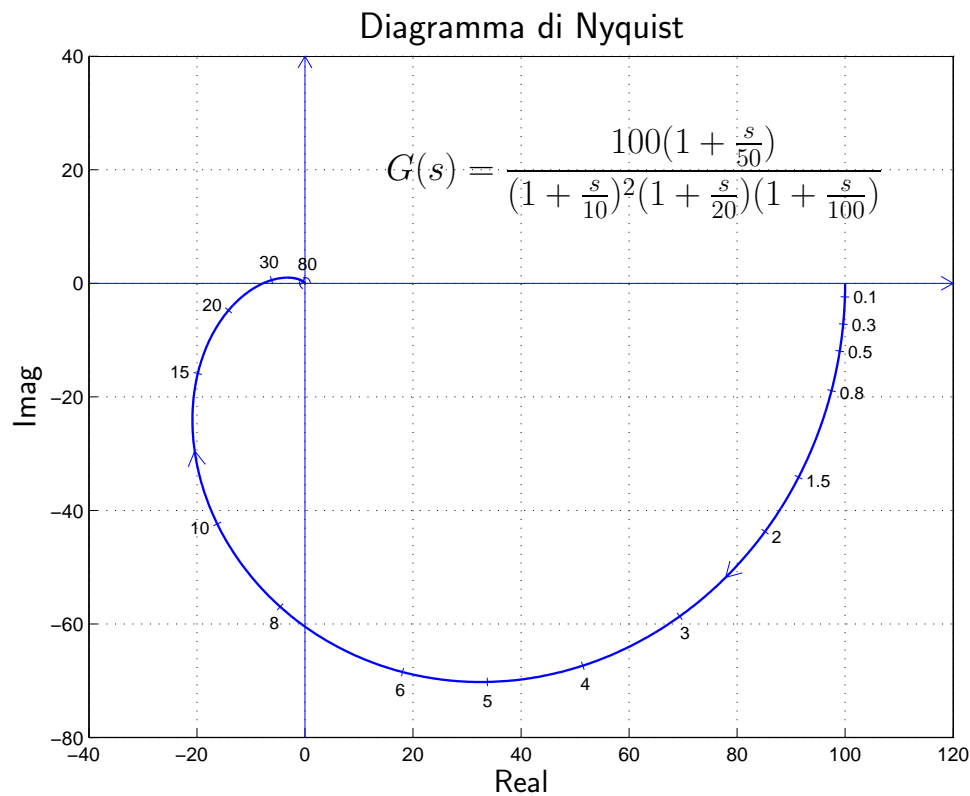
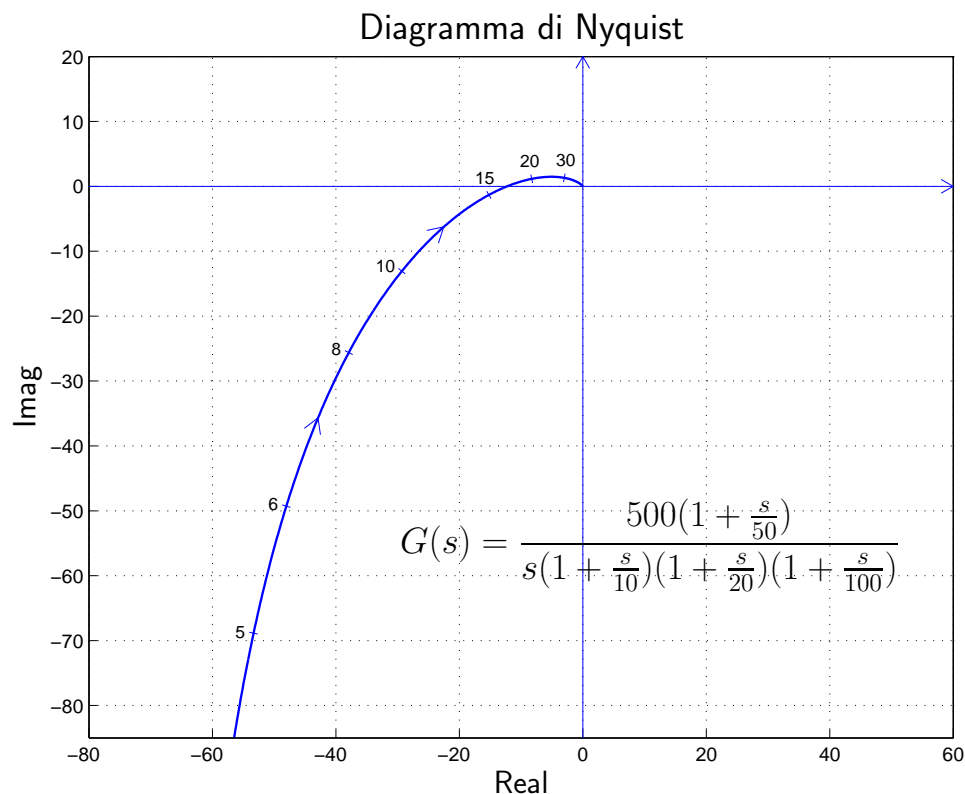


