $F(\mathbf{j}\omega)$ è detto spettro di ampiezza. L'argomento di $F(\mathbf{j}\omega)$ è detto spettro di fase.

- Detta $F(s)$ la trasformata di Laplace di $f(t)$, la trasformata di Fourier si ottiene direttamente come:

$$F(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$$

- La funzione $f(t)$ si ricava dallo spettro $F(\mathbf{j}\omega)$ tramite l'antitrasformata di Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega\, t} d\omega$$

L'antitrasformata di Fourier è l'analogo per le funzioni non periodiche della serie di Fourier:

$$\overline{f}(t) \;=\; \textstyle\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n\, e^{jn\omega_0 t}$$

- Per le funzioni $f(t)$ reali è sufficiente conoscere $F(\mathbf{j}\omega)$ per $\omega \geq 0$ in quanto vale la relazione:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} \left[F(j\omega)\, e^{j\omega\, t} + F^*(j\omega)\, e^{-j\omega\, t}\right] d\omega$$

- Lo spettro $F(j\omega)$ si rappresenta solitamente con due grafici:

  1) Il *diagramma delle ampiezze* rappresenta il modulo $|F(j\omega)|$ espresso solitamente in dB in funzione del $\log_{10}\omega$.

  $$|F(j\omega)|_{dB} = 20\, \mathsf{Log}_{10}|F(j\omega)|$$

  2) Il *diagramma delle fasi* rappresenta $\arg F(j\omega)$ (in radianti o in gradi) in funzione del $\log_{10}\omega$.

- Mentre per i segnali periodici si ha uno spettro discreto, per i segnali non periodici lo spettro è continuo.

- Valgono comunque considerazioni analoghe a quelle dei segnali periodici. Tipicamente segnali che variano rapidamente hanno spettri di ampiezza significativi anche alle alte frequenze.