## Diagrammi di Nyquist o polari

- Esempio di diagramma polare senza poli nell'origine:



- Esempio di diagramma polare con un polo nell'origine:



- I diagrammi di Nyquist mostrano, sul piano complesso di Gauss, come varia il numero complesso  $G(j\omega)$  al variare della pulsazione  $\omega$ .

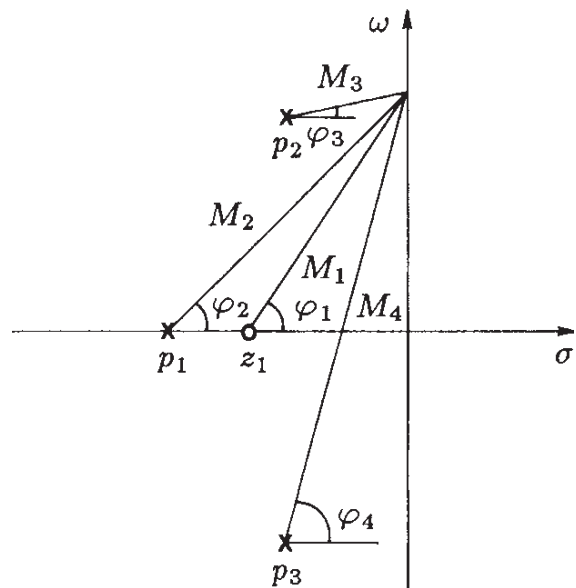
- I diagrammi di Nyquist sono graduati in funzione della pulsazione  $\omega$ .
- I diagrammi polari sono di grande importanza per lo studio della stabilità dei sistemi in retroazione (criterio di Nyquist).
- Nota la funzione di trasferimento  $G(s)$ , il diagramma polare si può tracciare per punti separando le parti reale e immaginaria di  $G(j\omega)$  e determinandone i valori corrispondenti a vari valori di  $\omega$ .
- Se una funzione di trasferimento  $G(s)$  è data in forma fattorizzata, la corrispondente funzione di risposta armonica è:

$$G(j\omega) = K_1 \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)}$$

- Interpretazione grafica della funzione di risposta armonica (un esempio):

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= K_1 \frac{(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)(j\omega - p_3)} \\ &= K_1 \frac{M_1}{M_2 M_3 M_4} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4)} \end{aligned}$$

I moduli  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  e le fasi  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  e  $\varphi_4$  sono facilmente determinabili anche per via grafica.



- In molti casi, per lo studio della stabilità di un sistema retroazionato è sufficiente la conoscenza dell'andamento *qualitativo* del suo diagramma di Nyquist.

### Funzione $G(s)$ : forme canoniche

Si faccia riferimento alle seguenti forme canoniche di una funzione  $G(s)$ :

- Forma polinomiale:

$$G(s) = K_1 \frac{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^h (s^{n-h} + a_{n-1} s^{n-h-1} + \dots + a_{h+1} s + a_h)}$$

- Forma fattorizzata a poli e zeri:

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{s^h (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_{n-h})}$$

- Forma fattorizzata a costanti di tempo:

$$G(s) = K \frac{(1 + \tau'_1 s)(1 + \tau'_2 s) \dots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \dots}{s^h (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega^2_{n1}}\right) \dots}$$

È facile dimostrare che valgono seguenti proprietà.

Guadagni statici:

$$b_0 = \prod_{i=1}^m (-z_i), \quad a_h = \prod_{i=1}^{n-h} (-p_i), \quad K = K_1 \frac{b_0}{a_h}$$

Costanti di tempo:

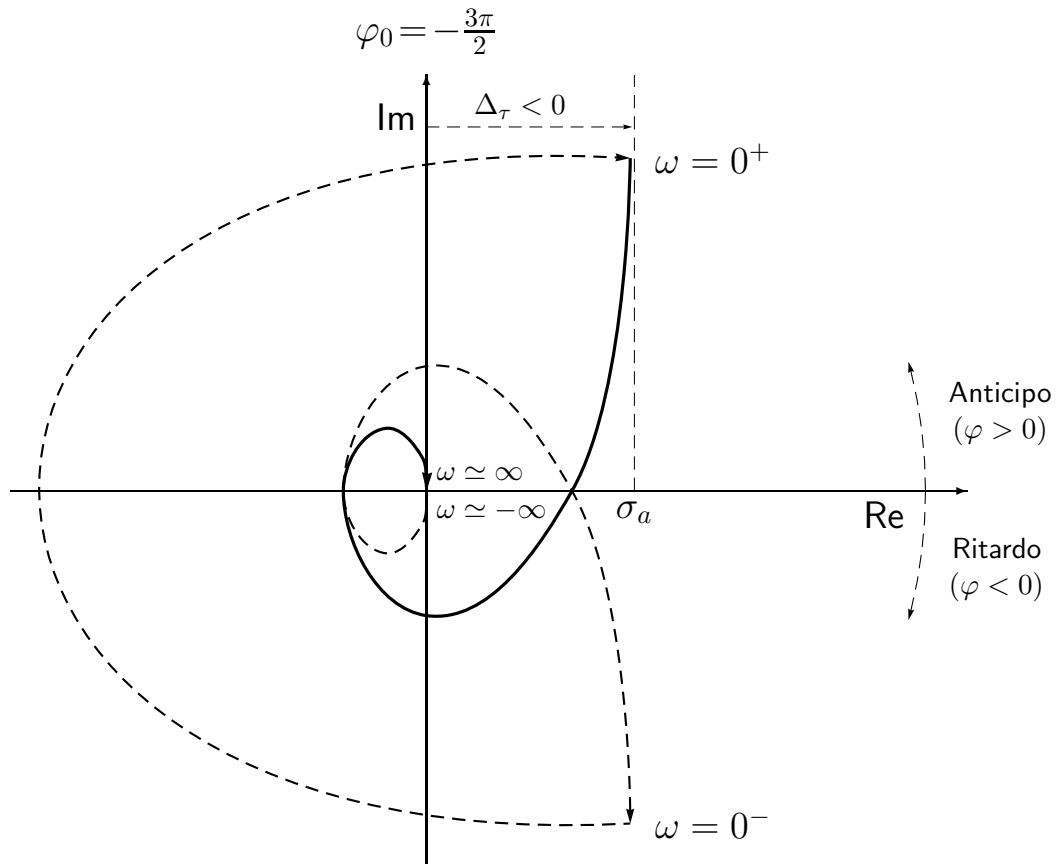
$$\begin{aligned} \frac{b_1}{b_0} &= - \sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i} = \sum_{i=1}^m \tau'_i = \tau'_1 + \tau'_2 + \dots + \frac{2\delta'_1}{\omega'_{n1}} + \frac{2\delta'_2}{\omega'^2_{n2}} + \dots \\ \frac{a_{h+1}}{a_h} &= - \sum_{i=1}^{n-h} \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^{n-h} \tau_i = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \frac{2\delta_1}{\omega_{n1}} + \frac{2\delta_2}{\omega_{n2}} + \dots \\ \Delta_\tau &= \sum_{i=1}^m \tau'_i - \sum_{i=1}^{n-h} \tau_i = \sum_{i=1}^{n-h} \frac{1}{p_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i} = \frac{b_1}{b_0} - \frac{a_{h+1}}{a_h} \end{aligned}$$

## Graficazione dei diagramma di Nyquist

Il procedimento che verrà ora descritto permette di ottenere una graficazione “rapida” e “qualitativamente corretta” del diagramma di Nyquist di una generica funzione  $G(s)$ . Nel seguito si farà riferimento al seguente esempio:

$$G(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)}.$$

Graficazione qualitativa del diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$ :



Il procedimento che si suggerisce di seguire è composto da sei passi:

1. Punto di partenza del diagramma di Nyquist. Si determina utilizzando la funzione approssimante  $G_0(s)$  per  $s \rightarrow 0$ :

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) \simeq G_0(s) = \frac{K}{s^h} = \frac{-10}{25s} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_0 = \infty \\ \varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

I simboli  $M_0$  e  $\varphi_0$  vengono utilizzati per indicare il modulo e la fase della funzione  $G(s)$  per  $s = j\omega \rightarrow 0$ . La funzione approssimante  $G_0(s)$  è

sempre il prodotto di una costante  $K$  (la costante moltiplicativa della  $G(s)$  nella forma “a costanti di tempo”) e di un numero  $h$  di integratori pari al numero di poli della  $G(s)$  nell'origine (“tipo”). Il modulo  $M_0$  è funzione di  $h$ :

$$M_0 = \begin{cases} G(0) = G_0(0) & \text{se } h = 0 \\ \infty & \text{se } h \geq 1 \end{cases}$$

2. Partenza in anticipo o in ritardo. Per  $\omega = 0^+$  il diagramma di Nyquist parte in anticipo o in ritardo rispetto alla fase iniziale  $\varphi_0$  in funzione del segno del seguente parametro:

$$\Delta_\tau = \sum_{i=1}^m \tau'_i - \sum_{j=1}^{n-h} \tau_j$$

dove con  $\tau'_i$  e  $\tau_j$  si sono indicate le costanti di tempo, rispettivamente, degli zeri e dei poli della funzione  $G(s)$ . Vale la seguente relazione:

$$\Delta_\tau = \begin{cases} \frac{b_1}{b_0} - \frac{a_{h+1}}{a_h} & \text{se } G(s) \text{ è in} \\ & \text{“forma polinomiale”} \\ \left( \begin{array}{l} +\tau'_1 + \tau'_2 + \dots + \frac{2\delta'_1}{\omega'_{n1}} + \dots \\ -\tau_1 - \tau_2 - \dots - \frac{2\delta_1}{\omega_{n1}} - \dots \end{array} \right) & \text{se } G(s) \text{ è in} \\ & \text{“forma a costanti di tempo”} \end{cases}$$

Se  $\Delta_\tau > 0$  si parte in anticipo rispetto a  $\varphi_0$ . Se  $\Delta_\tau < 0$  si parte in ritardo rispetto a  $\varphi_0$ . Nel caso in esame si ha:

$$\Delta_\tau = -1 - \left(1 + \frac{8}{25}\right) = -\frac{58}{25} < 0.$$

Si noti che la costante di tempo  $\tau = 2\delta/\omega_n = 8/25$  che caratterizza la coppia di poli complessi coniugati ( $s^2 + 8s + 25$ ) si ottiene trascurando il termine quadratico in  $s$ . La costante  $\Delta_\tau$  è negativa per cui il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale  $\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi$ . Il diagramma quindi parte all'infinito alla destra del semiasse immaginario.

3. Presenza di un eventuale asintoto. Il diagramma di Nyquist ha un asintoto solo se  $h = 0$ . L'asintoto, se esiste, è sempre verticale. L'ascissa  $\sigma_a$  dell'asintoto verticale si calcola nel seguente modo:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau$$

dove  $K$  è la costante moltiplicativa della funzione  $G(s)$  posta nella forma *fattorizzata a costanti di tempo*. Nel caso in esame si ha:

$$\sigma_a = \frac{-10}{25} \left( -1 - 1 - \frac{8}{25} \right) = \frac{116}{125} = 0.928.$$

Si noti che la posizione  $\sigma_a > 0$  dell'asintoto rispetto all'asse immaginario è concorde con il risultato trovato al punto precedente secondo il quale il diagramma di Nyquist parte in "ritardo" rispetto alla fase iniziale  $\varphi_0$ .

4. Punto di arrivo del diagramma di Nyquist. Si determina utilizzando la funzione approssimante  $G_\infty(s)$  per  $s \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \simeq G_\infty(s) = \frac{K_1}{s^r} = \frac{10}{s^3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_\infty = 0 \\ \varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

I simboli  $M_\infty$  e  $\varphi_\infty$  vengono utilizzati per indicare il modulo e la fase della funzione  $G(s)$  per  $s = j\omega \rightarrow \infty$ . La funzione approssimante  $G_\infty(s)$  è sempre il prodotto di una costante  $K_1$  (la costante moltiplicativa della  $G(s)$  nella forma "poli-zeri") e di un certo numero  $r$  di integratori pari al grado relativo della funzione:  $r = n - m$ . Se  $r = 0$  il punto di arrivo della  $G(j\omega)$  si trova sull'asse reale. Se  $r > 0$  il punto di arrivo è nell'origine.

Per  $\omega \rightarrow \infty$ , il diagramma di Nyquist arriva in anticipo o in ritardo rispetto alla fase finale  $\varphi_\infty$  in funzione del segno del seguente parametro:

$$\Delta_p = \sum_{i=1}^m z_i - \sum_{j=1}^n p_j$$

dove con  $z_i$  e  $p_j$  si sono indicati, rispettivamente, gli zeri e i poli della funzione  $G(s)$ . Nel caso in esame si ha:

$$\Delta_p = 1 - (-1 - 8) = 10 > 0.$$

In questo caso la costante  $\Delta_p$  è positiva per cui il diagramma polare arriva in anticipo rispetto alla fase finale  $\varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi$ , cioè il diagramma arriva a zero rimanendo alla sinistra del semiasse immaginario.

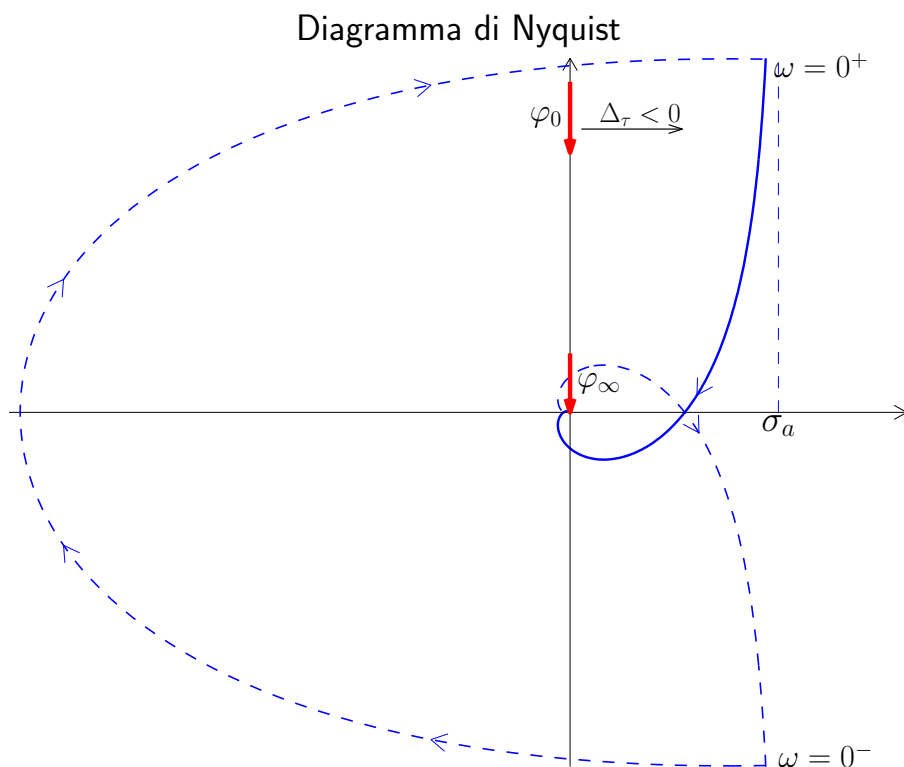
Tipicamente il calcolo di  $\Delta_p$  viene fatto solamente quando  $\varphi_\infty = 0$  oppure quando  $\varphi_\infty = \pi$  per scoprire se esistono o meno eventuali intersezioni con l'asse reale.

5. Graficazione “al finito” del diagramma di Nyquist. Il punto di partenza  $G(j0^+)$  del diagramma di Nyquist deve essere collegato al punto di arrivo  $G(j\infty)$  tracciando una curva sul piano complesso che tenga conto, per  $\omega \in ]0, \infty[$ , del seguente contributo di fase  $\Delta\varphi$  dato dai poli e dagli zeri (stabili e instabili) della funzione  $G(s)$ :

$$\Delta\varphi = (Z_s + P_i - Z_i - P_s) \frac{\pi}{2}$$

Con  $Z_s$ ,  $P_i$ ,  $Z_i$  e  $P_s$  si è indicato, rispettivamente, il numero di zeri stabili, di poli instabili, di zeri instabili e di poli stabili della funzione  $G(s)$ . *In questo calcolo non vanno quindi considerati eventuali poli o zeri nell'origine della funzione  $G(s)$ .* Nel tracciare il diagramma di Nyquist si dovrà quindi collegare il punto iniziale  $G(j0^+)$  al punto finale  $G(j\infty)$  ruotando rispetto all'origine del piano complesso di una quantità angolare pari a  $\Delta\varphi$ . Nel caso in esame si ha  $\Delta\varphi = -2\pi$ .

6. Diagramma di Nyquist “completo”. Il diagramma di Nyquist per  $\omega < 0$  si ottiene ribaltando rispetto all'asse reale il precedente diagramma ottenuto per  $\omega > 0$ . Per  $h \geq 1$  il diagramma di Nyquist “completo” si ottiene chiudendo il diagramma all'infinito: si parte da  $G(j0^-)$ , si arriva a  $G(j0^+)$  e si tracciano all'infinito tante semi-circonferenze percorse in senso orario quanti sono i poli della funzione  $G(s)$  nell'origine.



Graficazione dei diagrammi di Nyquist: esempi.

Esempio. Tracciare il diagramma di Nyquist della seguente funzione:

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+0.2)(s^2+15s+100)}$$

1. Punto di partenza. Funzione approssimante  $G_0(s)$ :

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) \simeq G_0(s) = \frac{3}{2s} = \frac{K}{s} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_0 = \infty \\ \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La fase iniziale del diagramma è  $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ . Guadagno iniziale:  $K = \frac{3}{2}$ .

2. Partenza in anticipo o in ritardo. Si calcola il seguente parametro:

$$\Delta_\tau = \sum_{i=1}^m \tau'_i - \sum_{j=1}^{n-h} \tau_j = \frac{1}{3} - \frac{1}{0.2} - \frac{15}{100} = -4.82 < 0$$

Il diagramma parte “in ritardo” rispetto alla fase iniziale  $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ .

3. Eventuale asintoto. Il diagramma ha un asintoto verticale. L'ascissa  $\sigma_a$  dell'asintoto verticale è:

$$\sigma_a = K \Delta_\tau = \frac{3}{2}(-4.82) = -7.23$$

4. Punto di arrivo. Funzione approssimante  $G_\infty(s)$ :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \simeq G_\infty(s) = \frac{10}{s^3} = \frac{K_1}{s^3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_\infty = 0 \\ \varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

Il diagramma tende a zero con fase  $\varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi$ . Essendo  $\Delta_p = -3 + 0.2 + 15 = 12.2 > 0$  il diagramma di Nyquist arriva in “anticipo” rispetto alla fase finale, cioè rimane a sinistra dell'asse immaginario.

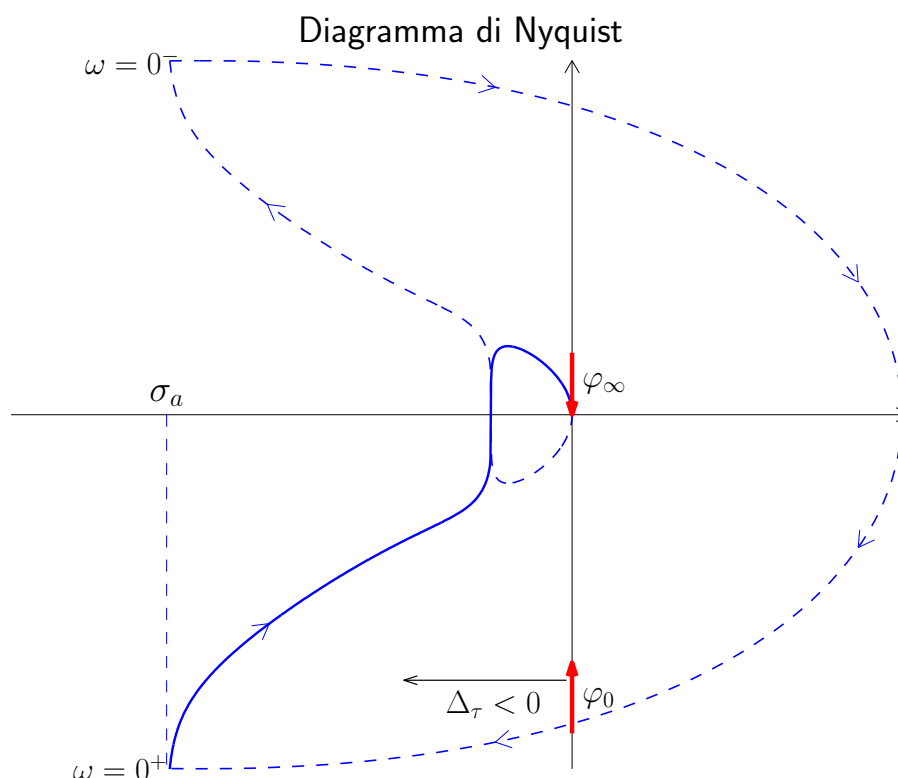
5. Graficazione “al finito”. Variazione di fase al finito:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\pi$$

Nel passare da  $G(j0^+)$  a  $G(j\infty)$  si deve ruotare di  $\pi$  in senso orario.



6. Diagramma polare “completo”. Essendo  $h = 1$  il diagramma di Nyquist va chiuso all'infinito con una semi-circonferenza percorsa in senso orario.



**Esempio.** Tracciare il diagramma di Nyquist della seguente funzione:

$$G(s) = \frac{10(1 + 2s)(s - 5)}{s^2(s^2 + 3s + 100)}$$

1. Punto di partenza. Funzione approssimante  $G_0(s)$ :

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) \simeq G_0(s) = -\frac{1}{2s^2} = \frac{K}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_0 = \infty \\ \varphi_0 = -2\pi \end{cases}$$

La fase iniziale del diagramma è  $\varphi_0 = -2\pi$ .

2. Partenza in anticipo o in ritardo. Si calcola il seguente parametro:

$$\Delta_\tau = 2 - \frac{1}{5} - \frac{3}{100} = 1.77 > 0$$

Il diagramma parte “in anticipo” rispetto alla fase iniziale  $\varphi_0 = -2\pi$ .

3. Eventuale asintoto. Il sistema è di tipo 2 per cui non esiste nessun asintoto.

4. Punto di arrivo. Funzione approssimante  $G_\infty(s)$ :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \simeq G_\infty(s) = \frac{20}{s^2} = \frac{K_1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_\infty = 0 \\ \varphi_\infty = -\pi \end{cases}$$

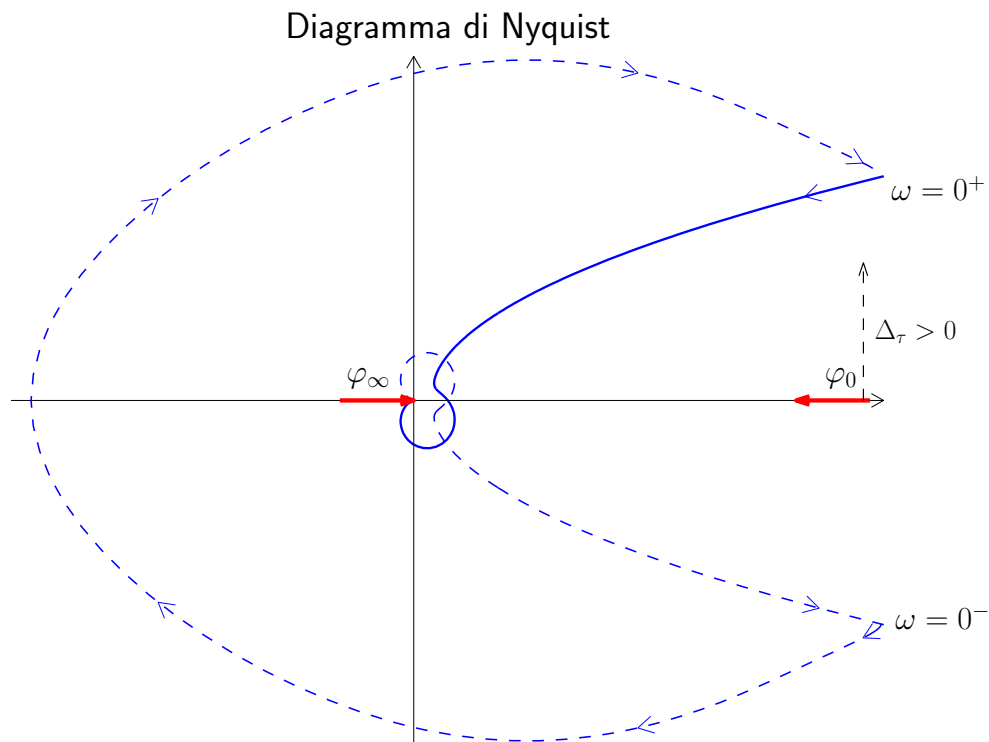
Il diagramma tende a zero con fase  $\varphi_\infty = -\pi$ . Essendo  $\Delta_p = -0.5 + 5 - 3 = 1.5 > 0$  il diagramma di Nyquist arriva in “anticipo” rispetto alla fase finale, cioè rimane al di sotto dell'asse reale.

5. Graficazione “al finito”. Variazione di fase al finito:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi = -\pi$$

Nel passare da  $G(j0^+)$  a  $G(j\infty)$  si deve ruotare di  $\pi$  in senso orario.

6. Diagramma polare “completo”. Essendo  $h = 2$  il diagramma di Nyquist va chiuso all'infinito con una circonferenza completa percorsa in senso orario.



**Esempio.** Tracciare il diagramma di Nyquist della seguente funzione:

$$G(s) = \frac{(1 + 5s)}{s(s + 5)(s^2 + s + 1)}$$

1. Punto di partenza. Funzione approssimante  $G_0(s)$ :

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) \simeq G_0(s) = \frac{1}{5s} = \frac{K}{s} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_0 = \infty \\ \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La fase iniziale del diagramma è  $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ . Guadagno iniziale:  $K = 0.2$ .

2. Partenza in anticipo o in ritardo. Si calcola il seguente parametro:

$$\Delta_\tau = 5 - \frac{1}{5} - 1 = 3.8 > 0$$

Il diagramma parte “in anticipo” rispetto alla fase iniziale.

3. Eventuale asintoto. L'ascissa  $\sigma_a$  dell'asintoto verticale ( $h = 1$ ) è:

$$\sigma_a = K \Delta_\tau = 0.2 \cdot 3.8 = 0.76$$

4. Punto di arrivo. Funzione approssimante  $G_\infty(s)$ :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \simeq G_\infty(s) = \frac{5}{s^3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_\infty = 0 \\ \varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

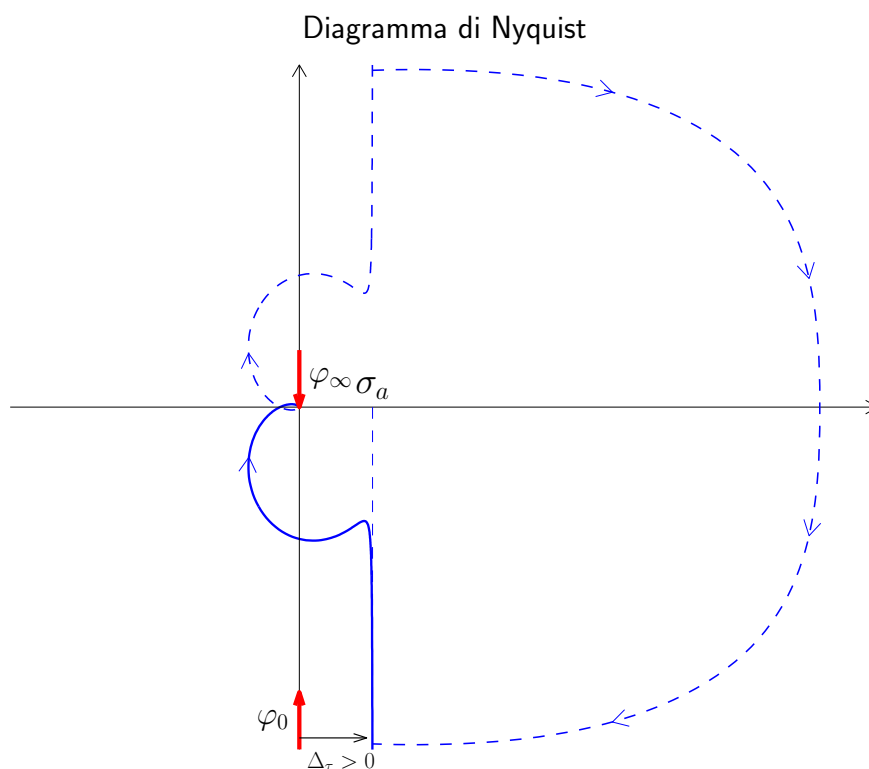
Il diagramma tende a zero con fase  $\varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi$ . Essendo  $\Delta_p = -0.2 + 5 + 1 = 5.8 > 0$  il diagramma di Nyquist arriva in “anticipo” rispetto alla fase finale, cioè rimane a sinistra dell'asse immaginario.

5. Graficazione “al finito”. Variazione di fase al finito:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi = -\pi$$

Nel passare da  $G(j0^+)$  a  $G(j\infty)$  si deve ruotare di  $\pi$  in senso orario.

6. Diagramma polare “completo”. Essendo  $h = 1$  il diagramma di Nyquist va chiuso all'infinito con una semi-circonferenza completa percorsa in senso orario.



**Esempio.** Tracciare il diagramma di Nyquist della seguente funzione:

$$G(s) = \frac{(s-1)(s-3000)}{s(s^2+12s+144)}$$

1. Punto di partenza. Funzione approssimante  $G_0(s)$ :

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) \simeq G_0(s) = \frac{250}{7s} = \frac{K}{s} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_0 = \infty \\ \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La fase iniziale del diagramma è  $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ . Guadagno iniziale:  $K = 20.83$ .

2. Partenza in anticipo o in ritardo. Si calcola il seguente parametro:

$$\Delta_\tau = -1 - \frac{1}{3000} - \frac{12}{144} = -1.084 < 0$$

Il diagramma parte “in ritardo” rispetto alla fase iniziale.

3. Eventuale asintoto. L'ascissa  $\sigma_a$  dell'asintoto verticale ( $h = 1$ ) è:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = 20.83(-1.084) = -22.58$$

4. Punto di arrivo. Funzione approssimante  $G_\infty(s)$ :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \simeq G_\infty(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_\infty = 0 \\ \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Il diagramma tende a zero con fase  $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ . Essendo  $\Delta_p = 1 + 3000 - 12 = 2989 > 0$  il diagramma di Nyquist arriva in “anticipo” rispetto alla fase finale, cioè rimane a destra dell’asse immaginario.

5. Graficazione “al finito”. Variazione di fase al finito:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi = -\pi$$

Nel passare da  $G(j0^+)$  a  $G(j\infty)$  si deve ruotare di  $\pi$  in senso orario.

6. Diagramma polare “completo”. Essendo  $h = 1$  il diagramma di Nyquist va chiuso all’infinito con una semi-circonferenza completa percorsa in senso orario.

